



KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

Daiva Petkevičiūtė

**MECHANINIŲ VIRPESIŲ SISTEMA
APRAŠANČIŲ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ
SPRENDINIO REIŠKIMAS BAIGTINE
EKSPONENČIŲ SUMA**

Magistro darbas

Vadovai
LMA akad. prof. K. Ragulskis
prof. Z. Navickas

KAUNAS, 2007



KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

TVIRTINU
Katedros vedėjas
prof. J.Rimas
2007 06 06

MECHANINIŲ VIRPESIŲ SISTEMA
APRAŠANČIŲ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ
SPRENDINIO REIŠKIMAS BAIGTINE
EKSPONENČIŲ SUMA

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

Vadovai
akad. prof. K. Ragulskis
prof. Z. Navickas
2007 06 04

Recenzentas
doc. dr. K. Plukas
2007 06 04

Atliko
FMMM-5 gr. stud.
D. Petkevičiūtė
2007 05 25

KAUNAS, 2007

KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

Pirmininkas: Leonas Saulis, profesorius (VGTU)

Sekretorius: Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)

Nariai: Algimantas Jonas Aksomaitis, profesorius (KTU)
Vytautas Janilionis, docentas (KTU)
Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU)
Rimantas Rudzkis, habil.dr., banko „NORD/LB“ vyriausiasis analitikas.
Zenonas Navickas, profesorius (KTU)
Arūnas Barauskas, UAB „Elsis“ generalinio direktoriaus pavaduotojas

SANTRAUKA

Šiame darbe tiriama naujo metodo, skirto funkcijų aproksimavimui baigtine eksponenčių suma galimybė, taikant šį metodą konkrečios diferencialinių lygčių sistemos, aprašančios mechaninius virpesius, sprendiniams.

Viena iš galimų darbe pristatomos mechaninių virpesių sistemos taikymo sričių – jūros bangų arba vėjo sukeltus virpesius panaudoti kaip atsinaujinantį energijos šaltinį. Tokių mechanizmų veikimo principai prieš pradėdant kurti realų veikiantį modelį analizuojami taikant matematinį modeliavimą.

Sudėtingos lygčių sistemos sprendiniai, priklausomai nuo sprendimo metodo, gaunami laipsninių eilučių pavidale arba kaip taškų aibė, bet nei viena iš šių formų nėra patogi sprendinio kokybiniam tyrimui. Tačiau turint sprendinio išraišką eksponentinių funkcijų su kompleksiniais koeficientais suma, žinomi ir šie sprendinių sudarančių harmonikų dažniai – svarbi konkretaus virpesių sistemos režimo charakteristika.

Atliekant skaitinius eksperimentus nustatyta, jog nusistovėjusį sistemos sprendinį galima įvertinti baigtine eksponenčių suma. Aproksimavimo paklaidos priklauso nuo žingsnio, aproksimuojamos funkcijos ir skaičiavimo paklaidos.

Petkevičiūtė D. Expressing the solution of differential equations that describe the system of mechanical oscillations as a finite sum of exponential functions: Master's work in applied mathematics / supervisors prof. K. Ragulskis, prof. Z. Navickas; Department of Applied mathematics, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2007. – 55 p.

SUMMARY

The aim of this work was to explore the possibilities of a new method, which gives an ability to approximate functions by a finite sum of exponential functions. This method was applied to the solutions of the concrete differential equations that describe the system of mechanical oscillations. One of the possible application areas of the system of oscillations presented in the paper is to use oscillations caused by the wind or water waves as a source of renewable energy. The action principles of such mechanisms are investigated using mathematical simulation before the real working model.

The solutions of the sophisticated system of differential equations are obtained either in the form of power series or a set of points, depending of the solving method chosen. However, none of these forms is convenient for exploring properties of the solution. Therefore, we have a problem to approximate the solutions with linear formations of exponential functions. It is possible then to express the solutions as the linear formations of harmonics.

It is demonstrated that a steady solution of the system can be expressed as a finite sum of exponential functions. Approximation errors vary depending on the distance between the points used, the function, which is being approximated, and the computation errors.

Lentelių sąrašas

2.1 lentelė Operatorinio ir Rungės-Kutos metodų palyginimas.....	32
--	----

Paveikslų sąrašas

1.1 pav. a) Artinių šeima, b) Galutinis sprendinio artinys.....	16
1.2 pav. Diferencialinių lygčių sprendimo operatoriniu metodu algoritmo schema.....	17
1.3 pav. Funkcijos reiškimo eksponenčių suma algoritmo schema	24
1.4 pav. a) Funkcijos $f_1(x)$ ir $f_2(x)$, b) paklaidų funkcija $f_1(x) - f_2(x)$	26
1.5 pav. Virpesių sistemos modelis	26
2.1 pav. Operatoriniu ($n = 4$) ir Rungės-Kutos metodais gautų sprendinių palyginimas: a) sprendinių grafikai, b) skirtumo tarp sprendinių grafikas	31
2.2 pav. Operatoriniu ($n = 6$) ir Rungės-Kutos metodais gautų sprendinių palyginimas: a) sprendinių grafikai, b) skirtumo tarp sprendinių grafikas	31
2.3 pav. Operatoriniu ($n = 10$) ir Rungės-Kutos metodais gautų sprendinių palyginimas: a) sprendinių grafikai, b) skirtumo tarp sprendinių grafikas	31
2.4 pav. Nustovėjusio režimo pavyzdys: a), b) kūno virpesiai pagal ašis Ox ir Oy ; c) rotoriaus svyravimai fazinėje plokštumoje φ/φ'	32
2.5 pav. Chaotinio režimo pavyzdys: a), b) kūno virpesiai pagal ašis Ox ir Oy ; c) rotoriaus svyravimai fazinėje plokštumoje φ/φ'	33
2.6 pav. Dar vieno režimo pavyzdys: a), b) kūno virpesiai pagal ašis Ox ir Oy ; c) rotoriaus svyravimai fazinėje plokštumoje φ/φ'	33
2.7 pav. Sistemos savybių priklausomybė nuo parametrų f_{x_0} ir f_{y_0}	34
2.8 pav. Sistemos savybių priklausomybė nuo parametrų f_{x_0} ir ϖ	35
2.9 pav. Sprendinio aproksimavimo eksponenčių suma paklaida, $zng = 0.43$	36
2.10 pav. Sprendinio aproksimavimo eksponenčių suma paklaida, $zng = 0.43$, prad. taškas $t = 100.3$	36
2.11 pav. Sprendinio aproksimavimas eksponenčių suma, $zng = 0.43$, pradinis taškas $t = 100.3$	37
2.12 pav. Sprendinio aproksimavimas eksponenčių suma, $zng = 0.01$, pradinis taškas $t = 100.3$	37
2.13 pav. Sprendinio $\dot{\varphi}(t)$ grafikas	37
2.14 pav. Sprendinio $\dot{\varphi}(t)$ aproksimacijų palyginimas	38
2.15 pav. Sprendinio $\dot{\varphi}(t)$ aproksimavimas eksponenčių suma, esant skirtingiems žingsniams	39
2.16 pav. Sprendinio $\dot{\varphi}(t)$ grafikas	39

TURINYS

Įvadas.....	8
1. Bendroji dalis	9
1.1 Rungės-Kutos metodai.....	9
1.2 Operatorių taikymas diferencialinių lygčių sprendimui	10
1.2.1 Operatorinis diferencialinių lygčių sprendimo metodas	10
1.2.2 Diferencialinių lygčių operatorinių sprendinių sudarymo pavyzdžiai.....	11
1.2.8 Apibendrinimai diferencialinių lygčių sistemoms.....	15
1.2.9 Skaičiavimo algoritmas	15
1.3 Funkcijos reiškimas eksponentinių funkcijų suma.....	18
1.3.1 Teorinės išraiškos ir skaičiavimo algoritmas	22
1.3.2. Skaičiavimo pavyzdys.....	25
1.4 Mechaninių virpesių sistema.....	26
2. Tiriamoji dalis	30
2.1 Sistemos sprendimas operatoriniu ir Rungės-Kutos metodais.....	30
2.2 Sistemos savybių priklausomybė nuo parametrų	32
2.3 Sprendinio reiškimas baigtine eksponenčių suma.....	35
Išvados	42
Literatūra.....	43
1 Priedas. Programų tekstai	44
2 Priedas. Straipsnis konferencijos „Matematika ir matematikos dėstymas – 2006“ leidiniui	48
3 Priedas. Straipsnis konferencijos „Matematika ir matematinis modeliavimas – 2007“ leidiniui	52

IVADAS

Sprendžiant įvairias diferencialines lygtis jų sprendinių išraiškos gali būti gaunamos laipsninių eilučių pavidale, kuris nėra patogus tirti sprendinių savybes. Todėl iškyla uždavinys tuos sprendinius išreikšti eksponentinių funkcijų tiesiniais dariniais - tuomet gauti sprendiniai laipsninių eilučių su tiksliais koeficientų išraiškoms pavidale gali būti efektyviai išreikšti harmonikų tiesiniais dariniais.

Egzistuoja specialus algoritmas, leidžiantis funkciją $f(x)$, aprašytą Teiloro eilute arba jos reikšmėmis tam tikruose taškuose išreikšti baigtine eksponenčių suma [6]:

$$f(x) = \sum_{r=1}^m \mu_r e^{\lambda_r x} .$$

Šio darbo tikslas – baigtine eksponenčių suma aproksimuoti mechaninę virpesių sistemą aprašančių diferencialinių lygčių sprendinius, gautus skirtingais metodais. Skaičiavimams buvo naudota *Maple* matematinė programinė įranga [5].

Pirmajame skyriuje - bendrojoje dalyje pateikiami skaičiavimams naudotų Rungės-Kutos ir operatorinio metodų aprašymai bei funkcijų reiškimo eksponenčių suma algoritmas. Taip pat aprašomas akademiko prof. K. Ragulskio pasiūlytas mechaninių virpesių sistemos modelis. Daugiau teorijos apie operatorinį metodą ir funkcijų reiškimą baigtine eksponenčių suma bei įvairių skaičiavimo pavyzdžių galima rasti prof. Z. Navicko ir L. Bikulčienės straipsniuose [1], [2], [3], [4], [5], [7]. Tiriamojoje dalyje lyginamas operatorinio ir Rungės-Kutos diferencialinių lygčių sprendimo metodų efektyvumas, pateikiami lygčių sprendinių pavyzdžiai bei tiriamos sprendinio aproksimavimo baigtine eksponenčių suma paklaidos.

Šio darbo tema buvo skaityti pranešimai 2006 m. KTU vykusioje studentų konferencijoje „Taikomoji matematika“, taip pat konferencijose „Matematika ir matematikos dėstymas – 2006“ bei „Matematika ir matematinis modeliavimas - 2007“. Konferencijų leidiniuose išspausdinti straipsniai pateikti prieduose.

1. BENDROJI DALIS

1.1 RUNGĖS-KUTOS METODAI

Pirmuosius skaitinius diferencialinių lygčių sprendimo metodus sukūrė I. Niutonas (I. Newton) ir L. Oileris (L. Euler). XX amžiaus pradžioje jau buvo žinomi dabar tapę klasikiniai Rungės ir Kutos bei Adamso metodai [9]. Rungės-Kutos metodai – tai visa klasė metodų, skirtų apytiksliam diferencialinių lygčių sprendimui, aproksimuojant duoto laipsnio Teiloro daugianarį. Tai vieni dažniausiai taikomų apytikslių diferencialinių lygčių sprendimo metodų.

Tarkime, kad $y(x)$ - diferencialinės lygties $y' = f(x, y)$ su pradinėmis sąlygomis $y|_{x=x_0} = y_0$ Koši uždavinio sprendinys. Išreiškime jį Teiloro formule kiekvieno taško $x_n (n = 1, 2, \dots)$ aplinkoje,

apsiribodami pirmaisiais keturiais nariais: $y(x) = y_n + h \frac{dy}{dx} + \frac{h^2 d^2 y}{2! dx^2} + \frac{h^3 d^3 y}{3! dx^3}$; čia

$$h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1}.$$

Imdami tik pirmuosius du šios formulės narius, gautume Oilerio metodo formulę: $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$, $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$, ..., $y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$.

Pažymėkime $y_{n+1} = y_n + \lambda_n$; čia $\lambda_n = h \frac{dy}{dx} + \frac{h^2 d^2 y}{2! dx^2} + \frac{h^3 d^3 y}{3! dx^3}$. Šis dydis apskaičiuojamas pagal formulę $\lambda_n = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$; čia $k_1 = hf(x_n, y_n)$, $k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$,

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right), k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3).$$

Taigi diferencialinės lygties sprendinio reikšmė taške x_{n+1} apskaičiuojama pagal formulę

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Rungės-Kutos-Felbergo metodas, naudojamas šiame darbe, yra adaptuotas skaitinis metodas spręsti uždaviniui su pradinėmis sąlygomis $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$. Šis metodas suderina ketvirtos ir penktos eilės Rungės-Kutos metodus. Pagal apskaičiuotas paklaidas kaskart keičiamas žingsnis, ir skaičiuojama tik dviem funkcijos įverčiais daugiau, nei fiksuoto žingsnio ketvirtos eilės Rungės-Kutos metodo atveju.

1.2 OPERATORIŲ TAIKYMAS DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SPRENDIMUI

Operatorių taikymas tiesinių diferencialinių lygčių sprendime buvo aprašytas prof. Z. Navicko straipsniuose [4], [7].

1.2.1 OPERATORINIS DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SPRENDIMO METODAS

Pirmiausia pateiksime specialias sąvokas ir teoremas, skirtas netiesinėms diferencialinėms lygtims spręsti.

Tarkime, turime trijų kintamųjų algebrinę eilutę

$$F_{xst} = \left\{ \sum_{k,l,n=0}^{+\infty} a_{kln} x^k s^l t^n \mid a_{kln} \in \mathbb{C} \right\}$$

ir funkciją $f_k := f_k(x, s, t)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Funkcija f_k yra laipsnių eilutė nuo x, s, t . $P(x, s, t)$ ir $Q(x, s, t)$ yra daugianariai.

1 apibrėžimas. Tiesinių operatorių $D_{st} := P(x, s, t)D_s + Q(x, s, t)D_t$ vadinsime apibendrintuoju diferencialiniu operatoriumi (čia D_s ir D_t – diferencialiniai operatoriai atitinkamai pagal s ir t , pvz.: $D_s s^n := n s^{n-1}$).

1.1 pavyzdys. Sakykime $D_{st} = sD_s + tD_t$, tada $D_{st} x^n = (sD_s + tD_t)x^n = s \cdot 0 + t \cdot 0 = 0$,

$$D_{st} s^2 x t^3 = (sD_s + tD_t)s^2 x t^3 = 2s^2 x t^3 + 3s^2 x t^3 = 5s^2 x t^3, \quad D_{st} x^n s^l t^k = (l+k)x^n s^l t^k.$$

Apibendrintasis diferencijavimo operatorius pasižymi tokiomis savybėmis:

1. Teisinga lygybė $D_{st} \sum_{k=1}^n a_k f_k = \sum_{k=1}^n a_k D_{st} f_k, a_k \in \mathbb{R}$.

2. Teisinga lygybė $D_{st}(f_1 \cdot f_2) = (D_{st} f_1) f_2 + f_1 (D_{st} f_2)$.

3. Teisingos lygybės:

$$D_{st} f_1^n = n f_1^{n-1} (D_{st} f_1), \quad D_{st} \frac{f_1}{f_2} = \frac{(D_{st} f_1) f_2 - f_1 (D_{st} f_2)}{f_2^2}, \dots$$

1 teorema. Tiesinis operatorius $g(L_x D_{st}) := G(D_{st}) = \sum_{k=0}^{+\infty} (L_x D_{st})^k$, kai $(L_x D_{st})^0 := 1$,

yra multiplikatyvusis operatorius, ir, be to, tenkina tokias lygybes:

1. $G \sum_{k=1}^n a_k f_k = \sum_{k=1}^n a_k G f_k$.

2. $G(f(s, t)) = f(Gs, Gt)$.

$$3. \text{ Teisinga lygybė } G \frac{f_1(s, t)}{f_2(s, t)} = \frac{f_1(Gs, Gt)}{f_2(Gs, Gt)}.$$

$$4. G(D_{st})(f_1 + f_2) = G(D_{st})f_1 + G(D_{st})f_2,$$

$$5. G(D_{st})s^k t^l = (G(D_{st})s)^k \cdot (G(D_{st})t)^l.$$

1.2 pavyzdys. Tarkime, $D_{st} := tD_s - sD_t$, tuomet

$$G(D_{st})s = s + t \frac{x}{1!} - s \frac{x^2}{2!} - t \frac{x^3}{3!} + \dots = s \cos x + t \sin x.$$

Analogiškai gauname, kad

$$G(D_{st})s^2 = s^2 + ts \frac{x}{1!} + (t^2 - s^2) \frac{x^2}{2!} - 2ts \frac{x^3}{3!} + \dots = (s \cos x + t \sin x)^2,$$

$$(G(D_{st})s)'_x = G(D_{st})t, \dots,$$

$$G(D_{st})t = -s - t \frac{x}{1!} + s \frac{x^2}{2!} + t \frac{x^3}{3!} - s \frac{x^4}{4!} - \dots = -s \sin x + t \cos x.$$

Sprendžiant diferencialines lygtis, taikomos ir šios lygybės:

$$G(D_v)v^n = \sum_{k=0}^{+\infty} (L_x D_v)^k v^n = \left(v^n + \frac{x}{1!} n v^{n-1} + \frac{x^2}{2!} n(n-1) v^{n-2} + \frac{x^3}{3!} n(n-1)(n-2) v^{n-3} + \dots \right) = (x + v)^n,$$

$$G(D_v)f_1(v, s, t) = f_1(x + v, s, t), \quad (1 - L_v D_v)f_1(v, s, t) = f_1(0, s, t), v \in R.$$

$$\text{Kai } D_{vst} := D_v + P(s, t)D_s + Q(s, t)D_t,$$

$$G(D_{vst})f_1(v) = G(D_v)f_1(v) = \sum_{k=0}^{+\infty} (L_x D_v)^k f_1(v) = \left(f_1(v) + \frac{x}{1!} (f_1(v))' + \dots \right) = f_1(x + v),$$

$$\begin{aligned} G(D_{vst})f_1(v, s, t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} (L_x (D_v + P(s, t)D_s + Q(s, t)D_t))^k f(v, s, t) = \\ &= f(G(D_{vst})v, G(D_{vst})s, G(D_{vst})t), \dots \end{aligned}$$

1.2.2 DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ OPERATORINIŲ SPRENDINIŲ SUDARYMO PAVYZDŽIAI

1. $y' = P(y)$ lygties sprendinio sudarymas

Tarkime, turime diferencialinę lygtį

$$y' = P(y). \tag{1.1}$$

Duotosios lygties pradinė sąlyga yra $y(0, s) = s$. Surasime šios lygties sprendinį $y = y(x, s)$.

Sudarome geometrę $G = \sum_{k=0}^{+\infty} (L_x)^k (P(s)D_s)^k$. Tuomet sprendinys užrašomas taip:

$$y(x, s) = Gs \tag{1.2}$$

Įrodysime, kad (1.2) sprendinys tenkina (1.1) lygtį.

$$\begin{aligned}
(y(x,s))'_x &= D_x Gs = D_x(1 + L_x P(s)D_s + L_x^2(P(s)D_s)^2 + \dots)s = D_x(s + L_x P(s)D_s s + \dots) = \\
&= (P(s)D_s + P(s)D_s L_x P(s)D_s + \dots)s = P(s)D_s(1 + L_x P(s)D_s + L_x^2(P(s)D_s)^2 + \dots)s = \\
&= GP(s)D_s s = GP(s) = P(Gs) = P(y(x,s)) \Rightarrow y'_x = P(y).
\end{aligned}$$

$$Gs \Big|_{x=0} = (1 + L_x P(s)D_s + \dots)s = s \Rightarrow y(0,s) = s.$$

2. $y''_{xx} = P(y, y')$ lygties sprendinio sudarymas

Sakykime, turime diferencialinę lygtį

$$y''_{xx} = P(y, y'). \quad (1.3)$$

Surasime šios lygties sprendinį $y = y(x, s, t)$. Duotosios lygties pradinės sąlygos yra

$$y(0, s, t) = s \quad \text{ir} \quad y'_x(x, s, t) \Big|_{x=0} = t.$$

Sudarome geometrę $G = \sum_{k=0}^{+\infty} (L_x)^k (tD_s + P(s, t)D_t)^k$. Tuomet sprendinys užrašomas taip:

$$y = y(x, s, t) = Gs. \quad (1.4)$$

Irodysime, kad (1.4) sprendinys tenkina (1.3) lygtį.

$$\begin{aligned}
(y(x,s))''_{xx} &= D_x Gs = (D_x)^2(1 + L_x(tD_s + P(s,t)D_t + \dots))s = D_x(tD_s + P(s,t)D_t + \dots)Gs = \\
&= D_x Gt = G(P(s,t)) = P(Gs, Gt) = P(y, y')
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow y''_{xx} = P(y, y').$$

$$Gs \Big|_{x=0} = (1 + L_x D_{st} + (L_x D_{st})^2 + \dots)s = s \Rightarrow y'_x \Big|_{x=0} = Gt = t.$$

3. $y''_{xx} = P(x, y, y')$ lygties sprendinio sudarymas

Šios lygties sprendinio išraiškos buvo pateiktos [Nav02].

