KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

Laura Pinkevičiūtė

KONVERGAVIMO GREIČIŲ ĮVERČIAI MAKSIMUMŲ PERKĖLIMO TEOREMOJE

Magistro darbas

Vadovas
prof. dr. J. A. Aksomaitis

KAUNAS, 2007

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

TVIRTINU
Katedros vedėjas
prof. dr. J.Rimas
2007 06 06

KONVERGAVIMO GREIČIŲ ĮVERČIAI MAKSIMUMŲ PERKĖLIMO TEOREMOJE

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

Vadovas
prof. dr. J. A. Aksomaitis
2007 06 03

Recenzentas
doc. dr. J. Venclovienė
2007 06 01

Atliko
FMMM 5 gr. stud.
L. Pinkevičiūtė
2007 05 25

KAUNAS, 2007

KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

Pirmininkas: Leonas Saulis, habil. dr.,Vilniaus Gedimino technikos universiteto profesorius

Sekretorius: Eimutis Valakevičius, docentas.

Nariai: Algimantas Jonas Aksomaitis, profesorius

Arūnas Barauskas, dr.,UAB „Elsis“ generalinio direktoriaus pavaduotojas

Vytautas Janilionis, docentas

Zenonas Navickas, profesorius

Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius

Rimantas Rudzkis, habil.dr., banko „NORD/LB“ vyriausiasis analitikas

Pinkevičiūtė L. The estimations of the rate of convergence in the transfer theorem for max – scheme : Master's work in applied mathematics / supervisor dr. assoc. prof. A. Aksomaitis; Department of Applied mathematics, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2007. – 47 p.

SUMMARY

Let $\{X_n, n \geq 1\}$ be a sequence of independent and identically real – valued random variables with common distribution function. We assume that F is not degenerated. We form random variables

$$Z_n = \max(X_1, ..., X_n),\ Z_{N_n} = \max(X_1, ..., X_{N_n}),$$

where $\{N_n, n \geq 1\}$ be a sequence of positive integer – valued random variables and independent of $X_j, j \geq 1$. Denote $z_n(x) = n(1 - F(xb_n + a_n))$.

The non – uniform estimate of rate of convergence in the transfer theorem is presented in this work

$$\left|P\left(Z_{N_n} < xb_n + a_n\right) - \Psi(x)\right| \leq \Delta_N^{(i)}(x),\ i = 1,2\ .$$

Here

$$\Delta_N^{(1)}(x) \leq u(x)\int_0^\infty \left|A_n(nz) - A(z)\right| e^{-zu(x)} dz\ ,$$

if the $P(Z_n \leq xb_n + a_n) = F(x)$ and $\lim\limits_{n\to\infty} z_n(x) = u(x)$ are satisfying, then

$$\Delta_N^{(2)}(x) \leq \frac{u^2(x)}{n}\int_0^\infty ze^{-zu(x)} dA_n(nz) + \Delta_N^{(1)}(x)$$

if $z_n(x) = n(1 - F(xb_n + a_n)) = u(x)$ and $\frac{u(x)}{n} \leq \frac{1}{2}$.

Also we found non – uniform estimates of rate of convergence in the transfer theorem for max – stable and generalized Pareto distributions. These results specify and simplify the estimates of rate of convergence in the transfer theorem, given in [2] work.

In accordance with the main results, we obtained that the order (in point of n) of estimate of the rate of convergence is $\frac{1}{n}$. We can also obtain uniform estimates $\sup\limits_x \Delta_N^{(1)}(x)$. Assuming $\Delta_N^{(2)}(x)$ we can use rough estimate $\Delta_N^{(1)}(x) \leq \frac{u^2(x)}{n} E\frac{N_n}{n}$.

TURINYS

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

ĮVADAS

Ekstremaliųjų reikšmių teorija plačiai taikoma įvairiose srityse. Pavyzdžiui, sprendžiant rizikos valdymo problemas susijusias su draudimu ir finansais, telekomunikacijų, ekonomikos, ekologijos, metereologijos srityse [8]. Klasikinėje ekstremalių reikšmių teorijoje svarbią vietą užima maksimumo ribinis elgesys (Fišerio – Tipeto teorema), kuris nusako centruotų ir normuotų maksimumų ribinius skirstinius [5]. Aktualūs apibendrinimai, kai maksimumų struktūroje atsitiktinių dydžių skaičius yra atsitiktinis ([1], [7]). Šiame darbe nagrinėjami du atvejai:

- maks – stabiliųjų skirstinių ribinis elgesys maksimumų perkėlimo teoremoje;
- apibendrinti Pareto skirstiniai [8] maksimumų perkėlimo teoremoje.

Šie skirstiniai taikomi draudime ir finansuose rizikos vertinimui, bei aprašo kai kuriuos gamtos procesus. Praktikoje, dažnai nepriklausomų atsitiktinių dydžių skaičius yra didelis ir baigtinis, todėl aktualu nagrinėti konvergavimo greitį.

Darbe yra tiriami netolygieji konvergavimo greičio įverčiai maks – stabiliųjų dydžių perkėlimo teoremoje. Nagrinėjami netolygieji konvergavimo greičio įverčiai, kai nepriklausomų atsitiktinių dydžių skaičius pasiskirstęs pagal geometrinį arba diskretųjį tolygųjį skirstinį. Taip pat randamos tiksliosios absoliučiosios paklaidos pastarųjų skirstinių atveju. Atliekama kompiuterinė konvergavimo greičių įverčių ir absoliučiųjų paklaidų palyginamoji analizė. Tyrimo rezultatai patikslina [2] ir [7] darbų teiginius.

Gauti rezultatai publikuoti [9] ir [10] darbuose.

1. BENDROJI DALIS

1.1. MAKSIMUMŲ STRUKTŪROS

Tarkime, kad X_1, X_2, X_3, ... , X_k, ... nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka, su skirstinio funkcija

$$F(x) = P(X_j < x),\ \ j \geq 1.$$

Pažymėkime

$$Z_n = \max(X_1, X_2, ..., X_n),$$

$$Z_N = \max(X_1, X_2, ... , X_N);$$

čia N yra atsitiktinis dydis, įgyjantis sveikas teigiamas reikšmes ($N = N_n \in \mathbf{N}$) ir nepriklausantis nuo visų X_j, $j \geq 1$.

Asimptotinėje maksimumų teorijoje nagrinėjami tiesiškai normalizuoti maksimumų skirstiniai t.y. $P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right)$. Žinoma ([6]), jog egzistuoja tokia centravimo seka $\{a_n, n \geq 1\}$ ir normavimo seka $\{b_n > 0, n \geq 1\}$ su kuria

$$P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} H(x) \qquad \textbf{(1.1.1)}$$

čia H(x) – neišsigimusi skirstinio funkcija.

Toliau a_n ir b_n kartu vadinamos normalizavimo konstantomis.

Iš mūsų prielaidų išplaukia, kad:

$$H_n(x) = P(Z_n < x) = F^n(x). \qquad \textbf{(1.1.2)}$$

Ieškome tokių funkcijos *F(x)* apribojimų, su kuriais būtų užtikrinamas egzistavimas tokių konstantų a_n ir $b_n > 0$, kad lygybės:

$$\lim_{n \to \infty} H_n(a_n + b_n x) = H(x) \qquad \textbf{(1.1.3)}$$

egzistuotų visoms tolydžiosioms funkcijoms *H(x)*.

Tokiu būdu sudaroma skirstinio funkcijos *F(x)* apribojimo sąlyga, kuriai esant dydis Z_n gali būti normalizuojamas konstantomis a_n ir $b_n > 0$ taip, kad $(Z_n - a_n)/b_n$ silpnai konverguoja į neišsigimusį skirstinį *H*.

Remiantis (1.1.2) išraiška, (1.1.3) sąryšį galima perrašyti taip:

$$\lim_{n \to \infty} F^n(a_n + b_n x) = H(x). \qquad \textbf{(1.1.4)}$$

Yra taisyklė, kaip sukonstruoti konstantų sekas a_n, b_n, ir randamas kriterijus funkcijai *F(x)*, kuriam esant tenkinamas (1.1.4) sąryšis ([6]).

1.2. MAKSIMUMŲ RIBINĖS TEOREMOS

Tarkime, kad dydis $\alpha(F)$ apibrėžtas taip:

$$\alpha(F)=\inf\{x:F(x)>0\}.$$

Jis yra mažiausias skirstinio funkcijos $F(x)$ kraštinis taškas. Analogiškai apibrėžiamas didžiausias kraštinis taškas $\omega(F)$:

$$\omega(F)=\sup\{x:F(x)<1\}.$$

Suformuluojame sąlygas, kaip parinkti konstantas ir kokius kriterijus turi tenkinti $F(x)$, kad skirstinio funkcija tenkintu ir (1.1.3) sąryšį ([6]).

1.2.1 teorema

Tarkime, kad $\omega(F)=\infty$, ir egzistuoja tokia konstanta $\gamma>0$, kad su visais $x>0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-F(tx)}{1-F(t)}=x^{-\gamma}. \tag{1.2.1}$$

Tuomet egzistuoja tokia seka $b_n>0$, su kuria

$$\lim_{n\to\infty}P\{Z_n<b_nx\}=H_{1,\gamma}(x),$$

čia

$$H_{1,\gamma}(x)=\begin{cases}\exp\left(-x^{-\gamma}\right), & kai \quad x>0,\\ 0, & kai \quad x\le 0.\end{cases} \tag{1.2.2}$$

Normavimo konstantos b_n gali būti parenkamos taip:

$$b_n=\inf\{x:\ 1-F(x)\le 1/n\}. \tag{1.2.3}$$

1.2.2 teorema

Tarkime, kad $\omega(F)<\infty$ baigtinė ir skirstinio funkcija

$$F^*(x)=F\left(\varpi(F)-\frac{1}{x}\right),\ \text{kai } x>0$$

tenkina aukščiau pateiktos teoremos (1.2.1) sąlygą.

Tuomet galima parinkti tokias konstantų a_n ir $b_n>0$ sekas, su kuriomis

$$\lim_{n\to\infty}P\{Z_n<a_n+b_nx\}=H_{2,\gamma}(x),$$

čia

$$H_{2,\gamma}(x)=\begin{cases}1, & kai \quad x\ge 0,\\ \exp\left(-(x)^{\gamma}\right), & kai \quad x<0.\end{cases} \tag{1.2.4}$$

Centravimo ir normavimo konstantas a_n ir b_n galima parinkti tokiu būdu:

$$a_n=\omega(F),$$
$$b_n=\omega(F)-\inf\{x:\ 1-F(x)\le 1/n\}. \tag{1.2.5}$$

1.2.3 teorema

Tarkime, kad tam tikrai baigtinei konstantai a, su kuria

$$\int_a^{\varpi(F)} (1 - F(y))dy < \infty \tag{1.2.6}$$

ir visiem t, tokiems, kad $\alpha(F) < t < \omega(F)$, funkcija $R(t)$ apibrėžta tokiu būdu:

$$R(t) = (1 - F(t))^{-1} \int_t^{\varpi(F)} (1 - F(y))dy. \tag{1.2.7}$$

Tarkime, kad

$$\lim_{t \to \varpi(F)} \frac{1 - F(t + xR(t))}{1 - F(t)} = e^{-x}, \ x \in R. \tag{1.2.8}$$

Tuomet egzistuoja tokios a_n ir $b_n > 0$ konstantų sekos, su kuriomis teisinga lygybė:

$$\lim_{n \to \infty} P\{Z_n < a_n + b_n x\} = H_{3,0}(x);$$

čia

$$H_{3,0}(x) = \exp(-e^{-x}) \quad kai \quad -\infty < x < \infty. \tag{1.2.9}$$

1.2.1, 1.2.2 ir 1.2.3 teoremų įrodymai pateikti [6].

