KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

Vaida Savulytė

DVIMAČIŲ PARETO DYDŽIŲ MAKSIMUMŲ ASIMPTOTINĖ ANALIZĖ

Magistro darbas

Vadovas
prof. dr. A. Aksomaitis

KAUNAS, 2007

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

TVIRTINU
Katedros vedėjas
prof. dr. J.Rimas
2007 06 06

DVIMAČIŲ PARETO DYDŽIŲ MAKSIMUMŲ ASIMPTOTINĖ ANALIZĖ

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

Vadovas
prof. dr. A. Aksomaitis
2007 06 03

Recenzentas
doc.dr. J.Venclovienė
2007 06 01

Atliko
FMMM 5 gr. stud.
V. Savulytė
2007 05 25

KAUNAS, 2007

KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

Pirmininkas: Leonas Saulis, habil. dr.,Vilniaus Gedimino technikos universiteto profesorius

Sekretorius: Eimutis Valakevičius, docentas

Nariai: Algimantas Jonas Aksomaitis, profesorius

Arūnas Barauskas, dr.,UAB „Elsis“ generalinio direktoriaus pavaduotojas

Vytautas Janilionis, docentas

Zenonas Navickas, profesorius

Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius

Rimantas Rudzkis, habil.dr., banko „NORD/LB“ vyriausiasis analitikas

Savulytė V. Asymptotical Analysis of Two-dimensional Pareto Maxima: Master's work in applied mathematics / supervisor dr. assoc. prof. A. Aksomaitis; Department of Applied mathematics, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2007. – 85 p.

SUMMARY

The aim of this paper is to construct two-dimensional random variables, having one-dimensional ones, carry out the asymptotical analysis and study the speed of convergence. Two-dimensional distribution is constructed in two ways: when the components of random variables are independent and dependent. As in the last few years Pareto distribution ($1 < \alpha < 2$) is popular in financial models, it was chosen for the analyses.

It was proved, that in both cases of independent and dependent components of the vector, the limit distribution is the same. This means that although the components of the vector are dependent, the maxima are asymptotically independent. Besides, the errors are smaller than the approximate estimate. Although, the approximate estimate in the case of independent components is smaller than in the case of dependent components, the errors are on the contrary: they are smaller when the components are dependent than when the components are independent.

TURINYS

LENTELIŲ SĄRAŠAS

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

ĮVADAS

Sprendžiant daugelį technikoje atsirandančių problemų susiduriama su stebėjimų maksimalia reikšme. Dažnai reikalingi metodai turimai informacijai apibūdinti bei išanalizuoti. Tam buvo sukurta daugiamačių ekstremaliųjų reikšmių teorija. Ji yra palyginus nauja, bet gana greitai vystoma. Kadangi nemaža dalis tiriamų reiškinių yra aprašomi ne vienu, o keliais matavimais, ši teorija yra labai svarbi.

Šio darbo tikslas – sukonstruoti dvimatį skirstinį, kai duoti vienmačiai (marginalieji) skirstiniai, atlikti maksimumų asimptotinę analizę ir ištirti konvergavimo greitį. Dvimatis skirstinys konstruojamas dviem atvejais: kai vektorių komponentės yra priklausomos ir nepriklausomos. Detalesnė konvergavimo greičio analizė atlikta, kai komponentės yra priklausomos. Tyrimui buvo pasirinktas Pareto skirstinys.

Pareto skirstinys, pavadintas italų ekonomisto ir sociologo Vilfredo Pareto (1848-1923m.) garbei, yra laipsninio kitimo tikimybinis skirstinys. Jis buvo pastebėtas daugelyje gyvenimo sričių, tačiau pirmą kartą V. Paretas jį panaudojo aprašydamas turtų pasiskirstymą tarp asmenų. V. Paretas paaiškino, kad didesnė visuomenės turto dalis priklauso mažesnei visuomenės daliai. Ši idėja kartais vadinama Pareto principu arba „80-20 taisykle“, kuri sako kad 20 % populiacijos valdo 80 % turto. Įvairiose gyvenimo srityse ją galima interpretuoti įvairiai. Pvz.: „Įmonės parduodamos produkcijos asortimente yra 80 % prekių pavadinimų, kurie duoda 20 % apyvartos, ir 20 %, kurie duoda 80 % apyvartos“ arba „Iš 20 % klientų įmonė gauna 80 % pelno, o iš 80 % klientų – tik 20 % pelno“.

Pastaraisiais metais Pareto tipo skirstiniai ($1 < \alpha < 2$) populiarūs finansiniuose modeliuose, kai finansų rinką apibrėžia ne Brauno judesio modeliai. Šis skirstinys naudojamas pajamų skirstiniui modeliuoti. Jis taip pat naudojamas orų sinoptikoje temperatūros ekstremumams nustatyti.

Pirmoje tiriamosios dalies ir rezultatų dalyje yra konstruojamas dvimatis skirstinys, skaičiuojamos jo pagrindinės charakteristikos, tiriama, ar prie visų parametrų reikšmių jos egzistuoja. Taip pat generuojami atsitiktiniai dydžiai, kurių skirstiniai yra sukonstruotosios skirstinio funkcijos marginalieji skirstiniai, ir eksperimentiškai bandoma pagrįsti gautus rezultatus.

Antroje dalyje atliekama asimptotinė analizė. Apibrėžiami dvimačiai maksimumai, ieškomas ribinis skirstinys. Juos suradus, apibrėžiamas apytikslis konvergavimo greičio įvertis, atliekama jo bei paklaidų kompiuterinė analizė, ieškoma, kokioms sąlygoms esant jie yra mažiausi.

Sukonstruoto dvimačio skirstinio skaitinių charakteristikų tyrimas atliekama programiniu paketu MathCAD. Kompiuterinė konvergavimo greičio įverčių analizė atliekama programinio paketo Matlab pagalba. Jo aplinkoje buvo sukurta programa vartotojui, kuri nubraižo konvergavimo greičio įvertį bei paklaidas. Vartotojas gali pasirinkti, kokias parametrų reikšmes įvesti.

Šia tematika skaityti pranešimai konferencijose, yra publikacijos [7], [8].

1. TEORINĖ DALIS

1.1. ATSITIKTINIS VEKTORIUS

Tarkime, kad statistinio eksperimento modelis $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ yra sudarytas. Jei kiekvienam elementariajam įvykiui $\omega \in \Omega$ priskiriami keletas realiųjų skaičių, sakoma, kad eksperimentas apibūdinamas atsitiktiniu vektoriumi (daugiamačiu atsitiktiniu dydžiu).

Vektorius $(X_1, X_2, ..., X_n)$, kurio koordinatės yra vienmačiai atsitiktiniai dydžiai, vadinamas n-mačiu atsitiktiniu dydžiu.

n-matis atsitiktinis dydis yra atsitiktinis n-matės erdvės $\boldsymbol{R}^n$ taškas. Visos to taško koordinatės $X_j(\omega)$ (čia $j = \overline{1, n}$) – vienmačiai atsitiktiniai dydžiai, apibrėžti vienoje tikimybinėje erdvėje $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$.

Atsitiktinio vektoriaus koordinačių $X_j(\omega)$ (čia $j = \overline{1, n}$) tikimybių skirstiniai ne visiškai apibūdina vektorių $(X_1(\omega), X_2(\omega), ..., X_n(\omega))$. Pavyzdžiui, vienmatės skirstinio funkcijos $F_j(x_j) = \mathbf{P}(X_j < x_j)$ (čia $j = \overline{1, n}$) nenurodo ryšio tarp koordinačių. Išsami atsitiktinio vektoriaus charakteristika yra n-matė jo skirstinio funkcija.

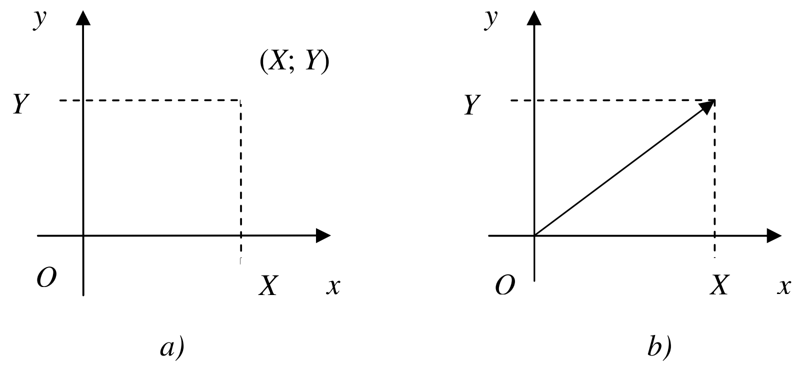
Kadangi $\{\omega \;\; X_j(\omega) < x_j\} \in \mathcal{F}$, tai jų sankirta $\bigcap_{j=1}^{n} \{\omega : X_j(\omega) < x_j\} \in \mathcal{F}$. Vadinasi, su visais $(x_1; x_2; ...; x_n) \in \boldsymbol{R}^n$ galime apibrėžti tikimybę

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} \{\omega : X_j(\omega) < x_j\}\right) = \mathbf{P}(X_1 < x_1, X_2 < x_2, ..., X_n < x_n) = F(x_1, x_2, ..., x_n),$$

kuri vadinama daugiamate (n-mate) vektoriaus $(X_1, X_2, ..., X_n)$ skirstinio funkcija.

1.2. DVIMAČIAI ATSITIKTINIAI VEKTORIAI

Dvimatis vektorius žymimas (X, Y). Jo koordinatės $X = X(\omega)$ ir $Y = Y(\omega)$ apibrėžtos vienoje elementariųjų įvykių erdvėje Ω. Šio dydžio, kaip atsitiktinio taško, kurio koordinatės plokštumoje xOy yra (X; Y), arba kaip vektoriaus su atsitiktinėmis koordinatėmis X ir Y, geometrinis vaizdas pateiktas 1.2.1 paveiksle, *a*, *b*.

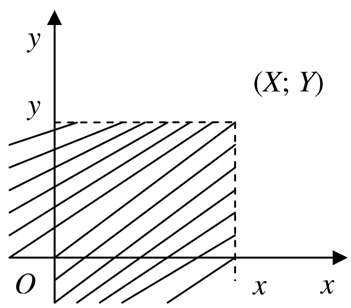


1.2.1 pav. Vektoriaus su atsitiktinėmis koordinatėmis *X* ir *Y* geometrinė interpretacija

Dvimatė atsitiktinio vektoriaus (*X*, *Y*) skirstinio funkcija

$$F(x, y) = \mathbf{P}((X < x) \cap (Y < y)) = \mathbf{P}(X < x, Y < y)$$

su visais (*x*; *y*) ∈ $\boldsymbol{R}^2$. Skaitome: $F(x, y)$ lygi tikimybei, kad $X < x$ ir $Y < y$. Geometriniu požiūriu ji rodo tikimybę taškui (*X*; *Y*) patekti į subrūkšniuotą sritį (1.2.2 pav.).



1.2.2 pav. Skirstinio funkcijos $F(x, y)$ geometrinė interpretacija

Dvimatei skirstinio funkcijai būdingos šios savybės ([1]):

1) Su visais (*x*; *y*) ∈ $\boldsymbol{R}^2$ $0 \le F(x, y) \le 1$.

2) $F(x, y)$ yra tolydi iš kairės: su visais (*x*; *y*) ∈ $\boldsymbol{R}^2$ $F(x-0, y-0) = F(x, y)$.

3) $F(x, y)$ yra nemažėjanti kiekvieno jos argumento atžvilgiu:

$$F(x_2, y) \ge F(x_1, y), \text{kai } x_2 > x_1,$$
$$F(x, y_2) \ge F(x, y_1), \text{kai } y_2 > y_1.$$

4) Šiai funkcijai galioja lygybės:

$$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0, \ F(+\infty, +\infty) = 1.$$

5) Pažymėkime komponenčių skirstinio (marginaliąsias) funkcijas:

$$F_1(x) = \mathbf{P}(X < x) \text{ ir } F_2(y) = \mathbf{P}(Y < y).$$

Tada

$$F_1(x) = F(x,+\infty) \text{ ir } F_2(y) = F(+\infty, y).$$

1.2.1. NEPRIKLAUSOMIEJI ATSITIKTINIAI DYDŽIAI

Tarkime, kad $F(x, y)$, $F_1(x)$ ir $F_2(y)$ yra atsitiktinio vektoriaus (*X*, *Y*) ir jo koordinačių *X* bei *Y* skirstinio funkcijos.

Atsitiktinius dydžius *X* ir *Y* vadiname nepriklausomaisiais, jei su visais $(x; y) \in \boldsymbol{R}^2$

$$\mathbf{P}(X < x_i, Y < y_j) = \mathbf{P}(X < x_i)\mathbf{P}(Y < y_j),$$

t. y. jei

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y).$$

Taigi dydžius *X* ir *Y* vadiname nepriklausomaisiais, kai dvimatė skirstinio funkcija $F(x, y)$ lygi koordinačių vienmačių skirstinio funkcijų $F_1(x)$ ir $F_2(y)$ sandaugai. Šis apibrėžimas tinka tiek diskretiesiems, tiek tolydiesiems dydžiams. Tačiau dydžių nepriklausomumo sąvoką galima apibrėžti remiantis ne skirstinio funkcijomis, o kitomis, jiems būdingesnėmis, charakteristikomis.

Tolydžiųjų atsitiktinių dydžių nepriklausomumą dar apibūdina lygybė

$$p(x, y) = p_1(x)p_2(y)$$

su visais $(x; y) \in \boldsymbol{R}^2$.

Jeigu nors su viena skaičių pora $(\tilde{x}; \tilde{y}) \in \boldsymbol{R}^2$

$$F(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq F_1(\tilde{x})F_2(\tilde{y}),$$

tai atsitiktiniai dydžiai *X* ir *Y* vadinami priklausomaisiais.

1.2.2. TOLYDIEJI DVIMAČIAI VEKTORIAI

Vektorius (*X*, *Y*), kurio dvimatė skirstinio funkcija $F(x, y)$ yra tolydi, vadinamas tolydžiuoju atsitiktiniu vektoriumi. Tokio vektoriaus koordinatės *X* ir *Y* yra tolydieji dydžiai. Kaip ir vienmačiai dydžiai, tolydieji dvimačiai dydžiai gali būti arba absoliučiai tolydūs, arba singuliarieji. Singuliarieji dydžiai praktikoje nenaudojami.

Dvimatį atsitiktinį vektorių (*X*, *Y*) vadiname absoliučiai tolydžiu (toliau - tolydžiuoju), jeigu egzistuoja tokia funkcija $p(x, y)$, su kuria skirstinio funkcija

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(u, v)\,du\,dv, \text{ kai } (x; y) \in \boldsymbol{R}^2.$$

Funkcija $p(x, y)$ vadinama dydžio (X, Y) tikimybių tankio funkcija (trumpai - tankiu). Jai būdingos šios savybės ([1]):

1) tankis yra neneigiamoji normuotoji funkcija:

$$p(x, y) \geq 0 \text{ su visais } (x; y) \in \boldsymbol{R}^2 \text{ (išplaukia iš apibrėžimo),}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)dxdy = 1 \text{ (išplaukia iš savybės } F(+\infty,+\infty) = 1\text{).}$$

2) jei tankis $p(x, y)$ yra tolydus taške (x; y), tai

$$p(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

3) tikimybė, jog tolydusis dydis (X, Y) įgis reikšmes, esančias stačiakampyje $S = \{(x, y)\text{: } x_1 \leq x < x_2,\ y_1 \leq y < y_2\}$, yra

$$\mathbf{P}((X, Y) \in S) = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} p(x, y)dxdy.$$

4) atsitiktinio vektoriaus koordinačių X ir Y tankiai (marginalieji tankiai) $p_1(x)$ ir $p_2(y)$ išreiškiami dvimačiu tankiu $p(x, y)$:

$$p_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)dy,\quad p_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)dx.$$

1.2.3. PAGRINDINĖS ATSITIKTINIO VEKTORIAUS SKAITINĖS CHARAKTERISTIKOS

Kiekvienas skirstinys, nusakytas skirstinio funkcija $F(x, y)$, tankiu $p(x, y)$ arba tikimybėmis $\mathbf{P}(X = x_i, Y = y_i)$, visiškai apibūdina atsitiktinį vektorių. Tačiau sprendžiant daugelį teorinių bei praktinių uždavinių, nebūtina ši išsami informacija. Be to, daugiamačių dydžių skirstiniai yra keleto kintamųjų funkcijos, todėl praktiškai juos apskaičiuoti bei taikyti yra sudėtinga, o dažnai ir nebūtina. Pakanka lakoniškai išdėstyti esminius skirstinių ypatumus. Tikimybių teorijoje tai atliekama remiantis skaitinėmis charakteristikomis.

1.2.3.1. VIDURKIS

Atsitiktinio vektoriaus (X, Y) vidurkis yra jo koordinačių vidurkių vektorius ($\mathbf{M}X$, $\mathbf{M}Y$).

Jei (X, Y) yra tolydusis su dvimačiu tankiu $p(x, y)$ ir koordinačių tankiais $p_1(x)$ ir $p_2(y)$ (čia $x \in \boldsymbol{R}$, $y \in \boldsymbol{R}$), tai

$$\mathbf{M}X = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xp(x, y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} xp_1(x)dx ,$$

$$\mathbf{M}Y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yp(x, y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} yp_2(y)dy .$$

Vidurkis ($\mathbf{M}X$, $\mathbf{M}Y$) yra dvimačio atsitiktinio dydžio padėties plokštumoje charakteristika – plokštumos taškas, apie kurį telkiasi dydžio (X, Y) reikšmės. Mechaninė vidurkio prasmė – vienetinės kūno masės, pasiskirsčiusios plokštumoje, centras.

Vidurkiui būdingos tokios savybės ([1]):

1) $\mathbf{M}C = C$, kai C – konstanta.

2) Jei $X \geq 0$, tai $\mathbf{M}X \geq 0$.

3) $|\mathbf{M}X| \leq \mathbf{M}|X|$.

4) $\mathbf{M}(X + Y) = \mathbf{M}X + \mathbf{M}Y$.

5) Jei dydžiai X ir Y yra nepriklausomi, tai $\mathbf{M}XY = \mathbf{M}X\mathbf{M}Y$.

6) $\mathbf{M}CX = C\,\mathbf{M}X$.

1.2.3.2. DISPERSIJA

Atsitiktinio vektoriaus (X, Y) dispersija yra koordinačių dispersijų vektorius ($\mathbf{D}X$, $\mathbf{D}Y$). Jis apibūdina koordinačių sklaidą apie vidurkius. Atsitiktinio dydžio dispersija apibrėžiama kaip šio dydžio nuokrypio nuo kvadrato vidurkis.

Jei (X, Y) yra tolydusis su dvimačiu tankiu $p(x, y)$ ir koordinačių tankiais $p_1(x)$ ir $p_2(y)$ (čia $x \in \boldsymbol{R}$, $y \in \boldsymbol{R}$), tai

$$\mathbf{D}X = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{M}X)^2\, p_1(x)dx ,$$

$$\mathbf{D}Y = \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mathbf{M}Y)^2\, p_2(y)dy .$$

Dispersijai būdingos tokios savybės ([1]):

1) $\mathbf{D}X \geq 0$.

2) $\mathbf{D}X = \mathbf{M}X^2 - \mathbf{M}^2X$.

3) $\mathbf{D}C = 0$.

4) $\mathbf{D}CX = C^2\mathbf{D}X$.

5) Jei atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra nepriklausomi, tai $\mathbf{D}(X + Y) = \mathbf{D}X + \mathbf{D}Y$.

1.2.3.3. KOVARIACIJA

Dydžių X ir Y nuokrypių nuo vidurkių sandaugos vidurkis vadinamas kovariacija ir žymimas

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)(Y - \mathbf{M}Y).$$

Kai (X, Y) – tolydusis dydis, tai iš apibrėžimo išplaukia, kad

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - \mathbf{M}X)(y - \mathbf{M}Y)\,p(x, y)\,dxdy\,;\ \text{čia } x \in \boldsymbol{R},\ y \in \boldsymbol{R}$$

jei integralas konverguoja absoliučiai.

Kovariacijai būdingos tokios savybės ([1]):

1) $\mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{cov}(Y, X)$.

2) $\mathrm{cov}(X, X) = \mathbf{D}X$.

3) $|\mathrm{cov}(X, Y)| \le \sqrt{\mathbf{D}X\mathbf{D}Y}$.

4) Dydžius X ir Y vadiname nekoreliuotais, jei $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$.

5) Jei X ir Y yra nepriklausomi, tai jie yra ir nekoreliuoti (kai egzistuoja kovariacija). Atvirkščias teiginys neteisingas (bendruoju atveju).

1.2.3.4. KORELIACIJOS KOEFICIENTAS

Kovariacija $\mathrm{cov}(X, Y)$ neapibūdina dydžių koreliacinio ryšio stiprumo. Be to, kovariacijos dimensija (ji lygi dydžių X ir Y dimensijų sandaugai) trukdo spręsti palyginamuosius uždavinius. Tad koreliacinio ryšio glaudumui nusakyti vartojama bedimensė charakteristika, vadinama koreliacijos koeficientu.

Atsitiktinių dydžių X ir Y koreliacijos koeficientu ρ vadiname kovariacijos ir standartų sandaugos santykį:

$$\rho = \rho(X, Y) = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)(Y - \mathbf{M}Y)}{\sqrt{\mathbf{D}X\mathbf{D}Y}}.$$

Koreliacijos koeficiento savybės ([1]):

1) $\rho(aX + b, cY + d) = \rho(X, Y)$, kai $a > 0$ ir $c > 0$, t. y. kintant atskaitos pradžiai ir masteliui, koreliacijos koeficientas nesikeičia.

2) Jei X ir Y yra nepriklausomieji dydžiai, tai $\rho(X,Y) = 0$.

3) $|\rho(X, Y)| \le 1$.

4) $|\rho(X,Y)| = 1$ tada ir tik tada, kai X ir Y yra susiję tiesine priklausomybe.

Iš pastarosios savybės išplaukia, kad kiekybinė koreliacinio ryšio charakteristika $\rho(X,Y)$ apibūdina tiesinį ryšį. Kai $|\rho(X,Y)| = 1$, dydžiai X ir Y yra tiesiškai priklausomi.

Kai $\rho(X,Y) = 0$, tiesinio ryšio nėra, tačiau netiesinis gali egzistuoti.

Tarkime, kad, apskaičiuodami koreliacijos koeficientą, gavome ρ = -0,98. Tai reiškia, kad koreliacinis ryšys yra stiprus ir prognozuotinas tiesinis ryšys, kuriame X ir Y kitimo kryptys yra priešingų tendencijų, nes $\rho < 0$ – neigiamoji koreliacija.

1.3. FREŠE TEOREMA

Žinoma ([6]), kad funkcija $F(\boldsymbol{x})$ (čia $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$) nemažėja kiekvienam jos argumentui x_j ($1 \le j \le n$). Be to, jei $x_j \to -\infty$ kuriam nors j, tai $F(\boldsymbol{x}) \to 0$. Iš kitos pusės, jei $x_j \to +\infty$, tai funkcija $F(\boldsymbol{x})$ artėja prie (n-1)-mačio atsitiktinio vektoriaus skirstinio funkcijos, kurią galima gauti iš atsitiktinio vektoriaus $\boldsymbol{X}$, atmetus jo j-tąją komponentę. Akivaizdu, kad šią procedūrą galima kartoti baigtinį skaičių kartų ir gauti marginaliąsias vektoriaus $\boldsymbol{X}$ komponenčių X_i skirstinio funkcijas $F_i(x)$. Iš tikrųjų, jei $x_k \to \infty$ ($k \ne i$), tai funkcijos $F(\boldsymbol{x})$ riba bus lygi $F_j(x)$. Pagal šiuos samprotavimus, iš dalies išplaukia, kad skirstinio funkcija $F(\boldsymbol{x})$ vienareikšmiškai apibrėžia visus marginaliuosius skirstinius. Atvirkščiai vis dėl to būti negali. Nors prie užsiduotų marginaliųjų skirstinių $F_j(x)$ ($1 \le j \le n$) funkcijos $F(\boldsymbol{x})$ mes visiškai laisvai pasirinkti negalime, turime daug galimybių apibrėžti šią funkciją.

Teorema 1.1. (Freše ribos). ([6]) Tegul $F(\boldsymbol{x})$ - n-matė skirstinio funkcija, $F_j(x_j)$ ($1 \le j \le n$) – marginaliosios funkcijos. Tada su visais $x_1, x_2, ..., x_n$ teisingos nelygybės

$$\max\left(0, \sum_{j=1}^{n} F_j(x_j) - n + 1\right) \le F(x_1, x_2, ..., x_n) \le \min(F_1(x_1), ..., F_n(x_n)).$$

Nežiūrint į tai, kad didelėms n reikšmėms apatinė šių nelygybių riba artėja prie trivialiosios, dvimačiu atveju ji labai praverčia formuojant dvimatę skirstinio funkciją su duotais marginaliaisiais skirstiniais.

Panaudojus didesnio mato skirstinio funkcijas, galima gauti kitokias nelygybes.

Pažymėkime:

$$G_{j(k)}(x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_k}) = \mathbf{P}(B_{j_1}, B_{j_2}, ..., B_{j_k}),$$

čia $B_j = \{X^{(j)} \ge x_j\}$, $\boldsymbol{j}(k) = (j_1, j_2, ..., j_k)$. Be to, tarkime, kad

$$S_0(\boldsymbol{x}) = 1,\ S_k(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le n} G_{j(k)}(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_k})\ \ (k \ge 1).$$

Teorema 1.2. ([6]) Tegul $n \ge 2$. Tada teisingas toks sąryšis:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,. \tag{1.1}$$

Be to, bet kuriam sveikajam skaičiui s $(0 \le s \le \dfrac{n-1}{2})$ teisingos nelygybės:

$$\sum_{k=0}^{2s+1} (-1)^k S_k(\boldsymbol{x}) \le F(\boldsymbol{x}) \le \sum_{k=0}^{2s} (-1)^k S_k(\boldsymbol{x})\,. \tag{1.2}$$

1.4. EKSPONENTINIO SKIRSTINIO KONSTRAVIMAS

Tegul $(X,\ Y)$ – dvimatis vektorius, kurio komponentės pasiskirsčiusios pagal eksponentinį dėsnį. Komponenčių marginaliosios skirstinio funkcijos yra:

$$F_1(x) = 1 - e^{-x};\ \text{čia}\ x \ge 0,$$

$$F_2(y) = 1 - e^{-y};\ \text{čia}\ y \ge 0.$$

Jeigu X ir Y – nepriklausomieji dydžiai, tai dvimatė skirstinio funkcija $F(x, y)$:

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y) = (1 - e^{-x})(1 - e^{-y}) = 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-(x+y)};\ x \ge 0,\ y \ge 0.$$

Tegul dvimačio vektoriaus $(X,\ Y)$ komponentės yra priklausomos.

Tarkime, kad

$$G(x, y) = \mathbf{P}(X \ge x, Y \ge y)\,.$$

Remiantis (1.1) lygybe, dvimatę skirstinio funkciją galima užrašyti taip:

$$F(x, y) = 1 - e^{-x} - e^{-y} + G(x, y)\,.$$

Yra labai platus funkcijos $G(x, y)$ pasirinkimas, todėl galime gauti daug įvairių skirstinio funkcijos $F(x, y)$ išraiškų. Ją konstruojant reikia atsižvelgti į tikimybinę funkcijos $G(x, y)$ reikšmę, Freše ribas ir tą faktą, kad funkcijos $g(x) = G(x, y) - e^{-x}$ ir $g(y) = G(x, y) - e^{-y}$ turi nemažėti kintant atitinkamoms x ir y reikšmėms.

Keletas dažniausiai naudojamų dvimačių eksponentinių skirstinių ([6]):

1. Morgenšterno skirstinys:

$$G(x, y) = e^{-x-y}[1 + \alpha(1 - e^{-x})(1 - e^{-y})]\,.$$

2. Gumbelio I tipo skirstinys:

$$G(x, y) = \exp(-x - y + \Theta xy)\,.$$

3. Gumbelio II tipo skirstinys:

$$G(x, y) = \exp[-(x^n + y^n)^{1/n}].$$

4. Maršalo-Olkino skirstinys:

$$G(x, y) = \exp[-x - y - \lambda \max(x, y)] \ (\lambda > 0).$$

5. Mardijo skirstinys:

$$G(x, y) = (e^x + e^y - 1)^{-1}.$$

1.5. ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ GENERAVIMAS ATVIRKŠTINĖS FUNKCIJOS METODU. EMPIRINIS VIDURKIS IR EMPIRINĖ DISPERSIJA

Tarkime, kad atsitiktinio dydžio X skirstinio funkcija $F(x)$ yra tolydi, atsitiktinis dydis α yra tolygiai pasiskirstęs atkarpoje [0, 1]. Tuomet atsitiktinio dydžio X reikšmes galima apskaičiuoti pagal algoritmą

$$X = F^{-1}(\alpha).$$

Šis atsitiktinių skaičių generavimo algoritmas vadinamas atvirkštinės funkcijos metodu.