Sakykime, duota diferencialinė lygtis

$$y''_{xx} = P(x, y, y') \quad (1.5)$$

su pradinėmis sąlygomis:

$$y(v, s, t) \Big|_{x=v} = s \quad \text{ir} \quad (y(v, s, t))'_x \Big|_{x=v} = t, \quad (1.6)$$

kai $P(x, s, t)$ yra daigianaris arba funkcija, išreiškiama visur konverguojančia eilute. Tada duotosios diferencialinės lygties sprendinys yra

$$y(x, s, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x-v)^k}{k!} ((D_v + tD_s + P(v, s, t)D_t)^k s), \quad v \in R. \quad (1.7)$$

4. Apibendrinimas

Šio skyrelio formules galima apibendrinti bet kurios eilės netiesinei diferencialinei lygčiai.

Diferencialinės lygties

$$y_x^{(n)} = P(x, y, y'_x, y''_x, \dots, y_x^{(n-1)}), \quad (1.8)$$

su pradinėmis sąlygomis

$$\begin{aligned} y(v; s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) &= s_1; \quad (y(x; s_1, s_2, \dots, s_{n-1}))'_x \Big|_{x=v} = s_2, \\ (y(x; s_1, s_2, \dots, s_{n-1}))''_x \Big|_{x=v} &= s_3, \dots, \quad (y(x; s_1, s_2, \dots, s_{n-1}))^{(n-1)}_x \Big|_{x=v} = s_{n-1} \end{aligned} \quad (1.9)$$

sprendinį $y(x; s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$, galima parašyti tokia forma:

$$y(x; s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, v) \frac{(x-v)^k}{k!}, \quad (1.10)$$

$$\text{kai } p_k(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, v) = (D_v + s_2 D_{s_1} + s_3 D_{s_2} + \dots + s_{n-1} D_{s_{n-2}} + P(v, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) D_{s_{n-1}})^k s_1.$$

Čia $D_v, D_{s_1}, D_{s_2}, \dots, D_{s_{n-1}}$ - diferencialiniai operatoriai, o $P(x, y, y'_x, y''_x, \dots, y_x^{(n-1)})$ yra daugianaris arba funkcija.

1.3 pavyzdys. Tegul duota diferencialinė lygtis $y' = y^2$, $y(v) = s$. Naudojantis (1.2) sprendinio operatorine išraiška gauname, kad $y = y(x; s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \frac{(x-v)^k}{k!}$,

$$\text{kai } p_k = p_k(s, v) = (D_v + s^2 D_s)^k s.$$

$$\text{Tada } p_0 = s, \quad p_1 = 1 \cdot s^2, \quad p_2 = 1 \cdot 2s^3, \dots, \quad p_n = n! s^{n+1},$$

$$\text{t.y. } y = y(x; s) = s \sum_{k=0}^{\infty} s^k (x-v)^k, \quad \text{arba } y = \frac{s}{1 - s(x-v)}, \quad \text{kai } |s(x-v)| < 1.$$

Tokia sprendinio analizė galima tik tuo atveju, kai jis užrašomas operatoriniu pavidalu.

1.4 pavyzdys. Tegul duota antros eilės diferencialinė lygtis $y'' = xy^2$ su pradinėmis sąlygomis $y|_{x=0} = s, y'|_{x=0} = t$. Tada apibendrintas diferencialinis operatorius bus $D = D_v + tD_s + vs^2 D_t$, o funkcijos $p_k = p_k(s, t, v), k = 1, 2, \dots$. Tada gauname, kad

$$p_0 = D^0 s_1 = s_1, \quad p_1 = D s_1 = s_2, \quad p_2 = D^2 s_1 = vs_2, \quad p_3 = D^3 s_1 = s_1^2 + 2vs_1 s_2, \dots$$

Tada bendrasis diferencialinės lygties sprendinys gali būti išreiškiamas funkcijų eilute:

$$y = s_1 + s_2 \frac{(x-v)}{1!} + vs_1^2 \frac{(x-v)^2}{2!} + (s_1^2 + 2vs_1 s_2) \frac{(x-v)^3}{3!} + \dots$$

Kai $v = 0$, bendrasis sprendinys taško 0 aplinkoje yra

$$y = s_1 + s_2 \frac{x}{1!} + s_1^2 \frac{x^2}{2!} + \dots$$

Irašius vietoj s_1 ir s_2 konkrečias skaitines reikšmes gautume atskirąjį lygties sprendinį.

Pavyzdžiui, jei $s_1 = 1$, $s_2 = 2$, atskirasis sprendinys yra $\bar{y} = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k(1,2,0) \frac{x^k}{k!} = 1 + 2 \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

5. Diferencialinių lygčių sistemos sprendinių sudarymas

Tegul duota diferencialinių lygčių sistema su pradinėmis sąlygomis:

$$\begin{cases} x'_t = P(x, y), & x(0; u, v) = u, \\ y'_t = Q(x, y), & y(0; u, v) = v, \end{cases} \quad (1.11)$$

kai $P(x, y), Q(x, y) \in F_{xy}$.

Tada jos sprendiniai išreiškiami taip:

$$x = Gu, \quad y = Gv, \quad \text{kai } G := \sum_{k=0}^{+\infty} (L_t(P(u, v)D_u + Q(u, v)D_v))^k. \quad (1.12)$$

Pirmiausia pastebėsime, kad algebrinis tiesinis operatorius G yra multiplikatyvusis:

$$G : \langle F_{uv}; +, |C \rangle \leftrightarrow \langle \text{Ker}(D_t - P(u, v)D_u - Q(u, v)D_v); +, |C \rangle.$$

$$\begin{aligned} \text{Taigi } x'_t &= D_t Gu = (P(u, v)D_u + Q(u, v)D_v)Gu = G(P(u, v)D_u + Q(u, v)D_v)u = \\ &= GP(u, v) = P(Gu, Gv) = P(x, y). \end{aligned}$$

Analogiškai turime $y'_t = Q(x, y)$.

1.5 pavyzdys. Diferencialinių lygčių sistemos

$$\begin{cases} x'_t = a_1 x + b_1 y \\ y'_t = a_2 x + b_2 y \end{cases} \quad (1.13)$$

su pradinėmis sąlygomis $x(v) = s_1$, $y(v) = s_2$ operatorinių sprendinių artiniai yra tokie:

$$x = x(t; s_1; s_2, v) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k(s_1, s_2, v) \frac{(t-v)^k}{k!}, \quad y = y(t; s_1; s_2, v) = \sum_{k=0}^{+\infty} q_k(s_1, s_2, v) \frac{(t-v)^k}{k!}. \quad (1.14)$$

Čia $p_0(s_1, s_2, v) = s_1$,

$$p_{k+1}(s_1, s_2, v) = (D_v + (a_1 s_1 + b_1 s_2)D_{s_1} + (a_2 s_1 + b_2 s_2)D_{s_2}) p_k(s_1, s_2, v),$$

$$q_0(s_1, s_2, v) = s_2,$$

$$q_{k+1}(s_1, s_2, v) = (D_v + (a_1 s_1 + b_1 s_2)D_{s_1} + (a_2 s_1 + b_2 s_2)D_{s_2}) q_k(s_1, s_2, v).$$

Taigi

$$p_2(s_1, s_2, v) = a_1 s_1 + b_1 s_2, \quad p_3(s_1, s_2, v) = a_1(a_1 s_1 + b_1 s_2) + b_1(a_2 s_1 + b_2 s_2) \quad \text{ir t.t.},$$

$$q_2(s_1, s_2, v) = a_2 s_1 + b_2 s_2, \quad q_3(s_1, s_2, v) = a_2(a_1 s_1 + b_1 s_2) + b_2(a_2 s_1 + b_2 s_2) \quad \text{ir t.t.}$$

1.2.8 APIBENDRINIMAI DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SISTEMOMS

Naudojant panašią metodiką, galima gauti ir sudėtingesnių diferencialinių lygčių sistemų sprendinius.

Tegul duota diferencialinių lygčių sistema

$$\begin{cases} x_t'' = P(t, x, x_t', \varphi, \varphi_t') \\ \varphi_t'' = Q(t, x, x_t', \varphi, \varphi_t') \end{cases} \quad (1.15)$$

su pradinėmis sąlygomis $x(v) = s_1$, $x_t'(v) = s_2$, $\varphi(v) = s_3$, $\varphi_t'(v) = s_4$. Tada sprendinių teorinės išraiškos:

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \frac{(t-v)^k}{k!}, \quad \varphi = \sum_{k=0}^{+\infty} q_k \frac{(t-v)^k}{k!}, \quad (1.16)$$

čia $p_k = D^k s_1$, $q_k = D^k s_3$, apibendrintas diferencialinis operatorius šiuo atveju $D = D_v + s_2 D_{s_1} + P D_{s_1} + s_4 D_{s_3} + Q D_{s_3}$, o $P = P(v, s_1, s_2, s_3, s_4)$ ir $Q = Q(v, s_1, s_2, s_3, s_4)$.

Turint trijų antros eilės diferencialinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_t'' = P(t, x, x_t', y, y_t', \varphi, \varphi_t'), \\ y_t'' = Q(t, x, x_t', y, y_t', \varphi, \varphi_t'), \\ \varphi_t'' = R(t, x, x_t', y, y_t', \varphi, \varphi_t'), \end{cases} \quad (1.17)$$

su pradinėmis sąlygomis $x(v) = s_1$, $x_t'(t)|_{t=v} = s_2$, $y(v) = s_3$, $y_t'(t)|_{t=v} = s_4$, $\varphi(v) = s_5$, $\varphi_t'(t)|_{t=v} = s_6$ jos sprendinių išraiškos bus

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \frac{(t-v)^k}{k!}, \quad y = \sum_{k=0}^{+\infty} q_k \frac{(t-v)^k}{k!}, \quad \varphi = \sum_{k=0}^{+\infty} r_k \frac{(t-v)^k}{k!} \quad (1.18)$$

$p_k = D^k s_1$, $q_k = D^k s_3$, $r_k = D^k s_5$, o $D = D_v + s_2 D_{s_1} + P D_{s_2} + s_4 D_{s_3} + Q D_{s_4} + s_6 D_{s_5} + R D_{s_6}$. Čia daugianariai P , Q ir R yra kintamųjų $t, x, x_t', y, y_t', \varphi, \varphi_t'$, arba atitinkamai v, s_1, s_2, \dots, s_6 funkcijos.

1.2.9 SKAIČIAVIMO ALGORITMAS

Pastebėsime, kad diferencialinių lygčių struktūriniai sprendiniai nusako ištisą šeimą sprendinių, priklausančių nuo parametrų konkrečių reikšmių.

Tegul sprendinio $y(x) = y(x, s, t, v)$ koeficientai $p_k = p_k(s, t, v)$, esant fiksuotiems parametrams s, t, v tenkina įvertį $|p_k| \leq M^k$, $0 \leq M < +\infty$, $k = 0, 1, 2, \dots$ Tada algebrinė eilutė (1.7) konverguoja su visomis $x \in \mathbf{R}$ reikšmėmis, ir, be to, ši eilutė yra (1.5) lygties sprendinys klasikine prasme.

Sprendžiant kompiuteriu gauname tik baigtinį skaičių koeficientų p_k , taigi turime sprendinio artinį. Apskaičiavus funkcijas $p_k(s, t, v)$, $k=0, \dots, N$, konstruojame daugianarį

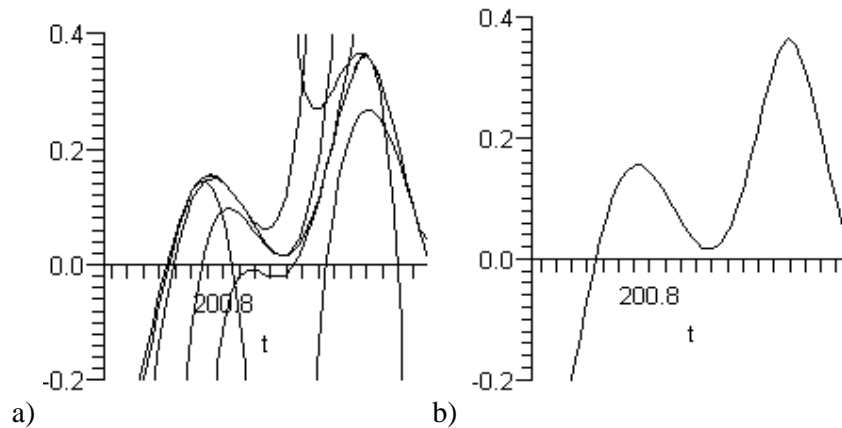
$$\hat{y}(x; s; t, v) = \sum_{k=0}^N p_k(s, t, v) \frac{(x-v)^k}{k!}. \quad (1.19)$$

Įrašius skaitines reikšmes vietoj kintamųjų s , t ir v gauname sprendinio $y(x)$ artinį – daugianarį $\hat{y}(x)$ taško v aplinkoje. Šis daugianaris „tolsta“ nuo tikrojo sprendinio, kai kintamasis x „tolsta“ nuo centro v .

Tada sprendinio artinys $y^*(x)$ formuojamas naudojant sprendinių artinių šeimą $\{\hat{y}_l(x) | l = 0, 1, \dots, n\}$ tokiu būdu (1.2 pav.):

$$y^*(x) := \hat{y}_l(x); \quad (1.20)$$

kai $v_l \leq x < v_{l+1}$; $l = 1, 2, \dots, n$.



1.1 pav. a) Artinių šeima, b) Galutinis sprendinio artinys

Čia artinių šeima gaunama naudojant tokias idėjas:

Tegul $\hat{y}_0(x) = \sum_{k=0}^N p_k(s_0, t_0, v_0) \frac{(x-v_0)^k}{k!}$, $y_0(v_0) = s_0$, $y'_x|_{x=v_0} = t_0$, kai s_0, t_0, v_0 yra duoti. Tada

$\hat{y}_l(x) = \sum_{k=0}^N p_k(s_l, t_l, v_l) \frac{(x-v_l)^k}{k!}$, kai $s_{l+1} = \hat{y}_l(v_{l+1})$, $t_{l+1} = (\hat{y}_l(x))'_x|_{x=v_{l+1}}$, $l = 1, 2, \dots, n$, o v_1, v_2, \dots, v_{n+1}

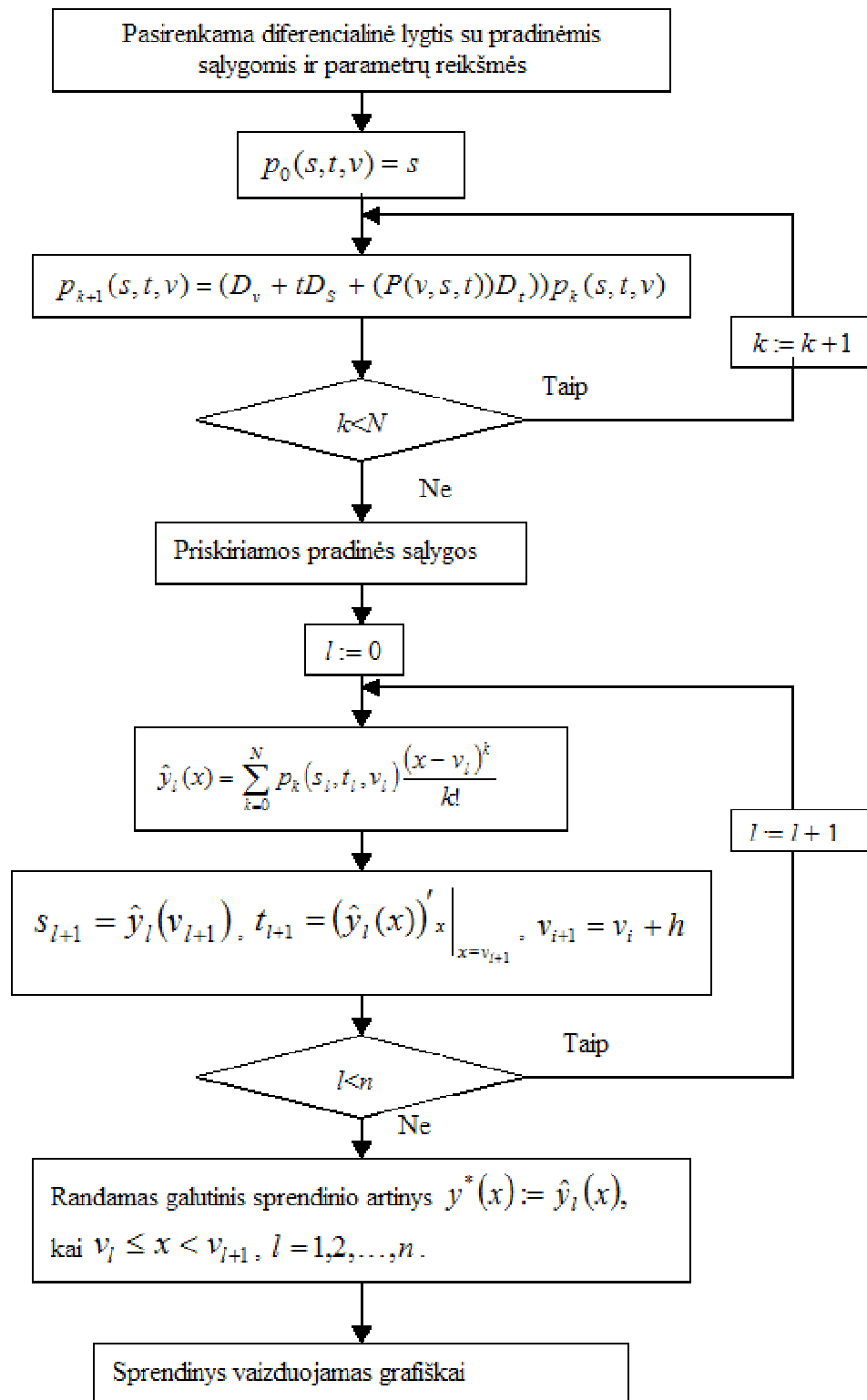
pasirenkami laisvai, dažniausiai $v_{i+1} = v_i + h$, o h vadinamas perėjimo tarp centrų žingsniu.

Galima naudoti ir kitokią artinio sudarymo techniką. Naudojantis aprašomu skaičiavimo metodu galima keisti perėjimo tarp centrų žingsnį, daugianario eilę, daugianarių, naudojamų (1.20) artinio sudarymui, skaičių.

Norint gauti tikslesnes aproksimacijas, reikia aukštinti daugianario eilę. Tikslumas priklauso ir nuo perėjimo tarp centrų žingsnio, bet tam tikrais atvejais per mažas žingsnis gali iššaukti paklaidų didėjimą ir pailginti skaičiavimo laiką. Be to, sprendžiant sudėtingesnes diferencialines lygtis, kritiniu

gali tapti operatyvinės atminties kiekis, nes susiduriame su simbolinio diferencijavimo problema, kadangi jis užima daugiausiai skaičiavimo laiko.

Diferencialinių lygčių sprendimo operatoriniu metodu algoritmo schema pavaizduota 1.2 pav.



1.2 pav. Diferencialinių lygčių sprendimo operatoriniu metodu algoritmo schema

1.3 FUNKCIJOS REIŠKIMAS EKSPONENTINIŲ FUNKCIJŲ SUMA

Šiame skyrelyje pateikiamos sąvokos ir teoremos, leidžiančios nusakyti sąlygas, kai eilutė gali būti išreiškiama baigtine standartinių (eksponentinių ir trigonometrinių) funkcijų suma. Ši teorija buvo pateikta straipsnyje [6].

2 apibrėžimas. Skaičių rinkinį $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbf{C}$, kai $n \in \mathbf{N}$, vadinsime Van-der-Mondo rinkiniu (V -rinkinys), jeigu jis tenkina sąlygą $\lambda_k \neq \lambda_r$, kai $k \neq r$. Su kiekvienu V -rinkiniu galima sudaryti nelygų nuliui Van-der-Mondo determinantą $V_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$:

$$V_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) := \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - \lambda_1)(\lambda_n - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - \lambda_{n-1})$$

Pastebėsime, kad visuomet $V_1(\lambda_1) = 1$.