Toliau apibrėšime maks – stabiliuosius skirstinius (dydžius).

1.2.1 apibrėžimas (Maks – stabilusis skirstinys)

Neišsigimęs skirstinys vadinamas maks – stabiliuoju skirstiniu, jei nepriklausomų atsitiktinių dydžių X, X_1, X_2, ... , X_n skirstinio funkcija $F(x) = P(X < x)$ tenkina lygybę

$$F^n(xb_n + a_n) = F(x) \tag{1.2.10}$$

čia - $a_n, b_n > 0$, kai $n \geq 2$, yra atitinkamos normalizavimo konstantos.

Kurie skirstiniai tenkina (1.2.10) sąlygą, t.y. kokia yra maks – stabiliųjų skirstinių klasė, nusako žemiau pateikta teorema. Tai yra pagrindinis maksimumo ribinis dėsnis, kuris yra labai svarbus klasikinėje ekstremaliųjų reikšmių teorijoje.

1.2.4 teorema (Fišerio – Tipeto teorema [5])

Tegu $\{X_n\}$ maks – stabiliųjų atsitiktinių dydžių seka. Jeigu egzistuoja normalizavimo konstantos $b_n > 0$ ir $a_n \in \mathbf{R}$ ir neišsigimęs skirstinys H toks, kad

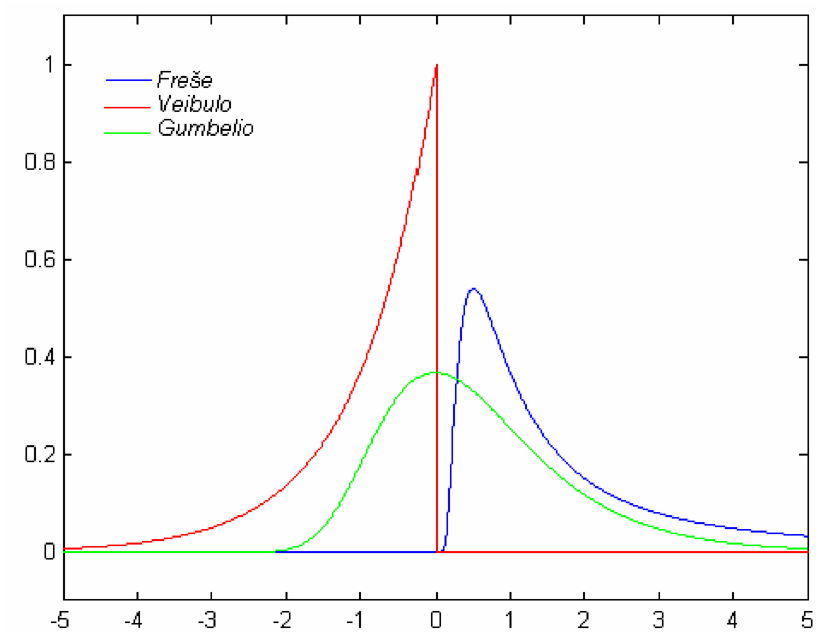
$$P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} H(x) \tag{1.2.11}$$

tuomet H priklauso vienam iš žemiau pateiktų skirstinių tipų:

1) *Freše* skirstinys: $H_{1,\gamma}(x) = \Phi_\gamma(x) = \begin{cases} 0 & kai \quad x \leq 0 \\ \exp\{-x^{-\gamma}\} & kai \quad x > 0 \end{cases} \quad \gamma > 0$ **(1.2.12)**

2) *Veibulo* skirstinys: $H_{2,\gamma}(x) = \Psi_\gamma(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^\gamma\} & kai \quad x \le 0 \\ 1 & kai \quad x > 0 \end{cases} \quad \gamma > 0$ **(1.2.13)**

3) *Gumbelio* skirstinys: $H_3(x) = \Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\} \quad kai \quad x \in \mathbf{R}$ **(1.2.14)**



1.1.1 pav. Maks – stabiliųjų skirstinių tankiai, kai γ =1

►Pilnas įrodymo būdas pakankamai sudėtingas. Toliau parodysime, kaip trys ribiniai tipai atsiranda. Ištiktųjų (1.2.11) sąryšis reškia, kad visiem t>0

$$F^{[nt]}\left(b_{[nt]}x + a_{[nt]}\right) \to H(x); \qquad x \in \mathbf{R}$$

čia – [.] žymima sveikoji x dalis.

Be to

$$F^{[nt]}(b_n x + a_n) = \left(F^n(b_n x + a_n)\right)^{[nt]/n} \to H^t(x),$$

taigi egzistuoja funkcijos $\eta(t) > 0, \delta(t) \in \mathbf{R}$ tenkinančios:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{[nt]}} = \eta(t), \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{[nt]}}{b_{[nt]}} = \delta(t), \qquad t > 0$$

ir $$H^t(x) = H(\eta(t)x + \delta(t))$$ **(1.2.15)**

iš (1.2.15) nesunku padaryti išvadą, kad su s, t>0

$$\eta(st) = \eta(s)\eta(t), \qquad \delta(st) = \eta(t)\delta(s) + \delta(t).$$ **(1.2.16)**

Praktinis (1.2.15) ir (1.2.16) lygčių sprendimas veda prie trijų tipų skirstinių $\Phi_\gamma(x)$, $\Psi_\gamma(x)$, $\Lambda(x)$ [5].

◄

1.3. PERKĖLIMO TEOREMOS

Egzistuoja perkėlimo teoremos vienodai pasiskirsčiusių, nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumoms ir maksimumams. Šiame darbe nagrinėsi maksimumų struktūras. Didelis dėmesys skiriamas ribiniams skirstiniams, kai atsitiktinių dydžių skaičius yra atsitiktiniai dydžiai. Žemiau parteikta perkėlimo teorema nepriklausomų atsitiktinių dydžių, atsitiktinio skaičiaus maksimumams.

1.3.1 teorema (Perkėlimo teorema maksimumams) ([7])

Tarkime, kad N_n ir X_j, $j \geq 1$ yra tarpusavyje nepriklausomi.

Jeigu:

$$P\left\{\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x), \qquad \textbf{(1.3.1)}$$

ir

$$P\{N_n / n < x\} \xrightarrow[n\to\infty]{} A(x), \qquad \textbf{(1.3.2)}$$

tai

$$P\left\{\frac{Z_N - a_n}{b_n} < x\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Psi(x); \qquad \textbf{(1.3.3)}$$

čia $\Psi(x) = \int\limits_0^\infty [\Phi(x)]^z \, dA(z)$. **(1.3.4)**

►Pažymėkime $p_{nk} = P\{N_n = k\}$.

Psinaudoję pilnosios tikimybės formule, gauname:

$$\Psi_n(x) = P\left\{\frac{Z_N - a_n}{b_n} < x\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{nk} P\left\{\frac{Z_k - a_n}{b_n} < x\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{nk} F^k(xb_n + a_n).$$

Tegu $A_n(x) = P\{N_n < x\}$. Tada $A_n(x) = \sum_{k<x} p_{nk}$.

Dabar

$$\Psi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{nk} \left(F^n(xb_n + a_n)\right)^{\frac{k}{n}} = \int\limits_0^\infty \left[F^n(xb_n + a_n)\right]^z dA_n(nz).$$

Pagal (1.3.5) ir (1.3.6) sąlygas, kai $n \to \infty$, gauname:

$$\Psi_n(x) \to \Psi(x) = \int\limits_0^\infty [\Phi(x)]^z \, dA(z). \qquad ◄$$

Toliau tirsime atvejį, kai atsitiktiniai dydžiai yra maks – stabilieji. Maks – stabilų skirstinį žymėsime H(x) (1.2 skyrelis). Šiuo atveju (maks – stabiliesiems skirstiniams) perkėlimo teorema ir jos įrodymas supaprastėja.

1.3.2 teorema *(Perkėlimo teorema maks – stabiliesiems skirstiniams)* ([7])

Jeigu

$$P\left\{\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right\} = H^n(xb_n + a_n) = H(x) \qquad \textbf{(1.3.5)}$$

ir
$$P\{N_n / n < x\} \xrightarrow[n\to\infty]{} A(x), \qquad \textbf{(1.3.6)}$$

tai
$$P\left\{\frac{Z_N - a_n}{b_n} < x\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Psi(x); \qquad \textbf{(1.3.7)}$$

čia $\Psi(x) = \int\limits_0^\infty [H(x)]^z \, dA(z)$. **(1.3.8)**

► $$P\left\{\frac{Z_{N_n} - a_n}{b_n} < x\right\} = P(Z_{N_n} < xb_n + a_n) = \sum_{k=1}^{\infty} P(Z_{N_n} < xb_n + a_n, N_n = k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \big(P(Z_{N_n} < xb_n + a_n)P(N_n = k)\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \big(H^k(xb_n + a_n)P(N_n = k)\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \big(H^n(xb_n + a_n)\big)^{k/n} P\left(\frac{N_n}{n} = \frac{k}{n}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} H^{k/n}(x) P\left(\frac{N_n}{n} = \frac{k}{n}\right) = \int\limits_0^\infty H^z(x) dP\left(\frac{N_n}{n} < z\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_0^\infty H^z(x) dA(z) = \Psi(x).$$ ◄

Pastaba:

Perkėlimo teorema apibendrintiems Pareto skirstiniams formuluojama taip pat kaip ir maks – stabiliesiems skirstiniams, pakeičiant (1.3.9) sąlygą į

$$z_n(x) = n(1 - F(xb_n + a_n)) = u(x), \qquad \textbf{(1.3.9)}$$

plačiau ši sąlyga ir apibendrinti Pareto skirstiniai aptariama 2.2 skyrelyje. Dabar

$$P\left\{\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right\} = F^n(xb_n + a_n) = \left(1 - \frac{z_n(x)}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{u(x)}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} H(x) = e^{-u(x)}$$

Didžiausias dėmesys šiame darbe skiriamas konvergavimo greičio tyrimui perkėlimo teoremoje atskirais atvejais (maks – stabiliųjų bei apibendrintų pareto skirstinių). Žemiau pateikiama konvergavimo greičio įverčių teorema bendruoju atveju.

1.3.3 teorema ([2])

Tarkime $F(x) = P(X_j \le x), j \ge 1$ yra vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių X skirstinio funkcija. Jeigu H yra ribinė $F(a_n + xb_n)$ skirstinio funkcija, bei $A(+0) = 0$. Tuomet visiems x, tenkinantiems sąlygas:

$$\left|P(a_n + xb_n < x) - H(x)\right| \le \widetilde{\Delta}_n^{(1)}(x),$$

$$\left|H_n(nx) - A(x)\right| \le \widetilde{\Delta}_n^{(2)}(x),$$

kai skirstinio funkcija $H(x) > 0$, yra teisingas įvertis

$$\widetilde{\Delta}_{N_n} \le \widetilde{\Delta}_n^{(1)}(x)\alpha_n(x) + \int_0^{\infty} \widetilde{\Delta}_n^{(2)}(z)\left|dH^z(x)\right|;$$

čia $\alpha_n(x) = \int_0^{\infty} x \max(F^{n(z-1)}(F(a_n + xb_n)), H^{z-1}(x))dA_n(nz)$.