Tarkime, kad α_1 yra atsitiktinis skaičius. Sprendžiame lygtį $F(x_1) = \alpha_1$. Ją išsprendę, gauname tolydžiojo atsitiktinio dydžio X reikšmę $x_1 = F^{-1}(\alpha_1)$. Atlikę šį algoritmą n kartų, gauname n atsitiktinio dydžio X reikšmių $x_1, x_2, ..., x_n$.

Atsitiktinio dydžio X empiriniu vidurkiu vadinamas skaičius $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, o empirine dispersija – $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$. Šie dydžiai yra atsitiktiniai.

1.6. DAUGIAMAČIŲ DYDŽIŲ EKSTREMUMAI

1.6.1. DAUGIAMAČIŲ EKSTREMALIŲJŲ REIKŠMIŲ SCHEMOS APIBRĖŽIMAS

Tarkime, kad $\left\{X_n = \left(X_{1,n}, X_{2,n}, ..., X_{m,n}\right), n \geq 1\right\}$ - nepriklausomų m-mačių atsitiktinių dydžių seka. Pažymėkime

$$Z_{i,n} = \max\left(X_{i,1}, X_{i,2}, ..., X_{i,n}\right),$$

$$W_{i,n} = \min\left(X_{i,1}, X_{i,2}, ..., X_{i,n}\right), \ i = \overline{1,m}.$$

m-mačių atsitiktinių dydžių pirmųjų n sekos narių maksimumas ir minimumas apibrėžiamas taip:

$$Z_n = \left(Z_{1,n}, Z_{2,n}, ..., Z_{m,n}\right),$$

$$W_n = \left(W_{1,n}, W_{2,n}, ..., W_{m,n}\right).$$

m-mačiai atsitiktiniai dydžiai Z_n ir W_n vadinami daugiamatėmis ekstremaliomis reikšmėmis arba, trumpai, daugiamačiu maksimumu ir minimumu. Toks daugiamačių ekstremaliųjų reikšmių apibrėžimas nėra vienintelis, tačiau jis yra labai plačiai taikomas daugiamačių ekstremaliųjų reikšmių teorijoje, kadangi toks maksimumo ar minimumo apibrėžimo būdas dažnai būna sąlygotas taikomojo pobūdžio uždavinių specifikos.

Aritmetinės operacijos tarp vektorių apibrėžiamos pagal komponentes:

$$x + y = \left(x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_m + y_m\right),$$
$$xy = (x_1 y_1, x_2 y_2, ..., x_m y_m),$$
$$\frac{x}{y} = \left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, ..., \frac{x_m}{y_m}\right),$$

o nelygybė $x < y$ reiškia nelygybių sistemą $x_i < y_i$ $(1 \le i \le m)$. Taip pat dažnai naudojamas nulinis vektorius $0 = (0,0,...,0)$ ir vienetinis vektorius $1 = (1,1,...,1)$.

Tarkime, kad $\left\{g_n(x) = \left(g_{1,n}(x_{1,}), g_{2,n}(x_2), ..., g_{m,n}(x_m)\right), n \ge 1\right\}$ - tokių griežtai monotoninių ir tolydžių (kiekvienos komponentės atžvilgiu) vektorinių funkcijų (jos vadinamos normalizavimo funkcijomis) seka, kad skirstinio funkcijų seka

$$G_n\left(g_n(x)\right) = P\left(Z_n < g_n(x)\right)$$

silpnai konverguoja į neišsigimusią m-matę skirstinio funkciją G. m-matė skirstinio funkcija G vadinama neišsigimusia, jeigu visos jos vienmatės marginaliosios skirstinio funkcijos $G_i(x_i)$ $(i = \overline{1,m})$ yra neišsigimusios. Taip apibrėžta struktūra Z_n su prielaidomis apie m-mačių atsitiktinių dydžių seką $\left\{X_n, n \ge 1\right\}$ bei normalizavimo funkcijų seką $\left\{g_n(x), \mathrm{n} \ge 1\right\}$ sudaro daugiamačių maksimumų schemą.

Tarkime, kad $\left\{t_n(x) = \left(t_{1,n}(x_{1,}), t_{2,n}(x_2), ..., t_{m,n}(x_m)\right), n \ge 1\right\}$ - tokių normalizavimo funkcijų seka, kad skirstinio funkcijų seka

$$T_n(t_n(x)) = P\left(W_n < t_n(x)\right)$$

silpnai konverguoja į neišsigimusią m-matę skirstinio funkciją T. Struktūra W_n su prielaidomis apie m-mačių atsitiktinių dydžių seką $\left\{X_n, n \ge 1\right\}$ bei normalizavimo funkcijų seką $\left\{t_n(x), \mathrm{n} \ge 1\right\}$ sudaro daugiamačių minimumų schemą.

Jei m-mačiai atsitiktiniai dydžiai $\left\{X_n, n \ge 1\right\}$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę su skirstinio funkcija

$$F(x_1, x_2, ..., x_m) = P(X_{1,j} < x_1, X_{2,j} < x_2, ..., X_{m,j} < x_m) \;\; \forall \mathrm{j} \ge 1,$$

o normalizavimo funkcijos $g_n(x)$ ir $t_n(x)$ yra tiesinės, t.y.

$$g_n(x) = (a_{1,n} + b_{1,n}x_1,...,a_{m,n} + b_{m,n}x_m),$$

$$t_n(x) = (c_{1,n} + d_{1,n}x_1,...,c_{m,n} + d_{m,n}x_m),$$

$a_{i,n}, c_{i,n} \in \mathbf{R}$, $b_{i,n} > 0$, $d_{i,n} > 0$, $i = \overline{1,m}$, tai tokia daugiamačių ekstremaliųjų reikšmių schema vadinama klasikine daugiamačių ekstremalių reikšmių (maksimumų arba minimumų) schema.

Kaip ir vienmačiu atveju, klasikinė daugiamačių ekstremaliųjų reikšmių schema gali būti apibendrinta.

1.6.2. RIBINĖS TEOREMOS

Tarkime, kad $\{X_j = (X_{1,j}, X_{2,j},..., X_{m,j}), j \geq 1\}$ - nepriklausomi vienodai pasiskirstę m-mačiai atsitiktiniai dydžiai su skirstinio funkcija $F(x_1,..., x_m)$ ir egzistuoja tokios centravimo ir normavimo vektorių sekos $\{a_n, n \geq 1\}$ ir $\{b_n > 0, n \geq 1\}$, kad

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n < a_n + b_n x) = H(x)$$

visuose funkcijos $H(x)$ tolydumo taškuose. Čia $H(x)$ – neišsigimusi m-matė skirstinio funkcija. Jei tenkinama aukščiau paminėta sąlyga, tai sakoma, kad funkcija $F(x)$ priklauso ribinio skirstinio $H(x)$ traukos sričiai, o pats skirstinys $H(x)$ dar vadinamas daugiamačių ekstremaliųjų reikšmių skirstiniu.

Pažymėkime

$$F_i^{-1}(t) = \inf\{x_i : F_i(x_i -) \leq t \leq F_i(x_i)\},$$

$$\overline{F}_i^{-1}(t) = \inf\{x_i : 1 - F_i(x_i -) \leq t \leq 1 - F_i(x_i)\},$$

čia $F_i(x_i)$ - skirstinio $F(x)$ vienmatė marginalioji skirstinio funkcija ($1 \leq i \leq m$).

Teorema 1.3. ([3]) Tarkime, kad ribinės skirstinio funkcijos $H(x)$ vienmatės marginaliosios skirstinio funkcijos lygios $H_i(x_i) = H_{1,\alpha_i}(x_i), i = \overline{1,m}$. Skirstinio funkcija $F(x)$ priklauso ribinio skirstinio $H(x)$ traukos sričiai tada ir tik tada, kai

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1 - F(tx_1, \varphi_2(t)x_2,..., \varphi_m(t)x_m)}{1 - F_1(t)} = -\log H(x)$$

visiems x, su kuriais $H(x) > 0$. Čia

$$\varphi_i(t) = \overline{F}_i^{-1}(1 - F_1(t)), -\infty < t < \infty, i = \overline{2,m}.$$

Teorema 1.4. ([3]) Tarkime, kad ribinės skirstinio funkcijos $H(x)$ vienmatės marginaliosios skirstinio funkcijos lygios $H_i(x_i) = H_{2,\alpha_i}(x_i), i = \overline{1,m}$. Skirstinio funkcija $F(x)$ priklauso ribinio skirstinio $H(x)$ traukos sričiai tada ir tik tada, kai

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1 - F((tx_1, \varphi_2(t)x_2, ..., \varphi_m(t)x_m) + \omega)}{1 - F_1(\omega_1 - t)} = -\log H(x)$$

visiems x, su kuriais $H(x) > 0$. Čia

$$\varphi_i(t) = \omega_i - \overline{F}_i^{-1}(1 - F_1(\omega_1 - t))\ i = \overline{2,m},$$

o $\omega = (\omega_1, ..., \omega_m)$ - toks m-matės Euklido erdvės taškas, kad $F(\omega) = 1$ ir $F(x) < 1$, jei $x \leq \omega$.

Teorema 1.5. ([3]) Tarkime, kad ribinės skirstinio funkcijos $H(x)$ vienmatės marginaliosios skirstinio funkcijos lygios $H_i(x_i) = H_{3,\alpha_i}(x_i), i = \overline{1,m}$. Skirstinio funkcija $F(x)$ priklauso ribinio skirstinio $H(x)$ traukos sričiai tada ir tik tada, kai

$$\lim_{t \uparrow \omega_1} \frac{1 - F(a(t)x + b(t))}{1 - F_1(t)} = -\log H(x)$$

visiems x, su kuriais $H(x) > 0$. Čia

$$\omega_1 = \sup\{x_1 : F_1(x_1) < 1\},$$

$$a_i(t) = \overline{F}_i^{-1}(e^{-1}(1 - F_i(t))) - \overline{F}_i^{-1}(1 - F_1(t)),$$

$$b_i(t) = \overline{F}_i^{-1}(1 - F_1(t)), i = \overline{1,m}.$$

Ribinė skirstinio funkcija $H(x)$ yra tolydi. Jos vienmatės marginaliosios skirstinio funkcijos gali būti tik trijų tipų:

$$H_{1,\gamma}(x) = e^{-x^{-\gamma}}, x > 0, \gamma > 0;$$
$$H_{2,\gamma}(x) = e^{-(-x)^{\gamma}}, x < 0, \gamma > 0;$$
$$H_3(x) = \exp\{-e^{-x}\}, x \in \mathbf{R}.$$

Normalizavimo vektorius galima parinkti taip: pirmiausia randame m-matės skirstinio funkcijos $F(x)$ vienmatę marginaliąją skirstinio funkcija $F_i(x_i)$ ir randame i-tąją normalizavimo vektoriaus komponentę. Tuo pačiu randame ir ribinio skirstinio $H(x)$ vienmatę marginaliąją skirstinio funkciją $H_i(x_i)$. Toliau ribinį skirstinį galime ieškoti pagal aukščiau pateiktas teoremas.

1.6.3. MAKSIMUMŲ ASIMPTOTINIS NEPRIKLAUSOMUMAS IR ASIMPTOTINIS PRIKLAUSOMUMAS

Tarkime, kad $\{(X_{1,j}, X_{2,j},..., X_{m,j}), j=\overline{1,n}\}$ - nepriklausomi vienodai pasiskirstę m-mačiai atsitiktiniai vektoriai su skirstinio funkcija F,

$$Z_n = (Z_{1,n},...,Z_{m,n}) = \left(\max_{1\le i\le n} X_{1,i},...,\max_{1\le i\le n} X_{m,i}\right)$$

yra kiekvienos komponentės maksimumų vektorius ir egzistuoja centravimo ir normavimo konstantos $a_{j,n}$ ir $b_{j,n}>0$ ($j=\overline{1,m}$) tokios, kad

$$P\left(\frac{Z_{1,n}-a_{1,n}}{b_{1,n}}<x_1,...,\frac{Z_{m,n}-a_{m,n}}{b_{m,n}}<x_m\right) = F^n(a_{1,n}+b_{1,n}x_1,...,a_{m,n}+b_{m,n}x_m) \underset{n\to\infty}{\to} H(x_1,...,x_m),$$

čia $H(x)$ – m-matė skirstinio funkcija su neišsigimusiais marginaliaisiais skirstiniais. Įstatę vietoje x_j $+\infty$ gautume, kad

$$P\left(\frac{Z_{j,n}-a_{j,n}}{b_{j,n}}<x_j\right) = F_j^n(a_{j,n}+b_{j,n}x_j) \underset{n\to\infty}{\to} H_j(x_j),\ j=\overline{1,m}; \qquad \textbf{(1.6.3.1)}$$

čia F_j ir H_j yra atitinkamai j-tieji marginalieji F ir H skirstiniai.

Asimptotinis nepriklausomumas apibrėžiamas taip:

$$H(x_1,...,x_m) = H_1(x_1)...H_m(x_m). \qquad \textbf{(1.6.3.2)}$$

Asimptotinis nepriklausomumas yra tada ir tik tada ([5]), kai tenkinama (1.6.3.1) sąlyga ir egzistuoja taškas $x=(x_1,...,x_m)\in\mathbf{R}^m$ toks, kad $0<H_j(x_j)<1,\ j=\overline{1,m}$ ir

$$P\left(\frac{Z_{1,n}-a_{1,n}}{b_{1,n}}<x_1,...,\frac{Z_{m,n}-a_{m,n}}{b_{m,n}}<x_m\right) \underset{n\to\infty}{\to} H_1(x_1)...H_m(x_m).$$

Be to, (1.6.3.2) teisinga bet kokiems $(x_1,...,x_m)\in\mathbf{R}^m$ tada ir tik tada, kai

$$H(1,...,1) = H_1(1)...H(1) = e^{-m},$$

jei $H_j(x_j) = H_{1,\alpha_j}(x_j) = \exp\{-x_j^{-\alpha_j}\},\ \alpha_j>0,\ \ j=\overline{1,m}$; arba

$$H(-1,...,-1) = H_1(-1)...H(-1) = e^{-m},$$

jei $H_j(x_j) = H_{2,\alpha_j}(x_j) = \exp\{-(-x_j)^{\alpha_j}\},\ \alpha_j>0,\ \ \mathrm{j}=\overline{1,m}$; arba

$$H(0,...,0) = H_1(0)...H_m(0) = e^{-m},$$

jei $H_j(x_j) = H_3(x_j) = \exp\{-\exp\{-x_j\}\},\ \ j=\overline{1,m}$.

Asimptotinis priklausomumas yra tada ir tik tada, kai egzistuoja taškas $x=(x_1,...,x_m)\in\mathbf{R}^m$ toks, kad $0<H_1(x_1)=...=H_m(x_m)<1$ ir

$$P\left(\frac{Z_{1,n}-a_{1,n}}{b_{1,n}}<x_1,\ldots,\frac{Z_{m,n}-a_{m,n}}{b_{m,n}}<x_m\right)\underset{n\to\infty}{\to}H_1(x_1).$$

1.6.4. KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTIS

Tarkime, kad $\left\{\left(X_{1,j},X_{2,j},\ldots,X_{m,j}\right),\ j=\overline{1,n}\right\}$ - nepriklausomi vienodai pasiskirstę m-mačiai atsitiktiniai vektoriai su skirstinio funkcija

$$F\left(x_1,\ldots,x_m\right)=P\left(X_{1,j}<x_1,\ldots,X_{m,j}<x_m\right),\ \forall j\geq 1.$$

Tarkime, kad egzistuoja tokios centravimo ir normavimo vektorių sekos $\{a_n,\ n\geq 1\}$ ir $\{b_n>0,\ n\geq 1\}$, kad

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{Z_n-a_n}{b_n}<x\right)=H(x),$$

čia $H(x)$ – neišsigimusi m-matė skirstinio funkcija.

Pažymėkime

$$u_n(x)=n\left(1-F\left(a_n+b_nx\right)\right),$$

o tiems x, su kuriais $H(x)>0$, pažymėkime

$$v_n(x)=u_n(x)+\log H(x).$$

Teorema 1.6. ([3]) Visiems x, su kuriais $\frac{u_n(x)}{n}<\frac{1}{2}$ ir $H(x)>0$, teisingas konvergavimo greičio įvertis

$$\left|P(Z_n<a_n+b_nx)-H(x)\right|\leq\Delta_n=H(x)\left(R_{1,n}(x)+R_{2,n}(x)+R_{1,n}(x)R_{2,n}(x)\right);$$

čia $R_{1,n}(x)=\frac{2u_n^2(x)}{n}+\frac{2u_n^4(x)}{n^2}\cdot\frac{1}{1-q}$,

$$R_{2,n}(x)=\left|v_n(x)\right|+\frac{v_n^2(x)}{2}\cdot\frac{1}{1-s},$$

o $0<q,s<1$ parenkami taip, kad

$$\frac{2u_n^2(x)}{3n}\leq q,\ \frac{\left|v_n(x)\right|}{3}\leq s.$$

1.7. PROGRAMINĖ ĮRANGA

Šiame darbe atliekant tyrimą skaičiuojami integralai, sprendžiamos lygtys, atliekami prastinimai, braižomos vienmatės funkcijos, todėl tyrimui atlikti buvo pasirinktas programinis paketas MathCAD.

Jo pagalba galima ne tik gauti galutinius rezultatus, bet ir išskirti tarpinius. Paketas buvo pasirinktas dar ir todėl, kad MathCAD programų tekstas mažai skiriasi nuo įprasto teksto matematikos knygoje ir suprantamesnis daugeliui vartotojų.

Konvergavimo greičio įverčiams tirti buvo pasirinktas programinis paketas Matlab, kadangi jis yra orientuotas į funkcijų braižymą. Jo aplinkoje buvo sukurta programa vartotojui.

2. TIRIAMOJI DALIS IR REZULTATAI

2.1. DVIMAČIŲ PARETO SKIRSTINIŲ KONSTRAVIMAS

Tarkime, kad (*X*, *Y*) – dvimatis atsitiktinis vektorius, kurio komponentės yra pasiskirsčiusios pagal Pareto dėsnį.

Vektoriaus koordinačių marginaliosios skirstinio funkcijos yra žinomos:

$$F_1(x) = 1 - \frac{1}{x^{\alpha}};\text{čia } x \geq 1, \alpha > 0; \qquad \textbf{(2.1.1)}$$

$$F_2(y) = 1 - \frac{1}{y^{\beta}};\text{čia } y \geq 1, \beta > 0. \qquad \textbf{(2.1.2)}$$

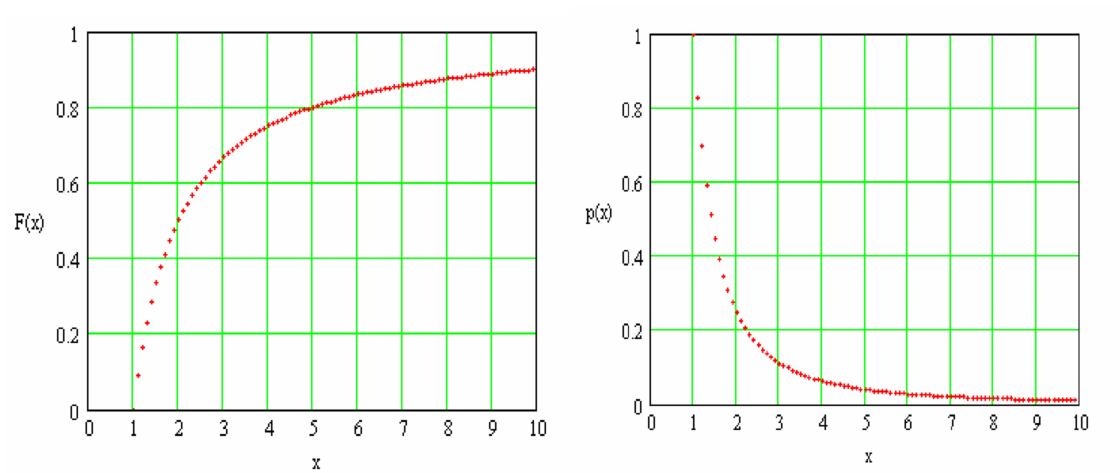
2.1.1 paveiksle, *b*, pateiktas skirstinio funkcijos atvejis, kai parametras $\alpha = 1$.

Tankių funkcijos:

$$p_1(x) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}};\text{čia } x \geq 1, \alpha > 0; \qquad \textbf{(2.1.3)}$$

$$p_2(y) = \frac{\beta}{y^{\beta+1}};\text{čia } y \geq 1, \beta > 0. \qquad \textbf{(2.1.4)}$$

2.1.1 paveiksle, *a*, pateiktas vienmačio tankio atvejis, kai parametras $\alpha = 1$.



a) *b)*

2.1.1 pav. Skirstinio ir tankio funkcijos, kai $\alpha = 1$

Reikia sukonstruoti tokio vektoriaus (*X*, *Y*) skirstinio funkciją *F*(*x*,*y*).

2.1.1. *X* IR *Y* – NEPRIKLAUSOMIEJI DYDŽIAI

Tarkime, kad vektoriaus (X, Y) komponentės yra nepriklausomos. Tada skirstinio funkciją galima apibrėžti vienareikšmiškai. Pagal apibrėžimą:

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y).$$

Į šią formulę įstatę (2.1.1) ir (2.1.2) išraiškas, gauname:

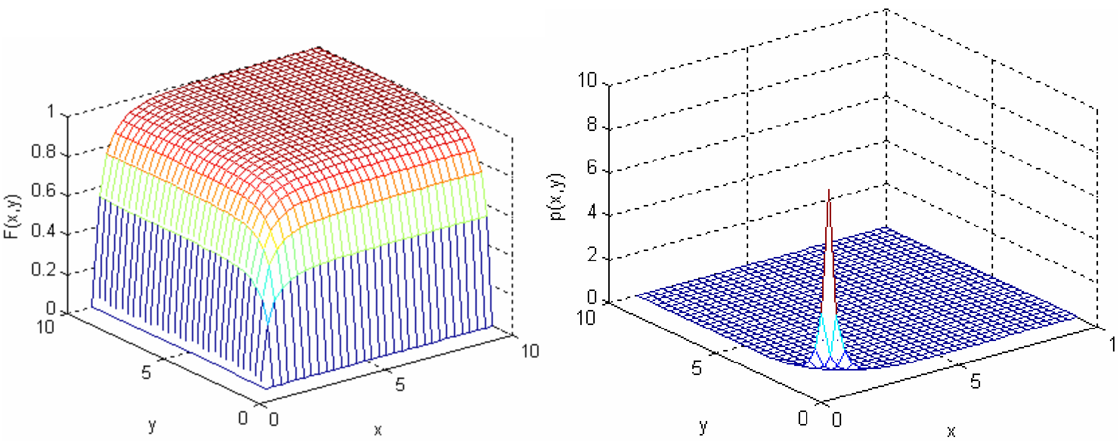
$$F(x, y) = \left(1 - \frac{1}{x^\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{y^\beta}\right) = 1 - \frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{y^\beta} + \frac{1}{x^\alpha y^\beta}, \qquad \textbf{(2.1.1.1)}$$

čia $x, y \geq 1$, $\alpha, \beta > 0$. Skirstinio funkcija, kai $\alpha = 3, \beta = 3$ pateikta 2.1.2 paveiksle, *a*.

Vektoriaus (X, Y) tankis:

$$p(x, y) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} \frac{\beta}{y^{\beta+1}}, \; x, y \geq 1, \alpha, \beta > 0. \qquad \textbf{(2.1.1.2)}$$

2.1.2 paveiksle, *b*, pateikta tankio funkcija, kai $\alpha = 3, \beta = 3$.



a) *b)*

2.1.2 pav. Skirstinio ir tankio funkcijos, kai $\alpha = 3, \beta = 3$

Nustatysime, kokios turi būti parametrų α ir β reikšmės, kad egzistuotų pagrindinės vektoriaus (X, Y) charakteristikos. Koordinačių vidurkiai skaičiuojami pagal formules:

$$\mathbf{M}X = \int_{-\infty}^{\infty} x p_1(x) dx, \qquad \textbf{(2.1.1.3)}$$

$$\mathbf{M}Y = \int_{-\infty}^{\infty} y p_2(y) dy. \qquad \textbf{(2.1.1.4)}$$

Į (2.1.1.3) įstatę (2.1.3), o į (2.1.1.4) įstatę (2.1.4) ir atlikę veiksmus, gauname:

$$\mathbf{M}X = \frac{\alpha}{\alpha - 1}, \text{ čia } \alpha > 1, \tag{2.1.1.5}$$

$$\mathbf{M}Y = \frac{\beta}{\beta - 1}, \text{ čia } \beta > 1. \tag{2.1.1.6}$$

Taigi vektoriaus (X, Y) vidurkis yra $\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}; \frac{\beta}{\beta-1}\right)$, kai $\alpha > 1$ ir $\beta > 1$.

Vektoriaus koordinačių dispersijas skaičiuojame pagal formules:

$$\mathbf{D}X = \mathbf{M}X^2 - \mathbf{M}^2 X, \tag{2.1.1.7}$$

$$\mathbf{D}Y = \mathbf{M}Y^2 - \mathbf{M}^2 Y. \tag{2.1.1.8}$$

Tam randame momentus:

$$\mathbf{M}X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_1(x) dx, \tag{2.1.1.9}$$

$$\mathbf{M}Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 p_2(y) dy. \tag{2.1.1.10}$$

Į (2.1.1.9) įstatę (2.1.3), į (2.1.1.10) įstatę (2.1.4) ir atlikę veiksmus, gauname:

$$\mathbf{M}X^2 = \frac{\alpha}{\alpha - 2}, \ \alpha > 2;$$

$$\mathbf{M}Y^2 = \frac{\beta}{\beta - 2}, \ \beta > 2.$$

Gautas išraiškas įstatę atitinkamai į (2.1.1.7) ir (2.1.1.8) formules, gauname X ir Y dispersijas:

$$\mathbf{D}X = \frac{\alpha}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}, \alpha > 2;$$

$$\mathbf{D}Y = \frac{\beta}{(\beta-2)(\beta-1)^2}, \beta > 2.$$

Taigi vektoriaus (X, Y) dispersija yra $\left(\frac{\alpha}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}; \frac{\beta}{(\beta-2)(\beta-1)^2}\right)$, kai $\alpha > 2$ ir $\beta > 2$.

Kadangi dydžiai X ir Y yra nepriklausomi, tai jų kovariacija $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$ ir jie yra nekoreliuoti, kai $\alpha > 2$ ir $\beta > 2$.

2.1.2. *X* IR *Y* – PRIKLAUSOMIEJI DYDŽIAI

Tarkime, kad vektoriaus (X, Y) komponentės yra priklausomos. Tada, remdamiesi (1.1) formule, dvimatę skirstinio funkciją konstruokime tokiu būdu:

$$F(x,y) = 1 - \frac{1}{x^{\alpha}} - \frac{1}{y^{\beta}} + G(x,y)\,,\ x,\,y \geq 1\,,\ \alpha,\,\beta > 0. \qquad \textbf{(2.1.2.1)}$$

Reikia parinkti tokią funkciją $G(x, y)$, kad būtų nepažeistos skirstinio funkcijos savybės. Remiantis dvimačio eksponentinio skirstinio konstravimo pavyzdžiu, Mongeršterno funkciją modifikuojame ir pritaikome Pareto skirstiniui. Taigi funkciją $G(x, y)$ apibrėžiame taip:

$$G(x,y) = \frac{1}{x^{\alpha}y^{\beta}}\left(1 + \gamma\left(1 - \frac{1}{x^{\alpha}}\right)\left(1 - \frac{1}{y^{\alpha}}\right)\right),\ x,\,y \geq 1\,,\ \alpha,\,\beta > 0.$$

Įstatę $G(x, y)$ išraišką į (2.1.2.1), gauname dvimačio vektoriaus (X, Y) skirstinio funkciją:

$$F(x,y) = 1 - \frac{1}{x^{\alpha}} - \frac{1}{y^{\beta}} + \frac{1}{x^{\alpha}y^{\beta}}\left(1 + \gamma\left(1 - \frac{1}{x^{\alpha}}\right)\left(1 - \frac{1}{y^{\beta}}\right)\right),\ x,\,y \geq 1\,,\ \alpha,\,\beta > 0. \qquad \textbf{(2.1.2.2)}$$

Skirstinio funkcijos, kai $\alpha = 3, \beta = 3, \gamma = 0.5$**,** grafikas pateiktas 2.1.3 paveiksle, *a*.