Tegul duota kompleksinių skaičių seka $(p_j; j \in \mathbf{Z})$. Tada su kiekvienu $m \in \mathbf{N}$ ir fiksuotu $j_0 \in \mathbf{Z}_0$ galime sudaryti Hankelio matricą $H_{j_0}^{(m)}$ bei išplėstinę matricą $\overline{H}_{j_0}^{(m)}(\rho)$:

$$H_{j_0}^{(m)} := \left\| \begin{array}{cccc} p_{j_0} & p_{j_0+1} & \dots & p_{j_0+m-1} \\ p_{j_0+1} & p_{j_0+2} & \dots & p_{j_0+m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{j_0+m-1} & p_{j_0+m} & \dots & p_{j_0+2m-2} \end{array} \right\|, \quad \overline{H}_{j_0}^{(m)}(\rho) := \left\| \begin{array}{cccc} p_{j_0} & p_{j_0+1} & \dots & p_{j_0+m} \\ p_{j_0+1} & p_{j_0+2} & \dots & p_{j_0+m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{j_0+m-1} & p_{j_0+m} & \dots & p_{j_0+2m-1} \\ 1 & \rho & \dots & \rho^m \end{array} \right\|.$$

3 apibrėžimas. Jeigu duotajai kompleksinių skaičių sekai $(p_j; j \in \mathbf{Z})$ egzistuoja toks r_0 , tenkinantis sąlygą $r_0 = \max_{\substack{m \in \mathbf{N} \\ j_0 \in \mathbf{Z}_0}} \text{rang } H_{j_0}^{(m)}$, tai sakysime, kad kompleksinių skaičių seka $(p_j; j \in \mathbf{Z})$ turi H -rangą r_0 . Tada naudosimės tokiu žymėjimu $H\text{-rang}(p_j; j \in \mathbf{Z}) = r_0$.

Pateiksime keletą pavyzdžių.

1.6 pavyzdys. $H\text{-rang}(a_0 + jd; j \in \mathbf{Z}) = 2$, kai $d \neq 0$.

Iš tikrųjų duotajai sekai

$$\det H_j^{(1)} = |a_0 + dj| = a_0 + dj, \det H_j^{(2)} = \begin{vmatrix} a_0 + dj & a_0 + d(j+1) \\ a_0 + d(j+1) & a_0 + d(j+2) \end{vmatrix} = -d^2, \det H_j^{(m)} \equiv 0, \quad \text{kai}$$

$m = 3, 4, \dots$. Taigi $r_0 = \max_{m, j} \text{rang } H_j^{(m)} = 2$.

1.7 pavyzdys. $H\text{-rang}(j^2; j \in \mathbf{Z}) = 3$.

$$\text{Pastebėsime, kad } \det H_j^{(3)} = \begin{vmatrix} j^2 & (j+1)^2 & (j+2)^2 \\ (j+1)^2 & (j+2)^2 & (j+3)^2 \\ (j+2)^2 & (j+3)^2 & (j+4)^2 \end{vmatrix} = -8, \det H_j^{(m)} \equiv 0, \text{ kai}$$

$m = 4, 5, \dots$

$$\text{Taigi } r_0 = \max_{m,j} \text{rang } H_j^{(m)} = 3.$$

1.8. Analogiškai galime parodyti, kad

$$H - \text{rang}(a_l j^l + a_{l-1} j^{l-1} + \dots + a_1 j + a_0; j \in \mathbf{Z}) = l + 1, \text{ kai } a_l \neq 0, l \in \mathbf{N}.$$

Betarpiškai gauname, kad $H - \text{rang}(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots) = n$, kai $a_n \neq 0$.

Sutarsime laikyti, kad $H - \text{rang}(0, 0, \dots) = 0$.

Seka $(j!; j \in \mathbf{Z}_0)$ H-rango neturi, nes $\det H_m^{(j)} \neq 0$, su visais $m \in \mathbf{N}$ ir $j \in \mathbf{Z}_0$.

Betarpiškai iš H-rango apibrėžimo išplaukia tokios išvados:

1 išvada. Tegul $q_j = p_{j+n}$, kai $n \in \mathbf{N}$ - fiksuotas ir, be to, $m_1 < m_2$. Tada

$$H - \text{rang}(p_j; j \in \mathbf{Z}_0) \geq H - \text{rang}(q_j; j \in \mathbf{Z}_0), \quad \text{rang } H_{j_0}^{(m_1)} \leq \text{rang } H_{j_0}^{(m_2)}.$$

2 išvada. Jeigu $H - \text{rang}(p_j; j \in \mathbf{Z}_0) = r_0$, tai $\det H_0^{(r_0)} \neq 0$, o $\det H_j^{(r_0+1+n)} \equiv 0$, kai $j, n \in \mathbf{Z}_0$.

Taigi

$$H - \text{rang}(p_j; j \in \mathbf{Z}_0) = \max_{m \in \mathbf{N}} \text{rang } H_0^{(m)} \quad (1.21)$$

3 išvada. Duotoji seka $(p_j; j \in \mathbf{Z}_0)$ turi H-rangą, tenkinantį atitiktį

$H - \text{rang}(p_j; j \in \mathbf{Z}_0) = m$, $m \in \mathbf{Z}_0$ tada ir tik tada, kai egzistuoja tokios konstantos

$A_0, A_1, \dots, A_{m-1} \in \mathbf{C}$, nepriklausančios nuo j ir tenkinančios sąlygą

$$A_0 p_j + A_1 p_{j+1} + \dots + A_{m-1} p_{j+m-1} = p_{j+m} \quad (1.22)$$

su visomis $j \in \mathbf{Z}_0$ reikšmėmis, ir, be to, (1.21) sąryšis yra negalimas su m' , kai $m' < m$.

4 išvada. Dvi kompleksinių skaičių sekos $(p_j; j \in \mathbf{Z}_0)$ ir $(q_j; j \in \mathbf{Z}_0)$, turinčios H-rangus, lygios tada ir tik tada, t.y. $p_j = q_j, j \in \mathbf{Z}_0$, kai $H - \text{rang}(p_j; j \in \mathbf{Z}_0) = H - \text{rang}(q_j; j \in \mathbf{Z}_0) = m$ ir $p_j = q_j$, kai $j = 0, 1, \dots, 2m - 1$.

Lema. Tegul duota seka $(p_j; j \in \mathbf{Z}_0)$, kai

$$p_j := \sum_{r=1}^m \mu_r \lambda_r^j, \text{ o } \lambda_1, \dots, \lambda_m \quad (1.23)$$

yra V-rinkinys.

$$\text{Tada } \det H_j^{(m)} = (\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_m) (\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_m)^j V_m^2(\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_m), \quad (1.24)$$

$$\det \bar{H}_j^{(m)} = \det H_j^{(m)} (\rho - \lambda_1)(\rho - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (\rho - \lambda_m), \quad (1.25)$$

Iš tikrųjų $\det H_j^{(m)} = (\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_m)(\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_m)^j \sum_{(r_1, r_2, \dots, r_m)} \det \|\lambda_{r_k}^{k+l-2}\|_{k,l=1}^m$. sumuojama

pagal visus sveikųjų skaičių $1, 2, \dots, m$ kėlinius (r_1, r_2, \dots, r_m) . Pastebėje, kad

$\sum_{(r_1, r_2, \dots, r_m)} \det \|\lambda_{r_k}^{k+l-2}\|_{k,l=1}^m = \left(\det \|\lambda_k^{l-1}\| \right)^2, k, l = 1, \dots, m$, gauname (1.25) tapatybės įrodymą. Analogiškai

įrodoma ir (1.26) tapatybė.

5 išvada. Iš lemos įrodymo turime, kad $\det H_j^{(m)} \equiv 0$, kai p_j nusakomas (1.21) su visais $j \in \mathbf{Z}_0$, o $n = m+1, m+2, \dots$. Taigi H -rang($p_j; j \in \mathbf{Z}$) = m .

Tegul

$$\binom{j}{k} := \begin{cases} 0, & 0 \leq j < k; \\ \frac{j!}{k!(j-k)!}, & k \leq j; \end{cases} \quad \binom{j}{k} \cdot 0^{j-k} := \begin{cases} 0, & j \neq k; \\ 1, & k = j. \end{cases}, \quad j, k \in \mathbf{Z}_0. \quad (1.26)$$

Tada paėmę V -rinkinį $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ galime sudaryti skaičių seką $(p_j; j \in \mathbf{Z}_0)$, nusakomą sąryšiu

$$p_j := \sum_{r=1}^m \sum_{k_r=0}^{m_r-1} a_{rk_r} \binom{j}{k_r} \lambda_r^{j-k_r} \quad (1.27)$$

su visais $m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbf{N}$ ir $a_{rk_r} \in \mathbf{C}$.

10 apibrėžimas. Skaičių seka, nusakoma (1.27) sąryšiu, vadinsime algebrine progresija, o koeficientus $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ jos vardikliais.

Pastaba. Skaičių sekos, pateiktos pavyzdžiuose, o taip pat nuskaitos (1.24) sąryšiu, yra algebrinės progresijos, kurių vardiklius galima sudaryti betarpiškai. Pavyzdžiui, sekos $(p_j; j \in \mathbf{Z}_0)$, kai $p_j = a_0 + jd$, vardikliai yra $\lambda_{1,2} = 1$, t.y.

$$p_j = a_0 + d \binom{j}{1} 1^{j-1} \text{ ir t.t. Taigi tiek aritmetine, tiek geometrinė progresijos yra algebrinės}$$

progresijos.

Tegul $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_m \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ yra V -rinkinys. Tada galima sudaryti išraiškas:

$$\Delta_k^{(0)}(j) := \hat{\lambda}_k^j, \quad \Delta_k^{(r+1)}(j) := \frac{\Delta_k^{(r)}(j) - \Delta_{k+1}^{(r)}(j)}{\hat{\lambda}_k - \hat{\lambda}_{k+1}}, \quad r = 0, 1, \dots; k = 1, 2, \dots, n-r-1. \quad (1.28)$$

Kadangi $\Delta_k^{(r)}(j)$ galime išreikšti ir taip:

$\Delta_k^{(r)}(j) = \mu_{k_0} \hat{\lambda}_k^{(j)} + \mu_{k_1} \hat{\lambda}_{k+1}^{(j)} + \dots + \mu_{k_r} \hat{\lambda}_{k_r}^{(j)}$ su koeficientais $\mu_{k_0}, \mu_{k_1}, \dots, \mu_{k_r}$, nepriklausančiais nuo j , tai seka $(\Delta_k^{(r)}(j); j \in \mathbf{Z}_0)$, $r = 1, 2, \dots, m-k$ yra algebrinė progresija ir, be to, H -rang($\Delta_k^{(r)}(j); j \in \mathbf{Z}_0$) = $r+1$.

Pastebėsime, kad egzistuoja ribos

$$\lim_{\hat{\lambda}_k, \hat{\lambda}_{k+1}, \dots, \hat{\lambda}_{k+r} \rightarrow \lambda_k} \Delta_k^{(r)}(j) = \binom{j}{r} \lambda_k^{j-r}, \text{ kai } \lambda_k \text{ bet koks fiksuotas kompleksinis skaičius.}$$

Pasinaudoję (1.27) tapatybe, ribos skaičiavimo ypatumais bei (1.23) sąryšiais, gauname, kad skaičių sekos $\left(\binom{j}{r} \lambda_k^{j-r}; j \in \mathbf{Z}_0 \right)$ H -rangas tenkina sąryšį:

$$H\text{-rang} \left(\binom{j}{r} \lambda_k^{j-r}; j \in \mathbf{Z}_0 \right) = r+1, \text{ ir, be to,}$$

$$\det H_j^l = \begin{cases} (-1)^{\binom{l+1}{2}} \lambda_k^l, & l = r+1, \\ 0, & m = r+2, r+3, \dots \end{cases}$$

Iš $\Delta_k^{(r)}(j)$ pateiktų savybių turime, kad (1.26) išraiška yra atitinkamu ribiniu perėjimu gaunama iš (1.21) išraiškos, t.y. atitinkamai parinkus koeficientus $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ turime, kad

$$p_j := \lim_{\substack{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_{m_1} \rightarrow \lambda_1 \\ \dots \\ \hat{\lambda}_{m_1+\dots+m_{n-1}+1}, \dots, \hat{\lambda}_{m_1+\dots+m_n} \rightarrow \lambda_n}} \sum_{r=1}^m \mu_r \hat{\lambda}_r^j = \sum_{r=1}^n \sum_{k_r=0}^{m_r-1} a_{rk_r} \binom{j}{k_r} \lambda_r^{j-k_r}, \quad j \in \mathbf{Z}_0,$$

kai $m_1 + \dots + m_{n-1} = m$, ir, be to, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbf{C}$ yra V -rinkinys. Tada, pasinaudojus ribiniu perėjimu, $H\text{-rang}(p_j; j \in \mathbf{Z}_0) = m$.

Iš ankščiau pateiktų samprotavimų išplaukia tokia išvada.

6 išvada. Jeigu algebrinės progresijos $(p_j; j \in \mathbf{Z}_0)$ narys p_j yra nusakomas (1.26), tai jos Henkelio matricos $H_j^{(m)}$ ir $\overline{H}_j^{(m)}$ tenkina sąryšius:

$$\det H_j^{(m)} = \sigma_m \left(\lambda_1^{m_1} \cdot \lambda_2^{m_2} \cdot \dots \cdot \lambda_n^{m_n} \right)^j, \quad \det \overline{H}_j^{(m)} = \det H_j^{(m)} \cdot (\rho - \lambda_1)^{m_1} \cdot (\rho - \lambda_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (\rho - \lambda_n)^{m_n},$$

kai daugiklis $\sigma_m \neq 0$ ir nepriklauso nuo j .

Pastebėsime, kad su visais V -rinkiniais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ teisinga tokia pereinamybė:

$$\left(\lambda_1^{m_1} \cdot \lambda_2^{m_2} \cdot \dots \cdot \lambda_n^{m_n} \right)^0 = 1.$$

Taigi yra teisinga tokia teorema.

2 teorema. Algebrinės progresijos $(p_j; j \in \mathbf{Z}_0)$, nusakomos (1.27) sąryšiu, H -rangas tenkina sąryšį:

$$H\text{-rang}(p_j; j \in \mathbf{Z}_0) = m_1 + m_2 + \dots + m_n, \text{ kai } a_{m_{r-1}} \neq 0.$$

Tegul duota realaus kintamojo x konverguojanti su visomis $x, x_0 \in \mathbf{R}$ reikšmėmis, kai x_0 - fiksuotas, laipsninė eilutė

$$y(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j \frac{(x-x_0)^j}{j!}, |p_j| \leq M^j, 0 \leq M < +\infty \quad (1.29)$$

11 apibrėžimas. Funkciją, nusakomą (1.27) išraiška, vadinsime *algebrine*, jeigu ją galima išreikšti tokia baigtine suma:

$$y(x) = \sum_{r=1}^n Q_r(x) e^{\lambda_r x}, \quad (1.30)$$

$$\text{kai } Q_r(x) = \sum_{k_r=0}^{m_r-1} a_{rk_r} x^{k_r}, m_r = 1, 2, \dots; a_{rk_r} \in \mathbf{C}, \text{ ir, be to, } a_{rm_{r-1}} \neq 0.$$

3 teorema. Laipsninė eilutė, nusakoma (1.29) sąryšiu, yra išreiškiamą (1.30) išraiška tada ir tik tada, kai (1.26) eilutės koeficientai sudaro algebrinę progresiją $(p_j; j \in \mathbf{Z}_0)$.

Iš ankščiau pateiktos medžiagos išplaukia tokia išvada.

7 išvada. Algebrinę funkciją $y(x)$, nusakomą (1.29) išraiška, galime išreikšti ir tokia išraiška:

$$y(x) = \mu_0 + \sum_{r=1}^m (\mu_r \cos(\lambda_r(x-x_0)) + \gamma_r \sin(\nu_r(x-x_0)))$$

tada ir tik tada, kai jos (1.26) laipsninės eilutės koeficientų seka $(p_j; j \in \mathbf{Z}_0)$ yra algebrinė, turinti (1.30) išraišką, ir, be to, jos vardiklių realiosios dalys lygios nuliui.

1.3.1 TEORINĖS IŠRAIŠKOS IR SKAIČIAVIMO ALGORITMAS

Skaičiavimo algoritmo esmę sudaro funkcijos $f(x)$ eksponentinės išraiškos (1.30) vektorių $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ ir $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ sudarytų iš atitinkamų koeficientų μ_k , λ_k bei tų koeficientų skaičiaus m radimas, kai duotas $f(x)$ Teiloro eilutės (1.29) koeficientų vektorius $\vec{p} = (p_0, p_1, \dots, p_n), n > m; n, m \in \mathbf{N}$. Algoritmo schema pavaizduota 1.3 pav. Skaičiavimai susideda iš tokių dalių:

1. Konstruojamos Hankelio matricos, sudarytos iš Teiloro eilutės koeficientų

$$H_0^{(k)} = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \dots & p_{k-1} \\ p_1 & p_2 & \dots & p_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k-1} & p_k & \dots & p_{2k-2} \end{pmatrix},$$

o po to skaičiuojami jų rangai.

Jei duotą funkciją $f(x)$ galima išreikšti eksponenčių suma, tai šios sumos dėmenų skaičius lygus funkcijos H-rangui [6].

Taikant algoritmą randamas toks m , su kuriuo $m = \max_{k \in N} \text{rang} H_0^{(k)}$, t.y. $\det H_0^{(m)} \neq 0$, o

$$\det H_0^{(m+r)} \equiv 0, \quad \forall r \in N.$$

Kompiuterinėje algoritmo realizacijoje sąlyga $\det H_0^{(m+r)} \equiv 0$ keičiama sąlyga $\det H_0^{(m+r)} < \varepsilon$, $r = m+1, m+2, \dots, m+l$, $l \in N$.

2. Panaudojus algebrinių lygčių sprendimo metodus surandame tokios algebrinės lygties

$$\begin{vmatrix} p_0 & p_1 & \dots & p_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m-1} & p_m & \dots & p_{2m-1} \\ 1 & \rho & \dots & \rho^m \end{vmatrix} = 0 \quad (1.31)$$

šaknis $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$. Jei šios šaknys skirtingos, jos tenkina sąlygas:

$$\lambda_1 = \rho_1, \lambda_2 = \rho_2, \dots, \lambda_m = \rho_m.$$

3. Sudaroma tiesinių lygčių sistema

$$\lambda_1^j \mu_1 + \lambda_2^j \mu_2 + \dots + \lambda_m^j \mu_m = p_j, \quad j = 0, \dots, m-1. \quad (1.32)$$

Jos sprendimui naudojami tiesinės algebros metodai - sprendinys yra koeficientai $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$.

Pastebėję, kad funkcijos reikšmių seka $f(0), f(h), f(2h), \dots, h \in R$, sudaro algebrinę progresiją,

kaip ir koeficientai p_j , tą patį algoritmą galime naudoti ir funkcijos $f(x) = \sum_{r=1}^m \mu_r e^{\lambda_r x}$ išraiškai rasti,

kai žinoma ką tik paminėta šios funkcijos reikšmių seka $f(0), f(h), f(2h), \dots, f(nh)$, $n > m$; $n, m \in N$.

Ši seka sudaro algebrinę progresiją kaip ir $f(x)$ Teiloro eilutės koeficientai, nes

$$f(kh) = \sum_{r=1}^m \mu_r e^{\lambda_r kh} = \sum_{r=1}^m (\mu_r e^{\lambda_r k})^h = \sum_{r=1}^m \mu_r \Lambda_r^k, \quad \text{čia } e^{\lambda_r h} = \Lambda_r.$$

Tada Vietoje Teiloro eilutės koeficientų vektoriaus $\vec{p} = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ paėmę funkcijos $f(x)$ reikšmių vektorių

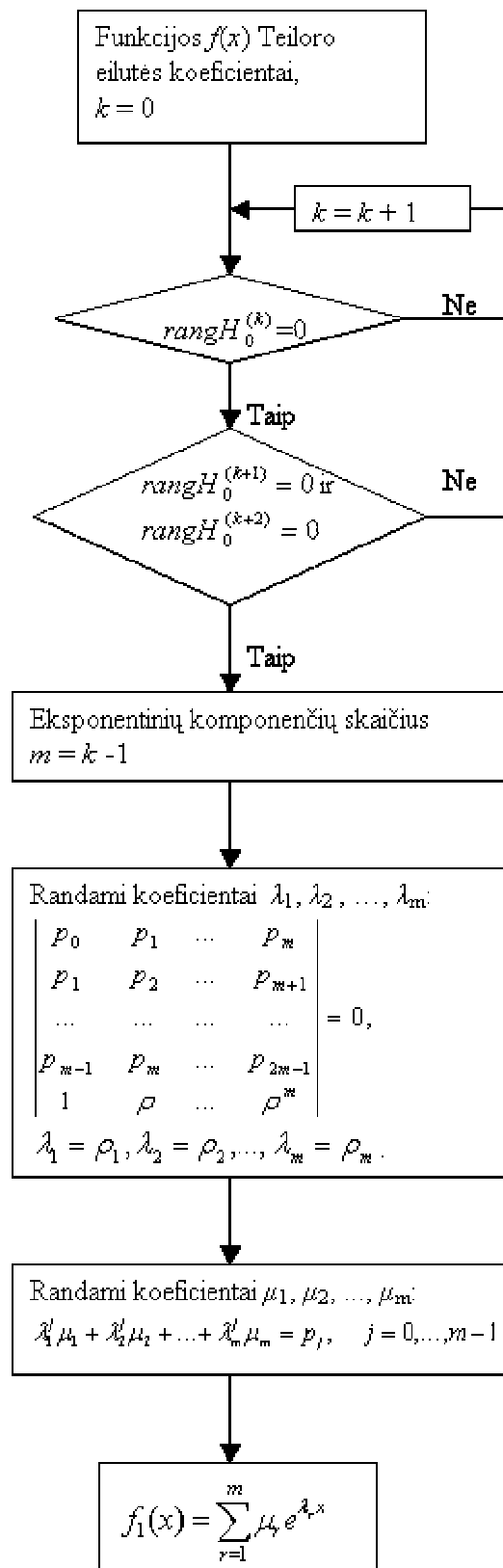
$$\vec{y} = (y_0, y_1, \dots, y_n) = (f(0), f(h), f(2h), \dots, f(nh)), \quad n > m; \quad n, m \in N$$

ir jam pritaikę anksčiau aprašytus skaičiavimus, galime rasti koeficientus m , $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$

ir $\vec{\Lambda} = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_m)$. Koeficientai $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ randami kompleksinių skaičių aibėje

naudojantis sąryšiu $\lambda_r = \text{Ln}(\Lambda_r)$, $r = 1, 2, \dots, m$. Čia $\text{Ln}(\Lambda_r) = \ln|\Lambda_r| + i(\arg \Lambda_r + 2\pi l)$, $l \in Z$.