1.4. SKAIČIAVIMUOSE TAIKOMI METODAI IR SKIRSTINIO FUNKCIJOS

Ieškant *A(x)* išraiškos, taikomas charakteristinių funkcijų metodas. Pradžioje primename charakteristinės funkcijos apibrėžimą.

1.4.1 apibrėžimas

Atsitiktinio dydžio *X* charakteristine funkcija *f* vadiname dydžio e^{itX} vidurkį ([3]):

$$f(t) = f_X(t) = Me^{itX}; \qquad \textbf{(1.4.1)}$$

čia – *t* yra relaus kintamasis.

Iš apibrėžimo išplaukia, kad

$$f(t) = \begin{cases} \sum\limits_k e^{itx_k} p_k, & kai \quad X - diskretusis \quad dydis, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x)dx, & kai \quad X - tolydusis \quad dydis. \end{cases} \qquad \textbf{(1.4.2)}$$

Charakteristinių funkcijų metodas

Ieškome atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo funkcijos *F(x)*, remdamiesi charakteristinės funkcijos savybe:

jei charakteristinių funkcijų seka $f_1(t)$, $f_2(t)$, ... konvertuoja į tolydžią taške $t = 0$ funkciją *f(t)*, tai atitinkamų pasiskirstymo funkcijų seka $F_1(x)$, $F_2(x$, ... silpnai konvertuoja į pasiskirstymo funkciją *F(x)*. Funkcija *f(t)* yra atsitiktinio dydžio *X*, kurio pasiskirstymo funkcija *P(X<x)= F(x)*, charakteristinė funkcija [3].

Darbe, skaičiuojant, remiamasi tokių skirstinių charakteristinėmis funkcijomis:

- *Eksponentinis skirstinys:*

  skirstinio funkcija – $F(x)= 1-e^{-\lambda x}$, kai x ≥ 0;

  tankis – $p(x)= \lambda e^{-\lambda x}$, kai x ≥ 0;

  charakteristinė funkcija – $f_X(x)= \lambda/(\lambda-it)$.

- *Tolygusis skirstinys:*

skirstinio funkcija – $F(x)=\begin{cases} 0, & kai \quad x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & kai \quad a < x < b, \\ 1, & kai \quad x \ge b. \end{cases}$

tankis – $p(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & kai \quad x \in (a,b), \\ 0, & kai \quad x \notin (a,b). \end{cases}$

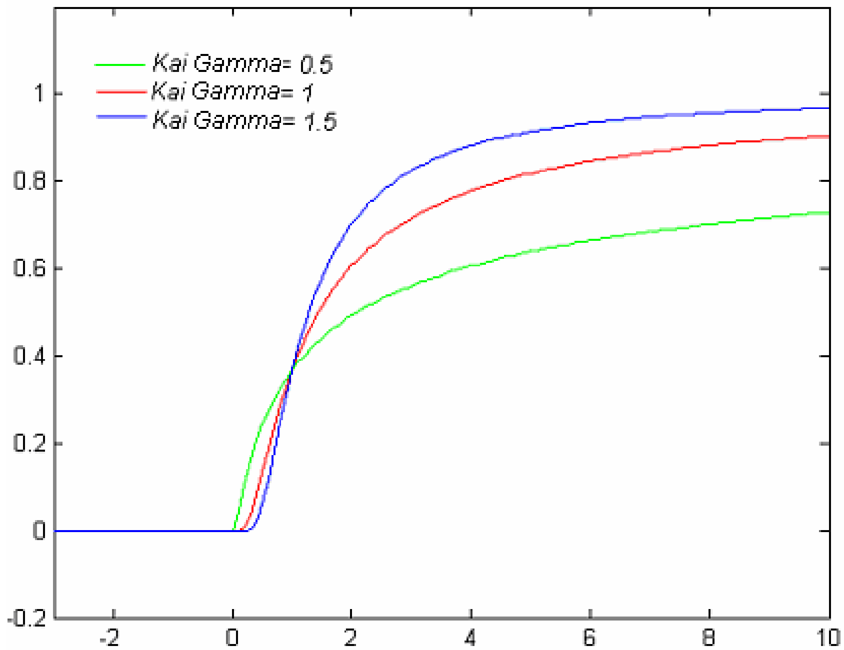
charakteristinė funkcija – $f_X(t)=\dfrac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$.

2. TIRIAMOJI DALIS

2.1. MAKS – STABILIEJI SKIRSTINIAI IR JŲ NORMAVIMO KONSTANTOS

Detaliau aptarkime maks – stabiliuosius skirstinius (1.2 skyrelis). Kokios turi būti normavimo konstantos a_n ir b_n, kad būtų tenkinama (1.2.10) sąlyga? Nagrinėjami trys ribiniai atvejai:

1) $H_{1,\gamma}(x) = \exp\{-x^{-\gamma}\}, \quad x > 0 \quad \gamma > 0$



2.1.1 pav. Freše skirstinio funkcija

Remiantis maks – stabiliųjų skirstinių apibrėžimu:

$$H^n{}_{1,\gamma}(xb_n + a_n) = e^{-x^{-\gamma}}$$

$$e^{-(xb_n + a_n)^{-\gamma} n} = e^{-x^{-\gamma}}$$

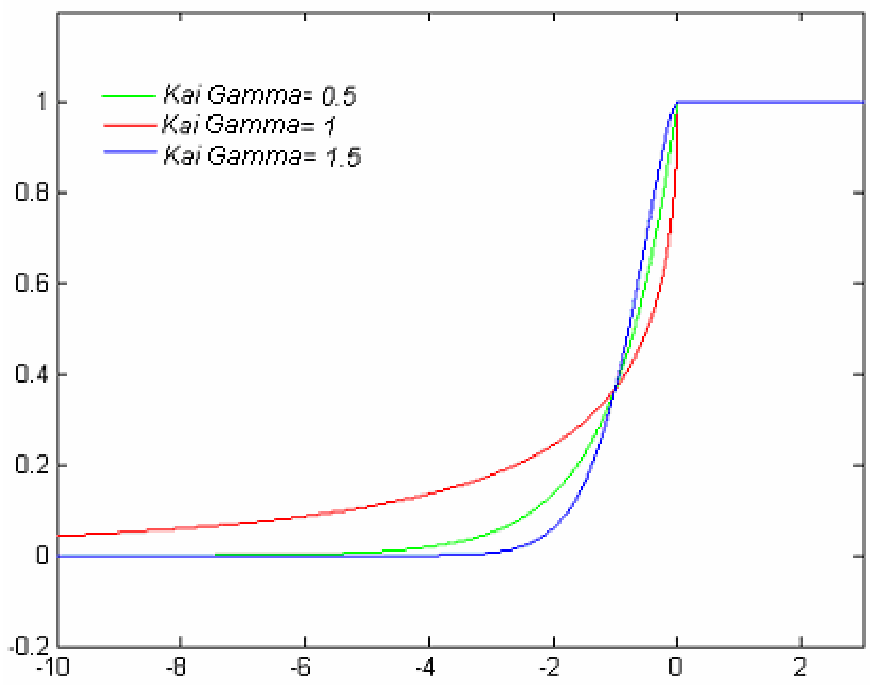
tarkime, kad $a_n = 0$ ir $b_n = n^{1/\gamma}$, tuomet:

$$e^{-\left(xn^{1/\gamma}\right)^{-\gamma} n} = e^{-x^{-\gamma} n \frac{1}{n}} = e^{-x^{-\gamma}} = H_{1,\gamma}(x).$$

Taigi, kai $a_n = 0$ ir $b_n = n^{1/\gamma}$, tai:

$$H^n{}_{1,\gamma}\left(xn^{1/\gamma}\right) = H_{1,\gamma}(x).$$

2) $H_{2,\gamma}(x) = \exp\{-(-x)^{\gamma}\}, \quad x \le 0 \quad \gamma > 0$



2.1.2 pav. Veibulo skirstinio funkcija

Analogiškai kaip ir pirmajame punkte:

$$H^n{}_{2,\gamma}(xb_n + a_n) = e^{-(-x)^\gamma}$$

$$e^{-(-xb_n - a_n)^{-\gamma} n} = e^{-(-x)^\gamma}.$$

Tarkime, kad $a_n = 0$ ir $b_n = n^{-1/\gamma}$, tuomet:

$$e^{-\left(-xn^{-1/\gamma}\right)^\gamma n} = e^{-(-x)^\gamma n \frac{1}{n}} = e^{-(-x)^\gamma} = H_{2,\gamma}(x).$$

Gauname, jog, kai $a_n = 0$ ir $b_n = n^{-1/\gamma}$, tai:

$$H^n{}_{2,\gamma}\left(xn^{-1/\gamma}\right) = H_{2,\gamma}(x).$$

3) $H_3(x) = \exp\{-(\exp(-x))\}, \qquad x \in \mathbf{R}$

Pagal apibrėžimą turime:

$$H^n{}_3(xb_n + a_n) = \exp\left(-e^{-x}\right)$$

$$\exp\left(-ne^{-(xb_n + a_n)}\right) = \exp\left(-e^{-x}\right)$$

$$-ne^{-(xb_n + a_n)} = -e^{-x}$$

$$\ln n + \ln e^{-(xb_n + a_n)} = \ln e^{-x}$$

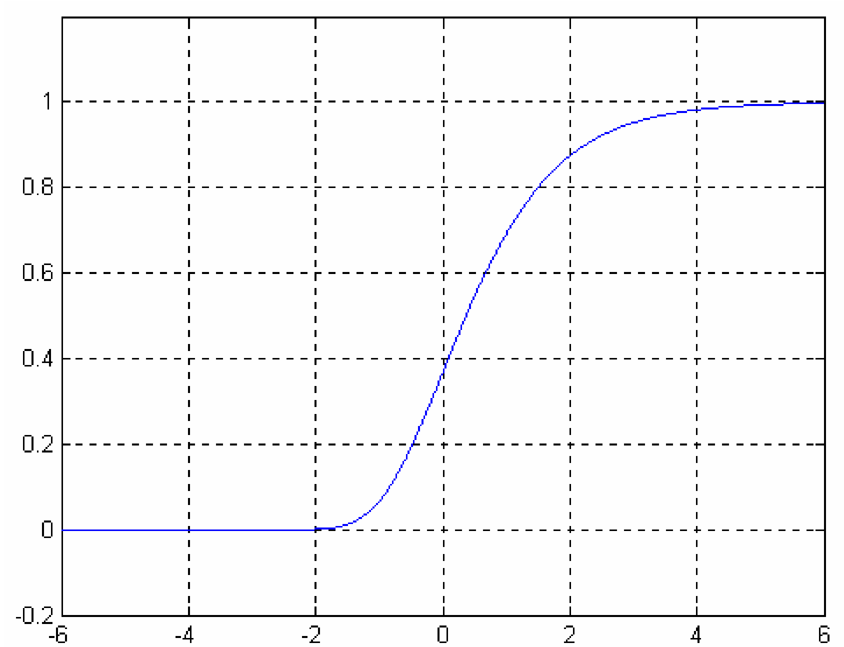
$$\ln n - (xb_n + a_n) = -x$$

$$a_n = \ln n, \quad b_n = 1$$

Patikrinimas: $\exp\left(-ne^{-(x+\ln n)}\right) = \exp\left(-ne^{-x}e^{-\ln n}\right) = \exp\left(-ne^{-x}n^{-1}\right) = \exp\left(-e^{-x}\right).$