Akivaizdu, kad

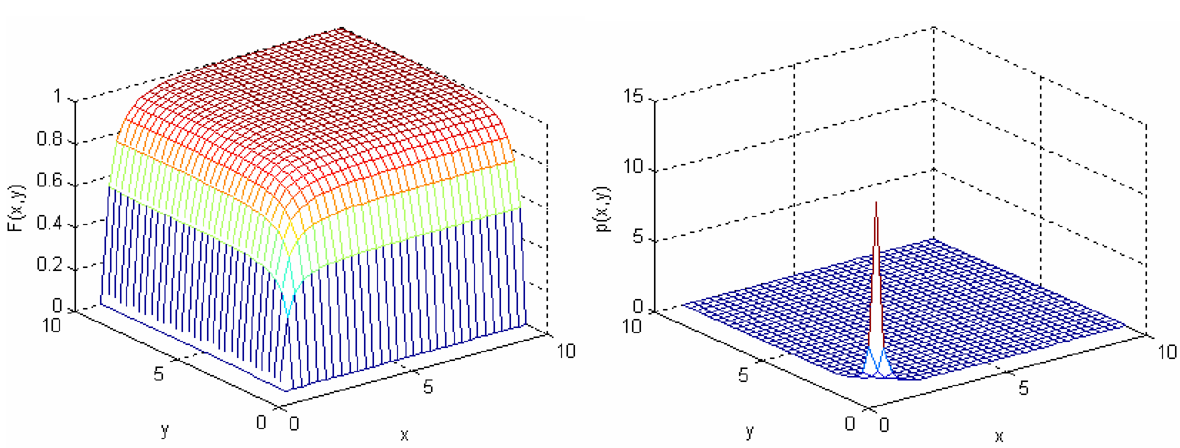
$$F(x,+\infty) = 1 - \frac{1}{x^{\alpha}} = F_1(x),\ \ x \geq 1\,,\ \alpha > 0;$$

$$F(+\infty,y) = 1 - \frac{1}{y^{\beta}} = F_2(y),\quad y \geq 1\,,\ \beta > 0.$$

Tankio funkcija:

$$p(x,y) = \alpha\beta\,\frac{1 + \gamma\left(1 - 2x^{-\alpha}\right)\left(1 - 2y^{-\beta}\right)}{x^{\alpha+1}y^{\beta+1}},\ x,\,y \geq 1\,,\ \alpha,\,\beta > 0. \qquad \textbf{(2.1.2.3)}$$

Tankio funkcijos, kai $\alpha = 3, \beta = 3, \gamma = 0.5$, grafikas pateiktas 2.1.3 paveiksle, *b*.



a) *b)*

2.1.3 pav. Skirstinio ir tankio funkcijos, kai $\alpha = 3, \beta = 3, \gamma = 0.5$

Nustatysime, kokios turi būti parametrų α ir β reikšmės, kad egzistuotų pagrindinės vektoriaus (*X*, *Y*), kurio skirstinio funkcija aprašyta (2.1.2.2) išraiška, charakteristikos. Koordinačių vidurkiai skaičiuojami taip pat, kaip ir nepriklausomų koordinačių atveju.

Į (2.1.1.5) įstatę (2.1.3), į (2.1.1.6) įstatę (2.1.4) ir atlikę veiksmus, gauname:

$$\mathbf{M}X = \frac{\alpha}{\alpha - 1}, \ \alpha > 1, \qquad \textbf{(2.1.2.4)}$$

$$\mathbf{M}Y = \frac{\beta}{\beta - 1}, \ \beta > 1. \qquad \textbf{(2.1.2.5)}$$

Taigi vektoriaus (*X*, *Y*) vidurkis yra $\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}; \frac{\beta}{\beta - 1}\right)$, kai $\alpha > 1$ ir $\beta > 1$.

Dispersijai apskaičiuoti randame momentus:

$$\mathbf{M}X^2 = \frac{\alpha}{\alpha - 2}, \ \alpha > 2; \qquad \textbf{(2.1.2.6)}$$

$$\mathbf{M}Y^2 = \frac{\beta}{\beta - 2}, \beta > 2. \qquad \textbf{(2.1.2.7)}$$

Tuomet gautas išraiškas įstatę atitinkamai į (2.1.1.7) ir (2.1.1.8) formules, gauname *X* ir *Y* dispersijas:

$$\mathbf{D}X = \frac{\alpha}{(\alpha - 2)(\alpha - 1)^2}, \alpha > 2; \qquad \textbf{(2.1.2.8)}$$

$$\mathbf{D}Y = \frac{\beta}{(\beta - 2)(\beta - 1)^2}, \beta > 2. \qquad \textbf{(2.1.2.9)}$$

Taigi vektoriaus (*X*, *Y*) dispersija yra $\left(\frac{\alpha}{(\alpha - 2)(\alpha - 1)^2}; \frac{\beta}{(\beta - 2)(\beta - 1)^2}\right)$, kai $\alpha > 2$ ir $\beta > 2$.

Kovariaciją skaičiuojame pagal formulę:

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbf{M}XY - \mathbf{M}X\mathbf{M}Y. \qquad \textbf{(2.1.2.10)}$$

Mišrųjį momentą **M***XY* skaičiuojame pagal formulę:

$$\mathbf{M}XY = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyp(x, y)dxdy. \qquad \textbf{(2.1.2.11)}$$

Į (2.1.2.11) įstatę (2.1.2.3), gauname:

$$\mathbf{M}XY = \alpha\beta \frac{4\alpha\beta - 2\beta + \gamma + 1 - 2\alpha}{(\alpha - 1)(\beta - 1)(2\alpha - 1)(2\beta - 1)}, \ \alpha > 2 \text{ ir } \beta > 2.$$

Gautą išraišką ir koordinačių vidurkius įstatę į (2.1.2.10) formulę, randame dydžių *X* ir *Y* kovariaciją:

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \alpha\beta \frac{\gamma}{(\alpha - 1)(\beta - 1)(2\alpha - 1)(2\beta - 1)}, \ \alpha > 2, \ \beta > 2.$$

Koreliacijos koeficiento ieškome pagal formulę:

$$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbf{D}X\mathbf{D}Y}}.$$

Į pastarąją formulę įstatę gautas (2.1.2.8), (2.1.2.9) ir kovariacijos išraiškas, gauname:

$$\rho(X,Y)=\alpha\beta\frac{\gamma}{(2\alpha-1)(2\beta-1)\left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha-2)(\beta-2)}\right)^{\frac{1}{2}}},\ \alpha>2,\ \beta>2.$$

Galimas koeficiento γ reikšmes nustatome iš koreliacijos koeficiento 3 savybės:

$$|\rho(X,Y)|\le 1;$$

$$\left|\alpha\beta\frac{\gamma}{(2\alpha-1)(2\beta-1)\left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha-2)(\beta-2)}\right)^{\frac{1}{2}}}\right|\le 1.$$

Atlikę elementariuosius pertvarkius, gauname:

$$-\left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha-2)(\beta-2)}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{(2\alpha-1)(2\beta-1)}{\alpha\beta}\le\gamma\le\left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha-2)(\beta-2)}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{(2\alpha-1)(2\beta-1)}{\alpha\beta}.$$

Jei imtume $\gamma = 0$, gautume vektoriaus skirstinio funkciją, kai jo koordinatės X ir Y yra nepriklausomos.

Akivaizdu, kad

$$\left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha-2)(\beta-2)}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{(2\alpha-1)(2\beta-1)}{\alpha\beta}>0\ \ (\alpha,\beta>2).$$

Vadinasi, nuo koeficiento γ parinkimo priklauso, kokia koreliacija (teigiama ar neigiama) bus tarp dydžių X ir Y. Taigi,

$$\rho(X,Y)<0,\text{kai}-\left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha-2)(\beta-2)}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{(2\alpha-1)(2\beta-1)}{\alpha\beta}\le\gamma<0\ \text{ ir}$$

$$\rho(X,Y)>0,\text{kai}\,0<\gamma\le\left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha-2)(\beta-2)}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{(2\alpha-1)(2\beta-1)}{\alpha\beta}.$$

Tokiu būdu iš duotų vienmačių Pareto skirstinių sukonstravome dvimatį skirstinį, kurio komponenčių (marginalieji) skirstiniai ir yra Pareto skirstiniai. Be to, komponentės yra koreliuotos (ir priklausomos), jeigu $\gamma\ne 0$.

Daugiau skirstinio ir tankio funkcijų grafikų pateikta *1 priede*.

2.1.3. ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ GENERAVIMAS

Tarkime, kad atsitiktinis dydis *X* pasiskirstęs pagal Pareto dėsnį, o jo skirstinio funkcija ir tankis aprašyti (2.1.1) ir (2.1.3) formulėmis. Atvirkštinės funkcijos metodu sugeneruosime 100 šio dydžio reikšmių, kai $\alpha = 2$.

Tarkime, kad t ~ T(0, 1). Programinio paketo MathCAD funkcijos *runif*(*n*, *a*, *b*) (čia *n* – generuojamų reikšmių skaičius, *a* ir *b* – intervalo galai) pagalba sugeneruojame 100 atsitiktinio dydžio reikšmių (*2 priedas*).

Sprendžiame lygtį:

$$F(x) = t,$$

$$1 - \frac{1}{x^2} = t,$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{1-t}}\,.$$

Apskaičiuojame dydžio *X* empirinį vidurkį ir dispersiją:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i \approx 2{,}116\,,$$

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}(X_i - 2{,}116)^2 \approx 4{,}532\,.$$

Teorinis vidurkis:

$$\mathbf{M}X = \frac{\alpha}{\alpha - 1} = \frac{2}{2-1} = 2\,.$$

Teorinė dispersija yra neaprėžta, t. y. $\mathbf{D}X = \infty$.

Taigi iš gautų rezultatų matyti, kad empirinis vidurkis nuo teorinio skiriasi nežymiai. Tačiau gauta empirinė dispersija yra baigtinė, kai tuo tarpu teorinė neegzistuoja. Taip galėjo gautis dėl to, kad *X* yra atsitiktinis dydis ir jo reikšmės buvo gautos atsitiktinai. Be to, kiekvieną kartą jas generuojant, bus gaunamos vis kitos reikšmės, todėl ir empirinis vidurkis, ir empirinė dispersija gali skirtis nuo prieš tai gautų.

2.2. DVIMAČIAI MAKSIMUMAI

Tarkime, kad (X_1, Y_1), (X_2, Y_2),..., (X_n, Y_n),... – nepriklausomi dvimačiai atsitiktiniai vektoriai. **(2)**

Apibrėžiame dvimatį maksimumą:

$$Z_n = (Z_{1,n}, Z_{2,n});$$

čia $Z_{1,n} = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$,

$Z_{2,n} = \max(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$.

2.2.1. RIBINIS SKIRSTINYS

2.2.1.1. *X* IR *Y* – NEPRIKLAUSOMIEJI DYDŽIAI

Teorema 2.1. Tarkime, kad sekoje (2) vektorių komponentės yra nepriklausomos, o vektoriai yra pasiskirstę pagal Pareto dėsnį su skirstinio funkcija (2.1.1.1)**.** Tada

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{Z_{1,n}}{n^{1/\alpha}} < x, \frac{Z_{2,n}}{n^{1/\beta}} < y\right) = e^{-\left(x^{-\alpha}+y^{-\beta}\right)}, x > 0, y > 0, \alpha > 0, \beta > 0 .$$

► Pirmiausia randame normalizavimo konstantų vektorius $a_n = (a_{1,n}, a_{2,n})$ ir $b_n = (b_{1,n}, b_{2,n})$ bei marginaliųjų skirstinių ribinius skirstinius.

Skaičiuojame tikimybę

$$\mathbf{P}\left(\frac{Z_{1,n} - a_{1,n}}{b_{1,n}} < x\right) = \mathbf{P}(Z_{1,n} < xb_{1,n} + a_{1,n}) = F^n(xb_{1,n} + a_{1,n}) = \left(1 - \frac{1}{(xb_{1,n} + a_{1,n})^\alpha}\right)^n .$$

Akivaizdu, kad $a_{1,n} = 0$ ir $b_{1,n} = n^{\frac{1}{\alpha}}$. Tada

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{Z_{1,n}}{n^{1/\alpha}} < x\right) = e^{-x^{-\alpha}} = H_{1,\alpha}(x), x > 0 .$$

Analogiškai gauname, kad $a_{2,n} = 0$ ir $b_{2,n} = n^{\frac{1}{\beta}}$. Tada

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{Z_{2,n}}{n^{1/\beta}} < y\right) = e^{-y^{-\beta}} = H_{1,\beta}(y), y > 0 .$$

Skaičiuojame tikimybę

$$\mathbf{P}\left(\frac{Z_{1,n}}{n^{1/\alpha}} < x, \frac{Z_{2,n}}{n^{1/\beta}} < y\right) = \mathbf{P}\left(Z_{1,n} < n^{1/\alpha} x, Z_{2,n} < n^{1/\beta} y\right) = F^n(n^{1/\alpha} x, n^{1/\beta} y) ;$$

$$F^n(n^{1/\alpha} x, n^{1/\beta} y) = \left(1 - \frac{x^{-\alpha}}{n} - \frac{y^{-\beta}}{n} + \frac{x^{-\alpha} y^{-\beta}}{n^2}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{x^{-\alpha}}{n} - \frac{y^{-\beta}}{n} + \frac{x^{-\alpha} y^{-\beta}}{n^2}\right)} .$$

Gauname ribą:

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\frac{Z_{1,n}}{n^{1/\alpha}}<x,\frac{Z_{2,n}}{n^{1/\beta}}<y\right)=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left(1-\frac{x^{-\alpha}}{n}-\frac{y^{-\beta}}{n}+\frac{x^{-\alpha}y^{-\beta}}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{-\left(x^{-\alpha}+y^{-\beta}-\frac{x^{-\alpha}y^{-\beta}}{n}\right)}=e^{-\left(x^{-\alpha}+y^{-\beta}\right)}.$$

Vadinasi, ribinis skirstinys yra $H(x,y)=e^{-\left(x^{-\alpha}+y^{-\beta}\right)};\ x,\ y>0,\alpha,\beta>0$. **(2.2.1.1)**

◄

Kadangi,

$$H(x,y)=e^{-\left(x^{-\alpha}+y^{-\beta}\right)}=e^{-x^{-\alpha}}e^{-y^{-\beta}}=H_{1,\alpha}(x)H_{1,\beta}(y)$$

ir

$$H(1,1)=H_{1,\alpha}(1)H_{1,\beta}(1)=e^{-2},$$

tai, kai vektorių komponentės yra nepriklausomos, jų maksimumai yra asimptotiškai nepriklausomi.

2.2.1.2. *X* IR *Y* – PRIKLAUSOMIEJI DYDŽIAI

Teorema 2.2. Tarkime, kad sekoje (2) vektorių komponentės yra priklausomos, o vektoriai yra pasiskirstę pagal Pareto dėsnį su skirstinio funkcija (2.1.2.2). Tada

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\frac{Z_{1,n}}{n^{1/\alpha}}<x,\frac{Z_{2,n}}{n^{1/\beta}}<y\right)=e^{-\left(x^{-\alpha}+y^{-\beta}\right)};\ x,\ y>0,\alpha,\beta>0.$$

► Kadangi (2.1.1.1) skirstinio funkcijos marginalieji skristiniai yra tokie patys kaip ir (2.1.2.2), tai normavimo ir centravimo vektoriai yra:

$$a_n=(0,0),$$
$$b_n=\left(n^{1/\alpha},n^{1/\beta}\right).$$

Skaičiuojame tikimybę

$$\mathbf{P}\left(\frac{Z_{1,n}}{n^{1/\alpha}}<x,\frac{Z_{2,n}}{n^{1/\beta}}<y\right)=\mathbf{P}\left(Z_{1,n}<n^{1/\alpha}x,Z_{2,n}<n^{1/\beta}y\right)=F^n(n^{1/\alpha}x,n^{1/\beta}y);$$

$$F^n(n^{1/\alpha}x,n^{1/\beta}y)=\left(1-\frac{x^{-\alpha}}{n}-\frac{y^{-\beta}}{n}+\frac{x^{-\alpha}y^{-\beta}}{n^2}\left(1+\gamma\left(1-\frac{x^{-\alpha}}{n}\right)\left(1-\frac{y^{-\beta}}{n}\right)\right)\right)^n=e^{n\ln\left(1-\frac{x^{-\alpha}}{n}-\frac{y^{-\beta}}{n}+\frac{x^{-\alpha}y^{-\beta}}{n^2}\left(1+\gamma\left(1-\frac{x^{-\alpha}}{n}\right)\left(1-\frac{y^{-\beta}}{n}\right)\right)\right)}$$

Gauname ribą:

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\frac{Z_{1,n}}{n^{1/\alpha}}<x,\frac{Z_{2,n}}{n^{1/\beta}}<y\right)=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left(1-\frac{x^{-\alpha}}{n}-\frac{y^{-\beta}}{n}+\frac{x^{-\alpha}y^{-\beta}}{n^2}\left(1+\gamma\left(1-\frac{x^{-\alpha}}{n}\right)\left(1-\frac{y^{-\beta}}{n}\right)\right)\right)}=e^{-\left(x^{-\alpha}+y^{-\beta}\right)}.$$

Vadinasi, ribinis skirstinys yra $H(x,y)=e^{-\left(x^{-\alpha}+y^{-\beta}\right)};\ x,\ y>0,\alpha,\beta>0$.

◄

Šioje teoremoje gautas ribinis skirstinys yra lygus ribiniam skirstiniui (2.2.1.1). Tai reiškia, kad nors vektorių, kurie sudaro seką (2), komponentės yra priklausomos, tačiau maksimumai yra asimptotiškai nepriklausomi.

2.2.2. KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTIS

2.2.2.1. *X* IR *Y* – NEPRIKLAUSOMIEJI DYDŽIAI

Nagrinėkime seką (2). Tarkime, kad vektorių komponentės yra nepriklausomos ir pasiskirstę pagal Pareto dėsnį su marginaliosiomis skirstinio funkcijomis (2.1.1) ir (2.1.2), dvimatė skirstinio funkcija yra (2.1.1.1), o ribinis skirstinys - (2.2.1.1).

Skaičiuojame absoliutinę paklaidą:

$$\Delta_n^{(0)}(x,y) = \left| F^n(n^{1/\alpha}x, n^{1/\beta}y) - H(x,y) \right|. \qquad \textbf{(2.2.2.1)}$$

Paklaidų grafiniai vaizdai dvimatėje (a) ir trimatėje (b) erdvėse, kai $y = 3$, $\alpha = \beta = 2$, pateikti paveiksle 2.2.1. Dalyje (a) punktyrinė linija vaizduoja vienmatę paklaidą $\Delta_n^{(0)}(y) = \left| F^n(n^{1/\beta}y) - H(y) \right|$, kai $y = 3$. Tai reiškia, kad

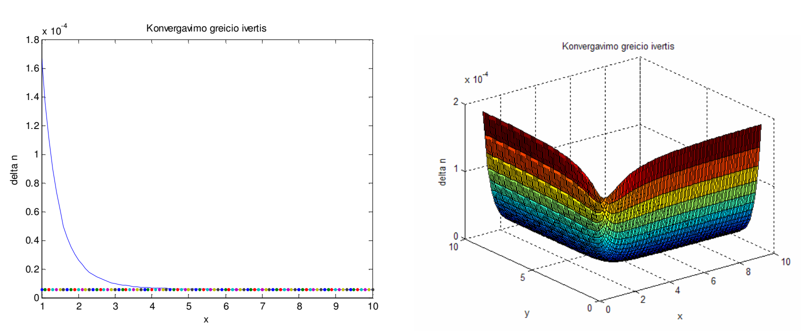
$$\Delta_n^{(0)}(x,y) = \left| F^n(n^{1/\alpha}x, n^{1/\beta}y) - H(x,y) \right| \xrightarrow[x\to\infty]{} \left| F^n(n^{1/\beta}y) - H(y) \right| = \Delta_n^{(0)}(y).$$

Tai taip pat galima įrodyti remiantis skirstinio funkcijos savybėmis:

$$\Delta_n^{(0)}(\infty,y) = \left| F^n(n^{1/\alpha}\cdot\infty, n^{1/\beta}y) - H(\infty,y) \right| = \left| F^n(n^{1/\beta}y) - H(y) \right| = \Delta_n^{(0)}(y).$$

Vadinasi,

$$\Delta_n^{(0)}(x,y) \xrightarrow[x\to\infty]{} \Delta_n^{(0)}(y).$$



(a) erdvėje R^2 *(b) erdvėje R^3*

2.2.1 pav. Konvergavimo greičio įvertis, kai $\alpha = \beta = 2$

Remiantis skyrelyje 1.6.4 aprašyta metodika, rasime apytikslį konvergavimo greičio įvertį. Pažymėkime:

$$u_n(x,y) = n\left(1-\left(1-\frac{x^{-\alpha}}{n}-\frac{y^{-\beta}}{n}+\frac{x^{-\alpha}y^{-\beta}}{n^2}\right)^n\right);$$

$$v_n(x,y) = u_n(x,y) - x^{-\alpha} - y^{-\beta}.$$

Tada visiems (x,y) su kuriais $\frac{u_n(x,y)}{n} < \frac{1}{2}$ ir $H(x,y) > 0$, teisingas konvergavimo greičio įvertis ([3]):

$$\left|\mathbf{P}\left(\frac{Z_{1,n}}{n^{1/\alpha}} < x, \frac{Z_{2,n}}{n^{1/\beta}} < y\right) - H(x,y)\right| \le \Delta_n(x,y) = H(x,y)\big(R_{1,n}(x,y) + R_{2,n}(x,y) + R_{1,n}(x,y)R_{2,n}(x,y)\big); \tag{2.2.2.2}$$

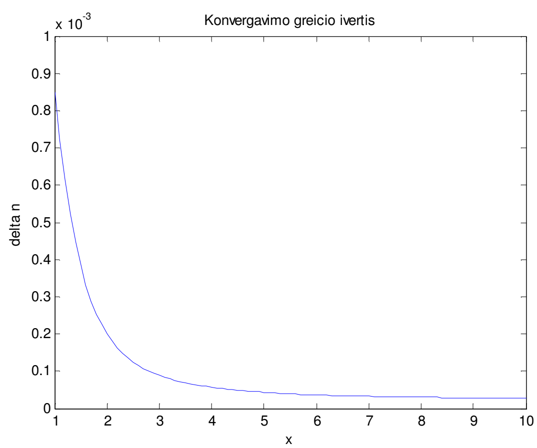
čia $R_{1,n}(x,y) = \frac{2u_n^2(x,y)}{n} + \frac{2u_n^4(x,y)}{n^2}\cdot\frac{1}{1-q}$,

$$R_{2,n}(x,y) = |v_n(x,y)| + \frac{v_n^2(x,y)}{2}\cdot\frac{1}{1-s},$$

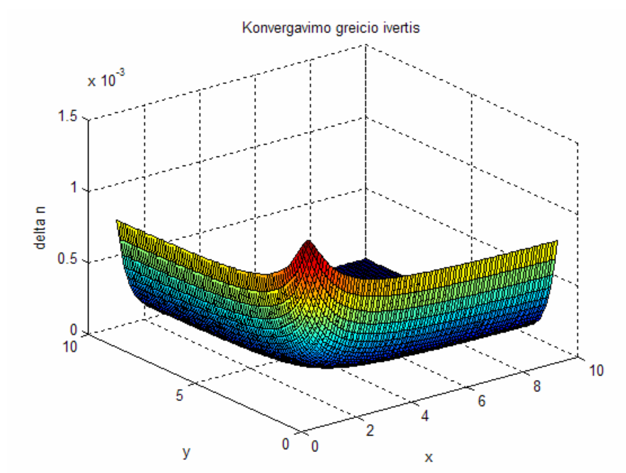
o $0 < q, s < 1$ parenkami taip, kad

$$\frac{2u_n^2(x,y)}{3n} \le q\,,\quad \frac{|v_n(x,y)|}{3} \le s\,.$$

Paveiksle 2.2.2 pateikti grafiniai apytikslio konvergavimo greičio vaizdai dvimatėje (a) ir trimatėje (b) erdvėse, kai $y = 3,\ \alpha = \beta = 2$, $q = s = 0{,}01$.



(a) erdvėje R^2



(b) erdvėje R^3

2.2.2 pav. Konvergavimo greičio įvertis, kai $\alpha = \beta = 2$, $q = s = 0{,}01$

2.2.2.2. *X* IR *Y* – PRIKLAUSOMIEJI DYDŽIAI

Tarkime, kad sekos (2) vektorių (X_i, Y_i), $i = \overline{1, n}$, komponentės yra priklausomos, o dvimatė skirstinio funkcija yra (2.1.2.2).

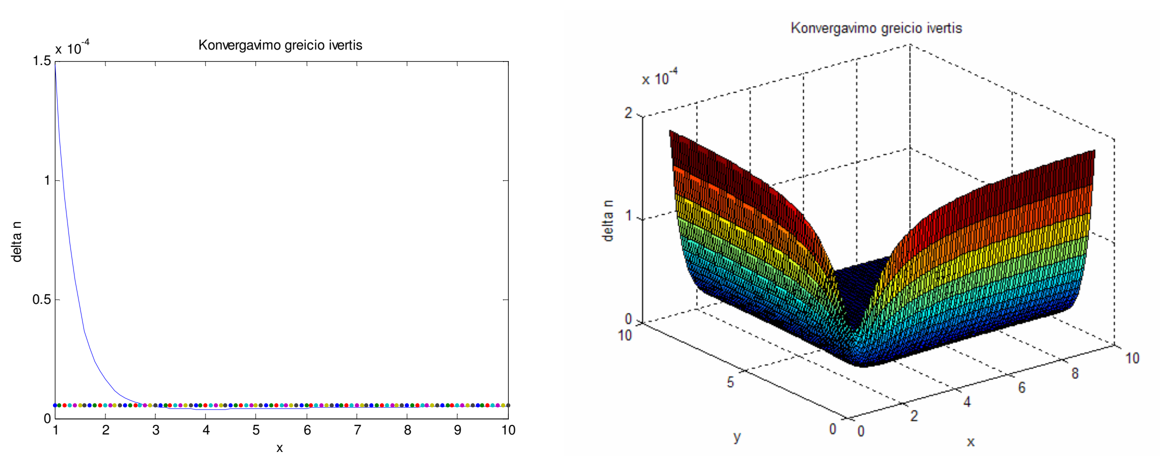
Absoliutinių paklaidų grafiniai vaizdai dvimatėje (a) ir trimatėje (b) erdvėse, kai $y = 3$, $\alpha = \beta = 2, \gamma = 0.5$, pateikti paveiksle 2.2.3. Dalyje (a) punktyrinė linija vaizduoja vienmatę paklaidą

$\Delta_n^{(0)}(y) = \left| F^n(n^{1/\beta} y) - H(y) \right|$, kai $y = 3$. **(2.2.2.3)**

Analogiškai, kaip ir priklausomųjų komponenčių atveju, gauname, kad

$$\Delta_n^{(0)}(x, y) \xrightarrow[x \to \infty]{} \Delta_n^{(0)}(y).$$

Be to, minimizavus $\Delta_n^{(0)}(x, y)$, kai $y = 3$, $\alpha = \beta = 2, \gamma = 0.5$, gauname, kad minimali jos reikšmė pasiekiama taške (2.59; 2), t. y. kai komponenčių reikšmės yra labai artimos.



(a) erdvėje R^2 *(b) erdvėje R^3*

2.2.3 pav. Konvergavimo greičio įvertis, kai $\alpha = \beta = 2, \gamma = 0.5$

Pažymėkime:

$$u_n(x, y) = n\left(1 - \left(1 - \frac{x^{-\alpha}}{n} - \frac{y^{-\beta}}{n} + \frac{x^{-\alpha} y^{-\beta}}{n^2}\left(1 + \gamma\left(1 - \frac{x^{-\alpha}}{n}\right)\left(1 - \frac{y^{-\beta}}{n}\right)\right)\right)^n\right);$$

$$v_n(x, y) = u_n(x, y) - x^{-\alpha} - y^{-\beta}.$$

Tada visiems (*x*,*y*) su kuriais $\frac{u_n(x, y)}{n} < \frac{1}{2}$ ir $H(x, y) > 0$, teisingas konvergavimo greičio įvertis ([3]):

$$\left|\mathbf{P}\left(\frac{Z_{1,n}}{n^{1/\alpha}} < x, \frac{Z_{2,n}}{n^{1/\beta}} < y\right) - H(x,y)\right| \le \Delta_n(x,y) = H(x,y)\big(R_{1,n}(x,y) + R_{2,n}(x,y) + R_{1,n}(x,y)R_{2,n}(x,y)\big); \tag{2.2.2.3}$$

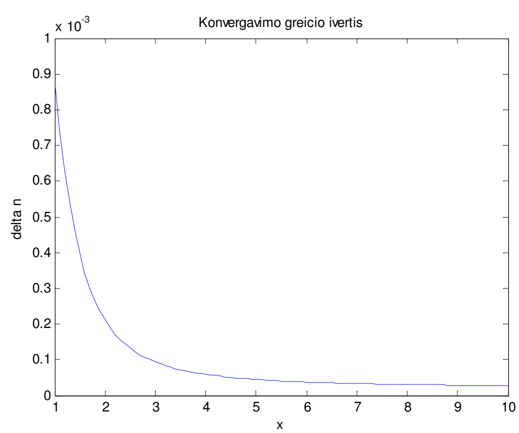
čia $R_{1,n}(x,y) = \dfrac{2u_n^2(x,y)}{n} + \dfrac{2u_n^4(x,y)}{n^2} \cdot \dfrac{1}{1-q}$,

$$R_{2,n}(x,y) = |v_n(x,y)| + \frac{v_n^2(x,y)}{2} \cdot \frac{1}{1-s},$$

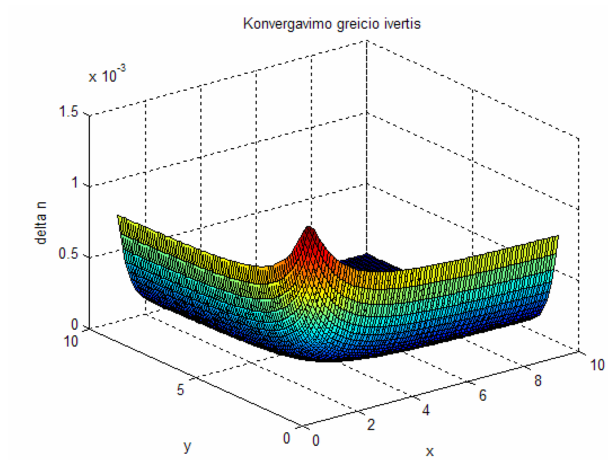
o $0 < q, s < 1$ parenkami taip, kad

$$\frac{2u_n^2(x,y)}{3n} \le q, \ \frac{|v_n(x,y)|}{3} \le s.$$

Grafiniai konvergavimo greičio įverčio vaizdai priklausomųjų komponenčių atveju, kai $y = 3$, $\alpha = \beta = 2, \gamma = 0.5$, pateikti paveiksle 2.2.4.