Parametras l parenkamas eksperimentiškai ir priklauso nuo žingsnio h pasirinkimo. Tačiau daugumai atvejų $l = 0$.



1.3 pav. Funkcijos reišimo eksponenčių suma algoritmo schema

1.3.2. SKAIČIAVIMO PAVYZDYS

Pateiksime pavyzdį, iliustruojantį šio algoritmo veikimą funkcijai, kurios išraiška ir yra baigtinė eksponenčių suma. Šios funkcijos Teiloro eilutės koeficientams bei reikšmėms tam tikruose taškuose pritaikius anksčiau aprašytą algoritmą, gauti rezultatai lyginami su pradine funkcijos išraiška [8].

1) Tegul duota pradine funkcija $f_1(x)$, išreiškiama 10 eksponentinių funkcijų suma:

$$f_1(x) = 0.093e^x - 7\frac{1}{5}e^{-0.2x} - 20.124e^{2.13x} + 5\frac{1}{12}e^{2\frac{7}{20}x} - \cos(\sqrt{2})e^{-0.1e^{\sqrt{2}x}} - \\ - 0.082e^{0.06x} + \sqrt{7}e^{-0.7x} + 0.175e^{0.801x} + \frac{1}{2}\pi e^{-0.914x} + \sqrt{2}\sqrt{\pi}e^{-2.18\sqrt{5}x}.$$

Jos Makloreno eilutė yra

$$f_2(x) = -13.702 - 60.031x - 21.811x^2 + \dots + 0.002x^{20} + O(x^{21}).$$

Pasinaudoję aukščiau aprašytu algoritmu, šią eilutę vėl išreiškę eksponenčių suma – gauname funkciją $f_3(x)$:

$$f_3(x) = -0.082e^{0.06x} + 0.175e^{0.801x} + 0.093e^x + 1.144e^{1.275x} - 20.124e^{2.314x} - \\ - 1.476e^{-0.2x} - 0.156e^{-0.411x} + 2.646e^{-0.7x} + 1.571e^{-0.914x} + 2.507e^{-4.875x}.$$

Čia skaičiavimams atlikti ėmėme $\varepsilon = 10^{-70}$. Pastebėsime, kad skirtumai tarp atitinkamų $f_1(x)$ ir $f_3(x)$ koeficientų μ_k ir λ_k (algoritmo absoliutinės paklaidos) nedidesni nei 10^{-70} .

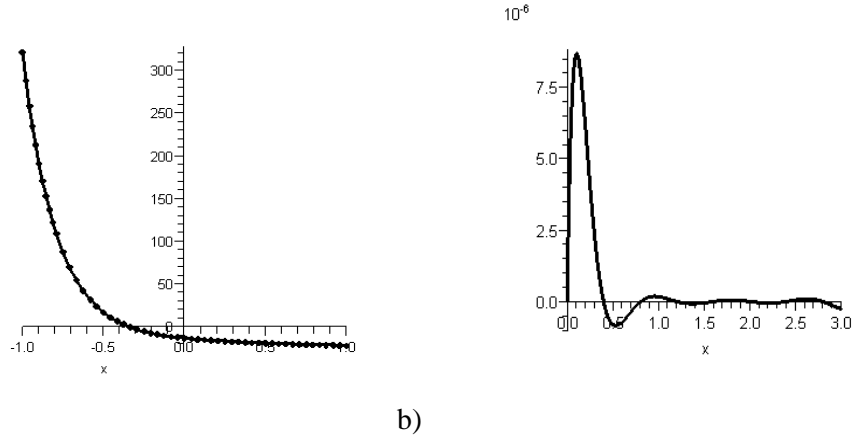
2) Tarkime, kad duotos tos pačios funkcijos $f_1(x)$ reikšmės taškuose $x = 0, h, 2h, \dots, 10h$, $h = 0.4$. Šiuo atveju, pasinaudojus pateiktu algoritmu, vėl gaunamas $f_1(x)$ eksponentinės išraiškos artinys – jo koeficientai skiriasi nuo pradinių ne daugiau nei 10^{-68} .

Pastebėję, kad šiame pavyzdyje determinantai $\det H_0^{(k)}$ monotoniškai artėja prie nulio, skaičiavimus nutraukiame anksčiau, t.y. sąlygoje $\det H_0^{(m+r)} < \varepsilon$, $r = m+1, m+2, m+3$ imame $\varepsilon = 10^{-5}$, o ne 10^{-70} , kaip anksčiau. Taip randama paprastesnė funkcijos $f_3(x)$ išraiška – $f_4(x)$ tik su 5 eksponenčių suma:

$$f_4(x) = 2.51e^{-4.88x} + 3.67e^{-0.83x} - 20.65e^{0.3x} + 0.55e^{1.19x} + 0.62e^{1.31x}.$$

Šios funkcijos reikšmės intervale $(-0,25; 3)$ yra gana artimos (paklaida neviršija 10^{-6}) pradinės funkcijos $f_1(x)$ reikšmėms. Paveiksluose pateikiami funkcijų $f_1(x)$ ir $f_4(x)$ grafikai kai $x \in [-1; 1]$ (pav.

1) bei absoliutinių paklaidų funkcijos $f_5(x) = f_1(x) - f_4(x)$ grafikas (pav. 2), kai $x \in [0; 3]$.



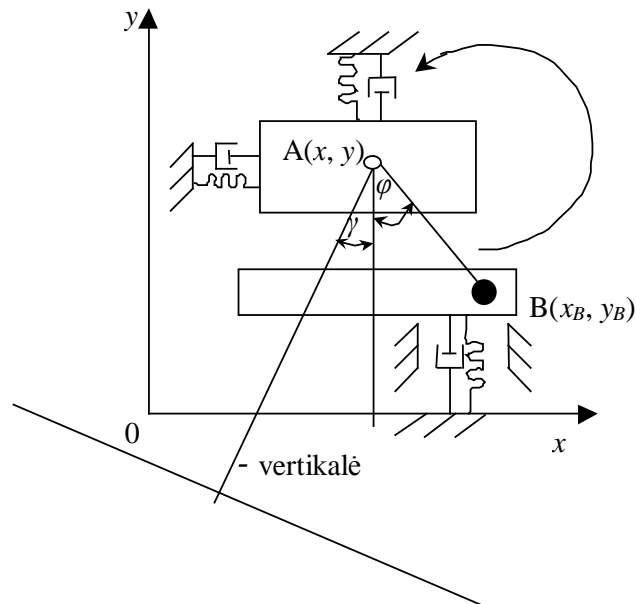
1.4 pav. a) Funkcijos $f_1(x)$ ir $f_2(x)$, b) paklaidų funkcija $f_1(x) - f_2(x)$

Kai $x < 0$, didėjant $|x|$ neaprėžtai auga ne tik pradinės funkcijos $f_1(x)$ reikšmės, bet ir absoliutinių paklaidų $f_1(x) - f_2(x)$ dydžiai.

1.4 MECHANINIŲ VIRPESIŲ SISTEMA

Šiame skyriuje pateikiamas mechaninių virpesių sistemos modelis. Šį modelį aprašančias diferencialines lygtis sudarė akademikas K. Ragulskis.

Sistemos modelis (1.5 pav.) susideda iš korpuso ir neišsverto rotoriaus. Korpusas pritvirtintas prie nejudančio pagrindo tampriais bei sklaidos elementais pagal ašis Ox ir Oy .



1.5 pav. Virpesių sistemos modelis

Sistemos kinetinė ir potencinė energija bei disipatyvinė funkcija atitinkamai lygios:

$$\begin{aligned} T &= \frac{mv^2}{2} + \frac{I\dot{\varphi}^2}{2}, \\ \Pi &= \frac{C\Delta^2}{2}, \\ D &= \frac{Hv^2}{2}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Pažymėkime: $x_B = x + r \sin \varphi$, $y_B = y - r \cos \varphi$, $r = AB$, $m_x = m_{x_0} + m$, $m_y = m_{y_0} + m$, $I = I_0 + mr^2$.

Tuomet

$$\begin{aligned} 2T &= m_{x_0} \dot{x}^2 + m_{y_0} \dot{y}^2 + I_0 \dot{\varphi}^2 + m(\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2), \\ 2\Pi &= C_x x^2 + C_y y^2 + C(r \cos \varphi)^2 + 2mgr[1 - \cos(\varphi + \gamma)], \\ 2D &= H_x \dot{x}^2 + H_y \dot{y}^2 + Hr^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + H_\varphi \dot{\varphi}^2, \end{aligned}$$

$$\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + 2r\dot{\varphi}(\dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi),$$

$$2T = m_x \dot{x}^2 + m_y \dot{y}^2 + I\dot{\varphi}^2 + 2mr\dot{\varphi}(\dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi).$$

Sistemos judesio diferencialinės lygtys yra tokio pobūdžio:

$$\begin{aligned} I(x) + \Pi'_x + D'_x &= F_x, \\ I(y) + \Pi'_y + D'_y &= F_y, \\ I(\varphi) + \Pi'_\varphi + D'_\varphi &= M_\varphi. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Čia

$$\begin{aligned} T'_x &= m_x \dot{x} + mr\dot{\varphi} \cos \varphi, & I(x) &= m_x \ddot{x} + mr(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi), \\ T'_y &= m_y \dot{y} + mr\dot{\varphi} \sin \varphi, & I(y) &= m_y \ddot{y} + mr(\ddot{\varphi} \sin \varphi - \dot{\varphi}^2 \cos \varphi), \\ T'_\varphi &= mr\dot{\varphi}(-\dot{x} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi), & I(\varphi) &= I\ddot{\varphi} + mr(\ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi); \\ T'_\varphi &= I\dot{\varphi} + mr(\dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi); \\ \Pi'_x &= C_x x, & D'_x &= H_x \dot{x}, \\ \Pi'_y &= C_y y, & D'_y &= H_y \dot{y}, \\ \Pi'_\varphi &= -Cr^2 \cos \varphi \sin \varphi + mgr \sin(\varphi + \gamma), & D'_\varphi &= Hr^2 \dot{\varphi} \sin^2 \varphi + H_\varphi \dot{\varphi}, \end{aligned}$$

Sistemos dinaminės charakteristikos skaičiuojamos taip:

$$\text{vidutinis greitis} - \bar{\varphi} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \dot{\varphi} dt,$$

netolygumo koeficientas - $\delta\dot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}_{\max} - \dot{\varphi}_{\min}}{\dot{\varphi}_{\max} + \dot{\varphi}_{\min}},$

išorinių jėgų vidutinis darbas - $A_v = \int_t^{t+T} (F_x \dot{x} dt + F_y \dot{y} dt),$ (1.35)

naudingas sistemos darbas - $A_n = \int_t^{t+T} M_\varphi \dot{\varphi} dt,$

disipatyvinių jėgų darbas - $A_d = \int_t^{t+T} (H_x \dot{x}^2 + H_y \dot{y}^2 + Hr^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + H_\varphi \dot{\varphi}^2) dt,$

naudingo veiksmo koeficientas - $\eta = \frac{A_n}{A_v} = \frac{A_n}{A_n + A_d}.$

Vėl pažymėkime:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{x}{r}, & f_x &= \frac{F_x}{rm_x}, & p_x^2 &= \frac{C_x}{m_x}, & h_x &= \frac{H_x}{m_x}, & h_\varphi &= \frac{H_\varphi}{I}, & \sigma_1 &= \frac{Cr^2}{I}, \\ \beta_2 &= \frac{y}{r}, & f_y &= \frac{F_y}{rm_y}, & p_y^2 &= \frac{C_y}{m_y}, & h_y &= \frac{H_y}{m_y}, & h &= \frac{Hr^2}{I}, & \sigma_2 &= \frac{I}{m_x r}, \\ \mu_{yx} &= \frac{m_y}{m_x}, & \mu_{0x} &= \frac{m}{m_x}, & \mu &= \frac{mr^2}{I}, & g^* &= \frac{g}{r}, & m_\varphi &= \frac{M_\varphi}{I}. \end{aligned}$$

Tada iš (1.34) gauname dinaminę sistemą aprašančias lygtis:

$$\begin{cases} \ddot{\beta}_1 + \mu_{0x} \ddot{\varphi} \cos \varphi = F_{\beta_1}, \\ \mu_{yx} \ddot{\beta}_2 + \mu_{0x} \ddot{\varphi} \sin \varphi = F_{\beta_2}, \\ \ddot{\beta}_1 \mu \cos \varphi + \ddot{\beta}_2 \mu \sin \varphi + \ddot{\varphi} = F_\varphi; \end{cases} \quad (1.36)$$

kur

$$\begin{aligned} F_{\beta_1} &= f_x + \mu_{0x} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi - p_x^2 \beta_1 - h_x \dot{\beta}_1, \\ F_{\beta_2} &= f_y - \mu_{0x} \dot{\varphi}^2 \cos \varphi - p_y^2 \beta_2 - h_y \dot{\beta}_2, \\ F_\varphi &= m_\varphi + \sigma_1 \cos \varphi \sin \varphi - \mu g^* \sin(\varphi + \gamma) - h \dot{\varphi} \sin^2 \varphi - h_\varphi \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Čia φ yra rotoriaus sukimosi kampas, β_1 ir β_2 - sistemos nuokrypiai nuo pusiausvyros padėties atitinkamai pagal Ox ir Oy ašis, h_x, h_y, h_φ, h - sklaidos koeficientai, μ_{x0}, μ_{xy} - redukuotos kūno masės, f_x, f_y - tašką A veikiančios jėgos, p_x, p_y - sistemos savieji dažniai ašių Ox ir Oy atžvilgiu, σ_1, σ_2 - standumo koeficientai, μ - sistemos masė, koncentruota taške B, g^* - laisvo kritimo pagreitis, γ - kampas tarp ašies Oy ir vertikalės, m_φ - rotoriaus sukimosi momentas.

Sistemos dinaminės charakteristikos tada gali būti skaičiuojamos pagal šias formules:

$$\begin{aligned}
A_v^* &= m_x r^2 A_v = \int_t^{t+T} (f_x \dot{\beta}_1 + f_y \dot{\beta}_2) dt, \\
A_n^* &= m_x r^2 A_n = \int_t^{t+T} m_\phi dt, \\
A_d^* &= m_x r^2 A_d = \int_t^{t+T} (h_x \dot{\beta}_1^2 + h_y \dot{\beta}_2^2 + \sigma_2 h \dot{\phi}^2 \sin \phi + \sigma_2 h_y \dot{\phi}^2) dt, \\
\bar{\phi} &= \int_t^{t+T} \dot{\phi} dt, \quad \delta\phi = \frac{\dot{\phi}_{\max} - \dot{\phi}_{\min}}{\dot{\phi}_{\max} + \dot{\phi}_{\min}}, \\
\eta &= \frac{A_n}{A_v} = \frac{A_n}{A_n + A_d}.
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Sistemos parametrai turi tenkinti tokias sąlygas:

$$\begin{aligned}
F_x &= F_{x_0} \cos \omega t, & \text{arba} & & f_x &= f_{x_0} \cos \omega t, \\
F_y &= F_{y_0} \sin \omega t, & & & f_y &= f_{y_0} \sin \omega t, \\
\mu_{0x} &\in (0.1; 1.0), & p_x^2 &\cong 4, & h_x &\cong 0.1, & h_\phi &\cong 0.1, & \sigma_1 &\in (0.1; 2.0), \\
\mu &\in (0.5; 1.0), & p_y^2 &\cong 9, & h_y &\cong 0.1, & h &\cong 0.1, & \sigma_2 &\in (0.2; 3.0), \\
\mu_{yx} &= 1, & g^* &\cong 10, & m_\phi &= -m_0 \cdot 1(\dot{\phi}), & 1(\dot{\phi}) &= \begin{cases} 1, \text{ kai } \dot{\phi} > 0; \\ 0, \text{ kai } \dot{\phi} \leq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

2. TIRIAMOJI DALIS

2.1 SISTEMOS SPRENDIMAS OPERATORINIŲ IR RUNGĖS-KUTOS METODAIS

Šiame darbe mechaninių virpesių sistemą aprašančioms lygtims spręsti buvo naudojama *Maple* komanda *dsolve*, realizuojanti Felbergo ketvirtos - penktos eilės Rungės-Kutos metodą, bei anksčiau aprašyto operatorinio metodo, leidžiančio gauti polinominę sprendinio išraišką, kompiuterinę realizaciją. Visų šiam darbui sukurtų *Maple* programų tekstai pateikti priede.

Norint taikyti operatorinį lygčių sprendimo metodą, reikia, kad lygčių sistema būtų užrašyta (1.11) pavidalu:

$$\begin{cases} x_t'' = P(t, x, x_t', y, y_t', \varphi, \varphi_t'), \\ y_t'' = Q(t, x, x_t', y, y_t', \varphi, \varphi_t'), \\ \varphi_t'' = R(t, x, x_t', y, y_t', \varphi, \varphi_t'). \end{cases}$$

Šią išraišką randame taikydami Kramerio formules:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \mu_{0x} \cos \varphi \\ 0 & \mu_{yx} & \mu_{0x} \sin \varphi \\ \mu \cos \varphi & \mu \sin \varphi & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_{\beta_1} = \begin{vmatrix} F_{\beta_1} & 0 & \mu_{0x} \cos \varphi \\ F_{\beta_2} & \mu_{yx} & \mu_{0x} \sin \varphi \\ F_{\varphi} & \mu \sin \varphi & 1 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{\beta_2} = \begin{vmatrix} 1 & F_{\beta_1} & \mu_{0x} \cos \varphi \\ 0 & F_{\beta_2} & \mu_{0x} \sin \varphi \\ \mu \cos \varphi & F_{\varphi} & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_{\varphi} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & F_{\beta_1} \\ 0 & \mu_{yx} & F_{\beta_2} \\ \mu \cos \varphi & \mu \sin \varphi & F_{\varphi} \end{vmatrix},$$

$$\text{ir } \ddot{\beta}_1 = \frac{\Delta_{\beta_1}}{\Delta}, \quad \ddot{\beta}_2 = \frac{\Delta_{\beta_2}}{\Delta}, \quad \ddot{\varphi} = \frac{\Delta_{\varphi}}{\Delta}.$$

Pateiksime pavyzdį, iliustruojantį metodo pasirinkimo įtaką skaičiavimo laikui ir sprendinio tikslumui.

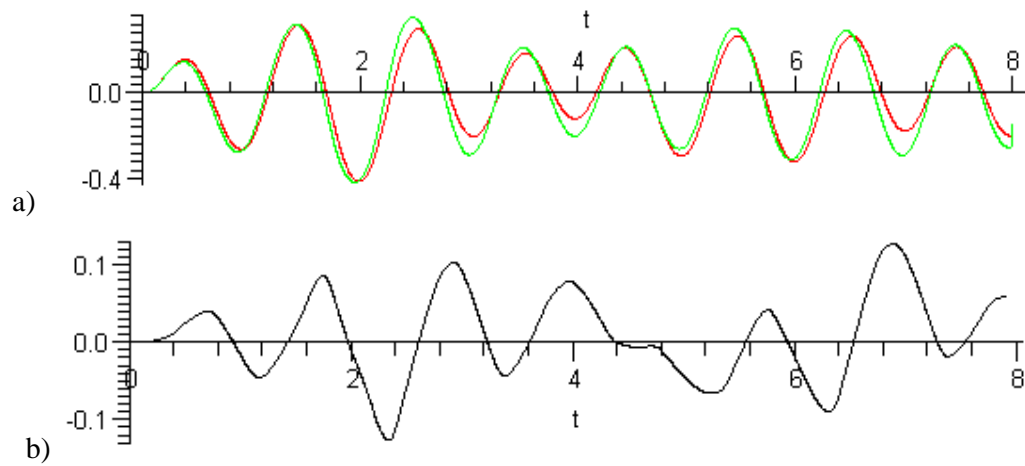
Buvo sprendžiama (1.36) diferencialinių lygčių sistema su nulinėmis pradinėmis sąlygomis ir tokiomis parametru reikšmėmis:

$$f_{x_0} = 2.5, \quad f_{y_0} = 0.5, \quad \varpi = 2\pi, \quad \gamma = 0, \quad \sigma_1 = 1, \quad g^* = 10, \quad m_0 = 0., \quad \mu_{0x} = 0.5,$$

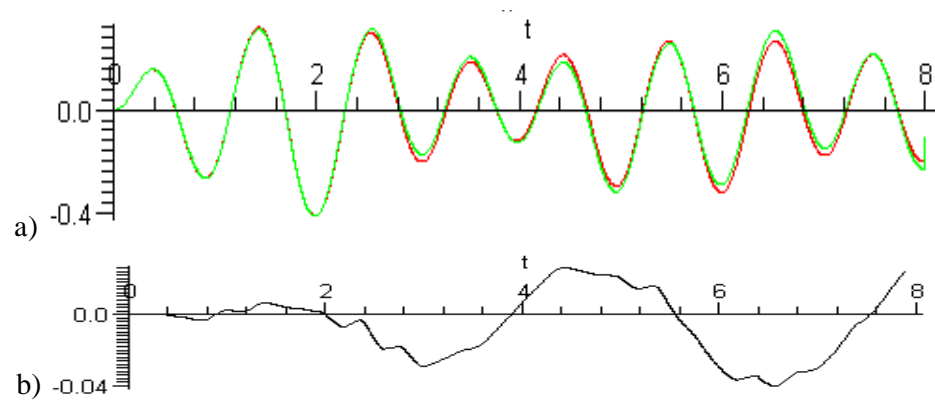
$$\mu = 1, \quad \mu_{yx} = 1, \quad p_x^2 = 4, \quad p_y^2 = 9, \quad h_x = 0.1, \quad h_y = 0.1, \quad h_{\varphi} = 0.1, \quad h = 0.1.$$

Pasirinktas operatorinio metodo žingsnis (atstumas tarp taškų, kuriuose, konstruojant sprendinį, sujungiamos gretimos jo dalys) lygus 0.2.