Taigi, kai $a_n = \ln n$, ir $b_n = 1$, tai:

$$H^n{}_3(x + \ln n) = H_3(x).$$



2.1.3 pav. Gumbelo skirstinio funkcija

2.2. APIBENDRINTI PARETO SKIRSTINIAI IR JŲ NORMAVIMO KONSTANTOS

Nagrinėkime standartinius apibendrintus Pareto skirstinius, kurie siejami su maks – stabiliaisiais skirstiniais tokia išraiška ([8]):

$$W(x) = 1 + \ln H(x),$$

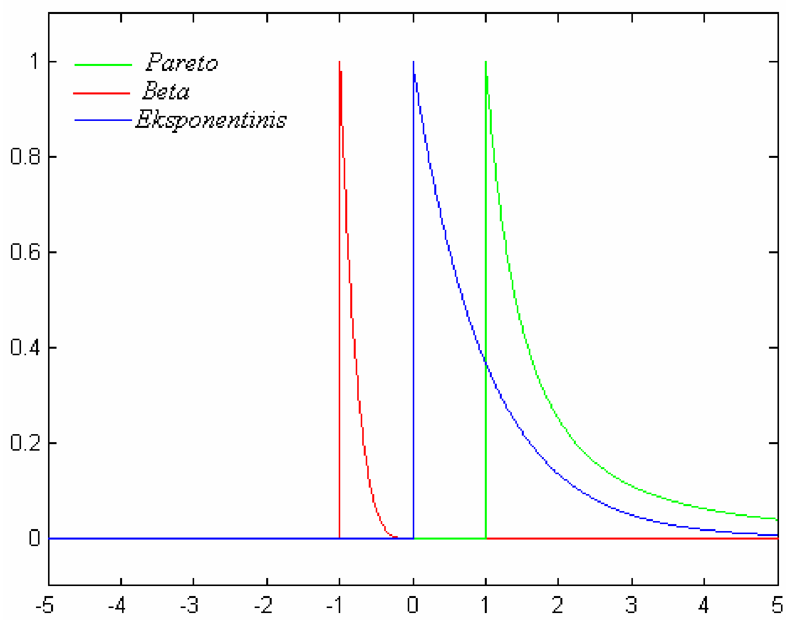
jei $\ln H(x) > -1$.

Taigi nagrinėsime:

1) *Pareto* skirstinys: $W_{1,\alpha}(x) = \begin{cases} 0 & kai \quad x < 1 \\ 1 - x^{-\alpha} & kai \quad x \geq 1 \end{cases} \qquad \alpha > 0$ **(2.2.1)**

2) *Beta* skirstinys: $W_{2,\alpha}(x) = \begin{cases} 0 & kai \quad x < -1 \\ 1 - (-x)^{\alpha} & kai \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & kai \quad x > 0 \end{cases} \qquad \alpha > 0$ **(2.2.2)**

3) *Eksponentinis* skirstinys: $W_3(x) = \begin{cases} 0 & kai \quad x < 0 \\ 1 - e^{-x} & kai \quad x \geq 0 \end{cases}.$ **(2.2.3)**



2.2.1 pav. Apibendrintų Pareto skirstinių tankiai, kai α = 2

Pažymime

$$z_n(x) = n(1 - F(xb_n + a_n)).$$

Kadangi $P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right) = \left(1 - \frac{z_n(x)}{n}\right)^n$, tai sąlyga $z_n(x) \to u(x)$, $n \to \infty$ yra būtina ir pakankama, kad $P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} H(x) = e^{-u(x)}$.

Dabar tarkime, kad atsitiktinių dydžių X_j skirstinio funkcija $P(X_j < x) = W(x)$. Tada gauname, kad

$$z_n(x) = u(x) \tag{2.2.4}$$

su visais $n \geq 1$. Čia $u(x)$ - gali įgyti išraiškas: $x^{-\alpha}$, $(-x)^{\alpha}$, e^{-x}, kai $\alpha > 0$.

Visi šie trys skirstiniai tenkina sąlygą (2.2.4) su tam tikromis normavimo konstantomis a_n ir b_n.

1) $W_{1,\alpha}(x) = 1 - x^{-\alpha}$, $x \geq 1$ $\alpha > 0$

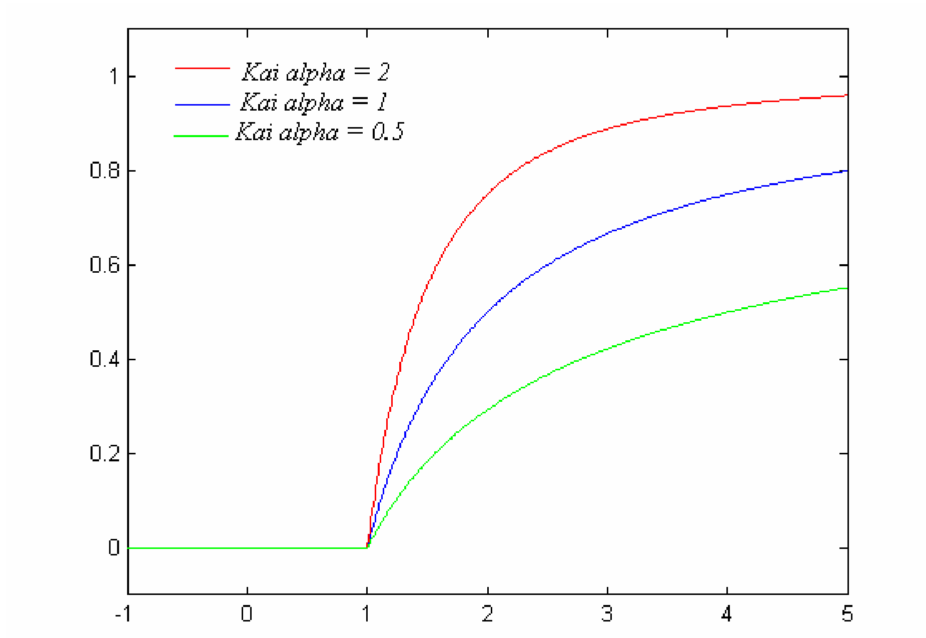
Šiuo atveju

$$z_n(x) = n(1 - F(xb_n + a_n)) = n(1 - 1 + (xb_n + a_n)^{-\alpha}) = n(xb_n + a_n)^{-\alpha} = x^{-\alpha},$$

kai

$$a_n = 0, \text{ bei } b_n = n^{1/\alpha},$$

$$n(xb_n + a_n)^{-\alpha} = x^{-\alpha}.$$



2.2.2 pav. Pareto skirstinio funkcija

2) $W_{2,\alpha}(x) = 1 - (-x)^{\alpha}$, $-1 \le x \le 0 \quad \alpha > 0$

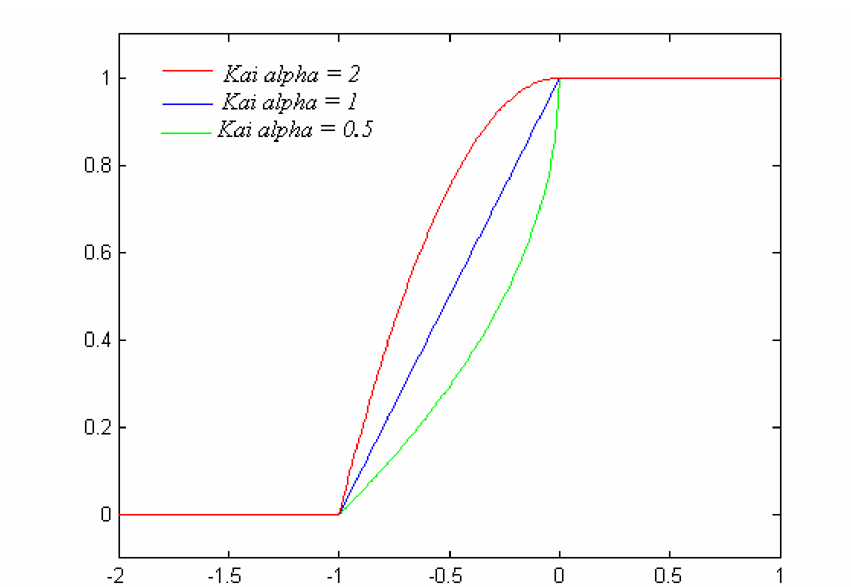
Analogiškai kaip pirmajame punkte

$$n(1 - F(xb_n + a_n) = n(1 - 1 + (-xb_n - a_n)^{\alpha}) = n(-xb_n - a_n)^{\alpha} = (-x)^{\alpha},$$

kai

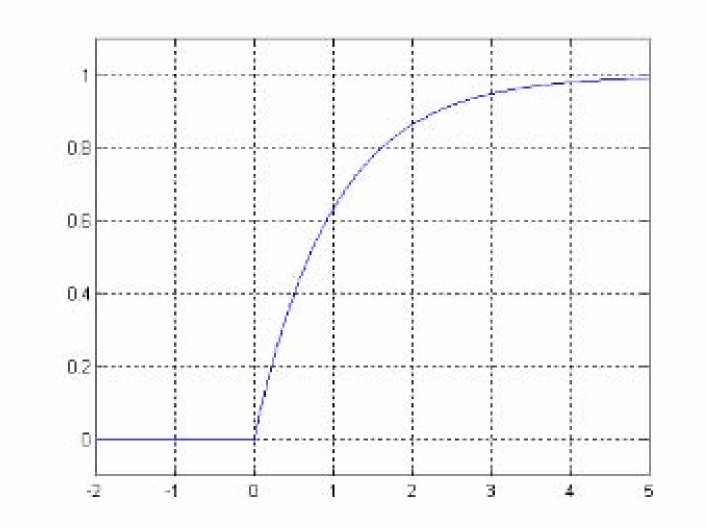
$a_n = 0$, bei $b_n = n^{-1/\alpha}$,

$n(-xb_n - a_n)^{\alpha} = (-x)^{\alpha}$.



2.2.3 pav. Beta skirstinio funkcija

3) $W_3(x) = 1 - e^{-x}, \; x \geq 0$



2.2.4 pav. Eksponentinio skirstinio funkcija

Šiuo atveju

$$n(1 - F(xb_n + a_n) = n(1 - 1 + e^{-xb_n - a_n}) = ne^{-xb_n - a_n} = e^{-x},$$

kai

$$a_n = \ln n \text{, bei } b_n = 1,$$

$$ne^{-x - \ln n} = e^{-x}.$$

Taigi visi šie trys skirstiniai tenkina sąlygą (2.2.4).

2.3. FUNKCIJOS $\Psi(x)$, KAI N_n PASISKIRSTĘS PAGAL GEOMETRINĮ SKIRSTINĮ

Tarkime $P(N_n = k) = pq^{k-1}$, kai $k \geq 1$, $p + q = 1$ ir $p = \frac{1}{n}$. Ieškome *A(x),* kad būtų tenkinama (1.3.6) sąlyga t.y. $P\{N_n / n < x\} \xrightarrow[n \to \infty]{} A(x)$.