(a) erdvėje R^2



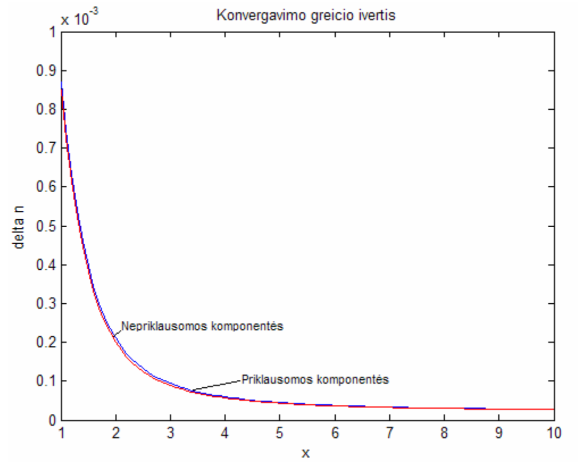
(b) erdvėje R^3

2.2.4 pav. Konvergavimo greičio įvertis, kai $\alpha = \beta = 2, \gamma = 0.5$

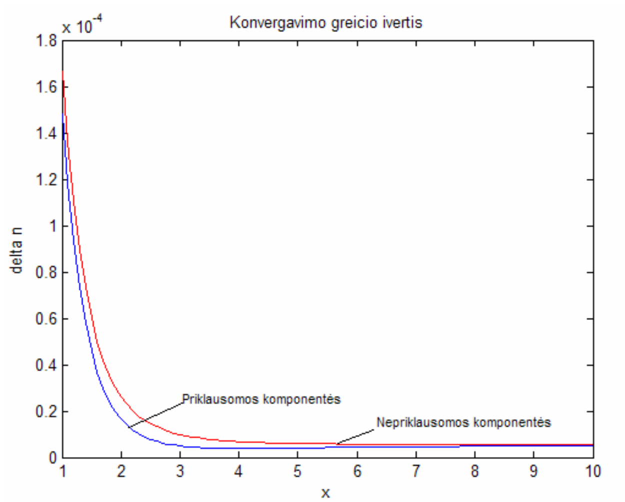
2.2.3. KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERČIO ANALIZĖ

Nagrinėkime paklaidas (2.2.2.1) bei konvergavimo greičio įvertį (2.2.2.2), kai vektorių komponentės yra nepriklausomos, ir paklaidas (2.2.2.3) bei konvergavimo greičio įvertį (2.2.2.4), kai komponentės yra priklausomos.

Kai vektoriaus komponentės yra priklausomos, gauname šiek tiek didesnį apytikslio konvergavimo greičio įvertį, nei kai komponentės yra nepriklausomos (2.2.5 pav.). Abiem atvejais įverčio reikšmės yra beveik lygios. Tuo tarpu skaičiuojant paklaidas, jas gauname mažesnes, kai vektoriaus komponentės yra priklausomos (2.2.6 pav.). Kadangi didėjant x reikšmėms, dvimačiai įverčiai artėja į vienmačius, tai esant didelėms reikšmėms, paklaidos priklausomų ir nepriklausomų komponenčių atveju skiriasi nežymiai.

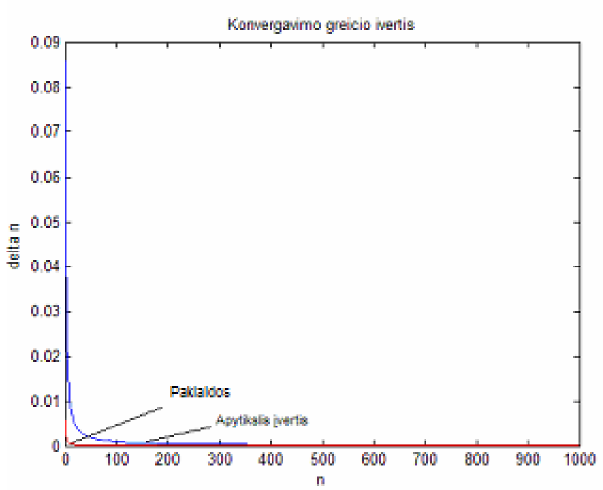


2.2.5 pav. Apytikslis konvergavimo greičio įvertis



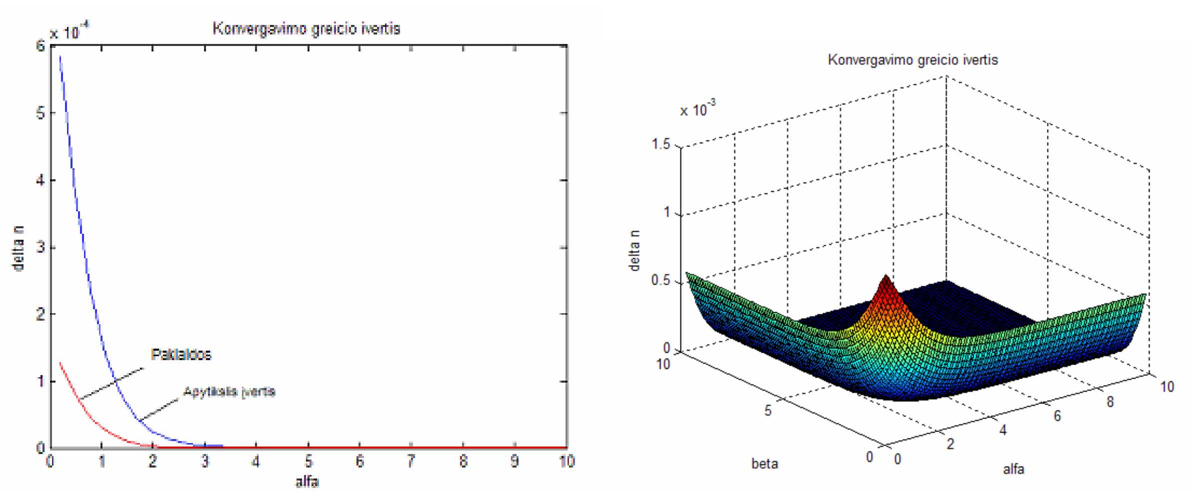
2.2.6 pav. Paklaidos

Paveiksle 2.2.7 pavaizduoti paklaidų ir apytikslio konvergavimo greičių priklausomybės nuo n, kai vektorių komponentės yra priklausomos (čia $n = 1000$, $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $x = 3$, $y = 3$ ir $\gamma = 0,5$). Kaip matyti, paklaidos yra žymiai mažesnės nei įvertis. Be to, didėjant n reikšmei, paklaidos mažėja.



2.2.7 pav. Konvergavimo greičio įverčio ir paklaidų priklausomybės nuo *n*

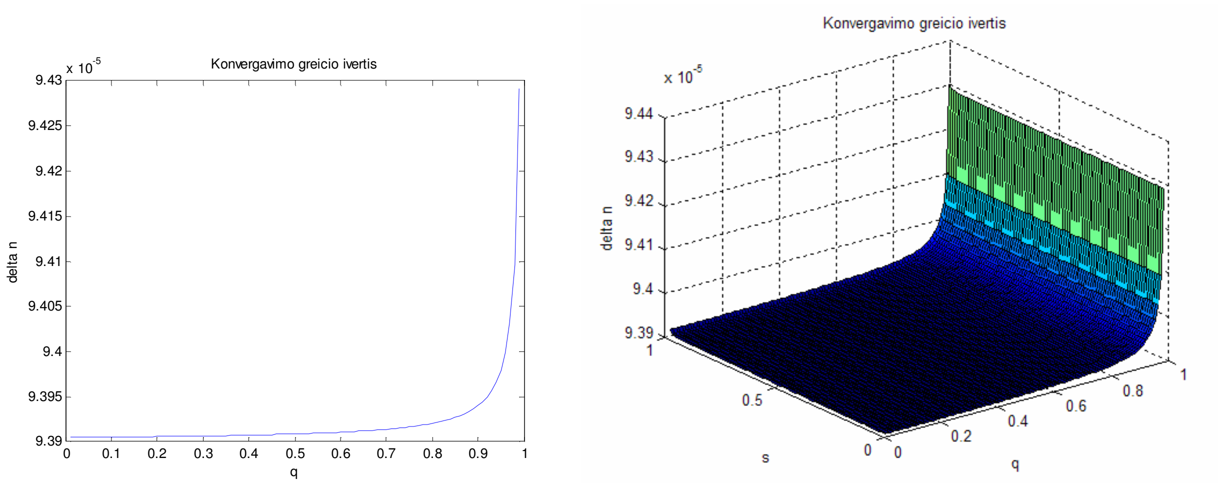
Paveiksle 2.2.8 pavaizduota apytikslio konvergavimo greičio įverčio priklausomybė nuo parametrų α ir β (čia $n = 1000$, $q = 0{,}1$, $s = 0{,}1$, $x = 3$, $y = 3$ ir $\gamma = 0{,}5$). Didėjant parametrų reikšmėms, paklaidos mažėja. Be to, paklaidos, esant mažoms parametrų α ir β reikšmėms, yra žymiai mažesnės nei įvertis, tačiau kai parametrų reikšmės yra didelės, tas skirtumas tarp paklaidų ir apytikslio įverčio yra nežymus.



(a) erdvėje R^2 *(b) erdvėje* R^3

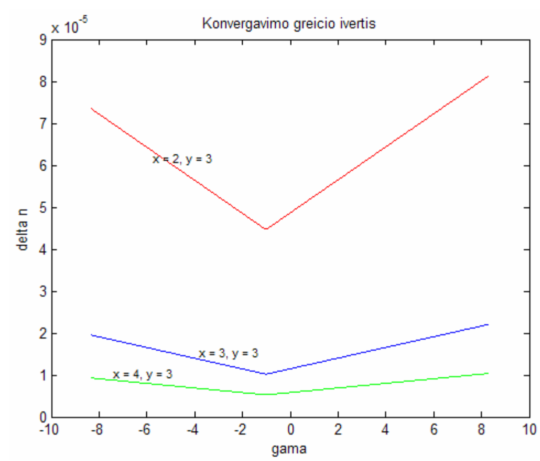
2.2.8 pav. Konvergavimo greičio įverčio priklausomybė nuo α ir β

Tam, kad egzistuotų apytikslis konvergavimo greičio įvertis, jo išraiškoje esantys parametrai q ir s turi būti iš intervalo (0; 1) bei turi būti tenkinamos tam tikros sąlygos (skyrelis 1.6.4). Galimoms šių parametrų reikšmėms nustatyti, buvo skaičiuojami apytiksliai įverčiai ir braižomi grafikai dvimatėje ir trimatėje erdvėse. Nustatyta, kad esant mažoms kintamųjų x ir y reikšmėms, parametrų q ir s reikšmės turi būti palyginus didelės. Tokia pati situacija ir kai n reikšmės yra mažos. Paveiksle 2.2.9 pavaizduotas atvejis, kai $n = 1000$, $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $x = 3$, $y = 3$ ir $\gamma = 0{,}5$. Kadangi didėjant parametrų q ir s reikšmėms konvergavimo greičio įvertis didėjo, tolimesniems skaičiavimams buvo pasirinkti atvejai, kai $q = 0{,}1$ ir $s = 0{,}1$.



2.2.9 pav. Konvergavimo greičio įverčio priklausomybė nuo *q* ir *s*

Paveiksle 2.2.10 pavaizduota apytikslio konvergavimo greičio priklausomybė nuo parametro γ. Ši priklausomybė yra tiesinė su minimumu tam tikrame taške. Nustatyta, kad mažiausios konvergavimo greičio įverčio reikšmės gaunamos, kai $\gamma = -1$, o paklaidos mažiausios yra tada, kai $\gamma = 1$. Be to, mažiausias paklaidos gaunamos tada, kai $x = y$.

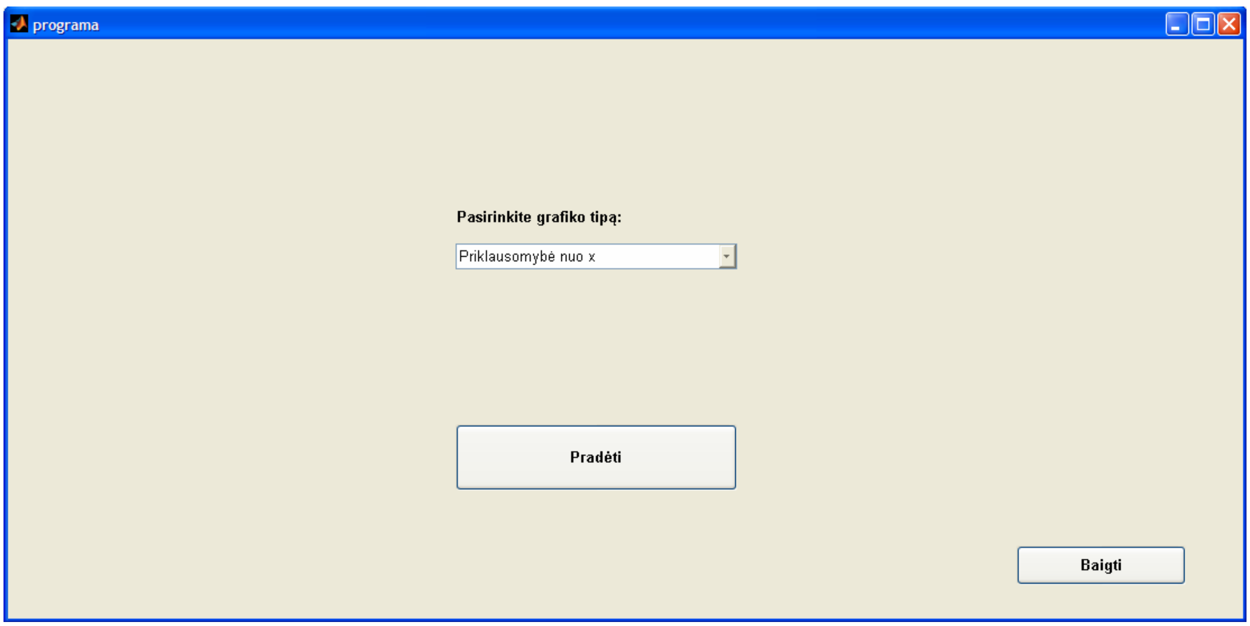


2.2.10 pav. Konvergavimo greičio įverčio priklausomybė nuo γ

3. PROGRAMINĖ REALIZACIJA IR INSTRUKCIJA VARTOTOJUI

Programa vartotojui sukurta MATLAB terpėje. Ji paleidžiama tiesiogiai per MATLAB, komandų lauke užrašius pavadinimą `Programa`. Prieš tai lauke `Current directory` reikia nurodyti katalogą, kuriame yra saugomi programos failai. Programos tekstas saugomas faile `Programa.m`, o langas – `Programa.fig`.

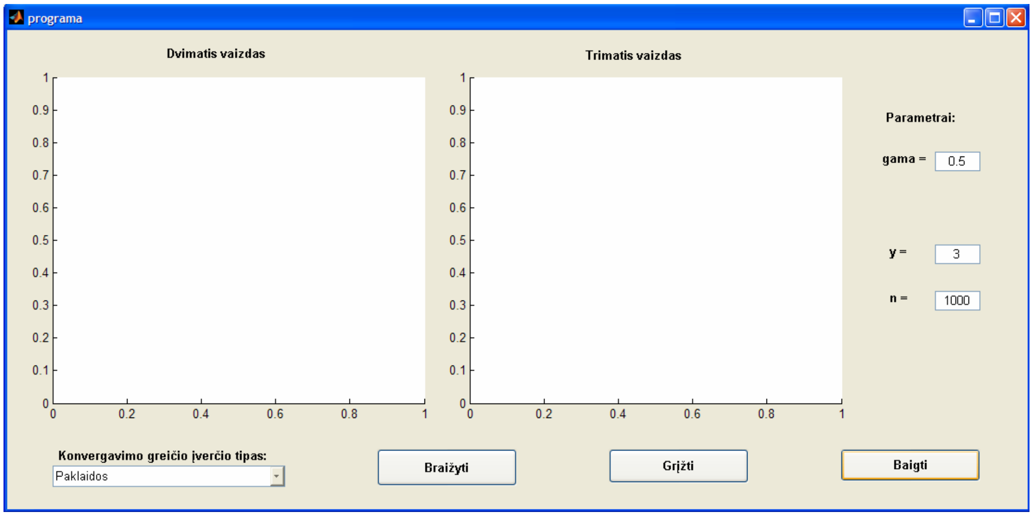
Programos langas, kuris bus matomas komandų lauke įvedus pavadinimą `Progama`, pateiktas paveiksle 3.1.



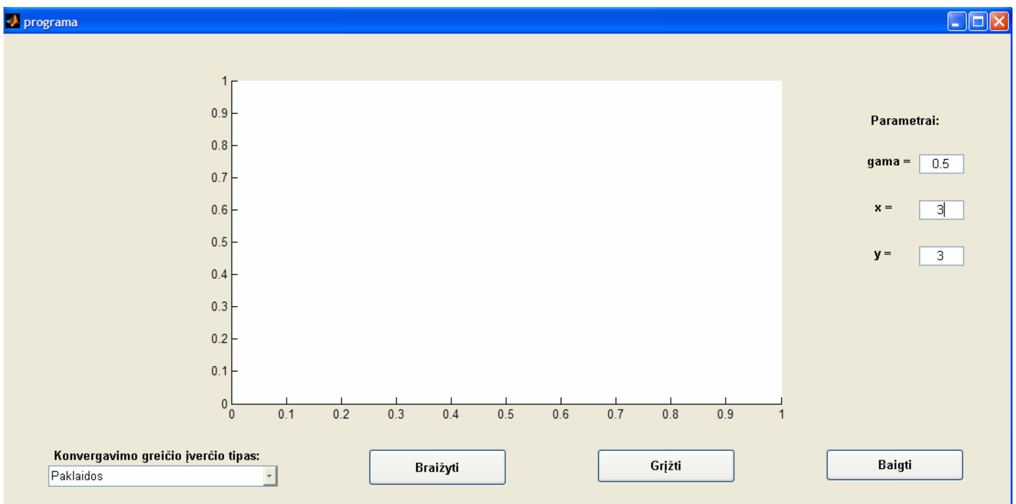
3.1 pav. Programos langas

Pirmiausia reikia pasirinkti, kokio tipo priklausomybę braižyti, ir paspausti mygtuką *Pradėti*. Galimi keturi pasirinkimai:

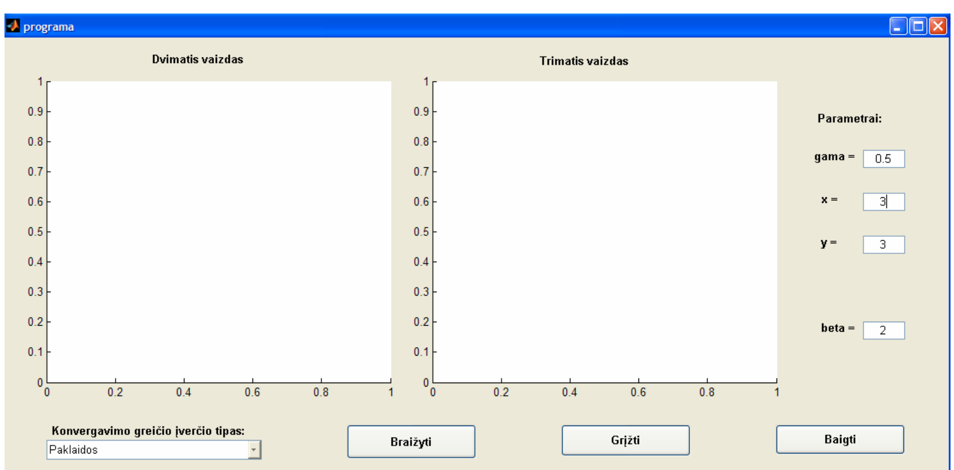
1. Priklausomybė nuo x. Šiuo atveju reikės įvesti γ, y ir n reikšmes. Pagal nutylėjimą, $x = 3$, $\alpha = 3$ ir $\beta = 3$. Programos langas pateiktas paveiksle 3.2, *a*.
2. Priklausomybė nuo n. Šiuo atveju reikia įvesti γ, x ir y reikšmes. Pagal nutylėjimą, $\alpha = 3$, $\beta = 3$ ir $n = 1000$. Programos langas pateiktas paveiksle 3.2, *b*.
3. Priklausomybė nuo α, β. Šiuo atveju reikia įvesti γ, x, y ir β reikšmes. Pagal nutylėjimą, $\alpha = 3$ ir $n = 1000$. Programos langas pateiktas paveiksle 3.2, *c*.
4. Priklausomybė nuo γ. Šiuo atveju reikia įvesti x ir y reikšmes. Pagal nutylėjimą, $\alpha = 3$, $\beta = 3$ ir $n = 1000$. Programos langas pateiktas paveiksle 3.2, *d*.


programa
Dvimatis vaizdas
Trimatis vaizdas
Parametrai:
gama = 0.5
y = 3
n = 1000
Konvergavimo greičio įverčio tipas:
Paklaidos
Braižyti
Grįžti
Baigti

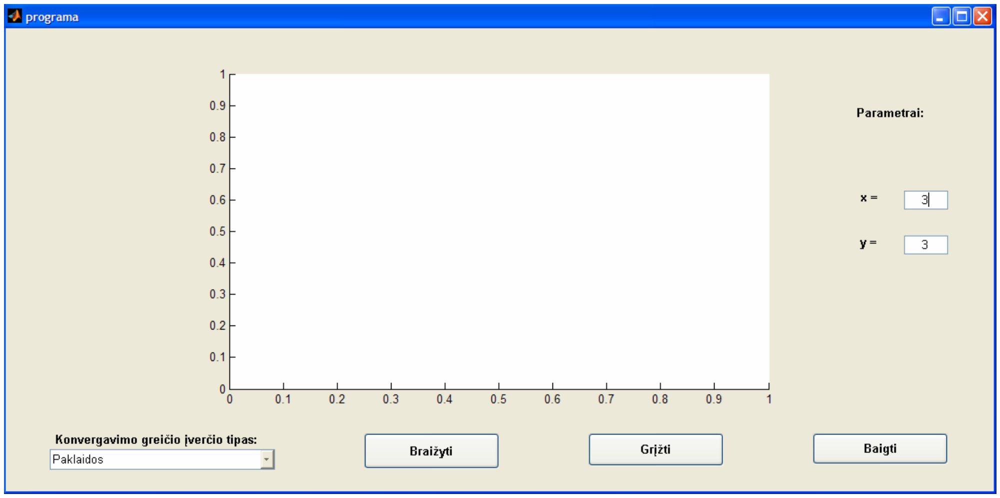
a)


programa
Parametrai:
gama = 0.5
x = 3
y = 3
Konvergavimo greičio įverčio tipas:
Paklaidos
Braižyti
Grįžti
Baigti

b)


programa
Dvimatis vaizdas
Trimatis vaizdas
Parametrai:
gama = 0.5
x = 3
y = 3
beta = 2
Konvergavimo greičio įverčio tipas:
Paklaidos
Braižyti
Grįžti
Baigti

c)



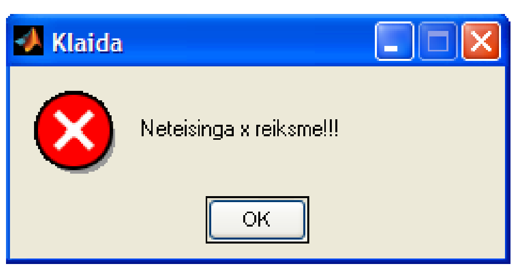
d)

3.2 pav. Programos langai

Pasirinkus bet kurį iš aukščiau aprašytų atvejų, galima braižyti tiek paklaidas, tiek apytikslį konvergavimo greičio įvertį. Pirmuoju ir trečiuoju atvejais braižomi grafikai dvimatėje ir trimatėje erdvėse. Antruoju ir ketvirtuoju – tik dvimatėje. Braižant apytikslį konvergavimo greitį, rekomenduojama nesirinkti x ir y reikšmių, mažesnių nei 3, kadangi, pagal nutylėjimą, $q = 0{,}1$ ir $s = 0{,}1$. Tai reiškia, kad esant mažoms n reikšmėms, apytikslis konvergavimo greitis neegzistuoja.

Kiekvienam iš parametrų yra priskirta pradinė reikšmė. Vartotojas gali braižyti grafikus jų nekeisdamas arba įvedęs naujas. Programoje yra padaryta apsauga. Jei vartotojas per klaidą įveda ne skaičių, o kokį nors simbolį, programa atidaro langą, kuris vartotoją informuoja, jog buvo padaryta klaida, ir vartotojas gali įvesti naują reikšmę. Kadangi parametras γ turi būti iš intervalo, kurio galai priklauso nuo parametrų α ir β reikšmių, ir pagal nutylėjimą $\alpha = 3$ ir $\beta = 3$, tai $\gamma \in [-8{,}3333; 8{,}3333]$, jei vartotojas įveda reikšmę, kuri nepatenka į šį intervalą, jis taip pat informuojamas apie padarytą klaidą.

Tarkime, kad vartotojas suklydo įvesdamas x reikšmę. Tada bus matomas toks langas:

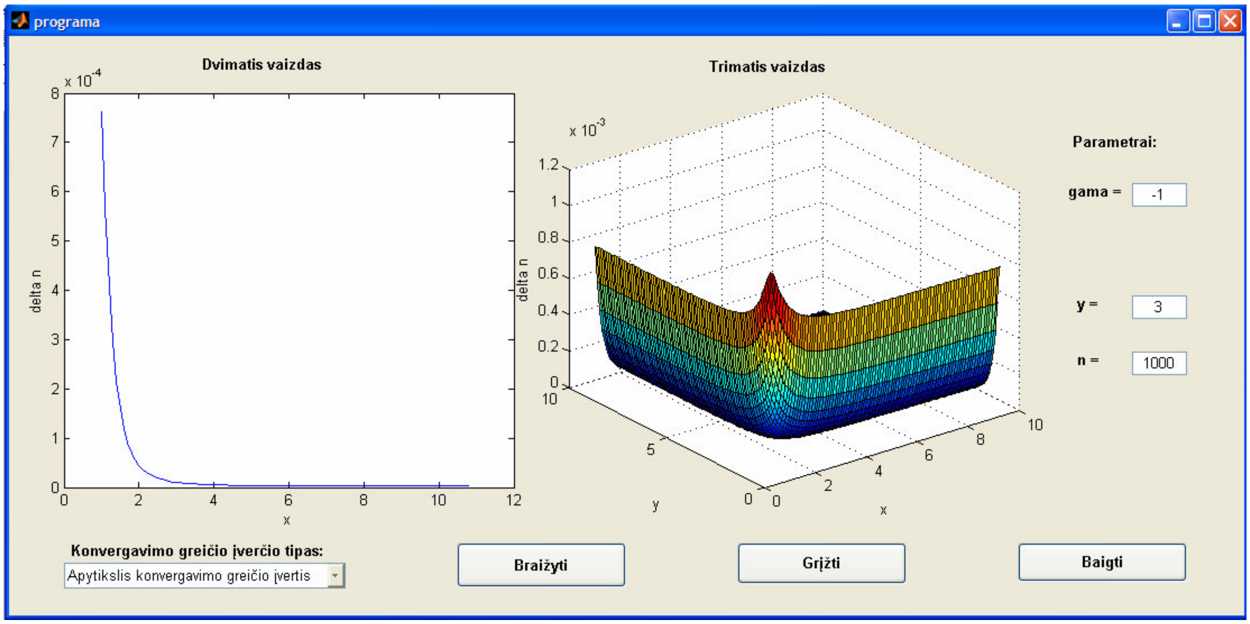


3.3 pav. Klaidos langas

Įvedus norimas parametrų reikšmes, reikia paspausti mygtuką *Braižyti*. Kadangi programa atlieka daug skaičiavimų, rezultato gali tekti šiek tiek palaukti.