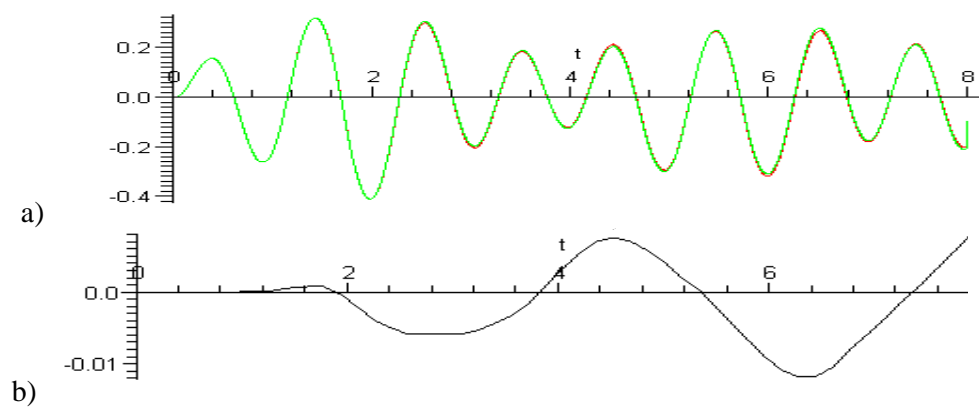
Operatorinio metodo sprendinių buvo ieškoma keičiant sprendinį sudarančių daugianarių eilę. 2.1, 2.2, ir 2.3 paveiksluose pavaizduoti sprendiniai β_1 (virpesių sistemos nuokrypis nuo pusiausvyros padėties pagal ašį Ox). Paveikslų a) dalyse raudonai nubrėžti Rungės-Kutos metodo sprendiniai, o žaliai – operatorinio metodo sprendiniai. b) dalyse nubrėžtas skirtumas tarp šių dviejų sprendinių grafikas



2.1 pav. Operatoriniu ($n = 4$) ir Rungės-Kutos metodais gautų sprendinių palyginimas: a) sprendinių grafikai, b) skirtumo tarp sprendinių grafikas



2.2 pav. Operatoriniu ($n = 6$) ir Rungės-Kutos metodais gautų sprendinių palyginimas: a) sprendinių grafikai, b) skirtumo tarp sprendinių grafikas



2.3 pav. Operatoriniu ($n = 10$) ir Rungės-Kutos metodais gautų sprendinių palyginimas: a) sprendinių grafikai, b) skirtumo tarp sprendinių grafikas

2.1 lentelėje pateikiamos didžiausios skirtumo tarp sprendinių reikšmės tirtame intervale [0;8] bei operatorinio metodo skaičiavimo laikas. Didinant sprendinį sudarančių daugianarių laipsnį, operatorinio metodo sprendinys artėja prie Rungės-Kutos metodu gauto sprendinio, tačiau tuo pačiu auga skaičiavimo laikas. Sprendžiant sistemą Felbergo Rungės-Kutos metodu (naudojant standartinę *Maple* šio metodo realizaciją), skaičiavimai užtrunka 0.1 s.

2.1 lentelė

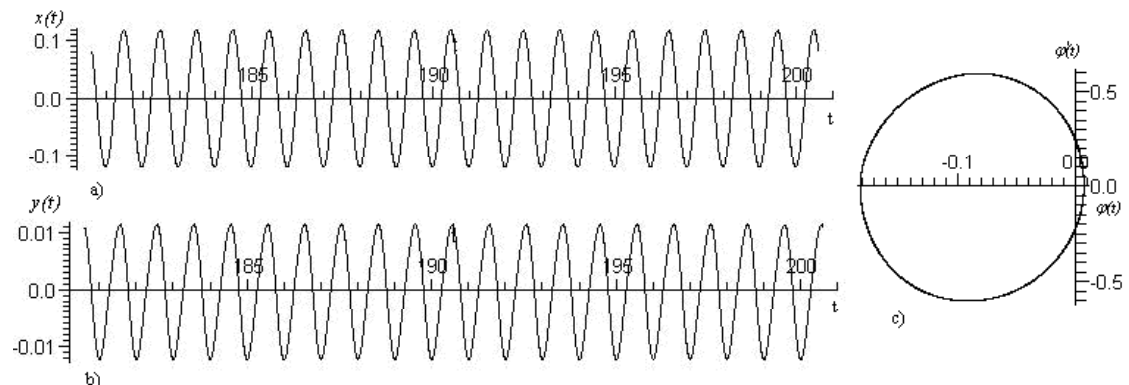
Operatorinio ir Rungės-Kutos metodų palyginimas

Daugianarių laipsnis n	Operatorinio metodo skaičiavimo laikas	Didžiausias skirtumas tarp sprendinių intervale [0;8]
4	1.5 s	0.14
6	15.4 s	0.04
9	281.4 s	0.021
10	826.9 s	0.012

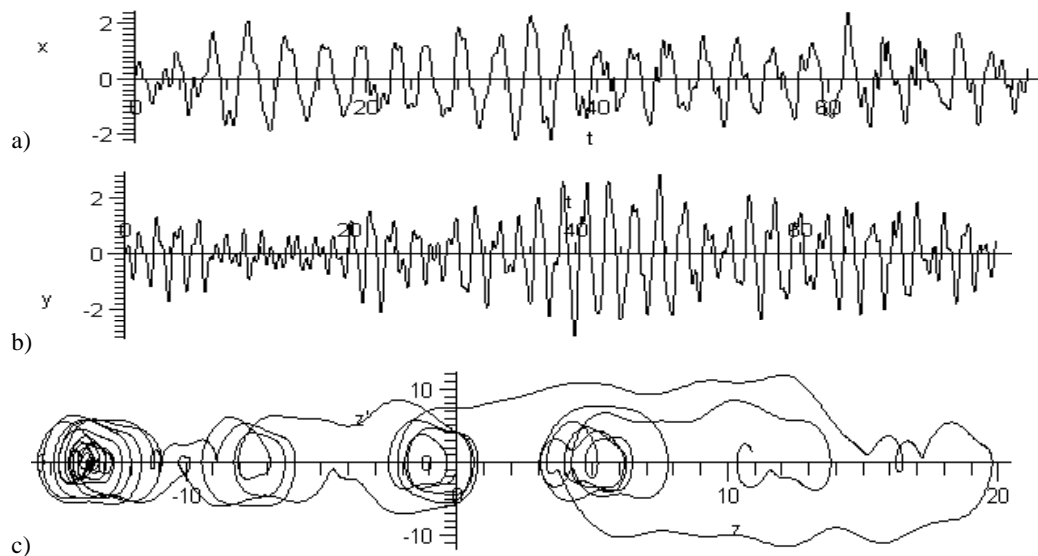
2.2 SISTEMOS SAVYBIŲ PRIKLAUSOMYBĖ NUO PARAMETRŲ

Sprendinio egzistavimo ir stabilumo sąlygos yra funkcijos nuo visų sistemos parametrų. Šiame darbe tyrėme sistemą veikiančių jėgų amplitudžių f_{x_0} ir f_{y_0} bei jų dažnio ϖ poveikį sistemos režimui, t.y. visų eksperimentų metu kiti parametrai liko pastovūs. Buvo pasirinktos nulinės pradinės uždavinio sąlygos, kurios taip pat nebuvo keičiamos.

2.4 paveiksle pavaizduoti nusistovėję sistemos (1.36) sprendiniai, gauti kai $f_{x_0} = 2.5$, $f_{y_0} = 0.5$ ir $\varpi = 2\pi$. Kai šie parametrai įgyja reikšmes $f_{x_0} = 10$, $f_{y_0} = 21$, $\varpi = 8$, sistema veikia chaotiniu režimu (2.5 pav.).

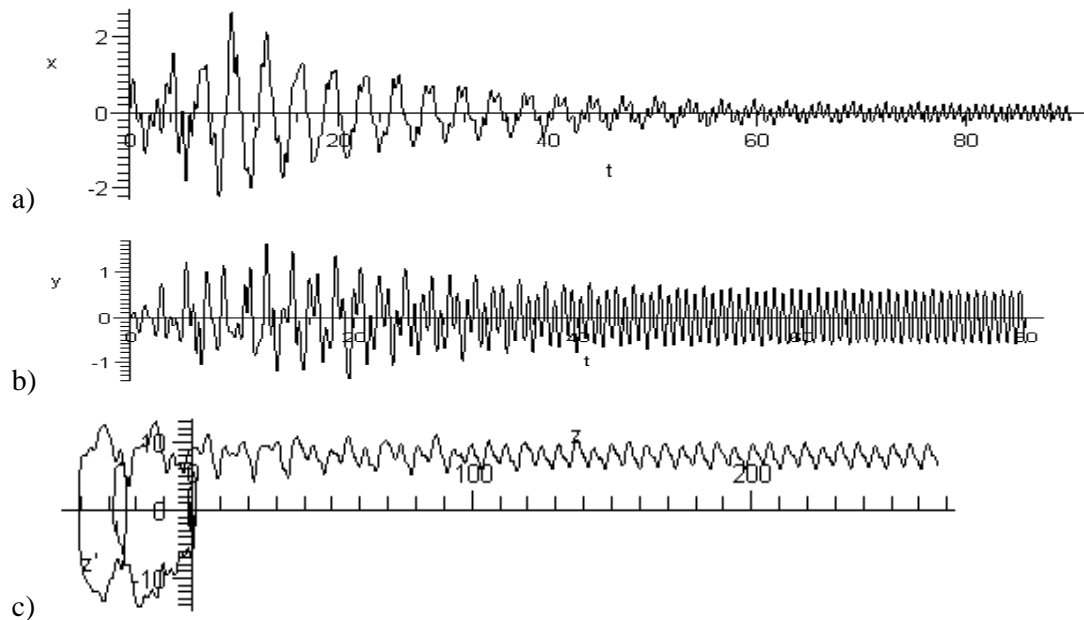


2.4 pav. Nusistovėjusio režimo pavyzdys: a), b) kūno virpesiai pagal ašis Ox ir Oy ; c) rotoriaus svyravimai fazinėje plokštumoje φ/φ



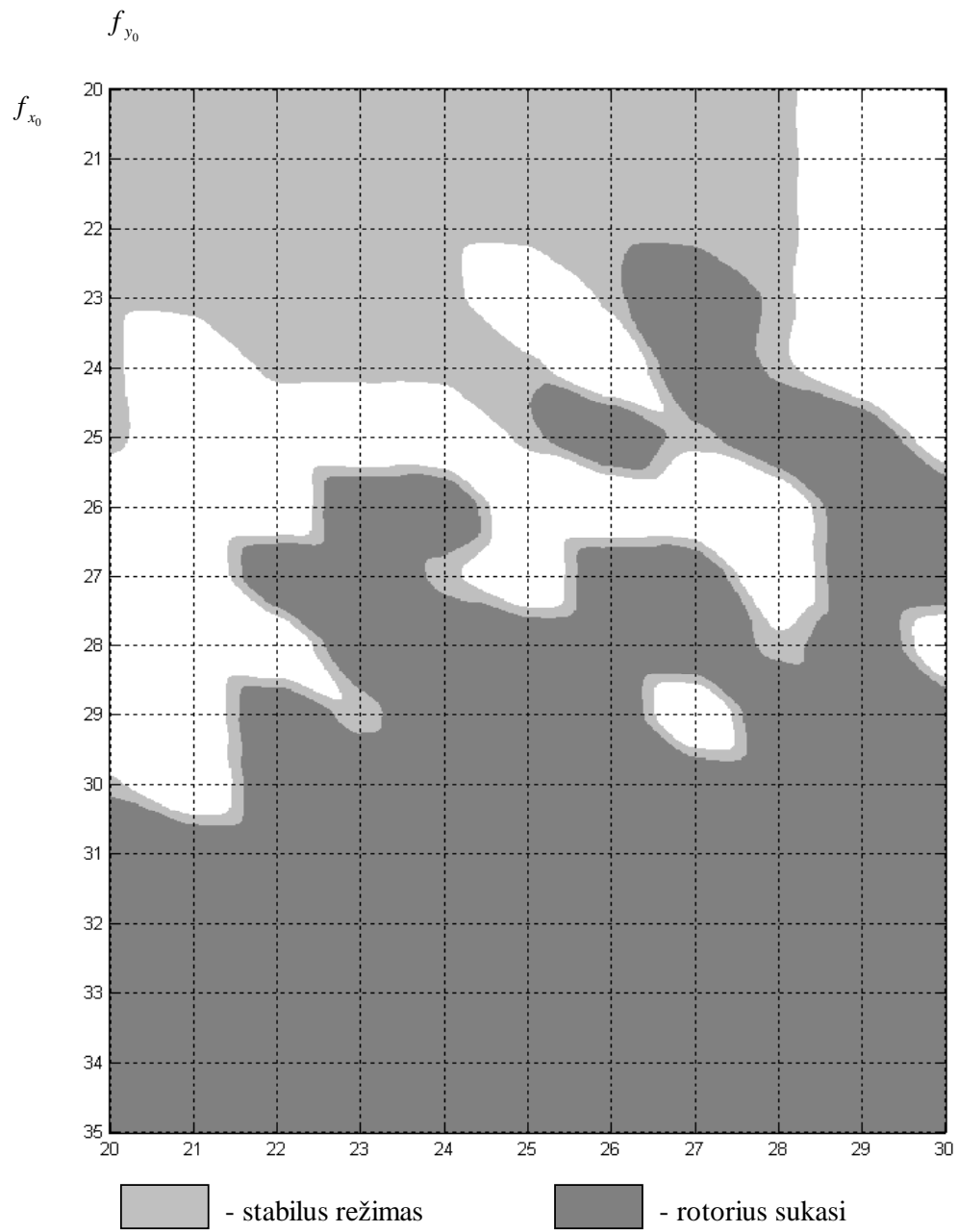
2.5 pav. Chaotinio režimo pavyzdys: a), b) kūno virpesiai pagal ašis Ox ir Oy ; c) rotoriaus svyravimai fazinėje plokštumoje φ/φ'

2.6 paveiksle pavaizduoti sprendiniai sistemos, kurios parametrai $f_{x_0} = 20$, $f_{y_0} = 10$, $\varpi = 8$ ir $\gamma = 0.6$ (t.y. mechaninė sistema yra pasvirusi pagal Ox ašį). Šiuo atveju nusistovėjusiame režime $\dot{\varphi} > 0$, t.y. rotorius ne svyruoja, o sukasi aplink tašką A.

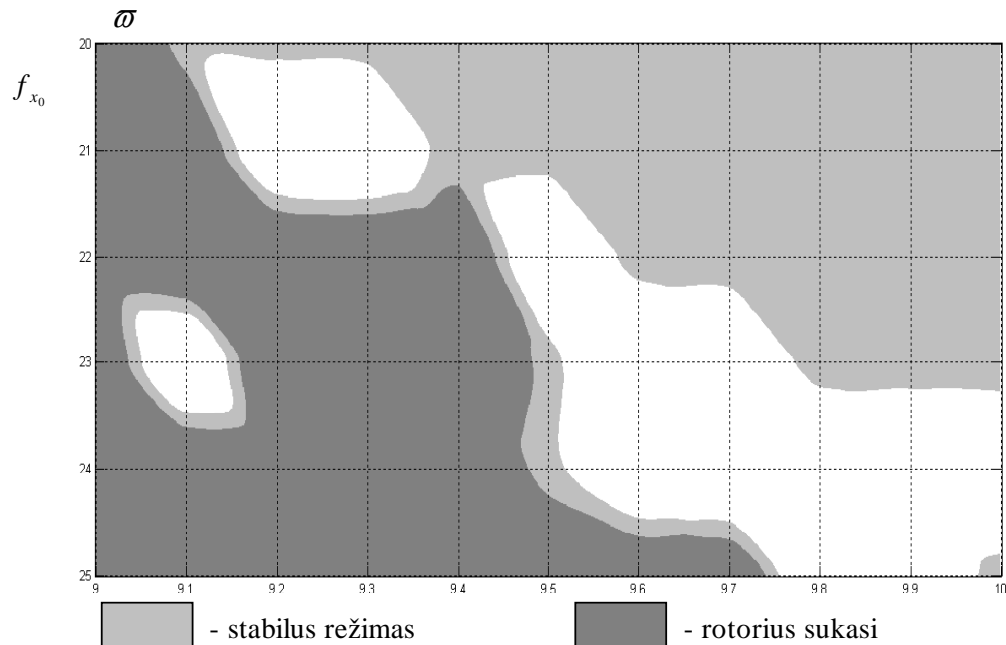


2.6 pav. Dar vieno režimo pavyzdys: a), b) kūno virpesiai pagal ašis Ox ir Oy ; c) rotoriaus svyravimai fazinėje plokštumoje φ/φ'

2.7 ir 2.8 paveiksluose pavaizduotos sprendinio stabilumo ir rotoriaus sukimosi sritys, kintant sistemą veikiančių išorinių jėgų amplitudėms f_{x_0} ir f_{y_0} (2.7 pav.) bei amplitudei f_{x_0} ir dažniui ϖ . Rotorius sukasi, jei nusistovėjusiame režime sukimosi (svyravimo) greitis $\dot{\varphi}(t) \geq 0$.



2.7 pav. Sistemos savybių priklausomybė nuo parametrų f_{x_0} ir f_{y_0}



2.8 pav. Sistemos savybių priklausomybė nuo parametrų f_{x_0} ir ϖ

2.3 SPRENDINIO REIŠKIMAS BAIGTINE EKSPONENČIŲ SUMA

Šiame skyriuje pateiksime keletą pavyzdžių, kuriuose baigtine eksponenčių suma aproksimuojami skirtingo tipo (1.36) sistemos sprendiniai.

Turint nusistovėjusį sistemos sprendinį, galima jam taikyti funkcijos reiškimo eksponenčių suma algoritmą, aprašytą 1.4 skyriuje. Jei sprendinys gautas operatoriniu metodu, eksponentinių funkcijų koeficientams skaičiuoti galima naudoti Teiloro eilutės koeficientus, o jei skaitiniu metodu – funkcijos reikšmių vektorių.

Nesunku pastebėti, jog taikant algoritmą funkcijos reikšmėms taškuose $0, zng, 2 \cdot zng, \dots, n \cdot zng$, didelę įtaką rezultatams turi žingsnio zng ir pradinio taško pasirinkimas.

1 Pavyzdys. Nagrinėkime sistemą (1.36) su parametrais $f_{x_0} = 2.5$, $f_{y_0} = 0.5$ ir $\varpi = 2\pi$. Šios sistemos sprendinio $\beta_1(t)$ grafikas pavaizduotas 2.4 pav., a).

Rungės-Kutos metodu gautam sistemos sprendiniams buvo taikomas reiškimo eksponentėmis algoritmas, keičiant žingsnį zng ir pradinį tašką. Paveikslai 2.9 ir 2.10 vaizduoja paklaidų funkcijas: skirtumus tarp sprendinio $\beta_1(t)$ ir jo aproksimacijos baigtine eksponenčių suma $f(t)$.

Pirmiausia buvo pasirinktas pradinis taškas $t = 99.926$ – funkcijos maksimumo taškas.

Kai $zng = 0.333$, gauta tokia sprendinio aproksimacija:

$$f(t) = -0.0874e^{-0.00062t+0.062} + (0.0480 + 0.0029i)e^{(-0.00015+6.28i)(t-99.99)} + (0.0480 - 0.0029i)e^{(-0.00015-6.28i)(t-99.99)}.$$

Pritaikius Eulerio formulę, funkciją $f(t)$ galima išreikšti taip:

$$f(t) = -0.0874 + 0.94\cos(6.28t) - 0.004\sin(6.28t).$$

Šiuo atveju aproksimavimo paklaida intervale $[90;120]$ neviršija 0.0025, o intervale $[100;110]$ – 0.001.