Taikome charakteristinių funkcijų metodą. Skaičiuojame geometrinio skirstinio charakteristinę funkciją:

$$f_{N_n}(t) = Me^{itN_n} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} pq^{k-1} = p\left(e^{it} + e^{it2}q + e^{it3}q^2 + \ldots\right) = \frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}.$$

Kadangi $p = \frac{1}{n}$ ir $q = 1 - \frac{1}{n}$, tai

$$f_{N_n}(t)=\frac{\frac{1}{n}e^{it}}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)e^{it}}=\frac{\frac{1}{n}e^{it}}{\frac{1}{n}(n-(n+1))e^{it}}=\frac{e^{it}}{n-ne^{it}+e^{it}}.$$

Tada

$$f_{N_n/n}(t)=f_{N_n}\left(\frac{t}{n}\right)=\frac{e^{it/n}}{n-ne^{it/n}+e^{it/n}}=\frac{e^{it/n}}{\left(n-n-\frac{nit}{n}-\frac{n(it)^2}{n^2\,2!}-...\right)+e^{it/n}}=\frac{e^{it/n}}{\left(-it-\frac{(it)^2}{n2!}-...\right)+e^{it/n}}$$

Pagaliau

$$\lim_{n\to\infty}f_{N_n/n}(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{it/n}}{\left(-it-\frac{(it)^2}{n2!}-...\right)+e^{it/n}}=\frac{1}{1-it}.$$

Taigi, $f_{N_n/n}(t)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{1-it}$.

Kadangi eksponentinio skirstinio charakteristinė funkcija, kai $\lambda=1$ yra

$f(t)=\frac{1}{1-it}$, tai $P\{N_n/n<x\}\xrightarrow[n\to\infty]{}1-e^{-x}$ ir $A(x)=1-e^{-x}$. **(2.3.1)**

Dabar iš (1.3.8) ir (2.3.1) gauname:

$$\Psi(x)=\int_0^\infty[H(x)]^z\,dA(z)=\int_0^\infty[H(x)]^z\,d\left(1-e^{-z}\right)=\int_0^\infty[H(x)]^z\,e^{-z}dz=\int_0^\infty\left[\frac{H(x)}{e}\right]^z dz=$$

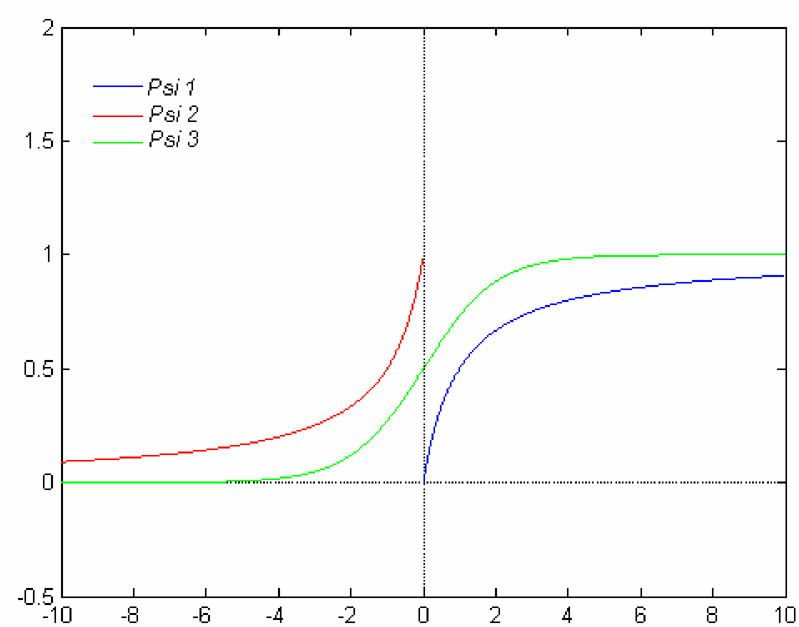
$$=\left.\frac{\left[\frac{H(x)}{e}\right]^z}{\ln\frac{H(x)}{e}}\right|_0^\infty=\frac{-1}{\ln H(x)-1}=\frac{1}{1-\ln H(x)}. \qquad \textbf{(2.3.2)}$$

Nagrinėjamais trimis ribiniais atvejais gauname:

1) $\Psi_1(x)=\frac{1}{1-\ln H_{1,\gamma}(x)}=\frac{1}{1-\ln\left(e^{-x^{-\gamma}}\right)}=\frac{1}{1+x^{-\gamma}}$, kai $0\le x<\infty$, $\gamma>0$;

2) $\Psi_2(x)=\frac{1}{1-\ln H_{2,\gamma}(x)}=\frac{1}{1-\ln\left(e^{-(-x)^{\gamma}}\right)}=\frac{1}{1+(-x)^{\gamma}}$, kai $-\infty<x\le 0$, $\gamma>0$;

3) $\Psi_3(x)=\frac{1}{1-\ln H_3(x)}=\frac{1}{1-\ln\left(e^{-e^{-x}}\right)}=\frac{1}{1+e^{-x}}$, kai $-\infty<x<\infty$.



2.3.1 pav. Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 funkcijų grafikai, kai N_n~geometrinį skirstinį $\gamma = 1$

2.4. FUNKCIJOS $\Psi(x)$, KAI N_n PASISKIRSTĘS PAGAL DISKRETŲJĮ TOLYGŲJĮ SKIRSTINĮ

Tarkime $P(N_n = k) = \frac{1}{n}$, kai $k = \overline{1,n}$. Ieškome A(x), kad būtų tenkinama (1.3.6) sąlyga t.y. $P\{N_n / n < x\} \xrightarrow[n\to\infty]{} A(x)$.

Taikome charakteristinių funkcijų metodą. Skaičiuojame diskretaus tolygiojo skirstinio charakteristinę funkciją:

$$f_{N_n}(t) = Me^{itN_n} = \sum_{k=1}^{n} e^{itk} P(N_k = k) = \sum_{k=1}^{n} e^{itk} \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\left(e^{it} + e^{it2} + e^{it3} + \ldots + e^{itn}\right) = \frac{e^{it}\left(e^{itn} - 1\right)}{\left(e^{it} - 1\right)n}.$$

Tuomet

$$f_{N_n/n}(t) = f_{N_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \frac{e^{\frac{it}{n}}\left(e^{it} - 1\right)}{\left(e^{\frac{it}{n}} - 1\right)n} = \frac{e^{\frac{it}{n}}\left(e^{it} - 1\right)}{\left(n - n + \frac{nit}{n} + \frac{n(it)^2}{n^2 2!} + \ldots\right)} = \frac{e^{\frac{it}{n}}\left(e^{it} - 1\right)}{\left(it + \frac{(it)^2}{n2!} + \ldots\right)}$$

Pagaliau

$$\lim_{n\to\infty} f_{N_n/n}(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{it}{n}}\left(e^{it} - 1\right)}{\left(it + \frac{(it)^2}{n2!} + \ldots\right)} = \frac{e^{it} - 1}{it}.$$

Taigi, $f_{N_n/n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{e^{it}-1}{it}$.

Kadangi atskiru tolygiojo skirstinio atveju, kai a=0, o b=1, charakteristinė funkcija yra $f(t) = \frac{e^{it}-1}{it}$,

tai $P\{N_n / n < x\} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, tai yra $A(x) = x$, kai $0 \le x < 1$ **(2.4.1)**

Dabar iš (2.5.1) ir (2.3.8) gauname:

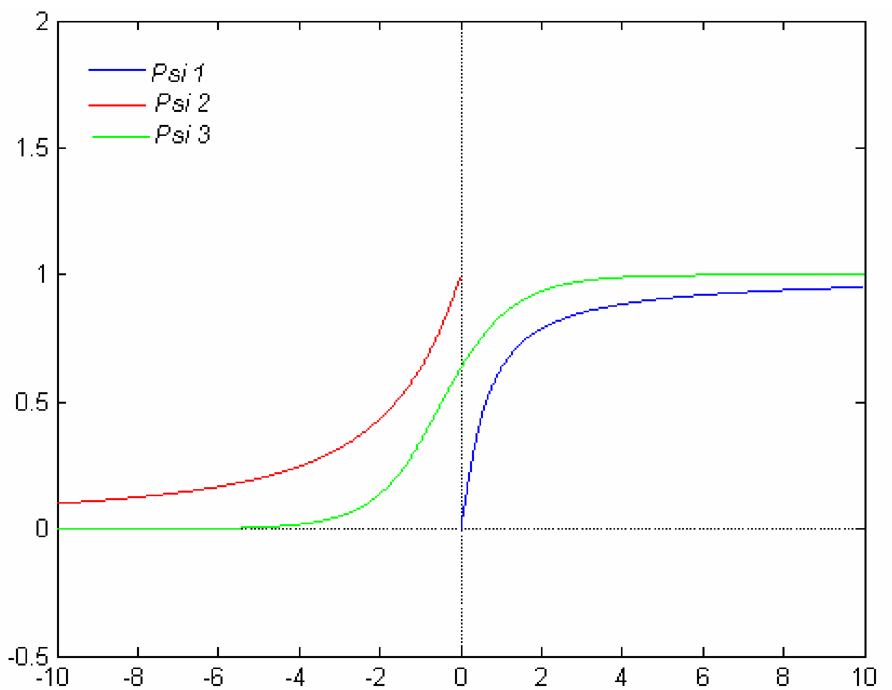
$$\Psi(x) = \int_0^1 [H(x)]^z \, dA(z) = \int_0^1 [H(x)]^z \, dz = \left.\frac{[H(x)]^z}{\ln H(x)}\right|_0^1 = \frac{H(x)-1}{\ln H(x)}. \quad \textbf{(2.4.2)}$$

Nagrinėjamais trimis ribiniais atvejais gauname:

1) $\Psi_1(x) = \frac{H_{1,\gamma}(x)-1}{\ln H_{1,\gamma}(x)} = \frac{e^{-x^{-\gamma}}-1}{\ln\left(e^{-x^{-\gamma}}\right)} = \frac{1-e^{-x^{-\gamma}}}{x^{-\gamma}}$, kai $0 \le x < \infty$, $\gamma > 0$;

2) $\Psi_2(x) = \frac{H_{2,\gamma}(x)-1}{\ln H_{2,\gamma}(x)} = \frac{e^{-(-x)^{\gamma}}-1}{\ln\left(e^{-(-x)^{\gamma}}\right)} = \frac{1-e^{-(-x)^{\gamma}}}{(-x)^{\gamma}}$, kai $-\infty < x \le 0$, $\gamma > 0$;

3) $\Psi_3(x) = \frac{H_3(x)-1}{\ln H_3(x)} = \frac{e^{-e^{-x}}-1}{\ln\left(e^{-e^{-x}}\right)} = \frac{1-e^{-e^{-x}}}{e^{-x}}$, kai $-\infty < x < \infty$.



2.5.1 pav. Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 funkcijų grafikai, kai N_n~tolygųjį ir $\gamma = 1$

2.5. NETOLYGUSIS KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTIS PERKĖLIMO TEOREMOJE

Tirdami konvergavimo greitį perkėlimo teoremoje, įrodome šią teoremą. Tai esminis darbo rezultatas. Jis pateiktas publikuoti ASMDA konferencijoje Kretoje [10].

2.5.1 teorema.