Bet kuriuo momentu galima grįžti į pradinį programos langą (3.1 pav.) ir pasirinkti naują priklausomybę. Programos darbas užbaigiamas paspaudus mygtuką *Baigti*.

Tarkime, kad vartotojas pasirinko priklausomybę nuo *x*. Tada įvedė norimas parametrų reikšmes, pasirinko apytikslį konvergavimo greičio įvertį ir paspaudė mygtuką *Braižyti*. Rezultatas pateiktas 3.3 paveiksle.



3.4 pav. Programos vykdymo rezultatas

Programos tekstas pateiktas *5 priede*.

DISKUSIJA

Darbo tikslas buvo sukonstruoti dvimatę skirstinio funkciją, kai duoti marginalieji skirstiniai, atlikti asimptotinę tokio skirstinio maksimumų analizę bei ištirti konvergavimo greičio įvertį bei paklaidas, kai komponentės yra priklausomos.

Kai vektoriaus komponentės yra nepriklausomos, dvimatė skirstinio funkcija apibrėžiama vienareikšmiškai. Tačiau to negalime padaryti, kai komponentės yra priklausomos. Darbe buvo sukonstruota tokia skirstinio funkcija:

$$F(x,y)=1-\frac{1}{x^{\alpha}}-\frac{1}{y^{\beta}}+\frac{1}{x^{\alpha}y^{\beta}}\left(1+\gamma\left(1-\frac{1}{x^{\alpha}}\right)\left(1-\frac{1}{y^{\beta}}\right)\right),\ x,y\geq 1,\ \alpha,\ \beta>0 \text{ ir}$$

$$-\left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha-2)(\beta-2)}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{(2\alpha-1)(2\beta-1)}{\alpha\beta}\leq\gamma\leq\left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha-2)(\beta-2)}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{(2\alpha-1)(2\beta-1)}{\alpha\beta}.$$

Be to, kai $\gamma = 0$, gauname skirstinio funkciją, kai vektoriaus komponentės yra nepriklausomos.

Ši skirstinio funkcija yra tik vienas iš visų galimų atvejų. Pareto skirstiniui galima pritaikyti likusius funkcijos $G(x, y)$ pavyzdžius, pritaikytus eksponentiniam skirstiniui, arba galima šią funkciją apibrėžti dar kitokiu būdu. Svarbiausia, kad būtų tenkinamos skirstinio funkcijos savybės.

Sukonstruotoje skirstinio funkcijoje lemiamas yra koeficiento γ vaidmuo. Nuo to, kokį mes jį pasirinksime, priklausys komponenčių tarpusavio ryšys: jei $\gamma > 0$, tai ryšys bus teigiamas, jei $\gamma < 0$ – neigiamas. Kokį jį bepasirinktume, jis neturi jokios įtakos komponenčių maksimumų asimptotiniam priklausomumui. Net jei komponentės yra priklausomos, ribinis skirstinys nuo γ nepriklauso, tačiau taip gali nesigauti tiriant kitokį dvimatį skirstinį.

Suradus ribinį skirstinį, buvo apibrėžtas apytikslis konvergavimo greičio įvertis, kai komponentės yra nepriklausomos ir priklausomos. Nustatyta, kad paklaidos konverguoja į vienmatę paklaidą, kai y yra fiksuotas. Be to, paklaidos yra žymiai mažesnis už įvertį. Palyginus tiek paklaidas, tiek apytikslį įvertį nepriklausomųjų ir priklausomųjų komponenčių atveju, nustatyta, kad, kai komponentės yra priklausomos, paklaidos yra žymiai mažesnės už paklaidas, kai komponentės yra nepriklausomos. Tuo tarpu apytiksliai įverčiai skiriasi nežymiai.

Atlikta detalesnė įverčio bei paklaidų analizė, kai komponentės yra priklausomos. Nustatyta, kad mažiausios paklaidos gaunamos tada, kai parametrai $\alpha = \beta$ bei $x = y$, o $\gamma = 1$. Mažiausias apytikslis įvertis gaunamas, kai $\alpha = \beta$, $\gamma = -1$, o x ir y didėja.

IŠVADOS

1. Kai atsitiktiniai vektoriai yra pasiskirstę pagal Pareto dėsnį su skirstinio funkcija

$$F(x, y) = 1 - \frac{1}{x^{\alpha}} - \frac{1}{y^{\beta}} + \frac{1}{x^{\alpha} y^{\beta}} \left(1 + \gamma \left(1 - \frac{1}{x^{\alpha}}\right)\left(1 - \frac{1}{y^{\beta}}\right)\right), \; x, y \geq 1, \, \alpha, \beta > 0,$$

   koeficientas γ lemia komponenčių priklausomumą, tačiau jis neturi įtakos maksimumų asimptotiniam priklausomumui. Nors vektorių komponentės priklausomos, jų normuoti maksimumai yra asimptotiškai nepriklausomi.
2. Fiksavus vienodas parametrų α ir β reikšmes, mažiausios paklaidos gaunamos, kai $x = y$ ir $\gamma = 1$.
3. Kai x didėja, paklaidos $\Delta_n^{(0)}(x, y)$ artėja į vienmatę paklaidą $\Delta_n^{(0)}(y)$, kai y yra fiksuotas.
4. Paklaidos, kai vektorių komponentės yra priklausomos, žymiai skiriasi nuo paklaidų, kai komponentės yra nepriklausomos. Skirtumas tarp apytikslių įverčių yra nežymus.
5. Aproksimuotos paklaidos yra mažesnės už aproksimuotų paklaidų įverčius.

REKOMENDACIJOS

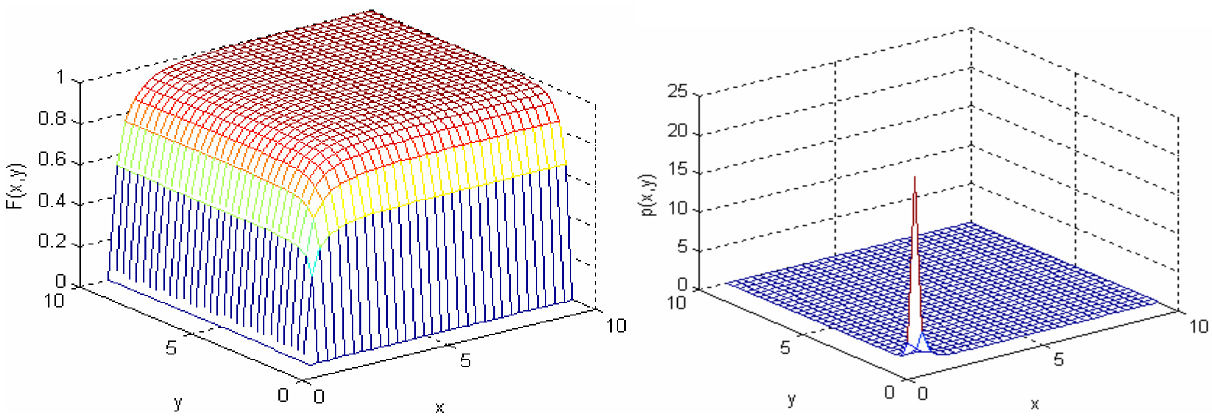
Šiame darbe buvo sukonstruota dvimatė Pareto skirstinio funkcija ir atlikta tokių vektorių maksimumų asimptotinė analizė. Panaudojus tokią pačią metodiką, galima sukonstruoti ir išanalizuoti didesnio mato skirstinio funkcijas.

Galima atlikti analogišką analizę minimumams.

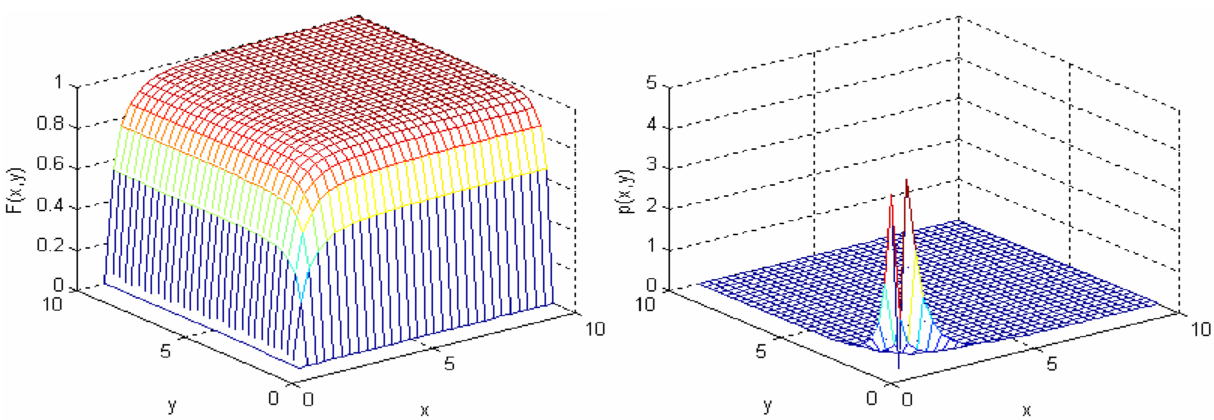
LITERATŪRA

1. Aksomaitis A. Tikimybių teorija ir statistika. – Kaunas: Technologija, 2001. 347 p.
2. Barila A., Barilienė L., Jakutavičius A., Karbauskas J., Palevičius R. Programavimo Matlab terpėje laboratoriniai darbai. – Kaunas: Technologija, 2003. 135 p.
3. Jokimaitis A. Daugiamačių atsitiktinių dydžių ekstremaliųjų reikšmių asimptotika. Disertacija. – Vilnius, 1998.
4. Pekarskas V. Diferencialinis ir integralinis skaičiavimas. – Kaunas: Technologija, 2000, p. 219-355.
5. Stuart Coles. An Introduction to Statistical Modelling of Extreme Values. – Springer, 2004.
6. Галамбош Я. Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. – Москва: Наука, 1984, с. 218-220.
7. Taikomoji matematika : VI studentų konferencijos pranešimų medžiaga / Kauno technologijos universitetas. Kaunas: Technologija, 2006.
8. Matematika ir matematinis modeliavimas - 2007: konferencijos pranešimų medžiaga / Kauno technologijos universitetas (atiduota spausdinimui).

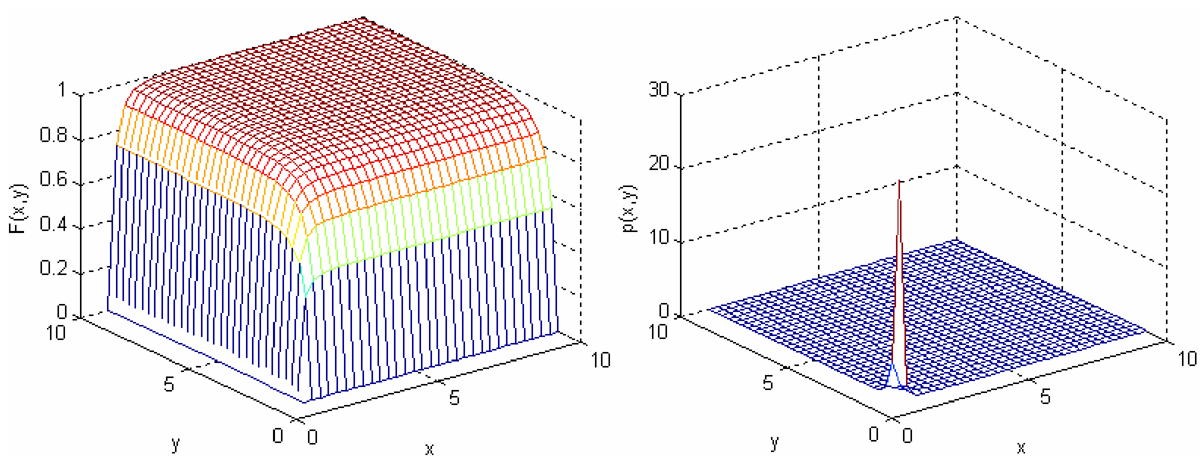
1 PRIEDAS. SKIRSTINIO IR TANKIO FUNKCIJOS, KAI VIENAMATĖS SKIRSTINIO FUNKCIJOS $F_1(x)=1-\frac{1}{x^{\alpha}};\, x\geq 1, \alpha>0$ IR $F_2(y)=1-\frac{1}{y^{\beta}};\, y\geq 1, \beta>0$



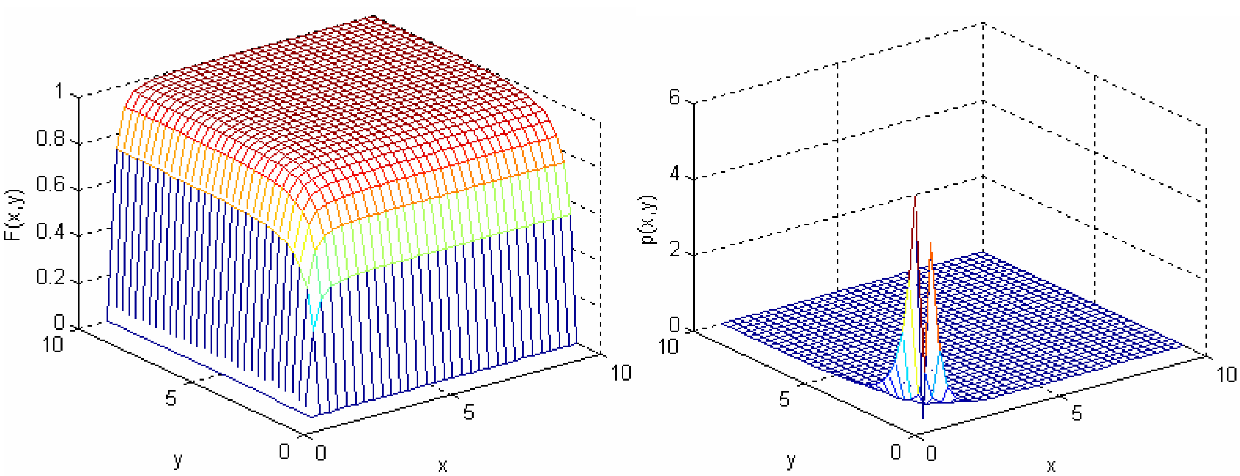
1 pav. Skirstinio ir tankio funkcijos, kai $\alpha=3, \beta=4, \gamma=1$



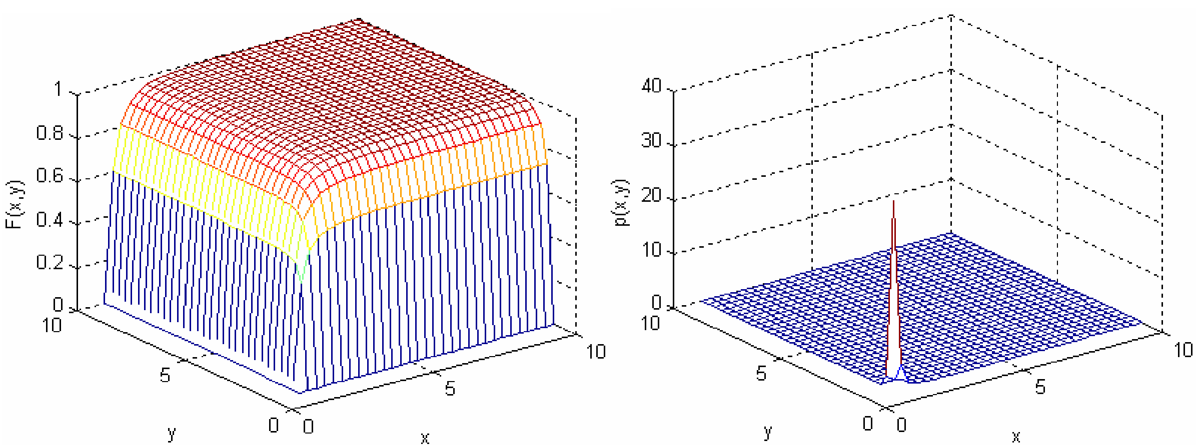
2 pav. Skirstinio ir tankio funkcijos, kai $\alpha=3, \beta=4, \gamma=-1$



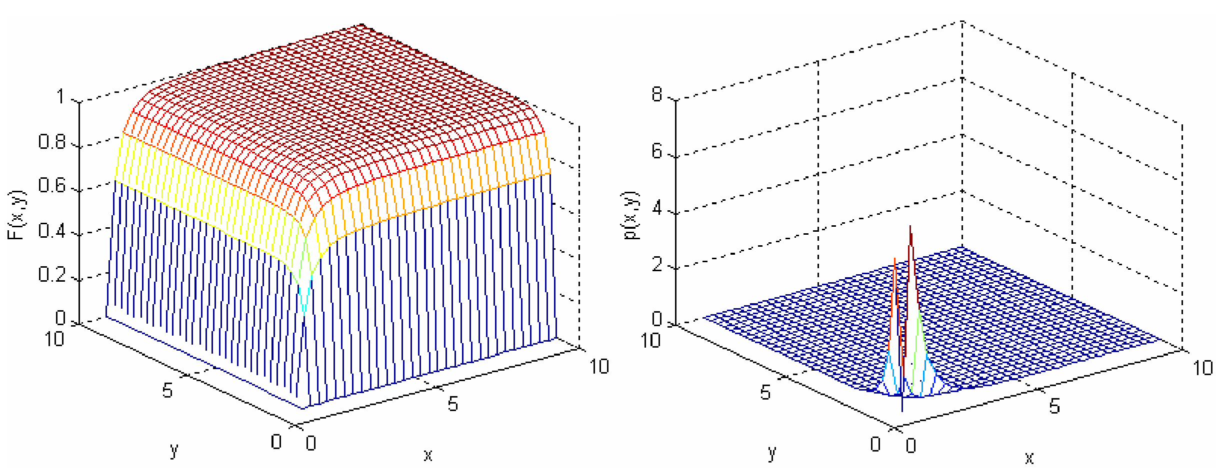
3 pav. Skirstinio ir tankio funkcijos, kai $\alpha=5, \beta=3, \gamma=1$



4 pav. Skirstinio ir tankio funkcijos, kai $\alpha = 5, \beta = 3, \gamma = -1$



5 pav. Skirstinio ir tankio funkcijos, kai $\alpha = 3.5, \beta = 5, \gamma = 1$



6 pav. Skirstinio ir tankio funkcijos, kai $\alpha = 3.5, \beta = 5, \gamma = -1$

2 PRIEDAS. ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ GENERAVIMAS

1 lentelė

Atsitiktinio dydžio t ~ T(0, 1) reikšmės

0.708	0.847	0.501	0.465	0.763	0.361	0.063	0.239	0.552	0.331
0.851	0.043	0.992	0.037	0.740	0.541	0.043	0.844	0.314	0.225
0.234	0.872	0.903	0.224	5.594e-4	0.798	0.433	0.689	0.561	0.179
0.710	0.757	0.256	0.818	0.845	0.997	0.075	0.731	0.900	0.374
0.965	0.597	0.173	0.986	0.952	0.079	0.673	0.948	0.196	0.163
0.595	0.503	0.393	0.014	0.371	0.169	0.944	0.804	0.182	0.499
0.160	0.858	0.444	0.649	0.289	0.468	0.054	0.587	0.276	0.243
0.473	0.886	0.373	0.453	0.303	0.823	0.181	0.241	0.786	0.933
0.207	0.838	0.503	0.323	0.347	0.404	0.246	0.665	0.729	0.785
0.850	0.288	0.975	6.585e-3	5.055e-4	0.942	0.796	0.779	0.706	0.323

2 lentelė

Atsitiktinio dydžio *X* reikšmės, kai skirstinio funkcija $F(x) = 1 - \frac{1}{x^2};\ x \geq 1$

1.852	2.552	1.416	1.367	2.054	1.251	1.033	1.147	1.494	1.223
2.587	1.022	11.100	1.019	1.962	1.476	1.022	2.529	1.207	1.136
1.143	2.795	3.210	1.135	1.000	2.224	1.327	1.793	1.510	1.104
1.858	2.028	1.159	2.343	2.540	17.182	1.040	1.927	3.170	1.264
5.308	1.576	1.100	8.418	4.575	1.042	1.748	4.391	1.115	1.093
1.571	1.419	1.284	1.007	1.261	1.097	4.213	2.259	1.106	1.413
1.091	2.652	1.341	1.687	1.186	1.372	1.028	1.556	1.175	1.149
1.377	2.959	1.263	1.352	1.198	2.380	1.105	1.148	2.160	3.862
1.123	2.485	1.419	1.215	1.238	1.296	1.152	1.729	1.921	2.155
2.584	1.186	6.306	1.003	1.000	4.170	2.216	2.125	1.846	1.215

3 PRIEDAS. KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERČIO ANALIZĖ

3.1. PRIKLAUSOMYBĖ NUO PARAMETRO γ

3 lentelė

Parametro γ reikšmės, kai $\alpha = 3$ ir $\beta = 3$ (apytikslis konvergavimo greičio įvertis)

y \ x	**1.5**	**2**	**3**	**4**	**6**
1.5	-1.0006	-1.0004	-1.0003	-1.0003	-1.0003
2	-1.0004	-1.0003	-1.0002	-1.0001	-1.0001
3	-1.0003	-1.0002	-1.0001	-1.0001	-1.0001
4	-1.0003	-1.0001	-1.0001	-1.0001	-1.0000
6	-1.0003	-1.0001	-1.0001	-1.0000	-1.0000

4 lentelė

Parametro γ reikšmės, kai $\alpha = 3$ ir $\beta = 3$ (tikslios paklaidos)

y \ x	**1.5**	**2**	**3**	**4**	**6**
1.5	1.0002	1.3964	4.0633	8.3333	8.3333
2	1.3964	1.0001	1.8358	4.0628	8.3333
3	4.0633	1.8358	1.0000	1.3962	4.0626
4	8.3333	4.0628	1.3962	1.0000	1.8357
6	8.3333	8.3333	4.0626	1.8357	1.0000

5 lentelė

Parametro γ reikšmės, kai $\alpha = 5$ ir $\beta = 4$ (apytikslis konvergavimo greičio įvertis)

y \ x	**1.5**	**2**	**3**	**4**	**6**
1.5	-1.0003	-1.0002	-1.0002	-1.0002	-1.0002
2	-1.0002	-1.0001	-1.0001	-1.0001	-1.0001
3	-1.0002	-1.0001	-1.0000	-1.0000	-1.0001
4	-1.0002	-1.0001	-1.0000	-1.0000	-1.0000
6	-1.0002	-1.0001	-1.0001	-1.0000	-1.0000

6 lentelė

Parametro γ reikšmės, kai $\alpha = 5$ ir $\beta = 4$ (tikslios paklaidos)

y \ x	**1.5**	**2**	**3**	**4**	**6**
1.5	1.0835	3.24	5.7511	5.7511	5.7511
2	3.24	1.25	5.7511	5.7511	5.7511
3	5.7511	5.7511	1.6667	5.7511	5.7511
4	5.7511	5.7511	5.7511	2.1250	5.7511
6	5.7511	5.7511	5.7511	5.7511	3.0828

3.2. PRIKLAUSOMYBĖ NUO PARAMETRŲ *α* IR *β*

7 lentelė

Apytikslis konvergavimo greičio įvertis, kai $x = 2$, $y = 2$, $\gamma = -1$, $q = 0,1$ ir $s = 0,1$

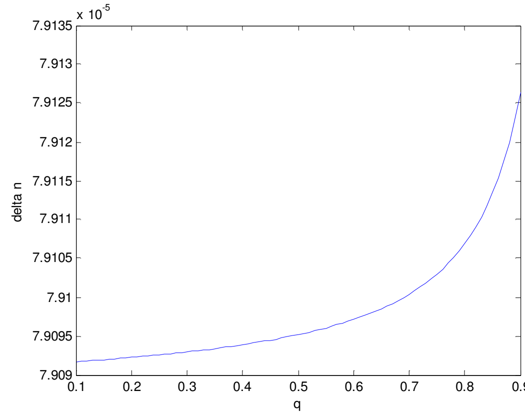
n \ $(\alpha; \beta)$	**(3; 3)**	**(3; 4)**	**(4; 4)**	**(5; 4)**	**(5; 5)**
10	9.830162E-03	5.863146E-03	2.766684E-03	1.603674E-03	7.347936E-04
20	4.891654E-03	2.923174E-03	1.381149E-03	8.010529E-04	3.671794E-04
50	1.950900E-03	1.167212E-03	5.519227E-04	3.202300E-04	1.468188E-04
100	9.744784E-04	5.832594E-04	2.758710E-04	1.600829E-04	7.340055E-05
150	6.494355E-04	3.887623E-04	1.838939E-04	1.067148E-04	4.893172E-05
200	4.869952E-04	2.915427E-04	1.379129E-04	8.003339E-05	3.669805E-05
400	2.434365E-04	1.457496E-04	6.895075E-05	4.001468E-05	1.834847E-05
500	1.947394E-04	1.165962E-04	5.515969E-05	3.201142E-05	1.467869E-05
600	1.622774E-04	9.716154E-05	4.596591E-05	2.667601E-05	1.223219E-05
800	1.217029E-04	7.286934E-05	3.447396E-05	2.000684E-05	9.174095E-06
1000	9.735990E-05	5.829460E-05	2.757894E-05	1.600539E-05	7.339254E-06

8 lentelė

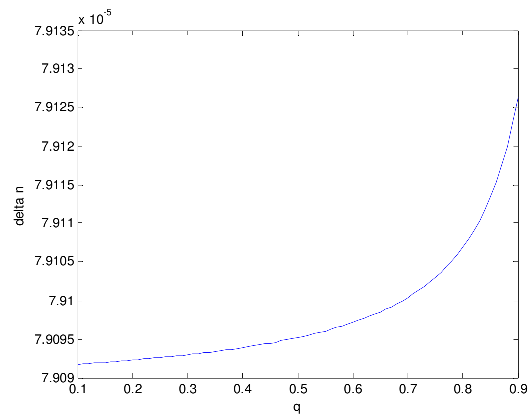
Apytikslis konvergavimo greičio įvertis, kai $x = 3$, $y = 4$, $\gamma = -1$, $q = 0,1$ ir $s = 0,1$

n \ $(\alpha; \beta)$	**(3; 3)**	**(3; 4)**	**(4; 4)**	**(5; 4)**	**(5; 5)**
10	5.266494E-04	3.219366E-04	5.198265E-05	1.276737E-05	5.159146E-06
20	2.632142E-04	1.609394E-04	2.598904E-05	6.383343E-06	2.579518E-06
50	1.052589E-04	6.436880E-05	1.039506E-05	2.553255E-06	1.031794E-06
100	5.262495E-05	3.218324E-05	5.197439E-06	1.276614E-06	5.158949E-07
150	3.508230E-05	2.145523E-05	3.464939E-06	8.510729E-07	3.439295E-07
200	2.631135E-05	1.609133E-05	2.598697E-06	6.383035E-07	2.579469E-07
400	1.315539E-05	8.045590E-06	1.299342E-06	3.191509E-07	1.289733E-07
500	1.052427E-05	6.436461E-06	1.039473E-06	2.553205E-07	1.031786E-07
600	8.770199E-06	5.363711E-06	8.662271E-07	2.127671E-07	8.598221E-08
800	6.577625E-06	4.022777E-06	6.496698E-07	1.595752E-07	6.448664E-08
1000	5.262089E-06	3.218219E-06	5.197356E-07	1.276601E-07	5.158928E-08

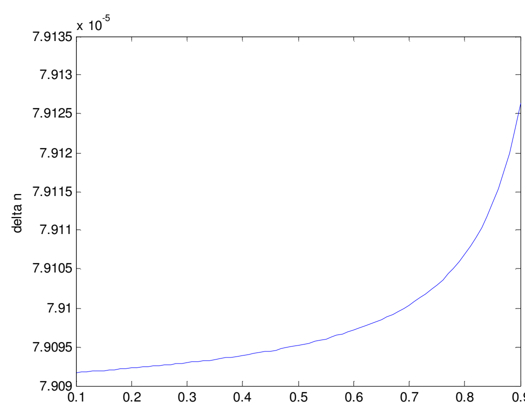
3.3. PRIKLAUSOMYBĖ NUO PARAMETRŲ *q* IR *s*