Kai $zng = 0.666$, $f(t)$ turi tokią išraišką:

$$f(t) = -0.0874e^{-0.00021t+0.0207} + (0.0475 + 0.00286i)e^{(-0.00021+6.28i)(t-99.99)} + (0.0475 - 0.00286i)e^{(-0.00021-6.28i)(t-99.99)}.$$

Didžiausias skirtumas tarp šios funkcijos ir lygčių sistemos sprendinio intervale $[90;120]$ – 0.01.

Kai $zng = 2.333$,

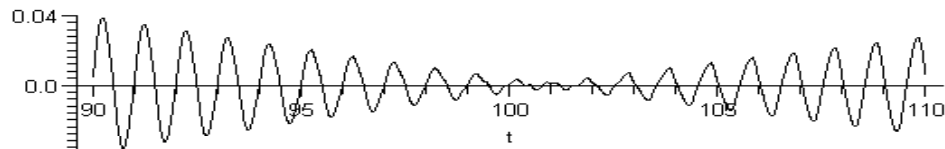
$$f(t) = -0.0874e^{-0.00062t+0.062} + (0.0480 + 0.0029i)e^{(-0.00015+6.28i)(t-99.99)} + (0.0480 - 0.0029i)e^{(-0.00015-6.28i)(t-99.99)}.$$

Didžiausia paklaida intervale $[90;120]$ – 0.003.

Kai $zng = 0.43$,

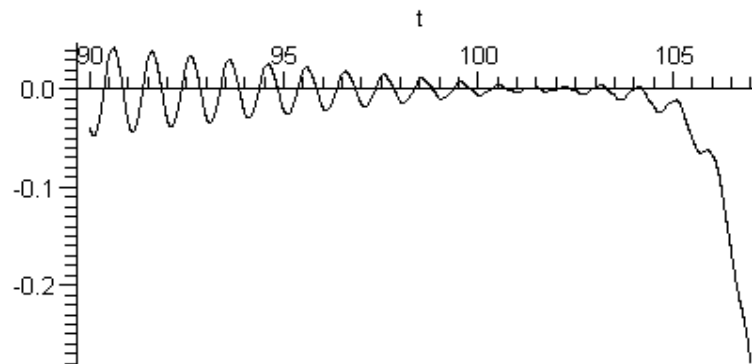
$$f(t) = -0.091e^{-0.0024t+0.24} + (0.048 - 0.0029i)e^{(-0.0000025+6.25i)(t-99.99)} + (0.048 + 0.0029i)e^{(-0.0000025-6.25i)(t-99.99)}.$$

Šiuo atveju paklaida intervale $[90;120]$ siekia net 0.04 (2.10 pav.).

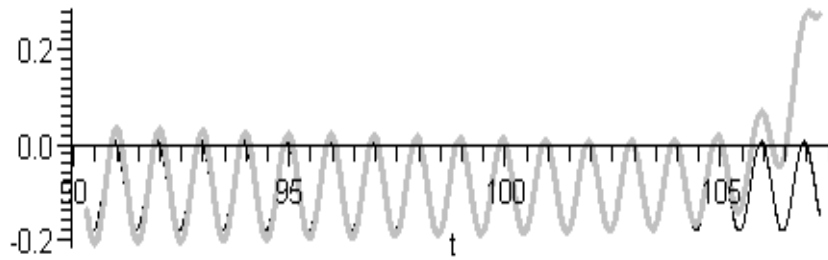


2.9 pav. Sprendinio aproksimavimo eksponenčių suma paklaida, $zng = 0.43$

Palikus tą patį žingsnį $zng = 0.43$, tačiau pakeitus pradinį tašką į $t = 100.3$, žymiai padidėja aproksimavimo paklaida, kai $t > 105$. 2.11 pav. pavaizduotas paklaidos grafikas, 2.11 pav. - funkcijų $\beta_I(t)$ ir $f(t)$ grafikai: $\beta_I(t)$ – juodos spalvos, $f(t)$ – pilkos spalvos grafikas.

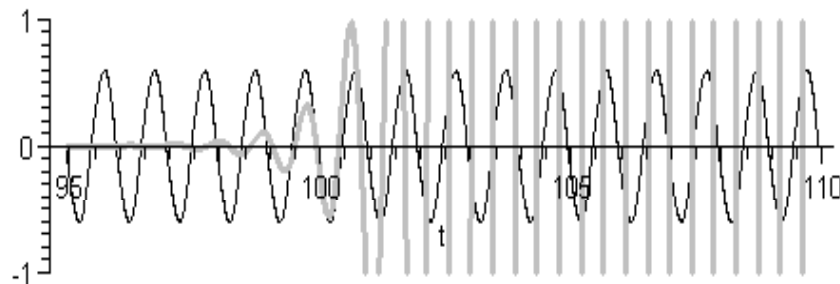


2.10 pav. Sprendinio aproksimavimo eksponenčių suma paklaida, $zng = 0.43$, prad. taškas $t = 100.3$



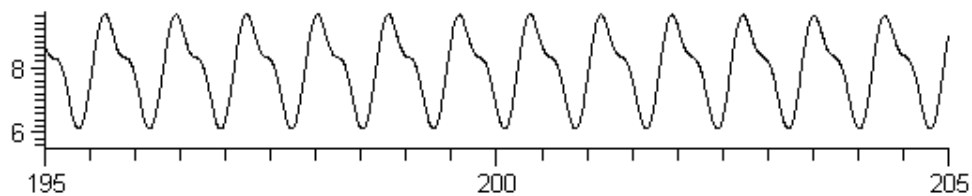
2.11 pav. Sprendinio aproksimavimas eksponenčių suma, $zng = 0.43$, pradinis taškas $t = 100.3$

Jei algoritmo žingsnis zng per mažas, nei vienam funkcijos periode negauname pakankamai tikslios aproksimacijos. Šį teiginį iliustruoja 2.11 pav. pavaizduoti funkcijų $\beta_1(t)$ ir $f(t)$ grafikai ($h = 0.01$), 2.12 pav. - funkcijų $\beta_1(t)$ ir $f(t)$ grafikai: $\beta_1(t)$ – juodos spalvos, $f(t)$ – pilkos spalvos grafikas.



2.12 pav. Sprendinio aproksimavimas eksponenčių suma, $zng = 0.01$, pradinis taškas $t = 100.3$

2 Pavyzdys. Dabar imkime sistemą (1.36) su parametrais $f_{x_0} = 17$, $f_{y_0} = 16$ ir $\varpi = 8$. Šios sistemos sprendinio, gauto Rungės – Kutos metodu, $\dot{\phi}(t)$ grafikas pavaizduotas 2.13 pav.

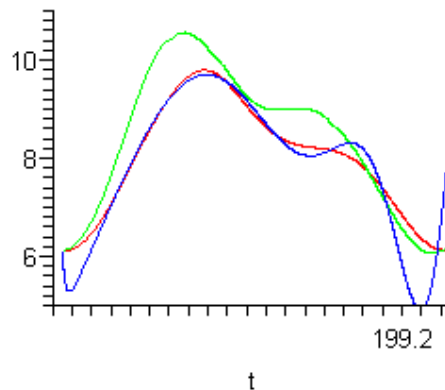


2.13 pav. Sprendinio $\dot{\phi}(t)$ grafikas

Sistema buvo spęsta dviem metodais: Rungės – Kutos bei operatoriniu. Spėdžiant lygtį operatoriniu metodu, kai aproksimuojančio daugianario laipsnis lygus 4, gauta tokia sprendinio išraiška intervale $[195; 196.2]$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -3.426 \cdot 10^{12} + 7.027 \cdot 10^{10} t - 5.407 \cdot 10^8 t^2 + 1.849 \cdot 10^6 t^3 - 2370. t^4 & t < 195.1 \\ 2.579 \cdot 10^{12} - 5.287 \cdot 10^{10} t + 4.063 \cdot 10^8 t^2 - 1.388 \cdot 10^6 t^3 + 1778. t^4 & t < 195.2 \\ 1.207 \cdot 10^{12} - 2.475 \cdot 10^{10} t + 1.903 \cdot 10^8 t^2 - 6.506 \cdot 10^5 t^3 + 833.9 t^4 & t < 195.3 \\ -2.202 \cdot 10^{12} + 4.507 \cdot 10^{10} t - 3.461 \cdot 10^8 t^2 + 1.181 \cdot 10^6 t^3 - 1512. t^4 & t < 195.4 \\ -3.089 \cdot 10^{12} + 6.323 \cdot 10^{10} t - 4.855 \cdot 10^8 t^2 + 1.658 \cdot 10^6 t^3 - 2122. t^4 & t < 195.6 \\ 5.873 \cdot 10^{12} - 1.200 \cdot 10^{11} t + 9.209 \cdot 10^8 t^2 - 3.137 \cdot 10^6 t^3 + 4010. t^4 & t < 195.7 \\ -1.416 \cdot 10^{12} + 2.889 \cdot 10^{10} t - 2.212 \cdot 10^8 t^2 + 7.530 \cdot 10^5 t^3 - 961.0 t^4 & t < 195.8 \\ -2.822 \cdot 10^{12} + 5.767 \cdot 10^{10} t - 4.417 \cdot 10^8 t^2 + 1.505 \cdot 10^6 t^3 - 1921. t^4 & t < 195.9 \\ 2.463 \cdot 10^{12} - 5.028 \cdot 10^{10} t + 3.849 \cdot 10^8 t^2 - 1.309 \cdot 10^6 t^3 + 1671. t^4 & t < 196.0 \\ 8.283 \cdot 10^{11} - 1.691 \cdot 10^{10} t + 1.295 \cdot 10^8 t^2 - 4.413 \cdot 10^5 t^3 + 563.4 t^4 & t < 196.1 \\ 8.283 \cdot 10^{11} - 1.691 \cdot 10^{10} t + 1.295 \cdot 10^8 t^2 - 4.413 \cdot 10^5 t^3 + 563.4 t^4 & otherwise \end{array} \right.$$

Paveiksle 2.14 Rungės – Kutos metodu gauto sprendinio grafikas nubrėžtas raudona spalva, o operatoriniu metodu gauto sprendinio grafikas – žalia spalva. Mėlyna spalva pavaizduota Rungės-Kutos sprendinio aproksimacija baigtine eksponenčių suma, kai aproksimavimo žingsnis $zng = 0.111$.

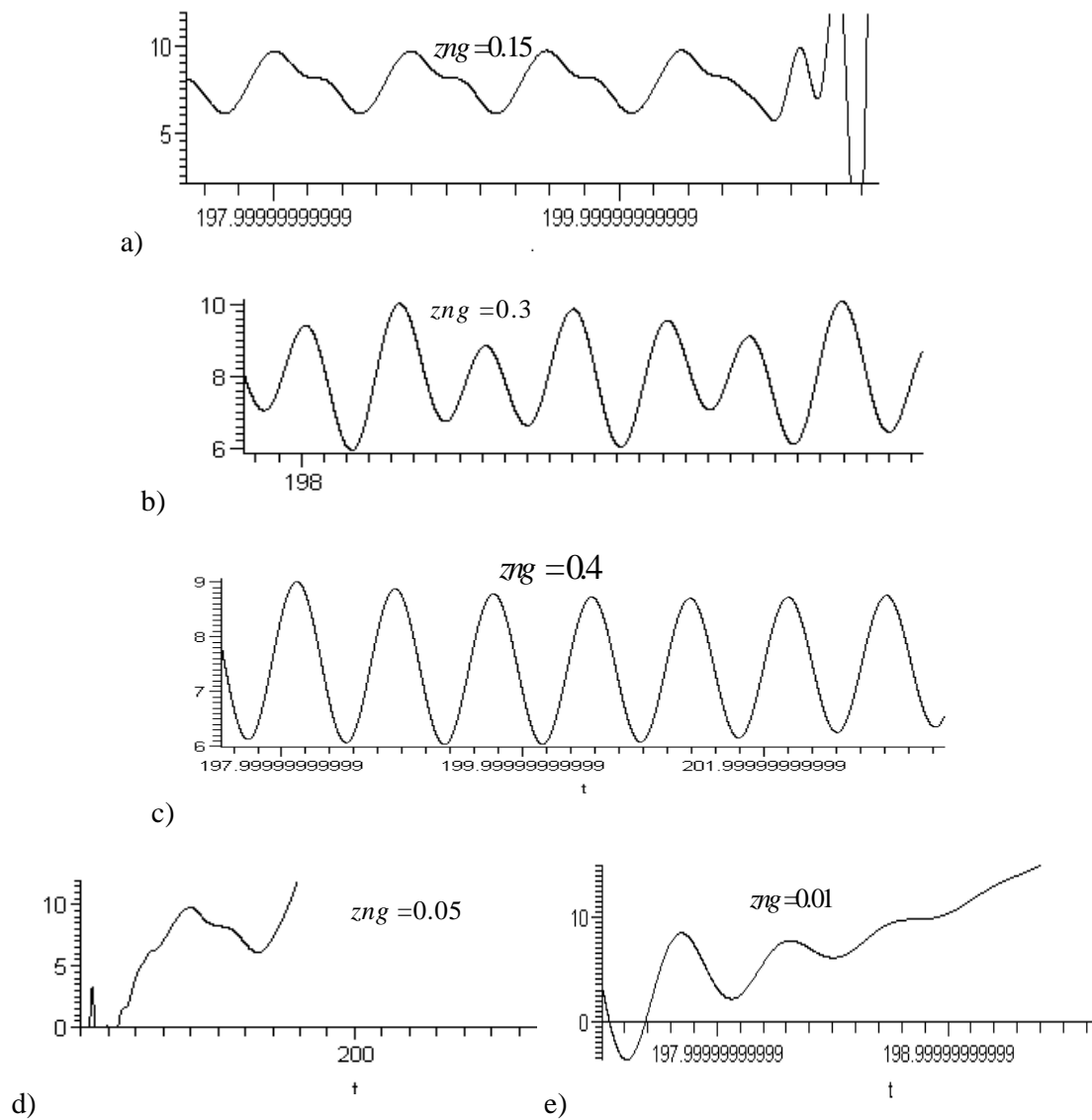


2.14 pav. Sprendinio $\phi(t)$ aproksimacijų palyginimas

Šiuo atveju Rungės - Kutos metodu gautą sprendinį aproksimuojančios funkcijos išraiška yra tokia:

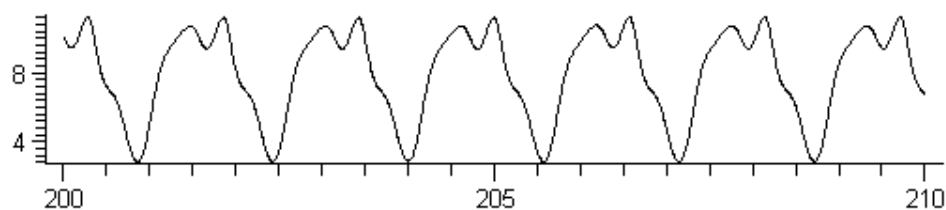
$$\begin{aligned} f = & -0.57 + 1.3 e^{(-160.t + 32000.)} + 11. e^{(6.3t - 1300.)} - 10. e^{(10.t - 2000.)} \\ & + 8.5 e^{(13.t - 2500.)} - 4.3 e^{(14.t - 2800.)} + 0.35 e^{(17.t - 3400.)} - 0.10 e^{(18.t - 3600.)} \\ & + 0.0010 e^{(21.t - 4200.)} \end{aligned}$$

Kaip ir pirmajame pavyzdyje, nesunku įsitikinti, jog sprendinį aproksimuojančios eksponenčių sumos išraiška priklauso nuo aproksimavimo žingsnio – atstumo tarp taškų, naudojamų skaičiavimams 2.15 paveiksle pavaizduoti skirtingų aproksimacijų grafikai. Matome, jog šįkart geriausia rinktis žingsnį, lygų 0.15 (2.15, a). Šios aproksimacijos paklaida intervale [198;199] neviršija 0.001.



2.15 pav. Sprendinio $\phi(t)$ apksimavimas eksponenčių suma, esant skirtingiems žingsniams

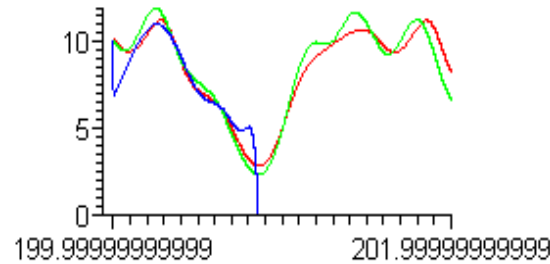
3 Pavyzdys. Tirkime atvejį, kai $f_{x_0} = 21$, $f_{y_0} = 16$ ir $\omega = 8$. Šios sistemos sprendinio, gauto Rungės – Kutos metodu, $\phi(t)$ grafikas pavaizduotas 2.16 pav.



2.16 pav. Sprendinio $\phi(t)$ grafikas

Vėl palyginkime operatoriniu metodu (kai aproksimuojančio polinomo laipsnis lygus 4) ir Rungės –Kutos metodu gautus sprendinius su sprendinio aproksimacija baigtine eksponenčių suma

(2.17 pav.). Čia Rungės - Kutos metodu gauto sprendinio grafikas nubrėžtas raudona spalva, operatoriniu metodu gauto sprendinio grafikas – žalia spalva, Rungės-Kutos sprendinio aproksimacija baigtine eksponenčių suma, kai aproksimavimo žingsnis $zng = 0.1$ - mėlyna spalva. Šiuo atveju, kai funkcijos grafikas sudėtingesnis, gaunamų aproksimacijų tikslumas mažesnis, arba funkcija gerai aproksimuojama tik trumpam intervale.



2.17 pav. Sprendinio $\dot{\varphi}(t)$ aproksimacijų palyginimas

Sprendinio $\dot{\varphi}(t)$ polinominė aproksimacija, gauta operatoriniu metodu:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -2.203 \cdot 10^{12} + 4.402 \cdot 10^{10} t - 3.299 \cdot 10^8 t^2 + 1.099 \cdot 10^6 t^3 - 1372. t^4 & t < 200.1 \\ -6.334 \cdot 10^{12} + 1.266 \cdot 10^{11} t - 9.495 \cdot 10^8 t^2 + 3.165 \cdot 10^6 t^3 - 3954. t^4 & t < 200.2 \\ 7.594 \cdot 10^{12} - 1.517 \cdot 10^{11} t + 1.136 \cdot 10^9 t^2 - 3.785 \cdot 10^6 t^3 + 4725. t^4 & t < 200.3 \\ -9.700 \cdot 10^{11} + 1.934 \cdot 10^{10} t - 1.446 \cdot 10^8 t^2 + 4.799 \cdot 10^5 t^3 - 597.9 t^4 & t < 200.4 \\ -3.636 \cdot 10^{12} + 7.259 \cdot 10^{10} t - 5.434 \cdot 10^8 t^2 + 1.808 \cdot 10^6 t^3 - 2255. t^4 & t < 200.6 \\ 1.972 \cdot 10^{12} - 3.930 \cdot 10^{10} t + 2.937 \cdot 10^8 t^2 - 9.761 \cdot 10^5 t^3 + 1216. t^4 & t < 200.7 \\ 1.564 \cdot 10^{12} - 3.119 \cdot 10^{10} t + 2.332 \cdot 10^8 t^2 - 7.754 \cdot 10^5 t^3 + 966.2 t^4 & t < 200.8 \\ -1.105 \cdot 10^{12} + 2.201 \cdot 10^{10} t - 1.643 \cdot 10^8 t^2 + 5.450 \cdot 10^5 t^3 - 678.2 t^4 & t < 200.9 \\ -1.024 \cdot 10^{12} + 2.040 \cdot 10^{10} t - 1.523 \cdot 10^8 t^2 + 5.054 \cdot 10^5 t^3 - 628.9 t^4 & t < 201.0 \\ -2.589 \cdot 10^{12} + 5.156 \cdot 10^{10} t - 3.849 \cdot 10^8 t^2 + 1.278 \cdot 10^6 t^3 - 1589. t^4 & t < 201.1 \\ -2.589 \cdot 10^{12} + 5.156 \cdot 10^{10} t - 3.849 \cdot 10^8 t^2 + 1.278 \cdot 10^6 t^3 - 1589. t^4 & otherwise \end{array} \right.$$

Sprendinio $\dot{\varphi}(t)$ aproksimacija baigtine eksponentinių funkcijų suma:

$$\begin{aligned}
f = & (-11.832 - 1.2206 I) e^{(13.335 t - 2667.1)} \\
& + (10.209 - 0.87465 I) e^{(5.6815 t - 1136.3)} + (-0.056999 \\
& + 0.027305 I) e^{((22.472 + 1.3358 I) (t - 200.))} + (24.717 \\
& + 2.2850 I) e^{(14.248 t - 2849.5)} \\
& + (-0.013115 - 0.0011013 I) \\
& e^{((23.443 - 0.45324 I) (t - 200.))} \\
& + (-0.39121 + 0.27236 I) e^{((20.876 + 1.9169 I) (t - 200.))} \\
& + (-4.1642 + 0.78330 I) e^{((18.866 + 1.9516 I) (t - 200.))} \\
& + (0.44275 + 0.20238 I) e^{(5.7377 \cdot 10^{-8} t - 0.000011475)} \\
& + (74.997 + 6.7339 I) e^{(16.550 t - 3309.9)} \\
& + (-35.539 - 15.683 I) e^{((16.574 + 1.1443 I) (t - 200.))} \\
& + (1.6374 + 1.9518 I) e^{(9.0056 t - 1801.1)} \\
& + (-3.9541 - 1.4087 I) e^{((18.866 - 1.9516 I) (t - 200.))} \\
& + (-0.34424 - 0.32578 I) e^{((20.876 - 1.9169 I) (t - 200.))} \\
& + (-0.013148 - 0.00080057 I) \\
& e^{((23.443 + 0.45324 I) (t - 200.))} \\
& + (-0.052254 - 0.035216 I) e^{((22.472 - 1.3358 I) (t - 200.))} \\
& + (-11.611 - 1.8909 I) e^{(11.351 t - 2270.2)} \\
& + (3.3071 - 0.019732 I) e^{(-1584.2 t + 3.1684 \cdot 10^5)} \\
& + (-37.194 + 9.2040 I) e^{((16.574 - 1.1443 I) (t - 200.))}
\end{aligned}$$

IŠVADOS

- 1) Rungės-Kutos ir operatoriniu metodu gaunami artimi sprendiniai, tačiau Rungės-Kutos metodas pasiekia pakankamą tikslumą per trumpesnį laiką.
- 2) Nusistovėjusį sistemos sprendinį galima įvertinti baigtine eksponenčių suma (paklaida neviršija 0.001).
- 3) Aproximavimo paklaidos priklauso nuo žingsnio, aproksimuojamos funkcijos ir skaičiavimo paklaidos.
- 4) Gautas sprendinių aproksimacijas eksponentinių funkcijų suma galima naudoti sistemos režimo kokybiniam tyrimui, kuris reikalingas prieš pradėdant kurti realų veikiančią mechanizmą.
- 5) Būtų įdomu palyginti šio darbo rezultatus su trigonometrinėmis aproksimacijomis, gautomis naudojant kitus metodus, pavyzdžiui, taikant diskrečiąją Furje transformaciją.