Tarkime tenkinamos (1.3.5 – 1.3.8) sąlygos. Tuomet teisingas įvertis

$$\left|P\left(Z_{N_n} < xb_n + a_n\right) - \Psi(x)\right| \le \Delta_N^{(i)}(x),\ i = 1,2;$$

čia

$$\Delta_N^{(1)}(x) \le u(x)\int_0^\infty \left|A_n(nz) - A(z)\right| e^{-zu(x)}dz, \tag{2.5.1}$$

jeigu skirstinys yra maks – stabilusis (2.1.3), bei

$$\Delta_N^{(2)}(x) \le \frac{u^2(x)}{n}\int_0^\infty ze^{-zu(x)}dA_n(nz) + \Delta_N^{(1)}(x) \tag{2.5.2}$$

jeigu $z_n(x) = u(x)$ ir $\dfrac{u(x)}{n} \le \dfrac{1}{2}$.

►Įrodysime pirmąją teoremos dalį, kai skirstiniai yra maks – stabilūs (1.2.10)

$$F^n\left(xb_n + a_n\right) = F(x) = H(x).$$

Remiantis pilnosios tikimybės formule ir panaudoję dalinį integravimo metodą, gauname:

$$\left|P\left(Z_{N_n} < xb_n + a_n\right) - \Psi(x)\right| = \left|\sum_k F^k(xb_n + a_n)P(N_n = k) - \Psi(x)\right| =$$

$$= \left|\int_0^\infty H^z(x)dA_n(nz) - \int_0^\infty H^z(x)dA(z)\right| = \left|\int_0^\infty \left(A_n(nz) - A(z)\right)dH^z(x)\right| = \int_0^\infty \left|A_n(nz) - A(z)\right| H^z(x)\left|\ln H(x)\right|dz =$$

$$= \left|\ln H(x)\right|\int_0^\infty H^z(x)\left|A_n(nz) - A(z)\right|dz = u(x)\int_0^\infty \left|A_n(nz) - A(z)\right|e^{-u(x)\cdot z}dz.$$

Taigi

$$\left|P\left(Z_{N_n} < xb_n + a_n\right) - \Psi(x)\right| \le u(x)\int_0^\infty \left|A_n(nz) - A(z)\right|e^{-u(x)\cdot z}dz.$$

Pirmoji teoremos dalis įrodyta.

Nagrinėsime atvejį, kai

$$z_n(x) = n(1 - F(xb_n + a_n)) = u(x).$$

Tada

$$P\left(Z_{N_n} < xb_n + a_n\right) - \Psi(x) = \left|\int_0^\infty \left(1 - \frac{u(x)}{n}\right)^{nz} dA_n(nz) - \int_0^\infty e^{-zu(x)} dA(z)\right| \le$$

$$\le \int_0^\infty \left|\left(1 - \frac{u(x)}{n}\right)^{nz} - e^{-zu(x)}\right| dA_n(nz) + \left|\int_0^\infty e^{-zu(x)} d(A_n(nz) - A(z))\right| = I_n^{(1)}(x) + I_n^{(2)}(x). \qquad \textbf{(2.5.3)}$$

Žinome, kad ([7])

$$\left|u^\alpha - v^\alpha\right| \le \alpha\left(\max(u, v)\right)^\alpha \left|\ln u - \ln v\right|,\ \alpha \ge 0,\ 0 < u, v < 1$$

ir

$$\left(1 - \frac{u(x)}{n}\right)^n \le e^{-u(x)},\ 0 \le u(x) \le n\,.$$

Iš šių nelygybių gauname

$$\left|\left(1 - \frac{u(x)}{n}\right)^{nz} - e^{-zu(x)}\right| \le ze^{-zu(x)}\left|n \ln\left(1 - \frac{u(x)}{n}\right) + u(x)\right|.$$

Kadangi

$$\left|\ln(1-t) + t\right| \le t^2,\ |t| \le \frac{1}{2},$$

tai

$$I_n^{(1)}(x) \le \frac{u^2(x)}{n} \int_0^\infty ze^{-zu(x)} dA_n(nz), \qquad \textbf{(2.5.4)}$$

kai $\frac{u(x)}{n} \le \frac{1}{2}$.

Galiausiai

$$I_n^{(2)}(x) \le u(x)\left|\int_0^\infty A_n(nz) - A(z) e^{-zu(x)} dz\right| \qquad \textbf{(2.5.5)}$$

Iš (2.6.3), (2.6.4) ir (2.6.5) nelygybių gauname antrosios teoremos dalies įrodymą. ◄

<u>Išvados:</u>

Iš įrodytos teoremos išplaukia tokie teiginiai:

1 teiginys. Jeigu turime tolygųjį įvertį $\sup\limits_z \left|A_n(nz) - A(z)\right| \le \Delta_n^{(1)}$, tai

$$\sup_x \Delta_N^{(1)}(x) \le \Delta_n^{(1)}.$$

2 teiginys. Jeigu $MN_n < \infty$, tai $\Delta_N^{(2)}(x) \le \frac{u^2(x)}{n^2} MN_n + \Delta_N^{(1)}(x)$.

2.6. KONVERGAVIMO GREIČIO TYRIMAS MAKS – STABILIESIEMS SKIRSTINIAMS

2.6.1 TIKSLIŲJŲ ABSOLIUČIŲJŲ PAKLAIDŲ IR JŲ ĮVERČIŲ SKAIČIAVIMAS, KAI N_n PASISKIRSTĘS PAGAL GEOMETRINĮ SKIRSTINĮ

Tirsime konvergavimo greitį (1.3.7) sąryšyje. Netolygųjį konvergavimo greičio įvertį pateikiame *2.6.1.1* teorema.

2.6.1.1 teorema

Tarkime, tenkinamos (1.3.5) ir (1.3.7) sąlygos ir N_n pasiskirstęs pagal geometrinį skirstinį. Tuomet yra teisingas toks konvergavimo greičio netolygusis įvertis:

$$\Delta_N^{(1)}(x) \le \ln H(x) \frac{\sqrt{e}(\ln H(x) - 2)}{n(\ln H(x) - 1)^2}.$$

►Remiantis (2.5.1) išraiška, matome, jog norint įvertinti $\Delta_N^{(1)}(x)$ reikia tik žinoti $|A_n(nz) - A(z)|$ įvertį. Kai N_n pasiskirstęs pagal geometrinį skirstinį, tai yra tenkinama (2.3.1) sąlyga:

$$A(x) = 1 - e^{-x}.$$

Kadangi ([2]), visiems $0 < x \le n$, $\quad 0 \le e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \le \frac{x^2 e^{-x}}{n}$, **(2.6.1.1)**

tai gauname ([2]), kad $|A_n(nz) - A(z)| \le \frac{(1+z)\sqrt{e}}{e^z n}$. **(2.6.1.2)**

Tuomet

$$\Delta_N^{(1)}(x) \le |\ln H(x)| \int_0^\infty H^z(x) |A_n(nz) - A(z)| dz \le |\ln H(x)| \int_0^\infty H^z(x) \frac{(1+z)\sqrt{e}}{e^z n} dz =$$

$$= |\ln H(x)| \frac{\sqrt{e}}{n} \int_0^\infty H^z(x) \frac{(1+z)}{e^z} dz = |\ln H(x)| \frac{\sqrt{e}}{n} \left(\int_0^\infty H^z(x) e^{-z} dz + \int_0^\infty H^z(x) z e^{-z} dz \right) =$$

$$= |\ln H(x)| \frac{\sqrt{e}}{n} \left(\int_0^\infty \left(\frac{H(x)}{e}\right)^z dz + z \frac{\left[\frac{H(x)}{e}\right]^z}{\ln \frac{H(x)}{e}} \Bigg|_0^\infty - \frac{1}{\ln \frac{H(x)}{e}} \int_0^\infty \left(\frac{H(x)}{e}\right)^z dz \right) =$$

$$= |\ln H(x)| \frac{\sqrt{e}}{n} \left(\frac{-1}{\ln H(x) - 1} + \frac{1}{(\ln H(x) - 1)^2} \right) = |\ln H(x)| \frac{\sqrt{e}(2 - \ln H(x))}{n(\ln H(x) - 1)^2} = \ln H(x) \frac{\sqrt{e}(\ln H(x) - 2)}{n(\ln H(x) - 1)^2}. \;◄$$

Išvada:

Galime pastebėti, kad

$$\Delta_N^{(1)}(x) \le \frac{\sqrt{e}}{n}.$$

Tikrai, nes $|A_n(nz) - A(z)|$ tolygusis įvertis yra:

$$\sup_{z\ge 0}|A_n(nz) - A(z)| \le \frac{\sqrt{e}}{n},$$

kadangi $e^z \ge 1+z$, kai $z \ge 0$.

Tuomet

$$\Delta_N^{(1)}(x) = |\ln H(x)| \int_0^\infty H^z(x)|A_n(nz) - A(z)|dz \le |\ln H(x)| \frac{\sqrt{e}}{n} \int_0^\infty H^z(x)dz =$$

$$= |\ln H(x)| \frac{\sqrt{e}}{n} \left.\frac{H^z(x)}{\ln H(x)}\right|_0^\infty = |\ln H(x)| \frac{\sqrt{e}}{n}\left(\frac{1}{|\ln H(x)|}\right) = \frac{\sqrt{e}}{n}.$$

Visa tai galima gauti ir iš 2.6.1.1 teoremos, nes

$$\frac{\ln H(x)(\ln H(x) - 2)}{(\ln H(x) - 1)^2} = \frac{\ln^2 H(x) - 2\ln H(x)}{\ln^2 H(x) - 2\ln H(x) + 1} \le 1.$$

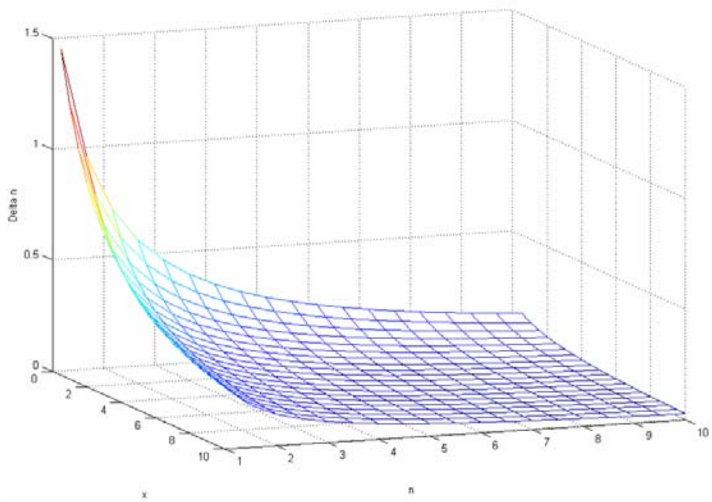
Netolygiojo konvergavimo greičio įverčiai trimis atskirais atvejais:

1) Kai $H_{1,\gamma}(x)$, tai $\Delta_{1,N}^{(1)}(x) \le x^{-\gamma}\frac{\sqrt{e}}{n}\left(\frac{2+x^{-\gamma}}{(1+x^{-\gamma})^2}\right)$ ir $0 < x < \infty$, $\gamma > 0$; **(2.6.1.3)**