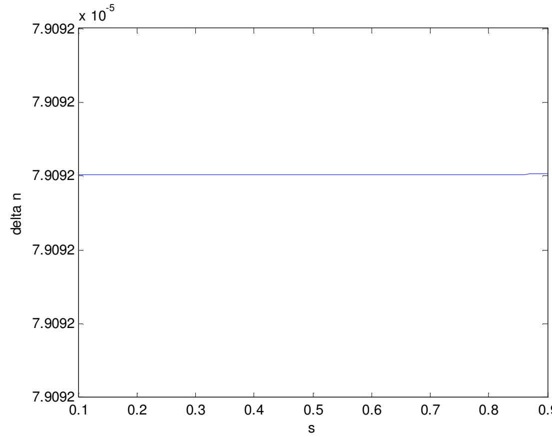
7 pav. Konvergavimo greičio įverčio priklausomybė nuo *q*, kai *s* = 0,1



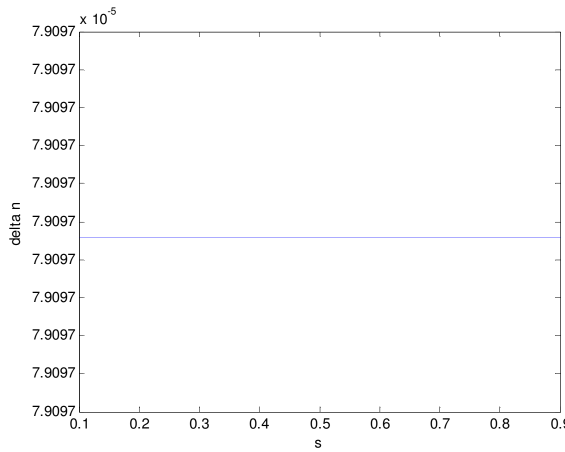
8 pav. Konvergavimo greičio įverčio priklausomybė nuo *q*, kai *s* = 0,5



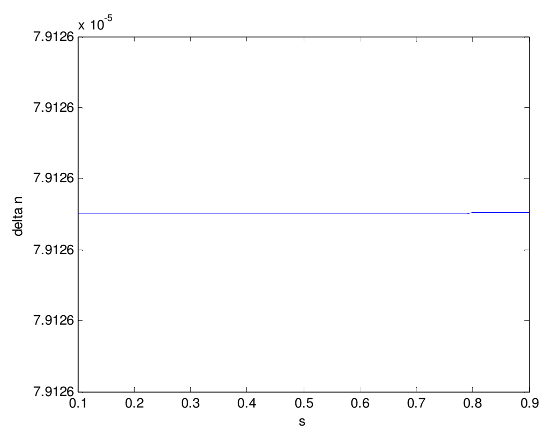
9 pav. Konvergavimo greičio įverčio priklausomybė nuo *q*, kai *s* = 0,9



10 pav. Konvergavimo greičio įverčio priklausomybė nuo *s*, kai *q* = 0,1



11 pav. Konvergavimo greičio įverčio priklausomybė nuo *s*, kai *q* = 0,5



12 pav. Konvergavimo greičio įverčio priklausomybė nuo *s*, kai *q* = 0,9

9 lentelė

Apytikslis konvergavimo greičio įvertis, kai $q = 0{,}1$ ir $s = 0{,}1$

n \ $(x; y)$	**(1; 1)**	**(1; 2)**	**(2; 2)**	**(3; 2)**	**(3; 3)**	**(3; 4)**	**(4; 4)**
10	neegzistuoja	9.405573E-02	9.830162E-03	4.484680E-03	1.020579E-03	5.266494E-04	1.893969E-04
30	4.172036E-02	2.872329E-02	3.255789E-03	1.490699E-03	3.398538E-04	1.754514E-04	6.311158E-05
50	2.368412E-02	1.691522E-02	1.950900E-03	8.939074E-04	2.038710E-04	1.052589E-04	3.786444E-05
100	1.133485E-02	8.337794E-03	9.744784E-04	4.467608E-04	1.019199E-04	5.262495E-05	1.893128E-05
200	5.540453E-03	4.138903E-03	4.869952E-04	2.233321E-04	5.095606E-05	2.631135E-05	9.465404E-06
400	2.738469E-03	2.061948E-03	2.434365E-04	1.116539E-04	2.547705E-05	1.315539E-05	4.732643E-06
500	2.185694E-03	1.648357E-03	1.947394E-04	8.932119E-05	2.038149E-05	1.052427E-05	3.786105E-06
600	1.818588E-03	1.372964E-03	1.622774E-04	7.443325E-05	1.698448E-05	8.770199E-06	3.155082E-06
800	1.361294E-03	1.029098E-03	1.217029E-04	5.582393E-05	1.273828E-05	6.577625E-06	2.366307E-06
1000	1.087765E-03	8.229777E-04	9.735990E-05	4.465866E-05	1.019059E-05	5.262089E-06	1.893043E-06

10 lentelė

Apytikslis konvergavimo greičio įvertis, kai $q = 0{,}05$ ir $s = 0{,}05$

n \ $(x; y)$	**(1; 1)**	**(1; 2)**	**(2; 2)**	**(3; 2)**	**(3; 3)**	**(3; 4)**	**(4; 4)**
10	neegzistuoja	neegzistuoja	9.826606E-03	4.483994E-03	1.020546E-03	5.266409E-04	1.893958E-04
30	neegzistuoja	2.865574E-02	3.255394E-03	1.490623E-03	3.398502E-04	1.754504E-04	6.311146E-05
50	neegzistuoja	1.689089E-02	1.950758E-03	8.938800E-04	2.038696E-04	1.052585E-04	3.786440E-05
100	1.130953E-02	8.331712E-03	9.744428E-04	4.467540E-04	1.019196E-04	5.262486E-05	1.893127E-05
200	5.534122E-03	4.137382E-03	4.869863E-04	2.233303E-04	5.095598E-05	2.631133E-05	9.465402E-06
400	2.736887E-03	2.061568E-03	2.434342E-04	1.116535E-04	2.547703E-05	1.315539E-05	4.732643E-06
500	2.184681E-03	1.648114E-03	1.947380E-04	8.932092E-05	2.038147E-05	1.052426E-05	3.786105E-06
600	1.817885E-03	1.372795E-03	1.622764E-04	7.443306E-05	1.698447E-05	8.770196E-06	3.155082E-06
800	1.360898E-03	1.029002E-03	1.217024E-04	5.582382E-05	1.273828E-05	6.577624E-06	2.366307E-06
1000	1.087511E-03	8.229169E-04	9.735954E-05	4.465859E-05	1.019058E-05	5.262088E-06	1.893043E-06

11 lentelė

Apytikslis konvergavimo greičio įvertis, kai q = 0,004 ir s = 0,004

$(x; y)$ / n	(1; 1)	(1; 2)	(2; 2)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(4; 4)
10	neegzistuoja	neegzistuoja	9.823650E-03	4.483424E-03	1.020519E-03	5.266338E-04	1.893949E-04
30	neegzistuoja	neegzistuoja	3.255065E-03	1.490559E-03	3.398471E-04	1.754496E-04	6.311136E-05
50	neegzistuoja	neegzistuoja	1.950640E-03	8.938572E-04	2.038686E-04	1.052583E-04	3.786437E-05
100	neegzistuoja	neegzistuoja	9.744132E-04	4.467483E-04	1.019193E-04	5.262479E-05	1.893126E-05
200	neegzistuoja	neegzistuoja	4.869789E-04	2.233289E-04	5.095591E-05	2.631131E-05	9.465399E-06
400	neegzistuoja	2.061252E-03	2.434324E-04	1.116531E-04	2.547701E-05	1.315538E-05	4.732642E-06
500	neegzistuoja	1.647912E-03	1.947368E-04	8.932069E-05	2.038146E-05	1.052426E-05	3.786104E-06
600	neegzistuoja	1.372655E-03	1.622756E-04	7.443290E-05	1.698447E-05	8.770194E-06	3.155082E-06
800	1.36057E-03	1.028923E-03	1.217019E-04	5.582373E-05	1.273827E-05	6.577623E-06	2.366307E-06
1000	1.08730E-03	8.228664E-04	9.735925E-05	4.465853E-05	1.019058E-05	5.262087E-06	1.893043E-06

12 lentelė

Apytikslis konvergavimo greičio įvertis, kai q = 0,001 ir s = 0,001

$(x; y)$ / n	(1; 1)	(1; 2)	(2; 2)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(4; 4)
10	neegzistuoja	neegzistuoja	neegzistuoja	neegzistuoja	1.020518E-03	5.266334E-04	1.893949E-04
30	neegzistuoja	neegzistuoja	neegzistuoja	1.490555E-03	3.398470E-04	1.754496E-04	6.311136E-05
50	neegzistuoja	neegzistuoja	1.950632E-03	8.938558E-04	2.038685E-04	1.052582E-04	3.786436E-05
100	neegzistuoja	neegzistuoja	9.744114E-04	4.467479E-04	1.019193E-04	5.262479E-05	1.893126E-05
200	neegzistuoja	neegzistuoja	4.869784E-04	2.233288E-04	5.095590E-05	2.631131E-05	9.465399E-06
400	neegzistuoja	neegzistuoja	2.434323E-04	1.116531E-04	2.547701E-05	1.315538E-05	4.732642E-06
500	neegzistuoja	neegzistuoja	1.947367E-04	8.932068E-05	2.038146E-05	1.052426E-05	3.786104E-06
600	neegzistuoja	neegzistuoja	1.622755E-04	7.443289E-05	1.698447E-05	8.770194E-06	3.155082E-06
800	neegzistuoja	neegzistuoja	1.217019E-04	5.582373E-05	1.273827E-05	6.577623E-06	2.366307E-06
1000	neegzistuoja	8.228632E-04	9.735923E-05	4.465853E-05	1.019058E-05	5.262087E-06	1.893043E-06

13 lentelė

Apytikslis konvergavimo greičio įvertis, kai q = 0,0003 ir s = 0,0003

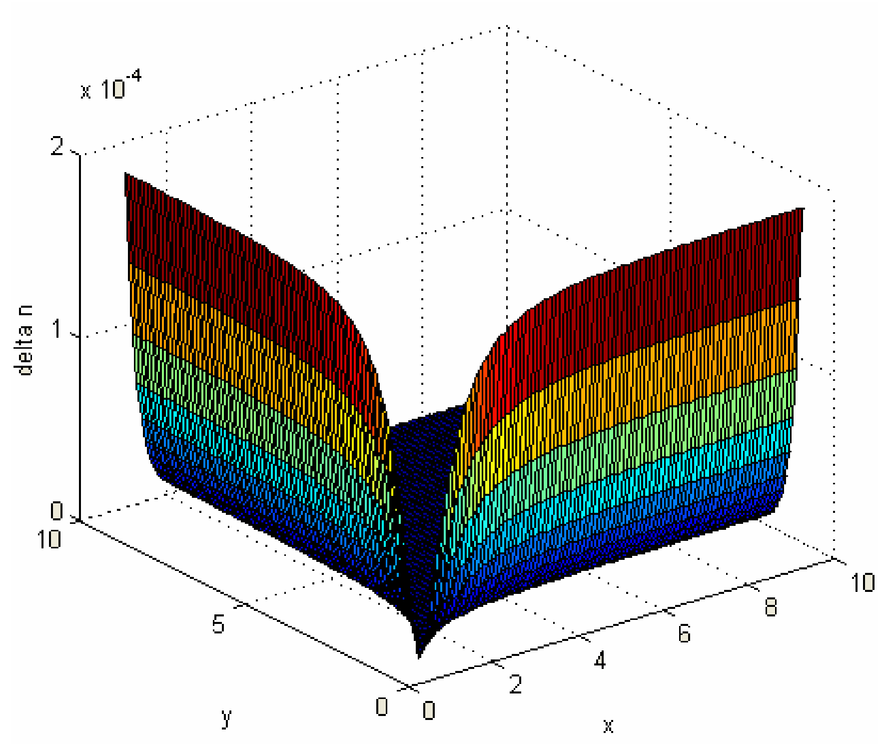
n \ $(x; y)$	(1; 1)	(1; 2)	(2; 2)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(4; 4)
10	neegzistuoja	neegzistuoja	neegzistuoja	neegzistuoja	neegzistuoja	5.266333E-04	1.893948E-04
30	neegzistuoja	neegzistuoja	neegzistuoja	neegzistuoja	3.398469E-04	1.754496E-04	6.311136E-05
50	neegzistuoja	neegzistuoja	neegzistuoja	neegzistuoja	2.038685E-04	1.052582E-04	3.786436E-05
100	neegzistuoja	neegzistuoja	neegzistuoja	4.467479E-04	1.019193E-04	5.262478E-05	1.893126E-05
200	neegzistuoja	neegzistuoja	4.869783E-04	2.233288E-04	5.095590E-05	2.631131E-05	9.465399E-06
400	neegzistuoja	neegzistuoja	2.434323E-04	1.116531E-04	2.547701E-05	1.315538E-05	4.732642E-06
500	neegzistuoja	neegzistuoja	1.947367E-04	8.932067E-05	2.038146E-05	1.052426E-05	3.786104E-06
600	neegzistuoja	neegzistuoja	1.622755E-04	7.443289E-05	1.698447E-05	8.770194E-06	3.155082E-06
800	neegzistuoja	neegzistuoja	1.217019E-04	5.582372E-05	1.273827E-05	6.577623E-06	2.366307E-06
1000	neegzistuoja	neegzistuoja	9.735922E-05	4.465853E-05	1.019058E-05	5.262087E-06	1.893043E-06

14 lentelė

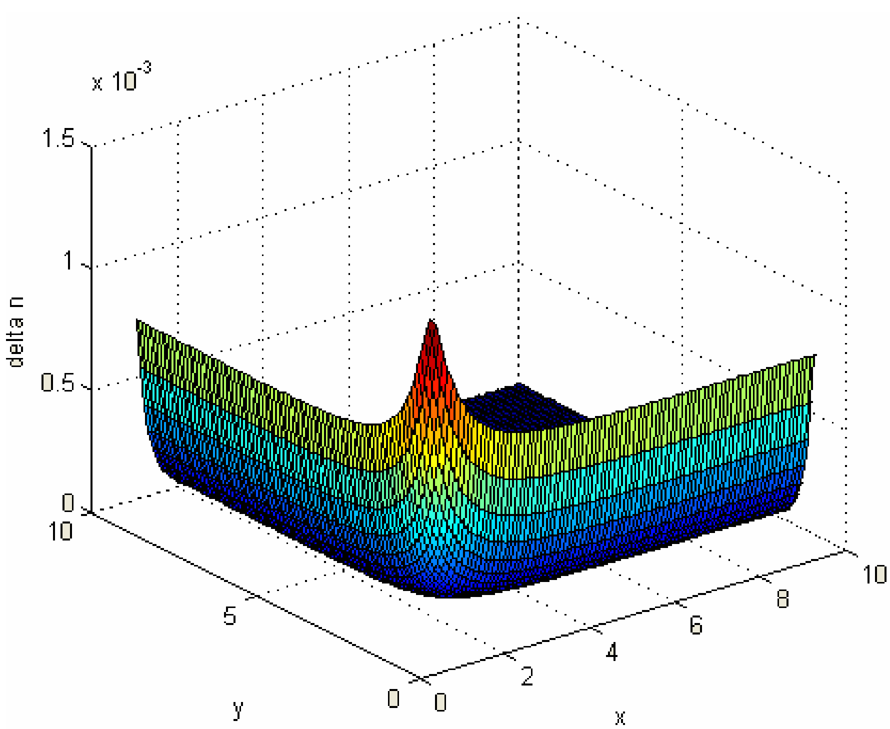
Apytikslis konvergavimo greičio įvertis, kai q = 0,0001 ir s = 0,0001

n \ $(x; y)$	(1; 1)	(1; 2)	(2; 2)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(4; 4)
10	neegzistuoja	neegzistuoja	neegzistuoja	neegzistuoja	neegzistuoja	neegzistuoja	1.893948E-04
30	neegzistuoja	neegzistuoja	neegzistuoja	neegzistuoja	neegzistuoja	1.754496E-04	6.311136E-05
50	neegzistuoja	neegzistuoja	neegzistuoja	neegzistuoja	2.038685E-04	1.052582E-04	3.786436E-05
100	neegzistuoja	neegzistuoja	neegzistuoja	neegzistuoja	1.019193E-04	5.262478E-05	1.893126E-05
200	neegzistuoja	neegzistuoja	neegzistuoja	2.233288E-04	5.095590E-05	2.631131E-05	9.465399E-06
400	neegzistuoja	neegzistuoja	neegzistuoja	1.116531E-04	2.547701E-05	1.315538E-05	4.732642E-06
500	neegzistuoja	neegzistuoja	1.947367E-04	8.932067E-05	2.038146E-05	1.052426E-05	3.786104E-06
600	neegzistuoja	neegzistuoja	1.622755E-04	7.443289E-05	1.698447E-05	8.770194E-06	3.155082E-06
800	neegzistuoja	neegzistuoja	1.217019E-04	5.582372E-05	1.273827E-05	6.577623E-06	2.366307E-06
1000	neegzistuoja	neegzistuoja	9.735922E-05	4.465853E-05	1.019058E-05	5.262087E-06	1.893043E-06

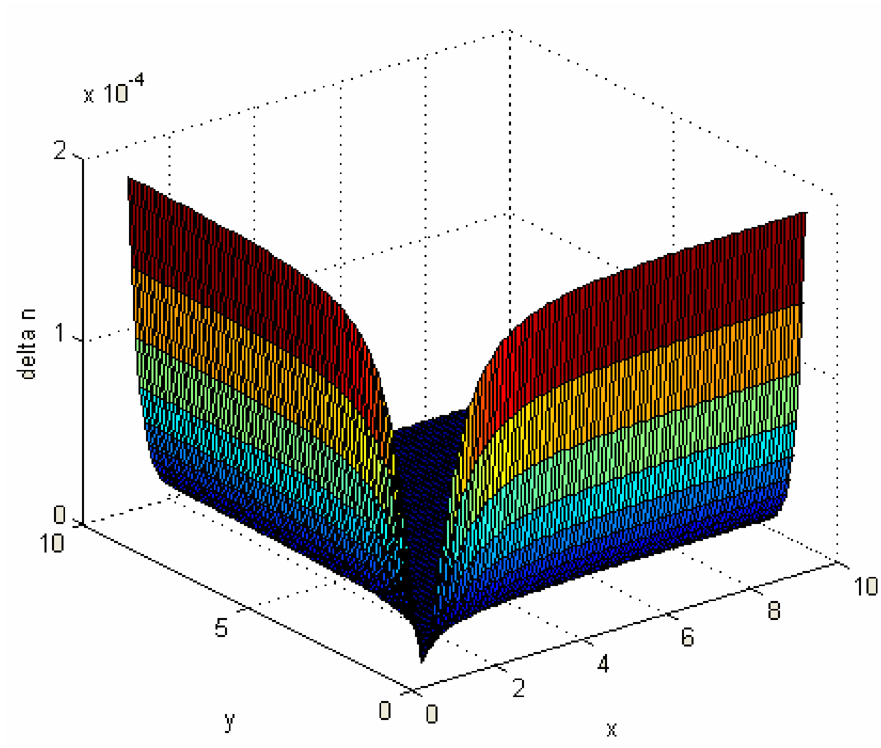
3.4. PRIKLAUSOMYBĖ NUO *X* IR *Y*



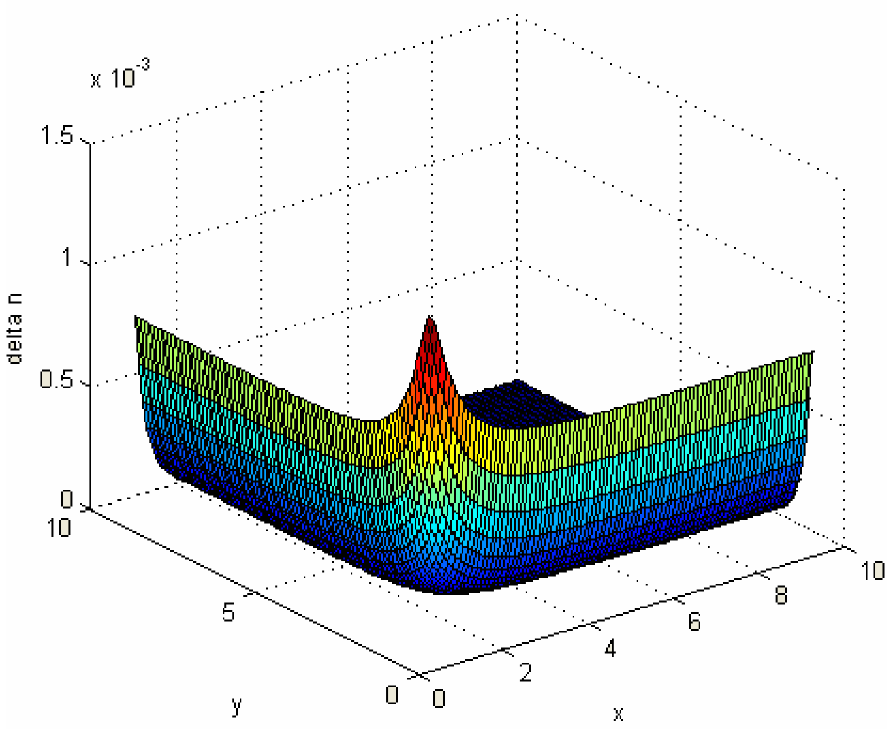
13 pav. Tikslios paklaidos, kai $x = 3$, $y = 3$



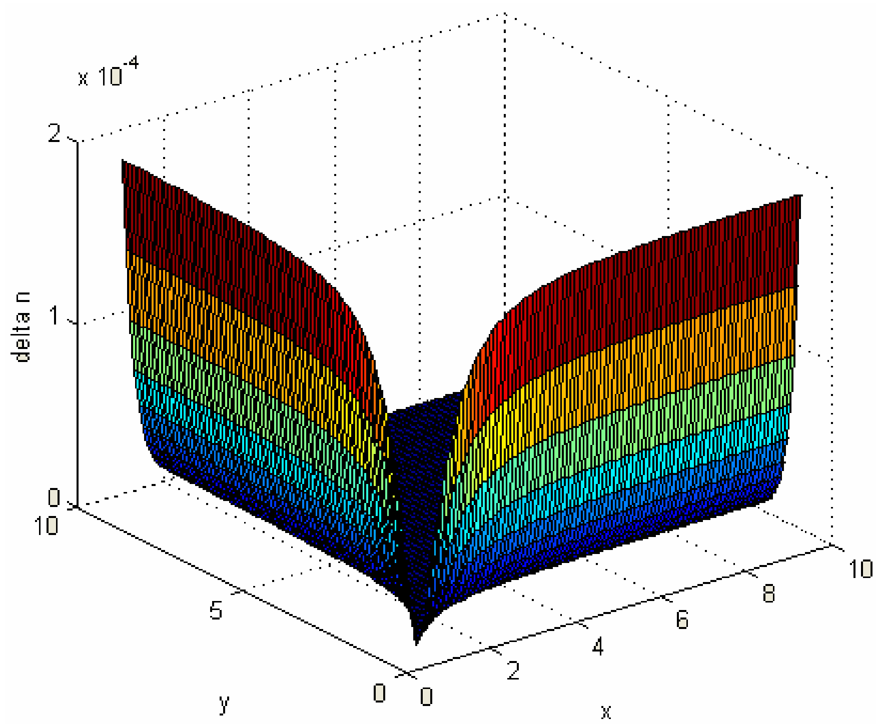
14 pav. Apytikslis konvergavimo greitis, kai $x = 3$, $y = 3$



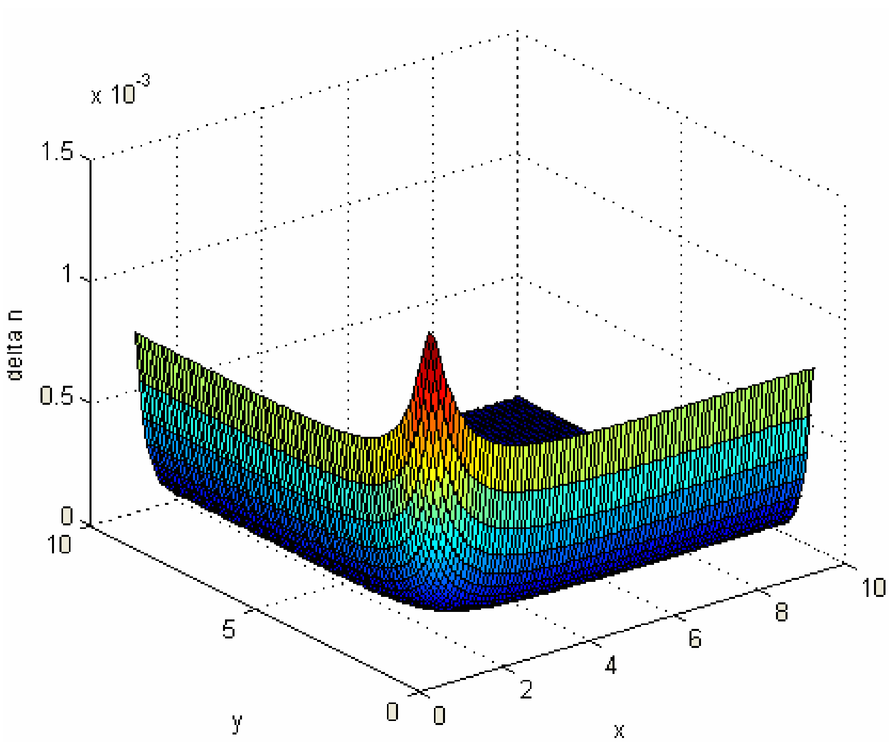
15 pav. Tikslios paklaidos, kai $x = 3$, $y = 4$



16 pav. Apytikslis konvergavimo greitis, kai $x = 3$, $y = 4$



17 pav. Tikslios paklaidos, kai *x* = 3, *y* = 5



18 pav. Apytikslis konvergavimo greitis, kai *x* = 3, *y* = 4

4 PRIEDAS. DVIMAČIŲ PARETO SKIRSTINIŲ KONSTRAVIMAS

4.1. KOMPONENTĖS *X* IR *Y* – NEPRIKLAUSOMOS

$$F_1(x,\alpha) := 1 - \frac{1}{x^{\alpha}} \qquad F_2(y,\beta) := 1 - \frac{1}{y^{\beta}}$$

$$F(x,y,\alpha,\beta,\gamma) := F_1(x,\alpha)\cdot F_2(y,\beta) \qquad F(x,y,\alpha,\beta,\gamma) \to \left(1 - \frac{1}{x^{\alpha}}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{y^{\beta}}\right)$$

$$\left(1 - \frac{1}{x^{\alpha}}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{y^{\beta}}\right) \text{ simplify } \to 1 - y^{-\beta} - x^{-\alpha} + x^{-\alpha}\cdot y^{-\beta}$$

$$p_1(x,\alpha) := \frac{d}{dx}F_1(x,\alpha) \qquad p_1(x,\alpha) \to \frac{1}{x^{\alpha}}\cdot\frac{\alpha}{x} \text{ simplify } \to x^{(-\alpha-1)}\cdot\alpha$$

$$p_2(y,\beta) := \frac{d}{dy}F_2(y,\beta) \qquad p_2(y,\beta) \to \frac{1}{y^{\beta}}\cdot\frac{\beta}{y} \text{ simplify } \to y^{(-\beta-1)}\cdot\beta$$

$$p(x,y,\alpha,\beta,\gamma) := \frac{d}{dx}\frac{d}{dy}F(x,y,\alpha,\beta,\gamma)$$

$$p(x,y,\alpha,\beta,\gamma) \to \frac{1}{x^{\alpha}}\cdot\frac{\alpha}{x\cdot y^{\beta}}\cdot\frac{\beta}{y} \text{ simplify } \to x^{(-\alpha-1)}\cdot\alpha\cdot y^{(-\beta-1)}\cdot\beta$$

$$p(x,y,\alpha,\beta,\gamma) := x^{(-\alpha-1)}\cdot\alpha\cdot y^{(-\beta-1)}\cdot\beta$$

$$MX(x,\alpha) := \int_1^{\infty} x\cdot p_1(x,\alpha)\,dx$$

$$MX(x,\alpha) \to \lim_{x\to\infty} \frac{-\alpha}{(\alpha-1)}\cdot x^{(-\alpha+1)} + \frac{\alpha}{(\alpha-1)}$$

$$MX(x,1) \to \infty \qquad MX(x,1.1) \to 11. \qquad MX(x,2) \to 2$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2}{(2-1)}\cdot x^{(-2+1)} + \frac{\alpha}{(\alpha-1)} \to \frac{\alpha}{(\alpha-1)}$$

$$MX(x,\alpha) := \frac{\alpha}{\alpha-1} \qquad \alpha > 1$$

$$MY(y,\beta) := \int_1^{\infty} y\cdot p_2(y,\beta)\,dy$$

$$MY(y,\beta) \to \lim_{y\to\infty} \frac{-\beta}{(\beta-1)}\cdot y^{(-\beta+1)} + \frac{\beta}{(\beta-1)}$$

$$MY(y,1) \to \infty \qquad MY(y,1.1) \to 11. \qquad MY(y,2) \to 2$$

$MY(y,\beta) := \frac{\beta}{\beta - 1}$ $\qquad \beta > 1$

$MXX(x,\alpha) := \int_1^{\infty} x^2 \cdot p_1(x,\alpha)\, dx$

$MXX(x,\alpha) \to \lim_{x \to \infty} \frac{-\alpha}{(\alpha - 2)} \cdot x^{(-\alpha+2)} + \frac{\alpha}{(\alpha - 2)}$