LITERATŪRA

1. Bikulčienė L. Realization of operator expressions for the solutions of differential equations, Lietuvos matematikos rinkinys, Lietuvos matematikų draugijos XLIII konferencijos mokslo darbai. Matematikos ir informatikos institutas, Lietuvos matematikų draugija, VU. ISSN 0132-2818. 2002, T. 42, spec. nr. p. 159-164.
2. Bikulčienė L., Marcinkevičius R., Navickas Z.. Algorithm of operator method for solving differential equations. Algorithmic Information Theory: Conference proceedings.16th-18th May 2005, University of Vaasa, Finland, University of Vaasa, Vaasa Polytechnic, Rovaniemi Polytechnic. University of Vaasa, 2005. ISBN 952-476-124-6. p. 31-40. Prieiga per internetą: <<http://www.uvasa.fi/ait05/index.htm>>.
3. Bikulčienė L., Marcinkevičius R., Navickas Z. Adapted operator method for solving of ordinary differential equations. ITI 2005, Proceedings of the 27th International Conference on Information Technology Interfaces, June 20 - 23, 2005, Cavtat, Croatia / editors: Vesna Lužar-Stiffler, Vesna Hljuz Dobric. Zagreb, SRCE University Computing Centre, University of Zagreb, 2005. ISBN 953-7138-02-X. p. 611-616. Prieiga per internetą: <<http://iti.srce.hr>>.
4. Bikulčienė L., Marcinkevičius R., Navickas Z. Computer realization of the operator method for solving of differential equations. Lecture Notes in Computer Science : Numerical Analysis and its Applications: third international conference, June 29 - July 3, 2004, Rousse, Bulgaria: revised selected papers. ISSN 0302-9743. 2005, Vol. 3401. p. 179-186.
5. Garvan F.. The Maple Book. Chapman & Hill, 2002.
6. Navickas Z., Bikulčienė L.. Expressions of solutions of ordinary differential equations by standard functions. Proceedings of the 10th International Conference Mathematical Modelling and Analysis 2005 and 2nd International Conference Computational Methods in Applied Mathematics, June 1-5, 2005, Trakai, Lithuania. Vilnius, Technika, 2005. ISBN 9986-05-924-0. p. 143-150. Prieiga per internetą: <http://www.techmat.vtu.lt/~art/proc/index.html>
7. Navickas Z.. Adapted formal algorithms for the solution of differential equations. International Journal of differential equations and applications, Volume 1A No. 4 2000, Plodiv, Bulgaria. p. 415-424.
8. Petkevičiūtė D., Bikulčienė L., Navickas Z. Expression the functions of the finite H-rank as the linear combinations of exponential functions. Matematika ir matematinis modeliavimas-2006, Kaunas, Vtex, p. 91-95
9. Plukas K. Skaitiniai metodai ir algoritmai. Kaunas: Naujasis lankas, 2001. ISBN 9955-03-061-5.

1 PRIEDAS. PROGRAMŲ TEKSTAI

Failas operatorinis.mw – operatorinio diferencialinių lygčių sistemos sprendimo metodo realizacija *Maple* kalba.

```
> restart:
pradzia:=100:

## Sprendimas skaitiniu metodu (palyginimui)

# Sistemos parametrai:
fx0 :=2.5: fy0 := .5: w :=2*Pi: u := 0: mu := 1: mxy := 1: m0x := .5: g := 10: m0
= 1: px2 := 4: py2 := 9: s1 := 1: hx := .1: hy := .1: hz := .1: hh := .1: mz:= 0:

flx := fx0*cos(w*t): fly := fy0*cos(w*t):
Fx2 := flx+m0x*(diff(z2(t),t))^2*sin(z2(t))-px2*x2(t)-hx*(diff(x2(t),t)):
Fy2 := fly-m0x*diff(z2(t),t)^2*cos(z2(t))-py2*y2(t)-hy*diff(y2(t),t):
Fz2 := mz+s1*cos(z2(t))*sin(z2(t))-mu*g*sin(z2(t)+u)-
hh*diff(z2(t),t)*(sin(z2(t)))^2-hz*diff(z2(t),t):
sys2:= {diff(x2(t),t$2)+m0x*diff(z2(t),t$2)*cos(z2(t)) = Fx2,
        diff(y2(t),t$2)* mxy+m0x*diff(z2(t),t$2)*sin(z2(t)) = Fy2,

diff(z2(t),t$2)+mu*(diff(x2(t),t$2)*cos(z2(t))+mu*diff(y2(t),t$2)*sin(z2(t))) =
Fz2,
        x2(0)=0, D(x2)(0)=0, y2(0)=0, D(y2)(0)=0, z2(0)=0, D(z2)(0)=0}:
F2:=dsolve(sys2, numeric, maxfun=100000):

## Sprendimas operatoriniu metodu
# Sistemos aprasymas (lygtys):
c := mxy-mu*mxy*m0x*(cos(z1))^2-mu*m0x*(sin(z1))^2:
Fx := flx+m0x*dz1^2*sin(z1)-px2*x1-hx*dx1:
Fy := fly-m0x*dz1^2*cos(z1)-py2*y1-hy*dy1:
Fz := mz+s1*cos(z1)*sin(z1)-mu*g*sin(z1+u)-hh*dz1*(sin(z1))^2-hz*dz1:
xx:=simplify((Fx*mxy+Fy*mu*m0x*sin(z1)*cos(z1)-Fz*mxy*m0x*cos(z1)-
Fx*mu*m0x*sin(z1)^2)/c):
yy:=simplify((Fy+Fx*mu*m0x*sin(z1)*cos(z1)-Fy*mu*m0x*(cos(z1))^2-
Fz*m0x*sin(z1))/c):
zz:=simplify((Fz*mxy-Fx*mxy*mu*cos(z1)-Fy*mu*sin(z1))/c):

#Pradines salygos palyginimui su skaitiniu metodu
psx:=op(F2(pradzia)[2])[2]: psdx:=op(F2(pradzia)[3])[2]:
psy:=op(F2(pradzia)[4])[2]: psdy:=op(F2(pradzia)[5])[2]:
psz:=op(F2(pradzia)[6])[2]: psdz:=op(F2(pradzia)[7])[2]:

skaicius:=40: # Sudedamuju (daugianariu) skaicius
n:=10: # Daugianariu laipsnis
zng:=.2: # Zingsnis
f1[0]:=x1: f2[0]:=y1: f3[0]:=z1: pr[1]:=pradzia:

# Skaiciuojami koeficientai (funkcijos)

for k from 0 by 1 to n-1 do

f1[k+1]:=simplify((diff(f1[k],tt)+diff(f1[k],x1)*dx1+diff(f1[k],dx1)*xx+diff(f1[k]
,y1)*dy1+diff(f1[k],dy1)*yy+diff(f1[k], z1)*dz1+diff(f1[k],dz1)*zz)):

f2[k+1]:=simplify((diff(f2[k],tt)+diff(f2[k],x1)*dx1+diff(f2[k],dx1)*xx+diff(f2[k]
,y1)*dy1+diff(f2[k],dy1)*yy+diff(f2[k], z1)*dz1+diff(f2[k],dz1)*zz)):

f3[k+1]:=simplify((diff(f3[k],tt)+diff(f3[k],x1)*dx1+diff(f3[k],dx1)*xx+diff(f3[k]
,y1)*dy1+diff(f3[k],dy1)*yy+diff(f3[k], z1)*dz1+diff(f3[k],dz1)*zz)):
od:
```

```

# Priskiriamos pradines salygos:
x1:=psx: dx1:=psdx: y1:=psy: dy1:=psdy: z1:=psz: dz1:=psdz:

# Konstruojami daugianariai:
for i from 1 by 1 to skaicius do
  tt:=pr[i]:
  x[i]:=(sum('f1[k]*(t-pr[i])^k/k!','k'=0..n)):
  y[i]:=(sum('f2[k]*(t-pr[i])^k/k!','k'=0..n)):
  z[i]:=(sum('f3[k]*(t-pr[i])^k/k!','k'=0..n)):
  dx[i]:=(diff(x[i],t)):
  dy[i]:=(diff(y[i],t)):
  dz[i]:=(diff(z[i],t)):
  ddz[i]:=(diff(dz[i],t)):

  t:=pr[i+1]:
  x1:=x[i]: y1:=y[i]: z1:=z[i]: dx1:=dx[i]: dy1:=dy[i]: dz1:=dz[i]:
  t:='t':

  pr[i+1]:=pr[i]+zng:
od:

> # Konstruojamas galutinis sprendinys x(t)
xgal:=[]:
for i from 1 to skaicius do xgal:=[op(xgal), t < pradzia+i*zng, x[i]]: od:
xfunkcija:=t->piecewise(op(xgal),x[skaicius]):
#expand(xfunkcija(t)):
#plot(xfunkcija(t),t=pradzia..pradzia+skaicius*zng,thickness=1,color=black,title='
x');

> # Skaitinio ir operatorinio metodu sprendiniu x(t) grafinis palyginimas
(plots[odeplot])(F2,[t,x2(t), color=red],[t, xfunkcija(t),
color=green],t=pradzia..pradzia+skaicius*zng,thickness=1,color=black,title='x',
numpoints=5000);
(plots[odeplot])(F2,[t,x2(t)-xfunkcija(t),
color=black],t=pradzia..pradzia+skaicius*zng-.1,thickness=1,color=black,
numpoints=5000);
> # Konstruojamas galutinis sprendinys y(t)
ygal:=[]:
for i from 1 to skaicius do ygal:=[op(ygal), t<pradzia+i*zng,y[i]]: od:
yfunkcija:=t->piecewise(op(ygal),y[skaicius]):
#expand(yfunkcija(t)):
plot(yfunkcija(t),t=pradzia..pradzia+skaicius*zng,thickness=1,color=black,title='y
'):
> # Konstruojamas galutinis sprendinys z(t)
zgal:=[]:
for i from 1 to skaicius do zgal:=[op(zgal), t<pradzia+i*zng,z[i]]: od:
zfunkcija:=t->piecewise(op(zgal),z[skaicius]):
#expand(zfunkcija(t)):
plot(zfunkcija(t),t=pradzia..pradzia+skaicius*zng,thickness=1,color=black,title='z
'):
> dzgal:=[]:
for i from 1 to skaicius do dzgal:=[op(dzgal), t<pradzia+i*zng,dz[i]]: od:
dzfunkcija:=t->piecewise(op(dzgal),dz[skaicius]):
#expand(dzfunkcija(t)):
plot(dzfunkcija(t),t=pradzia..pradzia+skaicius*zng,thickness=1,color=black,title='
dz'):
> ddzgal:=[]:
for i from 1 to skaicius do ddzgal:=[op(ddzgal), t<pradzia+i*zng,ddz[i]]: od:
ddzfunkcija:=t->piecewise(op(ddzgal),ddz[skaicius]):expand(ddzfunkcija(t)):
plot(ddzfunkcija(t),t=pradzia..pradzia+skaicius*zng,thickness=1,color=black,title=
'ddz'):
> plot([zfunkcija(t), dzfunkcija(t), t = pradzia .. pradzia+skaicius*zng],
thickness = 1, color = black);

```

Failas sprend_konvertavimas.mw – *Maple* programa, realizuojanti sprendinio reiškimo eksponentinių funkcijų baigtine suma algoritmą.

```
> #Sistemos sprendinys:

restart:
N:=80:
N1:=50:
h:=0.2:
Poslinkis:=191.1:

flx := fx0*cos(w*t): fly := fy0*cos(w*t):
fx0 :=2.5: fy0 := 0.5: w :=2*Pi: u := 0: mu := .7: mxy := 1: m0x := .5: g := 10:
m0 = 1: px2 := 4: py2 := 9: s1 := 1: hx := .1: hy := .1: hz := .1: hh := .1: mz:=
0:

Fx := flx+m0x*(diff(z(t),t))^2*sin(z(t))-px2*x(t)-hx*(diff(x(t),t)):
Fy := fly-m0x*diff(z(t),t)^2*cos(z(t))-py2*y(t)-hy*diff(y(t),t):
Fz := mz+s1*cos(z(t))*sin(z(t))-mu*g*sin(z(t)+u)-hh*diff(z(t),t)*(sin(z(t)))^2-
hz*diff(z(t),t):

sys:= {diff(x(t),t$2)+m0x*diff(z(t),t$2)*cos(z(t)) = Fx,
      diff(y(t),t$2)* mxy+m0x*diff(z(t),t$2)*sin(z(t)) = Fy,
      diff(z(t),t$2)+mu*(diff(x(t),t$2)*cos(z(t))+mu*diff(y(t),t$2)*sin(z(t))) =
Fz,
      x(0)=0, D(x)(0)=0, y(0)=0, D(y)(0)=0, z(0)=0, D(z)(0)=0}:

F:=dsolve(sys, numeric, maxfun=100000):
gg:= (j) -> eval(op(F((j-1)*h+Poslinkis)[6])[2]):
interface(rtablesize=100):
v:=Vector(N1,gg):

> # I zingsnis:

Digits:=100:
printlevel:=0;
tikslumas:=10^(-5):
d:=1;
poz:=0;
N:=`if`(modp(N,2)=0, N-1, N):

for n from 1 to (N/2+1) while poz<5 do
  f:=(i,j) -> v[i+j-1]:
  A:=linalg[matrix](n,n,f):
  d:=linalg[det](A);
  d_modulis:=evalf(abs(d)); #print(d_modulis);
  poz := `if`(d_modulis<tikslumas ,poz+1,0);
end do;
m:=n-1-poz;

if (poz<2) then printf("Neimanoma konvertuoti koeficientu: matricos A determinanto
modulis neartimas nuliui!") end if;

while (poz>2) do poz:=0:

# II zingsnis:

f(rho):=(i,j) -> `if`(i=m+1,rho^(j-1),v[i+j-1]):
B:=linalg[matrix](m+1,m+1,f(rho));
d:=collect(linalg[det](B),rho);
lambda:=map(allvalues,[solve(d)]);

# III zingsnis:
```

```

kart:=Vector(m):
for k1 from 1 to m do
  kiek:=0:
  if (kart[k1]=0) then
    for k2 from k1+1 to m do
      if (lambda[k2]-lambda[k1]<tikslumas) then kiek:=kiek+1: kart[k2]:=kiek: end
    if:
      end do:
    end if:
  end do:

f:=(i,j) -> binomial(i, kart[j])*lambda[j]^(i-1-kart[j]):
C:=linalg[matrix](m,m,f);
b:=Vector(m,v[1..m]);
mu:=linalg[linsolve](C,b);

f:=(i) -> (1/h)*ln(lambda[i]):
lambda2:=Vector[row](m, f):
end do;

> #Grafikai:

f4(t):=add(mu[k]*(t-Poslinkis)^kart[k]*exp(lambda2[k]*(t-Poslinkis)),k=1..m):
plot(evalf(f4(t)), t=Poslinkis..Poslinkis+10, thickness=1, numpoints=3000,
color=black);
(plots[odeplot])(F, [[t, z(t),color = black], [t,f4(t),color=gray, thickness=2]],
Poslinkis-20..Poslinkis+20, numpoints = 10000, title = "z(t)");

```

2 PRIEDAS. STRAIPSNIS KONFERENCIJOS „MATEMATIKA IR MATEMATIKOS DĖSTYMAS – 2006“ LEIDINIUI

BAIGTINIO H-RANGO FUNKCIJŲ REIŠKIMAS EKSPONENTINIŲ FUNKCIJŲ TIESINIAIS DARINIAIS

Liepa Bikulčienė, Zenonas Navickas, Daiva Petkevičiūtė

Kauno technologijos universitetas

1. Įvadas

Sprendžiant įvairias diferencialines lygtis jų sprendinių išraiškos gali būti gaunamos laipsninių eilučių pavidale [1], kuris nėra patogus sprendinių savybių tyrimui. Todėl iškyla uždavinys tuos sprendinius išreikšti standartinių funkcijų tiesiniais dariniais. Tuomet gauti sprendiniai laipsninių eilučių su tiksliais koeficientų išraiškėmis pavidale gali būti efektyviai išreikšti harmonikų tiesiniais dariniais.

Šiame darbe pateiksime vieną specialų algoritmą, leidžiantį funkciją $f(x)$, aprašomą Teiloro eilute:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j \frac{x^j}{j!} \quad (1)$$

arba jos reikšmėmis tam tikruose taškuose išreikšti baigtine eksponenčių suma:

$$f(x) = \sum_{r=1}^m \mu_r e^{\lambda_r x}. \quad (2)$$

Šis algoritmas sukonstruotas remiantis būtinomis ir pakankamomis šių išraiškų egzistavimo sąlygomis [2] bei diferencialinių lygčių sprendinių reiškimo trigonometrinių funkcijų suma pavyzdžiais, kurie aprašyti [3]. Algoritmo realizavimui panaudota Maple matematinė programinė įranga [4].

2. Teorinės išraiškos ir skaičiavimo algoritmas

Skaičiavimo algoritmo esmę sudaro funkcijos $f(x)$ eksponentinės išraiškos (2) vektorių $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ ir $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ sudarytų iš atitinkamų koeficientų μ_k , λ_k bei tų koeficientų skaičiaus m radimas, kai duotas $f(x)$ Teiloro eilutės (1) koeficientų vektorius $\vec{p} = (p_0, p_1, \dots, p_n)$, $n > m$; $n, m \in \mathbb{N}$. Skaičiavimai susideda iš tokių dalių:

1. Konstruojamos Hankelio matricos, sudarytos iš Teiloro eilutės koeficientų

$$H_0^{(k)} = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \dots & p_{k-1} \\ p_1 & p_2 & \dots & p_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k-1} & p_k & \dots & p_{2k-2} \end{pmatrix},$$

o po to skaičiuojami jų rangai.

Jei duotą funkciją $f(x)$ galima išreikšti eksponenčių suma, tai šios sumos dėmenų skaičius lygus funkcijos H-rangui [2].

Algoritme randamas toks m , su kuriuo

$$m = \max_{k \in N} \text{rang} H_0^{(k)},$$

$$\text{t.y. } \det H_0^{(m)} \neq 0, \text{ o } \det H_0^{(m+r)} \equiv 0, \forall r \in N.$$

Kompiuterinėje algoritmo realizacijoje sąlyga $\det H_0^{(m+r)} \equiv 0$ keičiama sąlyga $\det H_0^{(m+r)} < \varepsilon$, $r = m+1, m+2, \dots, m+l$, $l \in N$.

2. Panaudojus algebrinių lygčių sprendimo metodus surandame tokios algebrinės lygties

$$\begin{vmatrix} p_0 & p_1 & \dots & p_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m-1} & p_m & \dots & p_{2m-1} \\ 1 & \rho & \dots & \rho^m \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

šaknis $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$, nes jos yra skirtingos ir tenkina sąlygas:

$$\lambda_1 = \rho_1, \lambda_2 = \rho_2, \dots, \lambda_m = \rho_m.$$

3. Sudaroma tiesinių lygčių sistema

$$\lambda_1^j \mu_1 + \lambda_2^j \mu_2 + \dots + \lambda_m^j \mu_m = p_j, \quad j = 0, \dots, m-1. \quad (4)$$

Jos sprendimui naudojami tiesinės algebros metodai, nes jos sprendinys yra koeficientai $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$.