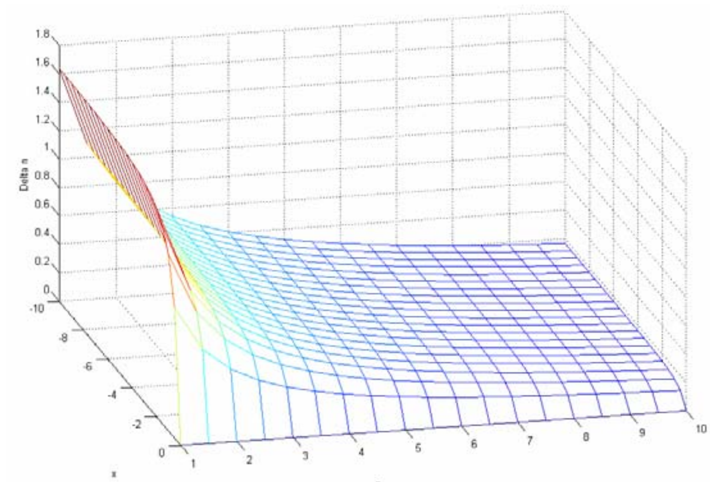
2) Kai $H_{2,\gamma}(x)$, tai $\Delta_{2,N}^{(1)}(x) \le (-x)^{\gamma}\frac{\sqrt{e}}{n}\left(\frac{2+(-x)^{\gamma}}{(1+(-x)^{\gamma})^2}\right)$ ir $-\infty < x < 0$, $\gamma > 0$; **(2.6.1.4)**

3) Kai $H_3(x)$, tai $\Delta_{3,N}^{(1)}(x) \le e^{-x}\frac{\sqrt{e}}{n}\left(\frac{2+e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\right)$ ir $-\infty < x < \infty$. **(2.6.1.5)**

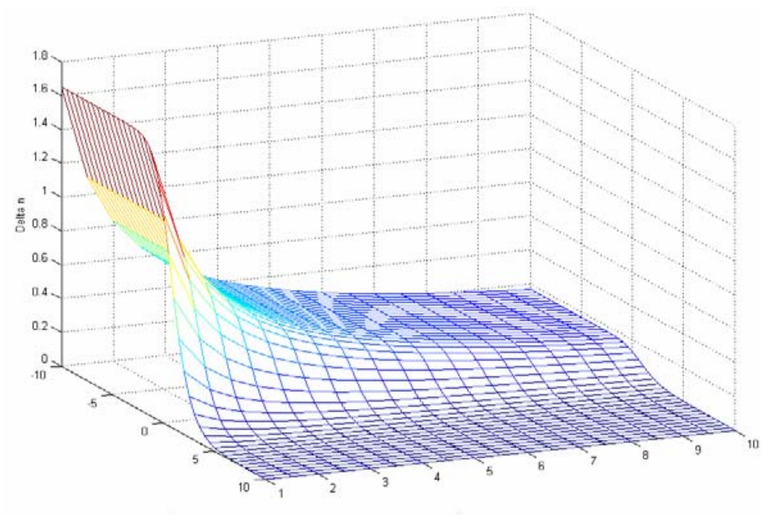
Braižome paklaidų paviršius kiekvienam iš trijų maks – stabiliųjų skirstinių atvejų.



2.6.1.1 pav. $\Delta_{1,N}^{(1)}(x)$ **įverčio paviršius, kai N_n yra geometrinis ir $\gamma = 1$**



2.6.1.2 pav. $\Delta_{2,N}^{(1)}(x)$ **įverčio paviršius, kai N_n yra geometrinis ir $\gamma = 1$**



2.6.1.3 pav. $\Delta_{3,N}^{(1)}(x)$ **įverčio paviršius, kai N_n yra geometrinis**

Daugiau įverčių paviršių, kai skirtingi parametrai γ pateikta 1 priede. Kai x ir n didėja, tai $\Delta_N^{(1)}(x)$ reikšmės artėja prie nulio. Kaip paklaidos priklauso nuo n ir nuo x detaliau vaizduoja grafikai pateikti 1 priede.

2.6.1.2 teorema

Tarkime, tenkinamos (1.3.5) ir (1.3.7) sąlygos ir N_n pasiskirstęs pagal geometrinį skirstinį su parametru $p_n = \frac{1}{n}$. Tuomet tiksliosios absoliučiosios paklaidos

$$\Delta_N(x) = \left|P\left(Z_{N_n} < xb_n + a_n\right) - \Psi(x)\right| = \left|\frac{H^{\frac{1}{n}}(x)}{n - H^{\frac{1}{n}}(x)n + H^{\frac{1}{n}}(x)} - \frac{1}{1-\ln H(x)}\right|.$$

►Ieškome $P\left(Z_{N_n} < xb_n + a_n\right)$ išraiškos:

$$P\left\{\frac{Z_{N_n} - a_n}{b_n} < x\right\} = P\left(Z_{N_n} < xb_n + a_n\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P\left(Z_{N_n} < xb_n + a_n, N_n = k\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(P\left(Z_{N_n} < xb_n + a_n\right)P(N_n = k)\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(H^k(xb_n + a_n)P(N_n = k)\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(H^n(xb_n + a_n)\right)^{k/n} pq^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left[H(x)\right]^{k/n} pq^{k-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\left[H(x)\right]^{k/n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\left[H(x)\right]^{\frac{1}{n}(k-1+1)}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} H^{\frac{1}{n}}(x)\left[H(x)\right]^{\frac{1}{n}(k-1)}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} = \frac{1}{n}H^{\frac{1}{n}}(x)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{H^{\frac{1}{n}}(x)(n-1)}{n}\right)^{k-1} = \frac{1}{n}H^{\frac{1}{n}}(x)\frac{1}{1-\frac{H^{\frac{1}{n}}(x)(n-1)}{n}} =$$

$$= \frac{H^{\frac{1}{n}}(x)}{n - H^{\frac{1}{n}}(x)n + H^{\frac{1}{n}}(x)}.$$

Kai N_n pasiskirstęs pagal geometrinį skirstinį, tai tenkinama (2.3.2) sąlyga:

$$\Psi(x) = \frac{1}{1-\ln H(x)}.$$

Tuomet

$$\Delta_N(x) = \left|P\left(Z_{N_n} < xb_n + a_n\right) - \Psi(x)\right| = \left|\frac{H^{\frac{1}{n}}(x)}{n - H^{\frac{1}{n}}(x)n + H^{\frac{1}{n}}(x)} - \frac{1}{1-\ln H(x)}\right|. \quad ◄$$

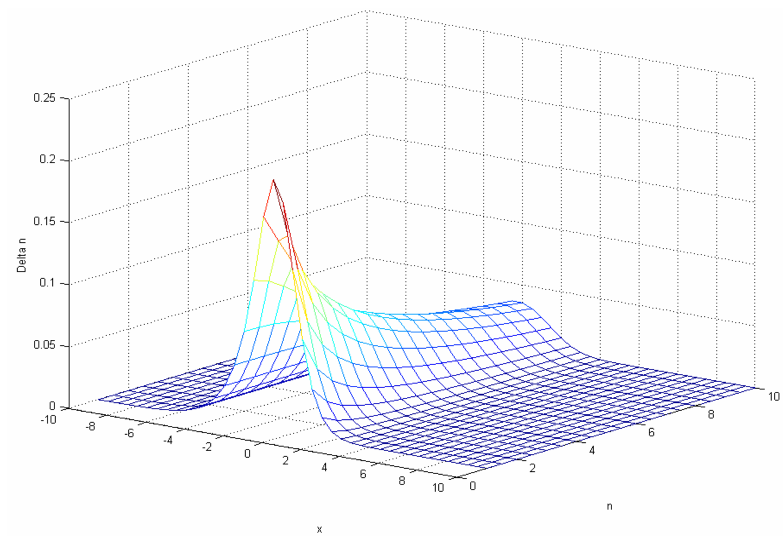
Trimis atskirais atvejais gauname:

1) Kai $H_{1,\gamma}(x)$, tai $\Delta_{1,N}(x) = \left| \dfrac{e^{-\frac{x^{-\gamma}}{n}}}{n - ne^{-\frac{x^{-\gamma}}{n}} + e^{-\frac{x^{-\gamma}}{n}}} - \dfrac{1}{1 + x^{-\gamma}} \right|$ ir $0 < x < \infty$, $\gamma > 0$; **(2.6.1.5)**

2) Kai $H_{2,\gamma}(x)$, tai $\Delta_{2,N}(x) = \left| \dfrac{e^{-\frac{(-x)^{\gamma}}{n}}}{n - ne^{-\frac{(-x)^{\gamma}}{n}} + e^{-\frac{(-x)^{\gamma}}{n}}} - \dfrac{1}{1 + (-x)^{\gamma}} \right|$ ir $-\infty < x < 0$, $\gamma > 0$; **(2.6.1.6)**

3) Kai $H_3(x)$, tai $\Delta_{3,N}(x) = \left| \dfrac{e^{-\frac{e^{-x}}{n}}}{n - ne^{-\frac{e^{-x}}{n}} + e^{-\frac{e^{-x}}{n}}} - \dfrac{1}{1 + e^{-x}} \right|$ ir $-\infty < x < \infty$. **(2.6.1.7)**

Tiksliųjų absoliučiųjų paklaidų paviršiai ir platesnės analizės rezultatai pateikti 2 priede, žemiau pateiktas tik paklaidų paviršius Gumbelio skirstiniui (2.6.1.4 pav). Galima pastebėti, kad kaip ir konvergavimo greičio įverčio atveju, didėjant x ir (arba) n paklaidos mažėja.



2.6.1.4 pav. $\Delta_{3,N}(x)$ **paklaidų paviršius, kai** N_n **yra geometrinis**

Tiksliųjų absoliučiųjų paklaidų ir konvergavimo greičio įverčio palyginimas pateiktas 5 priede. Konvergavimo greičio netolygusis įvertis yra didesnis už tikrąsias absoliučiąsias paklaidas, ir didėjant n ir (arba) x, jų skirtumas artėja prie nulio. Taigi, kai n ir x dideli, perkėlimo teorema tiksliai aprašo centruotų ir normuotų nepriklausomų atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinius, kai nepriklausomų atsitiktinių dydžių skaičius yra atsitiktinis.

2.6.2. TIKSLIŲJŲ ABSOLIUČIŲJŲ PAKLAIDŲ IR JŲ ĮVERČIŲ SKAIČIAVIMAS, KAI N_n PASISKIRSTĘS PAGAL DISKRETŲJĮ TOLYGŲJĮ SKIRSTINĮ

Kaip ir 2.6.1 skyrelyje, nagrinėjame $\left|A_n(nz)-A(z)\right|$ ir netolygųjį konvergavimo greičio įvertį pateikiame *2.6.2.1* teorema.

2.6.2.1 teorema

Tarkime tenkinamos (1.3.5) ir (1.3.7) sąlygos ir N_n pasiskirstęs pagal diskretųjį tolygųjį skirstinį, tuomet yra teisingas toks įvertis:

$$\Delta_N^{(1)}(x) \le \frac{1-H(x)}{n}.$$

►Kai N_n pasiskirstęs pagal diskretųjį tolygųjį skirstinį, tai tenkinama (2.4.1) sąlyga:

$$A(x)=x.$$

Kadangi
$$P(N_n \le x)=\frac{[x]}{n},$$

čia $[\cdot]$ – sveikoji dalis,

ir
$$P\left(\frac{N_n}{n}\le x\right)=P(N_n \le nx)=\frac{[xn]}{n}=\frac{xn-\{xn\}}{n},$$

čia $\{\cdot\}$ – trupmeninė dalis.