$MXX(x,1) \to \infty \qquad MXX(x,2) \to \infty \qquad MXX(x,2.1) \to 21. \qquad MXX(x,3) \to 3$

$\lim_{x \to \infty} \frac{-3}{(3 - 2)} \cdot x^{(-3+2)} + \frac{\alpha}{(\alpha - 2)} \to \frac{\alpha}{(\alpha - 2)}$

$MXX(x,\alpha) := \frac{\alpha}{\alpha - 2}$ $\qquad \alpha > 2$

$DX(x,\alpha) := MXX(x,\alpha) - MX(x,\alpha)^2$

$DX(x,\alpha) \to \frac{\alpha}{(\alpha - 2)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha - 1)^2}$ simplify $\to \frac{\alpha}{(\alpha - 2) \cdot (\alpha - 1)^2}$

$DX(x,\alpha) := \frac{\alpha}{(\alpha - 2) \cdot (\alpha - 1)^2}$ $\qquad \alpha > 2$

$MYY(y,\beta) := \int_1^{\infty} y^2 \cdot p_2(y,\beta)\, dy$

$MYY(y,\beta) \to \lim_{y \to \infty} \frac{-\beta}{(\beta - 2)} \cdot y^{(-\beta+2)} + \frac{\beta}{(\beta - 2)}$

$MYY(y,1) \to \infty \qquad MYY(y,2) \to \infty \qquad MYY(y,2.01) \to 201. \qquad MYY(y,3) \to 3$

$\lim_{y \to \infty} \frac{-3}{(3 - 2)} \cdot y^{(-3+2)} + \frac{\beta}{(\beta - 2)} \to \frac{\beta}{(\beta - 2)}$

$MYY(y,\beta) := \frac{\beta}{\beta - 2}$ $\qquad \beta > 2$

$DY(y,\beta) := MYY(y,\beta) - MY(y,\beta)^2$

$DY(y,\beta) \to \frac{\beta}{(\beta - 2)} - \frac{\beta^2}{(\beta - 1)^2}$ simplify $\to \frac{\beta}{(\beta - 2) \cdot (\beta - 1)^2}$

$DY(y,\beta) := \frac{\beta}{(\beta - 2) \cdot (\beta - 1)^2}$ $\qquad \beta > 2$

4.2. KOMPONENTĖS *X* IR *Y* – PRIKLAUSOMOS

$$F_1(x,\alpha) := 1 - \frac{1}{x^{\alpha}} \qquad F_2(y,\beta) := 1 - \frac{1}{y^{\beta}}$$

$$F(x,y,\alpha,\beta,\gamma) := 1 - \frac{1}{x^{\alpha}} - \frac{1}{y^{\beta}} + \frac{1}{x^{\alpha}\cdot y^{\beta}}\left[1 + \gamma\cdot\left(1 - \frac{1}{x^{\alpha}}\right)\left(1 - \frac{1}{y^{\beta}}\right)\right]$$

$$p_1(x,\alpha) := \frac{d}{dx}F_1(x,\alpha) \qquad p_1(x,\alpha) \to \frac{1}{x^{\alpha}}\cdot\frac{\alpha}{x} \text{ simplify } \to x^{(-\alpha-1)}\cdot\alpha$$

$$p_2(y,\beta) := \frac{d}{dy}F_2(y,\beta) \qquad p_2(y,\beta) \to \frac{1}{y^{\beta}}\cdot\frac{\beta}{y} \text{ simplify } \to y^{(-\beta-1)}\cdot\beta$$

$$p(x,y,\alpha,\beta,\gamma) := \frac{d}{dx}\frac{d}{dy}F(x,y,\alpha,\beta,\gamma)$$

$$p(x,y,\alpha,\beta,\gamma) \to \frac{1}{x^{\alpha}\cdot y^{\beta}}\cdot\left[1 + \gamma\cdot\left(1 - \frac{1}{x^{\alpha}}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{y^{\beta}}\right)\right]\cdot\frac{\beta}{y}\cdot\frac{\alpha}{x} - \frac{1}{\left(x^{\alpha}\right)^2\cdot y^{\beta}}\cdot\gamma\cdot\frac{\alpha}{x}\cdot\left(1 - \frac{1}{y^{\beta}}\right)\cdot$$

$$\frac{\beta}{y} - \frac{1}{x^{\alpha}\cdot\left(y^{\beta}\right)^2}\cdot\gamma\cdot\left(1 - \frac{1}{x^{\alpha}}\right)\cdot\frac{\beta}{y}\cdot\frac{\alpha}{x} + \frac{1}{\left(x^{\alpha}\right)^2\cdot\left(y^{\beta}\right)^2}\cdot\gamma\cdot\frac{\alpha}{x}\cdot\frac{\beta}{y} \text{ simplify } \to$$

$$-\alpha\cdot\beta\cdot\frac{\left[-x^{-\alpha}\cdot y^{-\beta} - \gamma\cdot x^{-\alpha}\cdot y^{-\beta} + 2\cdot\left(y^2\right)^{-\beta}\cdot\gamma\cdot x^{-\alpha} + 2\cdot\left(x^2\right)^{-\alpha}\cdot\gamma\cdot y^{-\beta} - 4\cdot\left(y^2\right)^{-\beta}\cdot\left(x^2\right)^{-\alpha}\cdot\gamma\right]}{y\cdot x}$$

$$p(x,y,\alpha,\beta,\gamma) := \alpha\cdot\beta\cdot\frac{\left[x^{(-\alpha)}\cdot y^{-\beta} + \gamma\cdot x^{-\alpha}\cdot y^{-\beta} - 2\cdot\left(y^2\right)^{-\beta}\cdot\gamma\cdot x^{-\alpha} - 2\cdot\left(x^2\right)^{-\alpha}\cdot\gamma\cdot y^{-\beta} + 4\cdot\left(y^2\right)^{-\beta}\cdot\left(x^2\right)^{-\alpha}\cdot\gamma\right]}{y\cdot x}$$

$$MX(x,\alpha) := \int_1^{\infty} x\cdot p_1(x,\alpha)\,dx$$

$$MX(x,\alpha) \to \lim_{x\to\infty} \frac{-\alpha}{(\alpha-1)}\cdot x^{(-\alpha+1)} + \frac{\alpha}{(\alpha-1)}$$

$$MX(x,1) \to \infty \qquad MX(x,1.1) \to 11. \qquad MX(x,2) \to 2$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2}{(2-1)}\cdot x^{(-2+1)} + \frac{\alpha}{(\alpha-1)} \to \frac{\alpha}{(\alpha-1)}$$

$$MX(x,\alpha) := \frac{\alpha}{\alpha-1} \qquad \alpha > 1$$

$$MY(y,\beta) := \int_1^{\infty} y\cdot p_2(y,\beta)\,dy$$

$$MY(y,\beta) \to \lim_{y\to\infty} \frac{-\beta}{(\beta-1)}\cdot y^{(-\beta+1)} + \frac{\beta}{(\beta-1)}$$

$$MY(y,1) \to \infty \qquad MY(y,1.1) \to 11. \qquad MY(y,2) \to 2$$

$MY(y,\beta) := \frac{\beta}{\beta-1}$ $\quad\quad\quad \beta > 1$

$$MXX(x,\alpha) := \int_1^{\infty} x^2 \cdot p_1(x,\alpha)\,dx$$

$$MXX(x,\alpha) \rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{-\alpha}{(\alpha-2)} \cdot x^{(-\alpha+2)} + \frac{\alpha}{(\alpha-2)}$$

$MXX(x,1) \rightarrow \infty$ $\quad MXX(x,2) \rightarrow \infty$ $\quad MXX(x,2.1) \rightarrow 21.$ $\quad MXX(x,3) \rightarrow 3$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-3}{(3-2)} \cdot x^{(-3+2)} + \frac{\alpha}{(\alpha-2)} \rightarrow \frac{\alpha}{(\alpha-2)}$$

$MXX(x,\alpha) := \frac{\alpha}{\alpha-2}$ $\quad\quad\quad \alpha > 2$

$$DX(x,\alpha) := MXX(x,\alpha) - MX(x,\alpha)^2$$

$$DX(x,\alpha) \rightarrow \frac{\alpha}{(\alpha-2)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha-1)^2}$$

$DX(x,\alpha) := \frac{\alpha}{(\alpha-2)\cdot(\alpha-1)^2}$ $\quad\quad\quad \alpha > 2$

$$MYY(y,\beta) := \int_1^{\infty} y^2 \cdot p_2(y,\beta)\,dy$$

$$MYY(y,\beta) \rightarrow \lim_{y \to \infty} \frac{-\beta}{(\beta-2)} \cdot y^{(-\beta+2)} + \frac{\beta}{(\beta-2)}$$

$MYY(y,1) \rightarrow \infty$ $\quad MYY(y,2) \rightarrow \infty$ $\quad MYY(y,2.01) \rightarrow 201.$ $\quad MYY(y,3) \rightarrow 3$

$$\lim_{y \to \infty} \frac{-3}{(3-2)} \cdot y^{(-3+2)} + \frac{\beta}{(\beta-2)} \rightarrow \frac{\beta}{(\beta-2)}$$

$MYY(y,\beta) := \frac{\beta}{\beta-2}$ $\quad\quad\quad \beta > 2$

$$DY(y,\beta) := MYY(y,\beta) - MY(y,\beta)^2$$

$$DY(y,\beta) \rightarrow \frac{\beta}{(\beta-2)} - \frac{\beta^2}{(\beta-1)^2}$$

$DY(y,\beta) := \frac{\beta}{(\beta-2)\cdot(\beta-1)^2}$ $\quad\quad\quad \beta > 2$

$$MXY_1(x,y,\alpha,\beta,\gamma) := \int_1^{\infty} y\,p(x,y,\alpha,\beta,\gamma)\,dy$$

$$MXY_1(x,y,\alpha,\beta,\gamma) \to \lim_{y\to\infty} -\alpha\cdot\frac{\beta}{x\cdot(\beta-1)}\cdot y\cdot\left(x^{-\alpha}\cdot y^{-\beta} + \gamma\cdot x^{-\alpha}\cdot y^{-\beta} - 2\cdot y^{-\beta}\cdot x^{-2\cdot\alpha}\cdot\gamma\right) + 2\cdot\beta\cdot\alpha\cdot\frac{\gamma}{x\cdot(-1+2\cdot\beta)}\cdot y\cdot\left(y^{-2\cdot\beta}\cdot x^{-\alpha} - 2\cdot y^{-2\cdot\beta}\cdot x^{-2\cdot\alpha}\right) + \alpha\cdot\beta\cdot\frac{\left(-x^{\alpha} + 2\cdot\beta\cdot x^{\alpha} + \gamma\cdot x^{\alpha} - 2\cdot\gamma\right)}{x\cdot(\beta-1)\cdot(-1+2\cdot\beta)\cdot\left(x^{\alpha}\right)^2}$$

$$MXY_1(x,y,\alpha,\beta,\gamma) := \alpha\cdot\beta\cdot\frac{\left(\gamma\cdot x^{\alpha} - 2\cdot\gamma - x^{\alpha} + 2\cdot\beta\cdot x^{\alpha}\right)}{x\cdot(-1+2\cdot\beta)\cdot(\beta-1)\cdot\left(x^{\alpha}\right)^2} \qquad \alpha > 2$$

$$MXY(x,y,\alpha,\beta,\gamma) := \int_1^{\infty} x\cdot MXY_1(x,y,\alpha,\beta,\gamma)\,dx$$

$$MXY(x,y,\alpha,\beta,\gamma) \to \lim_{x\to\infty} -x^{(-\alpha+1)}\cdot\alpha\cdot\frac{\beta}{\left(\alpha+3\cdot\beta-1+2\cdot\alpha\cdot\beta^2-2\cdot\beta^2-3\cdot\alpha\cdot\beta\right)}\cdot\gamma - 2\cdot x^{(-\alpha+1)}\cdot\alpha\cdot\frac{\beta^2}{\left(\alpha+3\cdot\beta-1+2\cdot\alpha\cdot\beta^2-2\cdot\beta^2-3\cdot\alpha\cdot\beta\right)} +$$

$$+ x^{(-\alpha+1)}\cdot\alpha\cdot\frac{\beta}{\left(\alpha+3\cdot\beta-1+2\cdot\alpha\cdot\beta^2-2\cdot\beta^2-3\cdot\alpha\cdot\beta\right)} + 2\cdot x^{(-2\cdot\alpha+1)}\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\frac{\gamma}{\left(3\cdot\beta+4\cdot\alpha\cdot\beta^2-2\cdot\beta^2-6\cdot\alpha\cdot\beta-1+2\cdot\alpha\right)} +$$

$$+ (4\cdot\alpha\cdot\beta - 2\cdot\beta + 1 + \gamma - 2\cdot\alpha)\cdot\alpha\cdot\frac{\beta}{\left(3\cdot\beta+4\cdot\alpha\cdot\beta^2-2\cdot\beta^2-6\cdot\alpha\cdot\beta-1+2\cdot\alpha\right)\cdot(\alpha-1)}$$

$$-1 - 2\cdot\beta^2 + 4\cdot\alpha\cdot\beta^2 - 6\cdot\alpha\cdot\beta + 2\cdot\alpha + 3\cdot\beta \text{ factor } \to (-1+2\cdot\beta)\cdot(\beta-1)\cdot(2\cdot\alpha-1)$$

$$MXY(x,y,\alpha,\beta,\gamma) := (4\cdot\alpha\cdot\beta - 2\cdot\beta + \gamma + 1 - 2\cdot\alpha)\cdot\alpha\cdot\frac{\beta}{(-1+2\cdot\beta)\cdot(\beta-1)\cdot(2\cdot\alpha-1)\cdot(\alpha-1)} \qquad \alpha > 2 \quad \beta > 2$$

$$cov(x,y,\alpha,\beta,\gamma) := MXY(x,y,\alpha,\beta,\gamma) - MX(x,\alpha)\cdot MY(y,\beta)$$

$$cov(x,y,\alpha,\beta,\gamma) \to (-2\cdot\beta + 4\cdot\alpha\cdot\beta - 2\cdot\alpha + \gamma + 1)\cdot\alpha\cdot\frac{\beta}{(-1+2\cdot\beta)\cdot(\beta-1)\cdot(2\cdot\alpha-1)\cdot(\alpha-1)} - \frac{\alpha}{(\alpha-1)}\cdot\frac{\beta}{(\beta-1)} \text{ simplify } \to \beta\cdot\alpha\cdot\frac{\gamma}{(-1+2\cdot\beta)\cdot(\beta-1)\cdot(2\cdot\alpha-1)\cdot(\alpha-1)}$$

$$cov(x,y,\alpha,\beta,\gamma) := \beta\cdot\alpha\cdot\frac{\gamma}{(-1+2\cdot\beta)\cdot(\beta-1)\cdot(2\cdot\alpha-1)\cdot(\alpha-1)} \qquad \alpha > 2 \quad \beta > 2$$

Given

$$(-1+2\cdot\beta)\cdot(\beta-1)\cdot(2\cdot\alpha-1)\cdot(\alpha-1) = 0$$

$$Find(\alpha,\beta) \to \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \beta & \beta \end{pmatrix}$$

$$\rho(x,y,\alpha,\beta,\gamma) := \frac{cov(x,y,\alpha,\beta,\gamma)}{\sqrt{DX(x,\alpha)\cdot DY(y,\beta)}} \qquad \alpha > 2 \qquad \beta > 2$$

$$\rho(x,y,\alpha,\beta,\gamma) \to \beta\cdot\alpha\cdot\frac{\gamma}{(-1+2\cdot\beta)\cdot(\beta-1)\cdot(2\cdot\alpha-1)\cdot(\alpha-1)\cdot\left[\frac{\alpha}{(\alpha-2)\cdot(\alpha-1)^2}\cdot\frac{\beta}{(\beta-2)\cdot(\beta-1)^2}\right]^{\frac{1}{2}}} \text{ simplify } \to \beta\cdot\alpha\cdot\frac{\gamma}{(-1+2\cdot\beta)\cdot(\beta-1)\cdot(2\cdot\alpha-1)\cdot(\alpha-1)\cdot\left[\frac{\alpha}{(\alpha-2)\cdot(\alpha-1)^2}\cdot\frac{\beta}{(\beta-2)\cdot(\beta-1)^2}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$(-1+2\cdot\beta)\cdot(\beta-1)\cdot(2\cdot\alpha-1)\cdot(\alpha-1)\cdot\left[\frac{\alpha}{(\alpha-2)\cdot(\alpha-1)^2}\cdot\frac{\beta}{(\beta-2)\cdot(\beta-1)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \text{ factor } \to (-1+2\cdot\beta)\cdot(\beta-1)\cdot(2\cdot\alpha-1)\cdot(\alpha-1)\cdot\left[\frac{\alpha}{(\alpha-2)\cdot(\alpha-1)^2}\cdot\frac{\beta}{(\beta-2)\cdot(\beta-1)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Given

$$(\beta-1)\cdot(\alpha-1)\cdot(-2\cdot\beta + 4\cdot\beta\cdot\alpha - 2\cdot\alpha + 1)\cdot\left[\frac{\alpha}{(\alpha-2)\cdot(\alpha-1)^2}\cdot\frac{\beta}{(\beta-2)\cdot(\beta-1)^2}\right]^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\text{Find}(\alpha,\beta) \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \beta & \beta \end{pmatrix}$$

$$|\rho(x, y, \alpha, \beta, \gamma)| \le 1$$

Given

$$\alpha\cdot\beta\cdot\frac{\gamma}{(\beta-1)\cdot(\alpha-1)\cdot(-2\cdot\beta+4\cdot\alpha\cdot\beta-2\cdot\alpha+1)\cdot\left[\frac{\alpha}{(\alpha-2)\cdot(\alpha-1)^2}\cdot\frac{\beta}{(\beta-2)\cdot(\beta-1)^2}\right]^{\frac{1}{2}}} = 1$$

$$\text{Find}(\gamma) \rightarrow \left[\frac{\alpha}{(\alpha-2)\cdot(\alpha-1)^2}\cdot\frac{\beta}{(\beta-2)\cdot(\beta-1)^2}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{(-6\cdot\alpha\cdot\beta^2+2\cdot\beta^2+9\cdot\alpha\cdot\beta-3\cdot\beta+2\cdot\alpha^2-3\cdot\alpha+1-6\cdot\alpha^2\cdot\beta+4\cdot\alpha^2\cdot\beta^2}{\alpha\cdot\beta}$$

$$-3\cdot\alpha+1-6\cdot\alpha\cdot\beta^2+2\cdot\beta^2+4\cdot\alpha^2\cdot\beta^2-6\cdot\alpha^2\cdot\beta+9\cdot\alpha\cdot\beta+2\cdot\alpha^2-3\cdot\beta \text{ factor } \rightarrow (-1+2\cdot\beta)\cdot(\beta-1)\cdot(2\cdot\alpha-1)\cdot(\alpha-1)$$

Given

$$\alpha\cdot\beta\cdot\frac{\gamma}{(\beta-1)\cdot(\alpha-1)\cdot(-2\cdot\beta+4\cdot\alpha\cdot\beta-2\cdot\alpha+1)\cdot\left[\frac{\alpha}{(\alpha-2)\cdot(\alpha-1)^2}\cdot\frac{\beta}{(\beta-2)\cdot(\beta-1)^2}\right]^{\frac{1}{2}}} = -1$$

$$\text{Find}(\gamma) \rightarrow -\left[\frac{\alpha}{(\alpha-2)\cdot(\alpha-1)^2}\cdot\frac{\beta}{(\beta-2)\cdot(\beta-1)^2}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{(-6\cdot\alpha\cdot\beta^2+2\cdot\beta^2+9\cdot\alpha\cdot\beta-3\cdot\beta+2\cdot\alpha^2-3\cdot\alpha+1-6\cdot\alpha^2\cdot\beta+4\cdot\alpha^2\cdot\beta}{\alpha\cdot\beta}$$

5 PRIEDAS. PROGRAMOS TEKSTAS

```
function varargout = programa(varargin)

% Copyright 2002-2003 The MathWorks, Inc.

% Edit the above text to modify the response to help programa

% Last Modified by GUIDE v2.5 19-May-2007 16:28:51

% Begin initialization code - DO NOT EDIT
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
                   'gui_Singleton',  gui_Singleton, ...
                   'gui_OpeningFcn', @programa_OpeningFcn, ...
                   'gui_OutputFcn',  @programa_OutputFcn, ...
                   'gui_LayoutFcn',  [] , ...
                   'gui_Callback',   []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end

if nargout
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end
% End initialization code - DO NOT EDIT


% --- Executes just before programa is made visible.
function programa_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)
% This function has no output args, see OutputFcn.
% hObject    handle to figure
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
% varargin   command line arguments to programa (see VARARGIN)

% Choose default command line output for programa
handles.output = hObject;

%--- Pradines kintamuju reiksmes
alfa = 3;
beta = 3;
gama = 0.5;
nn = 1000;
xx = 3;
yy = 3;
apa = -(alfa*beta/((alfa-2)*(beta-2)))^(1/2)*(2*alfa-1)*(2*beta-1)/(alfa*beta);
virs = (alfa*beta/((alfa-2)*(beta-2)))^(1/2)*(2*alfa-1)*(2*beta-1)/(alfa*beta);
grafiko_nr = 1;
grafiko_nr1 = 1;
q = 0.1;
s = 0.1;
handles.alfa = alfa;
handles.beta = beta;
handles.gama = gama;
handles.xx = xx;
handles.yy = yy;
```

```
handles.nn = nn;
handles.apa = apa;
handles.virs = virs;
handles.grafiko_nr = grafiko_nr;
handles.grafiko_nr1 = grafiko_nr1;
handles.q = q;
handles.s = s;
%------------------------

% Update handles structure
guidata(hObject, handles);

% UIWAIT makes programa wait for user response (see UIRESUME)
% uiwait(handles.figure1);

% --- Outputs from this function are returned to the command line.
function varargout = programa_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)
% varargout  cell array for returning output args (see VARARGOUT);
% hObject    handle to figure
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Get default command line output from handles structure
varargout{1} = handles.output;

%---------------------------- Edit laukai ---------------------------------
% --- Iveda x reiksme
function edit1_Callback(hObject, eventdata, handles)
%------------------------
xx_string = str2double(get(hObject,'string'));
if (isnan(xx_string) | (xx_string < 1))
    set(hObject,'String',3);
    errordlg('Neteisinga x reiksme!!!','Klaida');
else
    xx = xx_string;
    handles.xx = xx;
    guidata(hObject,handles);
end
%------------------------

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
%-----------------------
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

% --- Iveda n reiksme
function edit3_Callback(hObject, eventdata, handles)
%------------------------
nn_string = str2double(get(hObject,'string'));
if (isnan(nn_string) | (nn_string < 1))
    set(hObject,'String',1000);
    errordlg('Neteisinga n reiksme!!!','Klaida');
else
    nn = nn_string;
    handles.nn = nn;
    guidata(hObject,handles);
end
%------------------------
```

```
% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit3_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
%-----------------------
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

% --- Iveda gama reiksme
function edit4_Callback(hObject, eventdata, handles)
%-----------------------
apa = handles.apa;
virs = handles.virs;
grafiko_nr = handles.grafiko_nr;
gama_string = str2double(get(hObject,'string'));
if isnan(gama_string) | (gama_string < apa) | (gama_string >virs)
    set(hObject,'String',0.5);
    errordlg('Neteisinga gama reiksme!!!','Klaida');
else
    gama = gama_string;
    handles.gama = gama;
    guidata(hObject,handles);
end
%-----------------------

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit4_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
%-----------------------
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

% --- Iveda y reiksme
function edit5_Callback(hObject, eventdata, handles)
%-----------------------
yy_string = str2double(get(hObject,'string'));
if (isnan(yy_string) | (yy_string < 1))
    set(hObject,'String',3);
    errordlg('Neteisinga y reiksme!!!','Klaida');
else
    yy = yy_string;
    handles.yy = yy;
    guidata(hObject,handles);
end
%-----------------------

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit5_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
%-----------------------
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

% --- Iveda beta reiksme
function edit6_Callback(hObject, eventdata, handles)
%-----------------------
beta_string = str2double(get(hObject,'string'));
if (isnan(beta_string) | (beta_string < 0))
    set(hObject,'String',2);
    errordlg('Neteisinga beta reiksme!!!','Klaida');
else
```

```
    beta = beta_string;
    handles.beta = beta;
    guidata(hObject,handles);
end
%------------------------

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit6_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
%------------------------
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

% -------------- Mygtukai --------------------------------------------------

% --- Executes on button press in Pradeti.
function Pradeti_Callback(hObject, eventdata, handles)
%-------------------------
grafiko_nr = handles.grafiko_nr;
set(handles.edit1,'Visible','on');
set(handles.edit4,'Visible','on');
set(handles.Braizyti,'Visible','on');
set(handles.text1,'Visible','on');
set(handles.text4,'Visible','on');
set(handles.Grizti,'Visible','on');
set(handles.text7,'Visible','on');
set(handles.edit5,'Visible','on');
set(handles.text10,'Visible','on');
set(handles.popupmenu2,'Visible','on');
set(handles.text11,'Visible','on');
switch grafiko_nr;
    case 1
        set(handles.edit1,'Visible','off');
        set(handles.text1,'Visible','off');
        set(handles.axes1,'Visible','on');
        set(handles.axes2,'Visible','on');
        set(handles.edit3,'Visible','on');
        set(handles.text3,'Visible','on');
        set(handles.text5,'Visible','on');
        set(handles.text6,'Visible','on');
    case 2
        set(handles.axes3,'Visible','on');
    case 3
        set(handles.axes1,'Visible','on');
        set(handles.axes2,'Visible','on');
        set(handles.edit6,'Visible','on');
        set(handles.text8,'Visible','on');
        set(handles.text5,'Visible','on');
        set(handles.text6,'Visible','on');
    case 4
        set(handles.axes3,'Visible','on');
        set(handles.edit4,'Visible','off');
        set(handles.text4,'Visible','off');
end
set(handles.Pradeti,'Visible','off');
set(handles.popupmenu1,'Visible','off');
set(handles.text9,'Visible','off');
%-------------------------

% --- Executes on button press in Baigti.
function Baigti_Callback(hObject, eventdata, handles)
%-------------------------
```

```
delete(handles.figure1);
%------------------------

% --- Executes on button press in Grizti.
function Grizti_Callback(hObject, eventdata, handles)
%------------------------
axes(handles.axes1);
cla
axes(handles.axes2);
cla
axes(handles.axes3);
cla
set(handles.Pradeti,'Visible','on');
set(handles.popupmenu1,'Visible','on');
set(handles.text9,'Visible','on');
set(handles.popupmenu2,'Visible','off');
set(handles.text10,'Visible','off');
set(handles.edit1,'Visible','off');
set(handles.edit4,'Visible','off');
set(handles.Braizyti,'Visible','off');
set(handles.text1,'Visible','off');
set(handles.text4,'Visible','off');
set(handles.axes1,'Visible','off');
set(handles.axes2,'Visible','off');
set(handles.edit3,'Visible','off');
set(handles.text3,'Visible','off');
set(handles.text5,'Visible','off');
set(handles.text6,'Visible','off');
set(handles.Grizti,'Visible','off');
set(handles.axes3,'Visible','off');
set(handles.text7,'Visible','off');
set(handles.edit5,'Visible','off');
set(handles.text8,'Visible','off');
set(handles.edit6,'Visible','off');
set(handles.text11,'Visible','off');
%------------------------

% --- Executes on button press in Braizyti.
function Braizyti_Callback(hObject, eventdata, handles)
%------------------------
xx = handles.xx;
yy = handles.yy;
nn = handles.nn;
alfa = handles.alfa;
beta = handles.beta;
gama = handles.gama;
grafiko_nr = handles.grafiko_nr;
grafiko_nr1 = handles.grafiko_nr1;
q = handles.q;
s = handles.s;
switch grafiko_nr;
    case 1
        x = zeros(100);
        x(1) = 1;
        switch grafiko_nr1;
            case 1
                for i = 2:length(x);
                    f = (1-x(i-1)^(-alfa)/nn-yy^(-beta)/nn+(x(i-1)^(-alfa)*yy^(-
beta))/(nn^2)*(1+gama*(1-x(i-1)^(-alfa)/nn)*(1-yy^(-beta)/nn)))^nn;
                    H = exp(-x(i-1)^(-alfa))*exp(-yy^(-beta));
                    delta_n(i-1) = abs(f - H);
                    x(i) = x(i-1) + 0.1;
                end
```

```
                f1 = (1-yy^(-beta)/nn)^nn;
                H1 = exp(-yy^(-beta));
                delta1_n = abs(f1 - H1);
                axes(handles.axes1);
                plot(x(1:length(x)-1),delta_n);
                hold on
                plot(x(1:length(x)-1),delta1_n,'-');
                hold off
                xlabel('x');
                ylabel('delta n');
            case 2
                for i = 2:length(x);
                    H = exp(-x(i-1)^(-alfa))*exp(-yy^(-beta));
                    u = nn*(1-(1-x(i-1)^(-alfa)/nn-yy^(-beta)/nn+(x(i-1)^(-
alfa)*yy^(-beta))/(nn^2)*(1+gama*(1-x(i-1)^(-alfa)/nn)*(1-yy^(-beta)/nn))));
                    v = u+log(H);
                    if (u/nn<1/2) & (2*u^2/(3*nn)<q) & (abs(v)/3<s)
                        R1 = 2*u^2/nn+2*u^4/(nn^2)*1/(1-q);
                        R2 = abs(v)+v^2/2*1/(1-s);
                        delta_n(i-1) = H*(R1+R2+R1*R2);
                    end
                    x(i) = x(i-1) + 0.1;
                end
                axes(handles.axes1);
                plot(x(1:length(x)-1),delta_n);
                xlabel('x');
                ylabel('delta n');
        end
        % --- Trimatis vaizdas
        [x,y] = meshgrid(1:0.1:10, 1:0.1:10);
        switch grafiko_nr1
            case 1
                for i = 1:length(x);
                    for j = 1:length(y);
                        f = (1-x(i,j)^(-alfa)/nn-y(i,j)^(-beta)/nn+(x(i,j)^(-
alfa)*y(i,j)^(-beta))/(nn^2)*(1+gama*(1-x(i,j)^(-alfa)/nn)*(1-y(i,j)^(-
beta)/nn)))^nn;
                        H = exp(-x(i,j)^(-alfa))*exp(-y(i,j)^(-beta));
                        delta_nn(i,j) = abs(f - H);
                    end
                end
            case 2
                for i = 1:length(x);
                    for j = 1:length(y);
                        H = exp(-x(i,j)^(-alfa))*exp(-y(i,j)^(-beta));
                        u = nn*(1-(1-x(i,j)^(-alfa)/nn-y(i,j)^(-
beta)/nn+(x(i,j)^(-alfa)*y(i,j)^(-beta))/(nn^2)*(1+gama*(1-x(i,j)^(-alfa)/nn)*(1-
y(i,j)^(-beta)/nn))));
                        v = u+log(H);
                        if (u/nn<1/2) & (2*u^2/(3*nn)<q) & (abs(v)/3<s)
                            R1 = 2*u^2/nn+2*u^4/(nn^2)*1/(1-q);
                            R2 = abs(v)+v^2/2*1/(1-s);
                            delta_nn(i,j) = H*(R1+R2+R1*R2);
                        end
                    end
                end
        end
        axes(handles.axes2);
        surf(x,y,delta_nn);
        xlabel('x');
        ylabel('y');
        zlabel('delta n');
        clear
    case 2
```

```
        H = exp(-xx^(-alfa))*exp(-yy^(-beta));
        n = 1:1000;
        switch grafiko_nr1;
            case 1
                for i = 1:length(n);
                    f = (1-xx^(-alfa)/n(i)-yy^(-beta)/n(i)+(xx^(-alfa)*yy^(-
beta))/(n(i)^2)*(1+gama*(1-xx^(-alfa)/n(i))*(1-yy^(-beta)/n(i))))^n(i);
                    delta_n(i) = abs(f - H);
                end
            case 2
                for n = 1:1000;
                    u = n*(1-(1-xx^(-alfa)/n-yy^(-beta)/n+(xx^(-alfa)*yy^(-
beta))/(n^2)*(1+gama*(1-xx^(-alfa)/n)*(1-yy^(-beta)/n))));
                    v = u+log(H);
                    if (u/n<1/2) & (2*u^2/(3*n)<q) & (abs(v)/3<s)
                        R1 = 2*u^2/n+2*u^4/(n^2)*1/(1-q);
                        R2 = abs(v)+v^2/2*1/(1-s);
                        delta_n(n) = H*(R1+R2+R1*R2);
                    end
                end
        end
        axes(handles.axes3);
        plot(delta_n);
        xlabel('n');
        ylabel('delta n');
        clear
    case 3
        beta = handles.beta;
        [a,b] = meshgrid(0.2:0.2:10, 0.2:0.2:10);
        % --- Dvimatis vaizdas
        alfa1 = 0.2:0.2:10;
        switch grafiko_nr1
            case 1
                f1 = (1-xx.^(-alfa1)./nn-yy.^(-beta)./nn+(xx.^(-alfa1).*yy.^(-
beta))./(nn^2).*(1+gama*(1-xx.^(-alfa1)./nn)*(1-yy.^(-beta)./nn))).^nn;
                H1 = exp(-xx.^(-alfa1)).*exp(-yy.^(-beta));
                delta1_n = abs(f1 - H1);
                f2 = (1-yy^(-beta)/nn)^nn;
                H2 = exp(-yy^(-beta));
                delta2_n = abs(f2 - H2);
                axes(handles.axes1);
                plot(alfa1,delta2_n)
                hold on
            case 2
                for i = 1:length(alfa1);
                    H = exp(-xx^(-alfa1(i)))*exp(-yy^(-beta));
                    u = nn*(1-(1-xx^(-alfa1(i))/nn-yy^(-beta)/nn+(xx^(-
alfa1(i))*yy^(-beta))/(nn^2)*(1+gama*(1-xx^(-alfa1(i))/nn)*(1-yy^(-beta))/nn)));
                    v = u+log(H);
                    if (u/nn<1/2) & (2*u^2/(3*nn)<q) & (abs(v)/3<s)
                        R1 = 2*u^2/nn+2*u^4/(nn^2)*1/(1-q);
                        R2 = abs(v)+v^2/2*1/(1-s);
                        delta1_n(i) = H*(R1+R2+R1*R2);
                    end
                end
        end
        axes(handles.axes1);
        plot(alfa1,delta1_n);
        hold off
        xlabel('alfa');
        ylabel('delta n');
        % --- Trimatis vaizdas
        f = (1-xx.^(-a)./nn-yy.^(-b)./nn+(xx.^(-a).*yy.^(-b))./(nn^2).*(1+gama*(1-
xx.^(-a)./nn)*(1-yy.^(-b)./nn))).^nn;
```

```
        H = exp(-xx.^(-a)).*exp(-yy.^(-b));
        delta_n = abs(f - H);
        axes(handles.axes2);
        surf(a,b,delta_n);
        xlabel('alfa');
        ylabel('beta');
        zlabel('delta n');
        clear
    case 4
        apa = handles.apa;
        virs = handles.virs;
        gama = apa:0.1:virs;
        H = exp(-xx^(-alfa))*exp(-yy^(-beta));
        switch grafiko_nr1;
            case 1
                for i = 1:length(gama);
                    f = (1-xx^(-alfa)/nn-yy^(-beta)/nn+(xx^(-alfa)*yy^(-
beta))/(nn^2)*(1+gama(i)*(1-xx^(-alfa)/nn)*(1-yy^(-beta)/nn)))^nn;
                    delta_n(i) = abs(f - H);
                end
            case 2
                for i = 1:length(gama);
                    u = nn*(1-(1-xx^(-alfa)/nn-yy^(-beta)/nn+(xx^(-alfa)*yy^(-
beta))/(nn^2)*(1+gama(i)*(1-xx^(-alfa)/nn)*(1-yy^(-beta)/nn))));
                    v = u+log(H);
                    if (u/nn<1/2) & (2*u^2/(3*nn)<q) & (abs(v)/3<s)
                        R1 = 2*u^2/nn+2*u^4/(nn^2)*1/(1-q);
                        R2 = abs(v)+v^2/2*1/(1-s);
                        delta_n(i) = H*(R1+R2+R1*R2);
                    end
                end
        end
        plot(gama,delta_n);
        xlabel('gama');
        ylabel('delta n');
end
%------------------------

% --- Executes on selection change in popupmenu1.
function popupmenu1_Callback(hObject, eventdata, handles)
%------------------------
grafiko_nr = get(hObject,'Value');
handles.grafiko_nr = grafiko_nr;
guidata(hObject,handles);
%------------------------

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function popupmenu1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
%------------------------
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

% --- Executes on selection change in popupmenu2.
function popupmenu2_Callback(hObject, eventdata, handles)
%------------------------
grafiko_nr1 = get(hObject,'Value');
handles.grafiko_nr1 = grafiko_nr1;
guidata(hObject,handles);
%------------------------

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
```

```
function popupmenu2_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
%------------------------
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end
```