Skaičiavimams naudojamos standartinės Maple funkcijos Vector(), linalg[matrix>(), linalg[det>(), eval(), coeftayl(). Sistemų (3) ir (4) sprendimui naudojamos f-jos solve() ir linalg[linsolve()]. Platesnį šių funkcijų aprašymą galima rasti literatūroje [4].

Pastebėję, kad funkcijos reikšmių seka $f(0), f(h), f(2h), \dots$ sudaro algebrinę progresiją, kaip ir koeficientai p_j , tą patį algoritmą galime naudoti ir funkcijos $f(x) = \sum_{r=1}^m \mu_r e^{\lambda_r x}$ išraiškai rasti, kai žinoma ką tik paminėta šios funkcijos reikšmių seka $f(0), f(h), f(2h), \dots, f(nh), n > m; n, m \in N$. Ši seka sudaro algebrinę progresiją kaip ir $f(x)$ Teiloro eilutės koeficientai, nes

$$f(kh) = \sum_{r=1}^m \mu_r e^{\lambda_r kh} = \sum_{r=1}^m (\mu_r e^{\lambda_r k})^h = \sum_{r=1}^m \mu_r \Lambda_r^k,$$

$$\text{čia } e^{\lambda_r h} = \Lambda_r.$$

Tada Vietoje Teiloro eilutės koeficientų vektoriaus $\vec{p} = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ paėmę funkcijos $f(x)$ reikšmių vektorių

$$\vec{y} = (y_0, y_1, \dots, y_n) = (f(0), f(h), f(2h), \dots, f(nh)), n > m; n, m \in N$$

ir jam pritaikę anksčiau aprašytus skaičiavimus, galime rasti koeficientus $m, \vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ ir $\vec{\Lambda} = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_m)$. Koeficientai $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ randami kompleksinių skaičių aibėje naudojantis sąryšiu $\lambda_r = Ln(\Lambda_r), r = 1, 2, \dots, m$, t.y. logaritmuojant vektoriaus $\vec{\Lambda} = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_m)$ komponentes.

3. Skaičiavimo pavyzdys

1) Tegul duota pradinė funkcija $f_1(x)$, išreiškiama 10 eksponentinių funkcijų suma:

$$f_1(x) = 0.093e^x - 7^{\frac{1}{5}}e^{-0.2x} - 20.124e^{2.13x} + 5^{\frac{1}{12}}e^{2^{\frac{7}{20}}x} - \cos(\sqrt{2})e^{-0.1e^{\sqrt{2}x}} - \\ - 0.082e^{0.06x} + \sqrt{7}e^{-0.7x} + 0.175e^{0.801x} + \frac{1}{2}\pi e^{-0.914x} + \sqrt{2}\sqrt{\pi}e^{-2.18\sqrt{5}x}.$$

Jos Makloreno eilutė yra

$$f_2(x) = -13.702 - 60.031x - 21.811x^2 + \dots + 0.002x^{20} + O(x^{21})$$

Pasinaudoję aukščiau aprašytu algoritmu, šią eilutę vėl išreiškę eksponenčių suma – gauname funkciją $f_3(x)$:

$$f_3(x) = -0.082e^{0.06x} + 0.175e^{0.801x} + 0.093e^x + 1.144e^{1.275x} - 20.124e^{2.314x} - \\ - 1.476e^{-0.2x} - 0.156e^{-0.411x} + 2.646e^{-0.7x} + 1.571e^{-0.914x} + 2.507e^{-4.875x}.$$

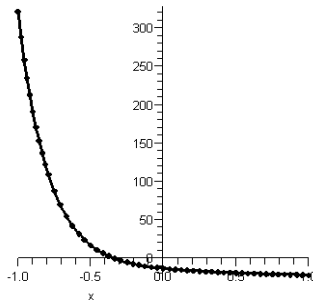
Čia skaičiavimams atlikti ėmėme $\varepsilon = 10^{-70}$. Pastebėsime, kad skirtumai tarp atitinkamų $f_1(x)$ ir $f_3(x)$ koeficientų μ_k ir λ_k (algoritmo absoliutinės paklaidos) nedidesni nei 10^{-70} .

2) Tarkime, kad duotos tos pačios funkcijos $f_1(x)$ reikšmės taškuose $x = 0, h, 2h, \dots, 10h$, $h = 0.4$. Šiuo atveju, pasinaudojus pateiktu algoritmu, vėl gaunamas $f_1(x)$ eksponentinės išraiškos artinys – jo koeficientai skiriasi nuo pradinių ne daugiau nei 10^{-68} .

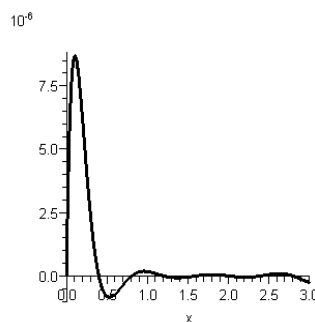
Pastebėję, kad šiame pavyzdyje determinantai $\det H_0^{(k)}$ monotoniškai artėja prie nulio, skaičiavimus nutraukiame anksčiau, t.y. sąlygoje $\det H_0^{(m+r)} < \varepsilon$, $r = m+1, m+2, m+3$ imame $\varepsilon = 10^{-5}$, o ne 10^{-70} , kaip anksčiau. Taip randama paprastesnė funkcijos $f_3(x)$ išraiška – $f_4(x)$ tik su 5 eksponenčių suma:

$$f_4(x) = 2.51e^{-4.88x} + 3.67e^{-0.83x} - 20.65e^{0.3x} + 0.55e^{1.19x} + 0.62e^{1.31x}.$$

Šios funkcijos reikšmės intervale $(-0.25; 3)$ yra gana artimos (paklaida neviršija 10^{-6}) pradinės funkcijos $f_1(x)$ reikšmėms. Paveiksluose pateikiami funkcijų $f_1(x)$ ir $f_4(x)$ grafikai kai $x \in [-1; 1]$ (pav. 1) bei absoliutinių paklaidų funkcijos $f_5(x) = f_1(x) - f_4(x)$ grafikas (pav. 2), kai $x \in [0; 3]$.



1 pav. Funkcijos $f_1(x)$ ir $f_2(x)$



2 pav. Paklaidų funkcija $f_1(x) - f_2(x)$

Kai $x < 0$, didėjant $|x|$ neapbrėžtai auga ne tik pradinės funkcijos $f_1(x)$ reikšmės, bet ir absoliutinių paklaidų $f_1(x) - f_4(x)$ dydžiai.

4. Išvados

Šis algoritmas tinka bet kokių funkcijų, turinčių baigtinį H-rangą reiškimui panaudojant eksponentines funkcijas. Pateiktas algoritmas kai kuriais atvejais gali būti naudojamas kaip alternatyvus metodas ne tik tiksliam funkcijų reiškimui eksponentinėmis funkcijomis, bet ir tų funkcijų išraiškų supaprastinimui.

LITERATŪRA

1. L.Bikulciene, R.Marcinkevicius, Z.Navickas. Computer Realization of the Operator Method for Solving of Differential Equations, Lecture Notes in Computer Science, Springer, 3401, 2005, p.182-189.
2. L.Bikulciene, Z. Navickas. Laipsninių eilučių reiškinimas baigtine eksponentinių funkcijų suma. Lietuvos matematikos rinkinys, 44 t. Vilnius, 2004, p.138-143.
3. L.Bikulciene, Z.Navickas. Expressions of solutions of ordinary differential equations by standard functions. Proceedings of the 10th International Conference MMA2005&CMAM2, Trakai, 2005. Technika, p. 485-491.
4. F.Garvan. The Maple Book. Chapman & Hill, 2002.

Baigtinio H-rango funkcijų reiškinimas eksponentinių funkcijų tiesiniais dariniais

Pateikiamos formulės, leidžiančios žinant dalį funkcijos Teiloro eilutės koeficientų išreikšti ją tiesiniu eksponentinių funkcijų dariniu. Algoritmas papildytas sąryšiais, leidžiančiais tokią išraišką gauti turint tik funkcijos reikšmes tam tikruose taškuose. Pateikiamas šias formules realizuojančios programinės įrangos aprašymas ir paklaidų įvertinimas keliems pavyzdžiams.

3 PRIEDAS. STRAIPSNIS KONFERENCIJOS „MATEMATIKA IR MATEMATINIS MODELIAVIMAS – 2007“ LEIDINIUI

INVESTIGATION OF ONE DYNAMICAL MODEL USING ADAPTED OPERATOR METHOD

D. Petkevičiūtė, K. Ragulskis, Z. Navickas, L. Bikulčienė

Kaunas University of Technology

1. Introduction

The recovery of electric energy in ecological way is the main problem of the world energetic. The sun, wind, wave, and the other secure types of energy are very perspective; in the world wind energetic develops faster than the other types. The different mechanisms of vibration transformation stimulated by wind or waves to the other type of energy are being created. The action principles of such mechanisms before real working model are investigated using mathematical simulation.

In this paper the water-wave energy dynamical transformation to rotational motion in order to reduce the device constructions is proposed. Here the case when system body can move by two orthogonal rectilinear coordinates and fixed to at unbalanced rotor turn is analyzed. The model for studies was proposed by acad. prof. K.Ragulskis (KTU).

Various dynamical systems are described using ordinary differential equations and their systems comprising a large number of numerical parameters. Often, it is necessary to find not only the solution of a differential equation, but also numerical values of the said parameters (to provide the solution with desirable characteristics). Also, it is sometimes required that the solutions were periodical functions. Sometimes, it is important to know for what values of the parameters the dynamical system behaves chaotically, etc. The operator method, described in this paper, facilitates investigation of the most complicated dynamical-mechanical systems.

In this paper, the calculations as well as graphical illustrations are done using Maple software.

2. Model of the system

The system (Fig.1) is composed of the point A, fixed to the immobile base according Ox and Oy axes using elastic and dissipative elements, and the rotor with mass. The point A is being stimulated by the powers f_x, f_y . The oscillations of the point A cause oscillations or rotations of the rotor. The behavior of the rotor depends of the amplitudes and frequency of the stimulating powers.

The differential equations of system motion are obtained from equations of the kinetic energy, potential energy, and dissipative function using energetic balance method. Stimulation powers in this case were $f_{x_0} \cos \omega t$ and $f_{y_0} \sin \omega t$.

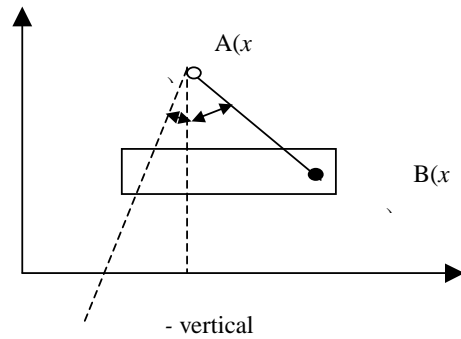


Figure 1. Model of the system

Then equations of dynamical system are

$$\begin{cases} \ddot{\beta}_1 + \mu_{0x}\ddot{\varphi}\cos\varphi = F_{\beta_1}, \\ \mu_{yx}\ddot{\beta}_2 + \mu_{0x}\ddot{\varphi}\sin\varphi = F_{\beta_2}, \\ \ddot{\beta}_1\mu\cos\varphi + \ddot{\beta}_2\mu\sin\varphi + \ddot{\varphi} = F_{\varphi}; \end{cases} \quad (1)$$

Where

$$\begin{aligned} F_{\beta_1} &= f_x + \mu_{0x}\dot{\varphi}^2\sin\varphi - p_x^2\beta_1 - h_x\dot{\beta}_1, \\ F_{\beta_2} &= f_y - \mu_{0x}\dot{\varphi}^2\cos\varphi - p_y^2\beta_2 - h_y\dot{\beta}_2, \\ F_{\varphi} &= m_{\varphi} + \sigma_1\cos\varphi\sin\varphi - \mu g^* \sin(\varphi + \gamma) - h\dot{\varphi}\sin^2\varphi - h_{\varphi}\dot{\varphi}; \end{aligned}$$

Here φ is the angle of rotation, β_1 and β_2 - the variation of system body from position of static balance by Ox and Oy axes respectively, h_x, h_y, h_{φ}, h - dissipative coefficients, μ_{x0}, μ_{xy} - reduced masses of body, f_x, f_y - stimulation powers, p_x, p_y - natural frequencies of the system with respect to the axes Ox and Oy , σ_1 - reduced stiffness coefficient, μ - unbalanced mass (concentrated in the point B), g^* - gravitation acceleration, γ - angle between Oy axis and vertical, m_{φ} - effective resistance moment of rotor turning.

3. Description of adapted operator method

The solutions of various differential equations can be obtained in the form of power series [1], which is not convenient for the analysis of the characteristics of these solutions. Therefore, a problem to express the solutions as the linear combinations of standard functions is important, [2]. Usually, the standard functions are trigonometric or exponential.

Transforming system (1), relationships

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \mu_{0x}\cos\varphi \\ 0 & \mu_{yx} & \mu_{0x}\sin\varphi \\ \mu\cos\varphi & \mu\sin\varphi & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_{\beta_1} = \begin{vmatrix} F_{\beta_1} & 0 & \mu_{0x}\cos\varphi \\ F_{\beta_2} & \mu_{yx} & \mu_{0x}\sin\varphi \\ F_{\varphi} & \mu\sin\varphi & 1 \end{vmatrix}, \\ \Delta_{\beta_2} &= \begin{vmatrix} 1 & F_{\beta_1} & \mu_{0x}\cos\varphi \\ 0 & F_{\beta_2} & \mu_{0x}\sin\varphi \\ \mu\cos\varphi & F_{\varphi} & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_{\varphi} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & F_{\beta_1} \\ 0 & \mu_{yx} & F_{\beta_2} \\ \mu\cos\varphi & \mu\sin\varphi & F_{\varphi} \end{vmatrix}, \\ \text{and } \ddot{\beta}_1 &= \frac{\Delta_{\beta_1}}{\Delta}, \quad \ddot{\beta}_2 = \frac{\Delta_{\beta_2}}{\Delta}, \quad \ddot{\varphi} = \frac{\Delta_{\varphi}}{\Delta} \end{aligned} \quad (2)$$

are obtained.

Because the equations (2) have form $x'' = P(t, x, x', y, y', \varphi, \varphi')$, $y'' = Q(t, x, x', y, y', \varphi, \varphi')$, $\varphi'' = R(t, x, x', y, y', \varphi, \varphi')$ and the initial conditions are $x(v) = s_1$, $x'_i(t)|_{t=v} = s_2$, $y(v) = s_3$, $y'_i(t)|_{t=v} = s_4$, $\varphi(v) = s_5$, $\varphi'_i(t)|_{t=v} = s_6$, the expressions of solutions are found using operator method, ([1]): $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \frac{(t-v)^k}{k!}$, $y = \sum_{k=0}^{+\infty} q_k \frac{(t-v)^k}{k!}$, $\varphi = \sum_{k=0}^{+\infty} r_k \frac{(t-v)^k}{k!}$.

Here coefficients $p_k = D^k s_1$, $q_k = D^k s_3$, $r_k = D^k s_5$ are functions of initial conditions and center of series v and generalized differential operator in this case is $D = D_v + s_2 D_{s_1} + P D_{s_1} + s_4 D_{s_3} + Q D_{s_3} + s_6 D_{s_5} + P D_{s_6}$.

The special algorithm allowing to covert a function $f(x)$ represented in Taylor series $f(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j \frac{x^j}{j!}$ or in its values in certain points to a finite sum of exponent functions $f(x) = \sum_{r=1}^m \mu_r e^{\lambda_r x}$, $\lambda_r \in C$ was presented in [3]. The later expression appears to be more informative than the simple ordinary power series, especially for differential equations describing mechanical processes.

The computer implementation of this algorithm was developed using Maple software. The standard Maple functions `Vector()`, `linalg[matrix]()`, `linalg[det]()`, `eval()`, `coefstaylor()`, `solve()`, `piecewise()`, `diff()`, `sum()` and `linalg[linsolve]()` were used for the calculations. The full description of these functions is available in [4].

4. Example

One of the steady modes of this system is when vibrations of body stimulate uniform rotor oscillation. For instance, the mode with fixed speed of rotor oscillating is obtained if the parameters of the system (1) are

$$f_x = f_{x_0} \cos \bar{\omega} t, \quad f_{x_0} = 2.5, \quad f_y = f_{y_0} \sin \bar{\omega} t, \quad f_{y_0} = 0.5, \quad \bar{\omega} = 2\pi, \quad \mu_{0x} = 0.5, \\ \mu = 0.7, \quad \mu_{yx} = 1, \quad p_x^2 = 4, \quad p_y^2 = 9, \quad h_x = 0.1, \quad h_y = 0.1, \quad h = 0.1, \quad h_\varphi = 0.1, \quad \text{and the initial conditions are} \\ \sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 1, \quad g^* = 10, \quad m_\varphi = -m_0 \cdot 1(\dot{\varphi}), \quad m_0 = 1, \quad 1(\dot{\varphi}) = \begin{cases} 1, & \text{for } \dot{\varphi} > 0; \\ 0, & \text{for } \dot{\varphi} \leq 0. \end{cases}$$

$\beta_1(0) = \beta_2(0) = \beta'_1(0) = \beta'_2(0) = \varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ (represented in (Fig. 2)).

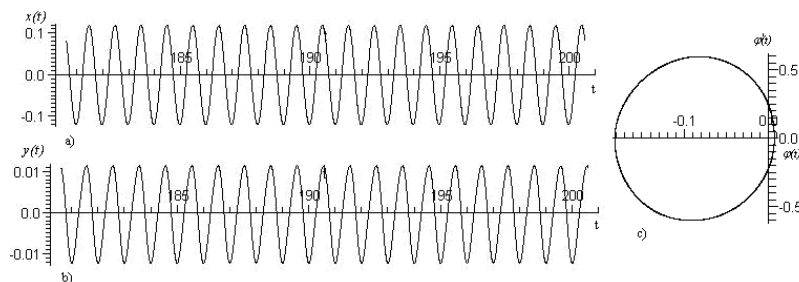


Figure 2. Example of steady mode: a), b) vibration of body by axes Ox and Oy ;
c) oscillation of rotor in phase plane φ / φ' ;

After having expressed the solution $\varphi(t)$ as a finite sum of exponent functions the approximation is

$$\varphi^*(t) = -0.0891 e^{-0.0016 t} + (0.0436 + 0.0186 i) e^{(-0.0155 + 6.2837 i) t} + \\ + (0.0436 - 0.0186 i) e^{(-0.0155 - 6.2837 i) t}.$$

In order to simplify this expression the Euler's formula can be used. Then the approximation of solution is

$$\varphi^*(t) = -0.0891 e^{-0.0016 t} + e^{-0.0155 t} (0.0971 \cos 6.2837 t - 0.0332 \sin 6.2837 t).$$

The graph of the difference $\varphi(t) - \varphi^*(t)$ are presented in Figure 3.

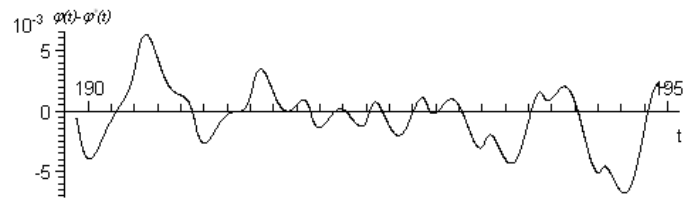


Figure 3. The loss-function $\varphi(t) - \varphi^*(t)$.

5. Conclusion

A steady mode of a given system was found. When the solution is in the steady mode, we can approximate it as a sum of exponent functions. However, in this case, the absolute error of the approximation grows when we recede from the interval used to compute the approximation. This could have happened due to the computation errors.

REFERENCES

5. L.Bikulciene, R.Marcinkevicius, Z.Navickas. Computer Realization of the Operator Method for Solving of Differential Equations. Proceedings of Third International Conference on "Numerical Analysis and Applications, Rouse, Bulgaria, 2004 29 June-3 July. Lecture Notes in Computer Science, Springer, 3401, 2005, p.182-189.
6. L.Bikulciene, Z.Navickas. Expressions of solutions of ordinary differential equations by standard functions. Proceedings of the 10th International Conference MMA2005&CMAM2, Trakai, 2005. Technika, p. 485-491.
7. D.Petkevičiūtė, L.Bikulčienė, Z.Navickas. Expression the functions of the finite H-rank as the linear combinations of exponential functions. Matematika ir matematinis modeliavimas-2006, Kaunas, Vtex, p. 91-95
8. F.Garvan. The Maple Book. Chapman & Hill, 2002.

VIENO DINAMINIO MODELIO TYRIMAS ADAPTUOTU OPERATORINIŲ METODŲ

Aprašomas operatorinis metodas, leidžiantis gauti diferencialinių lygčių sistemos sprendinio išraišką eilutės pavidalu. Pateikiama vieną dinaminę sistemą aprašanti lygčių sistema bei vieno šios sistemos sprendinio aproksimavimo baigtine eksponentinių funkcijų suma pavyzdys.