6 PRIEDAS. STRAIPSNIS „PARETO ATSITIKTINIŲ VEKTORIŲ MAKSIMUMŲ ASIMPTOTINIAI TYRIMAI“

THE ASYMPTOTICAL ANALYSIS OF THE MAXIMA OF TWO-DIMENSIONAL PARETO RANDOM VECTORS

Vaida Savulytė, Algimantas Aksomaitis

Kaunas University of Technology

1. Introduction. Let's consider two-dimensional random variable (*X*, *Y*), which components have Pareto distribution with marginal distribution functions

$$F_1(x) = 1 - \frac{1}{x^{\alpha}}; \text{ where } x \geq 1, \alpha > 0; \; F_2(y) = 1 - \frac{1}{y^{\beta}}; \text{ where } y \geq 1, \beta > 0.$$

(1)

Density functions:

$$p_1(x) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}; \text{ where } x \geq 1, \alpha > 0; \; p_2(y) = \frac{\beta}{y^{\beta+1}}; \text{ where } y \geq 1, \beta > 0.$$

Let's say, that the components of the vector (*X*, *Y*) are dependent. Then we construct the distribution function like this ([2]):

$$F(x, y) = 1 - \frac{1}{x^{\alpha}} - \frac{1}{y^{\beta}} + \frac{1}{x^{\alpha} y^{\beta}}\left(1 + \gamma\left(1 - \frac{1}{x^{\alpha}}\right)\left(1 - \frac{1}{y^{\alpha}}\right)\right), \; x, y \geq 1, \; \alpha, \beta > 0; \qquad \textbf{(2)}$$

where $-\left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha-2)(\beta-2)}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(2\alpha-1)(2\beta-1)}{\alpha\beta} \leq \gamma \leq \left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha-2)(\beta-2)}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(2\alpha-1)(2\beta-1)}{\alpha\beta}$.

It is obvious that

$$F(x, +\infty) = 1 - \frac{1}{x^{\alpha}} = F_1(x), \quad x \geq 1, \; \alpha > 0;$$

$$F(+\infty, y) = 1 - \frac{1}{y^{\beta}} = F_2(y), \quad y \geq 1, \; \beta > 0.$$

The main characteristics are:

mathematical expectation $\left(\mathrm{E}(X); \mathrm{E}(Y)\right) = \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}; \frac{\beta}{\beta-1}\right)$, when $\alpha > 1$ and $\beta > 1$;

variance $\left(\mathrm{Var}(X); \mathrm{Var}(Y)\right) = \left(\frac{\alpha}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}; \frac{\beta}{(\beta-2)(\beta-1)^2}\right)$, when $\alpha > 2$ and $\beta > 2$;

correlation coefficient

$$\rho(X,Y)=\alpha\beta\frac{\gamma}{(2\alpha-1)(2\beta-1)\left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha-2)(\beta-2)}\right)^{\frac{1}{2}}},\ \alpha>2,\ \beta>2.$$

It is obvious that

$$\left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha-2)(\beta-2)}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{(2\alpha-1)(2\beta-1)}{\alpha\beta}>0\ (\alpha,\beta>2).$$

This means that the correlation between the components of vector depends on the value of parameter γ. If we take $\gamma > 0$, we get the positive correlation. We get the negative correlation otherwise. If we take $\gamma = 0$, the correlation between components is equal to 0.

So,

$$\rho(X,Y)<0,\text{ when }-\left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha-2)(\beta-2)}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{(2\alpha-1)(2\beta-1)}{\alpha\beta}\le\gamma<0\ \text{ and}$$

$$\rho(X,Y)>0,\text{ when }0<\gamma\le\left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha-2)(\beta-2)}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{(2\alpha-1)(2\beta-1)}{\alpha\beta}.$$

In this way, we constructed two-dimensional Pareto distribution, when we had marginal distributions. Besides, the components are correlated (and dependent), if $\gamma\neq 0$.

Now we are going to analyze the maxima of these random vectors.

2. The maxima of Pareto random vectors. Let's say that (X_1,Y_1), (X_2,Y_2),..., (X_n,Y_n),... are independent two-dimensional random vectors, which components are dependent and have Pareto distribution with marginal distribution functions (1). Let's say, that two-dimensional distribution function is (2). **(3)**

We define the two-dimensional maxima ([3]):

$$Z_n=(Z_{n,1},Z_{n,2});$$

where $Z_{n,1}=\max(X_1,X_2,...,X_n)$,

$Z_{n,2}=\max(Y_1,Y_2,...,Y_n)$.

We are going to prove that though the components of vectors are dependent, their maxima are asymptotically independent.

First of all we get the vectors of normalizing constants $a_n=(a_{n,1},a_{n,2})$ and $b_n=(b_{n,1},b_{n,2})$; and the limiting distributions of marginal distributions ([3]).

We count the probability

$$P\left(\frac{Z_{n,1}-a_{n,1}}{b_{n,1}}<x\right)=P(Z_{n,1}<xb_{n,1}+a_{n,1})=F^n(xb_{n,1}+a_{n,1})=\left(1-\frac{1}{(xb_{n,1}+a_{n,1})^{\alpha}}\right)^n.$$

It is obvious, that $a_{n,1} = 0$ and $b_{n,1} = n^{\frac{1}{\alpha}}$. Then

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{Z_{n,1}}{n^{1/\alpha}} < x\right) = e^{-x^{-\alpha}} = H_{1,\alpha}(x),\ x > 0.$$

In the same way we get $a_{n,2} = 0$ and $b_{n,2} = n^{\frac{1}{\beta}}$. Then

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{Z_{n,2}}{n^{1/\beta}} < y\right) = e^{-y^{-\beta}} = H_{1,\beta}(y),\ y > 0.$$

We count probability

$$P\left(\frac{Z_{n,1}}{n^{1/\alpha}} < x, \frac{Z_{n,2}}{n^{1/\beta}} < y\right) = P\left(Z_{n,1} < n^{1/\alpha}x, Z_{n,2} < n^{1/\beta}y\right) = F^n(n^{1/\alpha}x, n^{1/\beta}y);$$

$$F^n(n^{1/\alpha}x, n^{1/\beta}y) = \left(1 - \frac{x^{-\alpha}}{n} - \frac{y^{-\beta}}{n} + \frac{x^{-\alpha}y^{-\beta}}{n^2}\left(1+\gamma\left(1-\frac{x^{-\alpha}}{n}\right)\left(1-\frac{y^{-\beta}}{n}\right)\right)\right)^n = e^{n\ln\left(1 - \frac{x^{-\alpha}}{n} - \frac{y^{-\beta}}{n} + \frac{x^{-\alpha}y^{-\beta}}{n^2}\left(1+\gamma\left(1-\frac{x^{-\alpha}}{n}\right)\left(1-\frac{y^{-\beta}}{n}\right)\right)\right)}.$$

We get the limit

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{Z_{n,1}}{n^{1/\alpha}} < x, \frac{Z_{n,2}}{n^{1/\beta}} < y\right) = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(1 - \frac{x^{-\alpha}}{n} - \frac{y^{-\beta}}{n} + \frac{x^{-\alpha}y^{-\beta}}{n^2}\left(1+\gamma\left(1-\frac{x^{-\alpha}}{n}\right)\left(1-\frac{y^{-\beta}}{n}\right)\right)\right)} = e^{-\left(x^{-\alpha}+y^{-\beta}\right)}.$$

So the limit distribution function is:

$$H(x,y) = e^{-\left(x^{-\alpha}+y^{-\beta}\right)};\ x,\ y > 0, \alpha, \beta > 0, \qquad \textbf{(4)}$$

when $a_n = (0,0)$ and $b_n = \left(n^{1/\alpha}, n^{1/\beta}\right)$.

Besides,

$$H(x,y) = e^{-\left(x^{-\alpha}+y^{-\beta}\right)} = e^{-x^{-\alpha}}e^{-y^{-\beta}} = H_{1,\alpha}(x)H_{1,\beta}(y),$$

this means that though the components of the vector (X, Y) are dependent, their maxima are asymptotically independent.

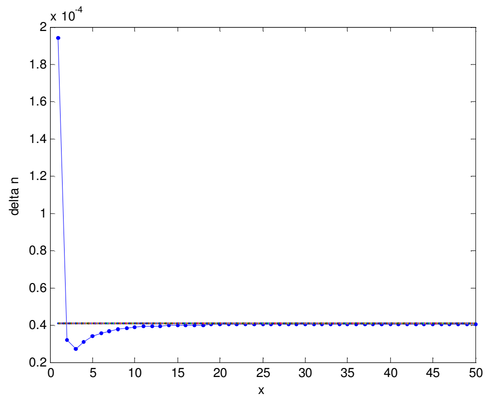
3. The speed of convergence. Let's consider the sequence of two-dimensional random vectors (3), which the limit distribution function of their maxima is (4). We count the absolute error:

$$\Delta_n^{(0)}(x,y) = \left|F^n(n^{1/\alpha}x, n^{1/\beta}y) - H(x,y)\right|.$$

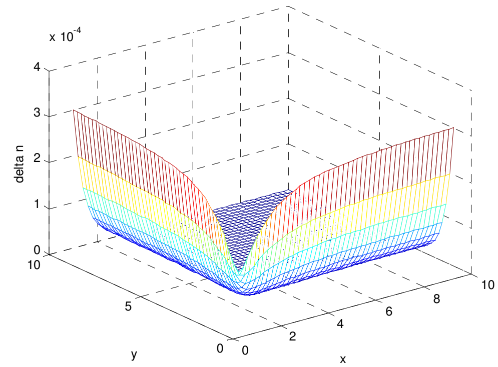
The graphical views of the errors in two-dimensional (a) and three-dimensional (b) spaces, when $y = 2$, $\alpha = \beta = 2, \gamma = 0.5$, are given in figure 1. In the part (a) the dashed line means the one-dimensional error $\Delta_n^{(0)}(y) = \left|F^n(n^{1/\beta}y) - H(y)\right|$, when $y = 2$. This means, that

$$\Delta_n^{(0)}(x,y) = \left| F^n(n^{1/\alpha}x, n^{1/\beta}y) - H(x,y) \right| \to \left| F^n(n^{1/\beta}y) - H(y) \right| = \Delta_n^{(0)}(y).$$

Besides, when we minimize $\Delta_n^{(0)}(x,y)$, when $y = 2,\ \alpha = \beta = 2, \gamma = 0.5$, we get the minimum value at the point (2.59; 2), i.e. when the values of components are very close.



a) space R^2



b) space R^3

Fig 1: Errors, when $y = 2,\ \alpha = \beta = 2, \gamma = 0.5$

Let's denote ([4]):

$$u_n(x,y) = n\left(1 - \left(1 - \frac{x^{-\alpha}}{n} - \frac{y^{-\beta}}{n} + \frac{x^{-\alpha}y^{-\beta}}{n^2}\left(1 + \gamma\left(1 - \frac{x^{-\alpha}}{n}\right)\left(1 - \frac{y^{-\beta}}{n}\right)\right)\right)^n\right);$$

$$v_n(x,y) = u_n(x,y) - x^{-\alpha} - y^{-\beta}.$$

Then for all (x, y) for which $\frac{u_n(x,y)}{n} < \frac{1}{2}$ and $H(x,y) > 0$, the speed of convergence is ([4]):

$$\left| P\left(\frac{Z_{1,n}}{n^{1/\alpha}} < x, \frac{Z_{2,n}}{n^{1/\beta}} < y\right) - H(x,y) \right| \le \Delta_n(x,y) = H(x,y)\left(R_{1,n}(x,y) + R_{2,n}(x,y) + R_{1,n}(x,y)R_{2,n}(x,y)\right);$$

where $R_{1,n}(x,y) = \frac{2u_n^2(x,y)}{n} + \frac{2u_n^4(x,y)}{n^2} \cdot \frac{1}{1-q}$,

$$R_{2,n}(x,y) = \left|v_n(x,y)\right| + \frac{v_n^2(x,y)}{2} \cdot \frac{1}{1-s},$$

we take $0 < q, s < 1$ such, that

$$\frac{2u_n^2(x,y)}{3n} \le q,\ \frac{\left|v_n(x,y)\right|}{3} \le s.$$

The graphical comparison of the speed of convergence is given in figure 2. From this view we see that the speed of convergence $\Delta_n(x, y)$ is not very accurate, because it differs from the speed $\Delta_n^{(0)}(x, y)$ a lot. Besides, $\Delta_n^{(0)}(x, y)$ approaches to $\Delta_n^{(0)}(y)$, when $x \to \infty$, faster than $\Delta_n(x, y)$.

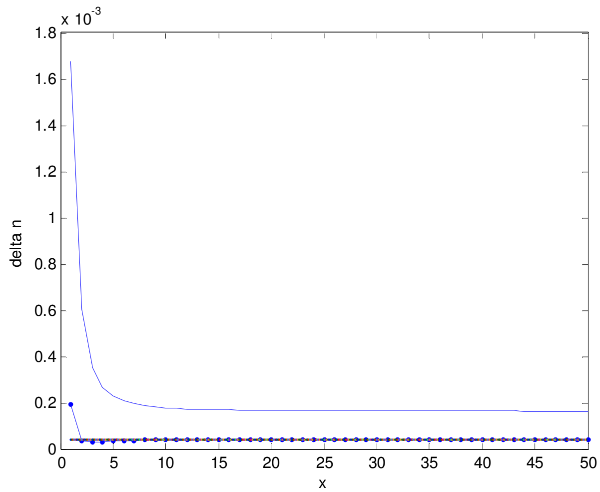


Fig 2. The speed of convergence, when $y = 2$, $\alpha = \beta = 2, \gamma = 0.5$

4. Comments.

1. When the components of random vectors are dependent and two-dimensional distribution function is (2), the correlation between the components depends on the value of γ, but it does not make any influence on the asymptotical dependence of the maxima. Even if the components are dependent, their maxima are asymptotically independent.

2. When we fix the value of y, the two-dimensional error approaches to one-dimensional error $\Delta_n(y)$, when $x \to \infty$.

3. We get the smallest value of $\Delta_n^{(0)}(x, y)$, when the values of components are equal.

Literature

1. Aksomaitis A. Tikimybių teorija ir statistika. – Kaunas: Technologija, 2001. - 347 p.
2. Галамбош Я. Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. – Москва: Наука, 1984. - с. 218-220.
3. Stuart Coles. An Introduction to Statistical Modelling of Extreme Values. – Springer, 2004.
4. Jokimaitis A. Daugiamačių atsitiktinių dydžių ekstremaliųjų reikšmių asimptotika. Disertacija. – Vilnius, 1998.

PARETO ATSITIKTINIŲ VEKTORIŲ MAKSIMUMŲ TYRIMAI

Vaida Savulytė, Algimantas Aksomaitis

Darbe tiriami maksimumai atsitiktinių dvimačių vektorių, kurių komponentės yra pasiskirstę pagal Pareto dėsnį.

7 PRIEDAS. STRAIPSNIS „DVIMAČIŲ PARETO SKIRSTINIŲ KONSTRAVIMAS IR ANALIZĖ“

DVIMAČIŲ PARETO SKIRSTINIŲ KONSTRAVIMAS IR ANALIZĖ

Vaida Savulytė, Algimantas Aksomaitis
Kauno technologijos universitetas

Tarkime, kad (X, Y) – dvimatis atsitiktinis vektorius, kurio komponentės yra pasiskirsčiusios pagal Pareto dėsnį. Vektoriaus koordinačių marginaliosios skirstinio funkcijos ([1]):

$$F_1(x) = 1 - \frac{1}{x^\alpha};\text{čia } x \ge 1, \alpha > 0\ ;\ F_2(y) = 1 - \frac{1}{y^\beta};\text{čia } y \ge 1, \beta > 0\,.$$

Tankių funkcijos:

$$p_1(x) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}};\text{čia } x \ge 1, \alpha > 0\ ;\ p_2(y) = \frac{\beta}{y^{\beta+1}};\text{čia } y \ge 1, \beta > 0\,.$$

X ir Y – nepriklausomieji dydžiai. Tarkime, kad vektoriaus (X, Y) komponentės yra nepriklausomos. Tada pagal apibrėžimą:

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y) = 1 - \frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{y^\beta} + \frac{1}{x^\alpha y^\beta}\ ,\ \text{čia } x, y \ge 1\ ,\ \alpha, \beta > 0.$$

Vektoriaus (X, Y) tankis: $p(x, y) = \dfrac{\alpha}{x^{\alpha+1}}\dfrac{\beta}{y^{\beta+1}}\ ,\ x, y \ge 1\ ,\ \alpha, \beta > 0.$

Pagrindinės tokio vektoriaus skaitinės charakteristikos:

vidurkis $(\mathrm{M}X;\mathrm{M}Y) = \left(\dfrac{\alpha}{\alpha-1};\dfrac{\beta}{\beta-1}\right)$, kai $\alpha > 1$ ir $\beta > 1$;

dispersija $(\mathrm{D}X;\mathrm{D}Y) = \left(\dfrac{\alpha}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2};\dfrac{\beta}{(\beta-2)(\beta-1)^2}\right)$, kai $\alpha > 2$ ir $\beta > 2$;

kovariacija $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$, kai $\alpha > 2$ ir $\beta > 2$.

X ir Y – priklausomieji **dydžiai.** Tarkime, kad vektoriaus (X, Y) komponentės yra priklausomos. Tada dvimatę skirstinio funkciją konstruojame tokiu būdu ([2]):

$$F(x, y) = 1 - \frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{y^\beta} + G(x, y)\ ,\ x, y \ge 1\ ,\ \alpha, \beta > 0.$$

Čia funkciją $G(x, y)$ apibrėžiame taip:

$$G(x, y) = \frac{1}{x^\alpha y^\beta}\left(1 + \gamma\left(1 - \frac{1}{x^\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{y^\alpha}\right)\right),\ x, y \ge 1\ ,\ \alpha, \beta > 0.$$

Akivaizdu, kad

$$F(x,+\infty) = 1 - \frac{1}{x^\alpha} = F_1(x),\quad x \ge 1\ ,\ \alpha > 0;$$

$$F(+\infty, y) = 1 - \frac{1}{y^\beta} = F_2(y),\quad y \ge 1\ ,\ \beta > 0.$$

Pagrindinės skaitinės charakteristikos:

vidurkis $(\mathrm{M}X;\mathrm{M}Y) = \left(\dfrac{\alpha}{\alpha-1};\dfrac{\beta}{\beta-1}\right)$, kai $\alpha > 1$ ir $\beta > 1$;

dispersija $(\mathrm{D}X;\mathrm{D}Y) = \left(\dfrac{\alpha}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2};\dfrac{\beta}{(\beta-2)(\beta-1)^2}\right)$, kai $\alpha > 2$ ir $\beta > 2$;

koreliacijos koeficientas

$$\rho(X,Y) = \alpha\beta\frac{\gamma}{(2\alpha-1)(2\beta-1)\left(\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha-2)(\beta-2)}\right)^{\frac{1}{2}}}\ ,\ \alpha > 2\ ,\ \beta > 2\,.$$

Koeficiento γ reikšmė turi būti iš intervalo

$$-\left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha-2)(\beta-2)}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{(2\alpha-1)(2\beta-1)}{\alpha\beta}\le\gamma\le\left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha-2)(\beta-2)}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{(2\alpha-1)(2\beta-1)}{\alpha\beta}.$$

Akivaizdu, kad

$$\left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha-2)(\beta-2)}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{(2\alpha-1)(2\beta-1)}{\alpha\beta}>0\ \ (\alpha,\beta>2).$$

Vadinasi, nuo koeficiento γ parinkimo priklauso, kokia koreliacija (teigiama ar neigiama) bus tarp dydžių X ir Y. Taigi,

$\rho(X,Y)<0$, kai $-\left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha-2)(\beta-2)}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{(2\alpha-1)(2\beta-1)}{\alpha\beta}\le\gamma<0$ ir

$\rho(X,Y)>0$, kai $0<\gamma\le\left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha-2)(\beta-2)}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{(2\alpha-1)(2\beta-1)}{\alpha\beta}$.

Tokiu būdu iš duotų vienmačių Pareto skirstinių sukonstravome dvimatį skirstinį, kurio komponenčių (marginalieji) skirstiniai ir yra Pareto skirstiniai. Be to, komponentės yra koreliuotos (ir priklausomos), jeigu $\gamma\neq0$.

Literatūra

1. Aksomaitis A. Tikimybių teorija ir statistika. – Kaunas: Technologija, 2001. 347 p.
2. Галамбош Я. Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. – Москва: Наука, 1984, с. 218-220.