Tuomet gauname, kad

$$\left|A_n(nz)-A(z)\right|=\left|z-\frac{\{zn\}}{n}-z\right|\le\frac{\{zn\}}{n}\le\frac{1}{n}, \qquad \textbf{(2.6.2.1)}$$

nes $0\le\{zn\}\le 1$.

Tuomet

$$\Delta_N^{(1)}(x)\le\left|\ln H(x)\right|\int_0^1 H^z(x)\left|A_n(nz)-A(z)\right|dz\le\left|\ln H(x)\right|\int_0^1 H^z(x)\frac{1}{n}dz=$$

$$=\left|\ln H(x)\right|\frac{1}{n}\frac{[H(x)]^z}{\ln H(x)}\Bigg|_0^1=\left|\ln H(x)\right|\frac{H(x)-1}{n\ln H(x)}=\frac{1-H(x)}{n}. \qquad ◄$$

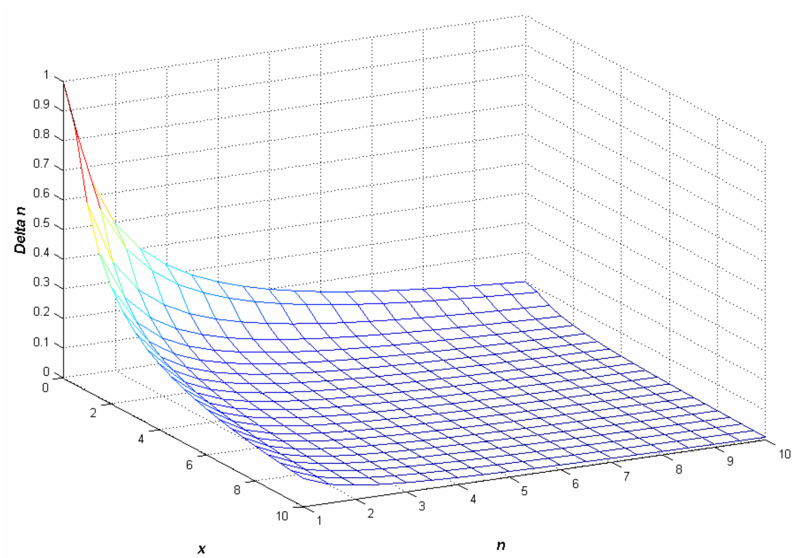
Trimis atskirais atvejais gauname:

1) Kai $H_{1,\gamma}(x)$, tai $\Delta_{1,N}^{(1)}(x)\le\frac{1-e^{-x^{-\gamma}}}{n}$ ir $0<x<\infty$, $\gamma>0$; **(2.6.2.2)**

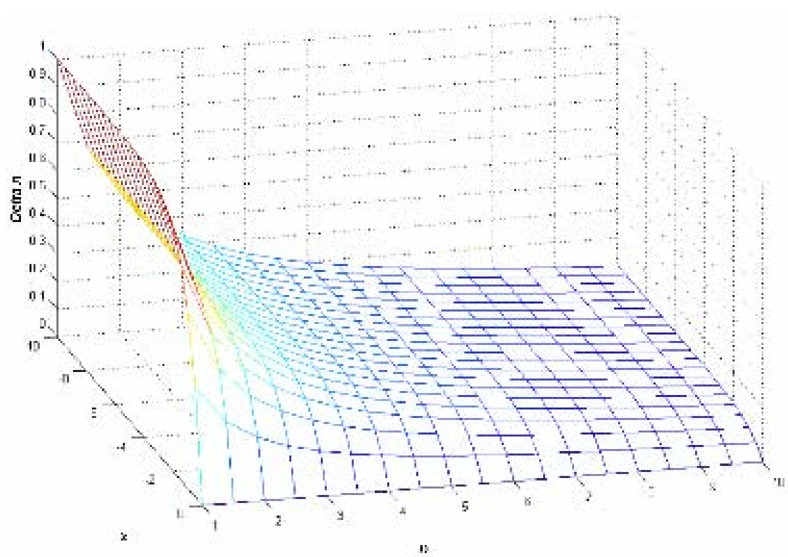
2) Kai $H_{2,\gamma}(x)$, tai $\Delta_{2,N}^{(1)}(x)\le\frac{1-e^{-(-x)^{\gamma}}}{n}$ ir $-\infty<x<0$, $\gamma>0$; **(2.6.2.3)**

3) Kai $H_3(x)$, tai $\Delta_{3,N}^{(1)}(x) \le \frac{1-e^{-e^{-x}}}{n}$ ir $-\infty < x < \infty$. **(2.6.2.4)**

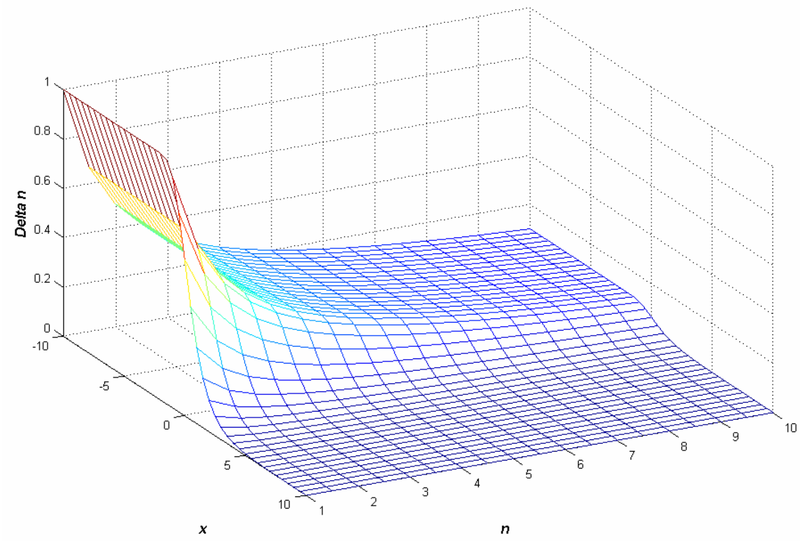
Braižome konvergavimo greičio įverčių paviršius kiekvienam iš trijų maks – stabiliųjų skirstinių atvejų. Kaip konvergavimo greičio įvertis priklauso nuo n ir (arba) nuo x detaliau vaizduoja grafikai pateikti 3 priede. 3 priede taip pat pateikiami ir paviršiai parenkant įvairius γ parametrus.



2.6.2.1 pav. $\Delta_{1,N}^{(1)}(x)$ **įverčio paviršius, kai N_n yra tolygusis ir γ = 1**



2.6.2.2 pav. $\Delta_{2,N}^{(1)}(x)$ **įverčio paviršius, kai N_n yra tolygusis ir γ = 1**



2.6.2.3 pav. $\Delta^{(1)}_{3,N}(x)$ įverčio paviršius, kai N_n yra tolygusis

Matome, jog kaip ir geometrinio skirstinio atveju didėjant n arba (ir) x įverčių reikšmės artėja prie nulio. Reikšmių lentelės pateiktos 6 priede. Platesnė analizė, kaip priklauso nuo x arba n įverčių reikšmės, pateikta 3 priede.

2.6.2.2 teorema

Tarkime tenkinamos (1.3.5) ir (1.3.7) sąlygos ir N_n pasiskirstęs pagal diskretųjį tolygųjį skirstinį, tuomet paklaidos

$$\Delta_N(x) = \left|P\left(Z_{N_n} < xb_n + a_n\right) - \Psi(x)\right| = \left|\frac{H^{\frac{1}{n}}(x)\left(H(x)-1\right)}{n\left(H^{\frac{1}{n}}(x)-1\right)} - \frac{H(x)-1}{\ln H(x)}\right|.$$

►Ieškome $P\left(Z_{N_n} < xb_n + a_n\right)$ išraiškos:

$$P\left\{\frac{Z_{N_n} - a_n}{b_n} < x\right\} = P\left(Z_{N_n} < xb_n + a_n\right) = \sum_{k=1}^{n} P\left(Z_{N_n} < xb_n + a_n, N_n < k\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(P\left(Z_{N_n} < xb_n + a_n\right)P\left(N_n < k\right)\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(H^k\left(xb_n + a_n\right)P\left(N_n < k\right)\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(H^n\left(xb_n + a_n\right)\right)^{k/n}\frac{1}{n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[H(x)\right]^{k/n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[H^{\frac{1}{n}}(x)\right]^k = \frac{H^{\frac{1}{n}}(x)\left(H(x)-1\right)}{n\left(H^{\frac{1}{n}}(x)-1\right)}.$$

Kai N_n pasiskirstęs pagal diskretųjį tolygųjį skirstinį, tai tenkinama (2.4.2) sąlyga:

$$\Psi(x) = \frac{H(x)-1}{\ln H(x)},$$

tai $\Delta_N(x) = \left|P\left(Z_{N_n} < xb_n + a_n\right) - \Psi(x)\right| = \left|\dfrac{H^{\frac{1}{n}}(x)\left(H(x)-1\right)}{n\left(H^{\frac{1}{n}}(x)-1\right)} - \dfrac{H(x)-1}{\ln H(x)}\right|$. ◄

Trimis atskirais atvejais gauname:

1) Kai $H_{1,\gamma}(x)$, tai

$$\Delta_{1,N}(x) = \left|\frac{e^{-\frac{x^{-\gamma}}{n}}\left(e^{-x^{-\gamma}}-1\right)}{n\left(e^{-\frac{x^{-\gamma}}{n}}-1\right)} + \frac{e^{-x^{-\gamma}}-1}{x^{-\gamma}}\right| \text{ ir } 0 < x < \infty,\ \gamma > 0; \qquad \textbf{(2.6.2.5)}$$

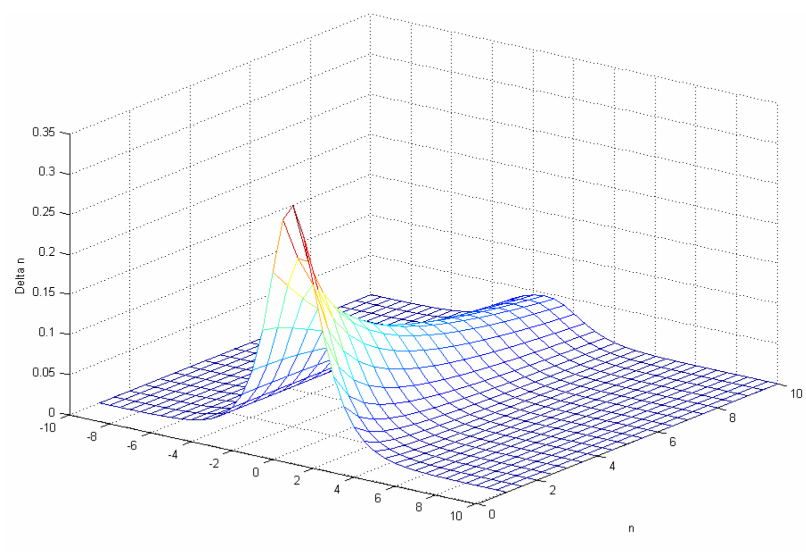
2) Kai $H_{2,\gamma}(x)$, tai

$$\Delta_{2,N}(x) = \left|\frac{e^{-\frac{(-x)^{\gamma}}{n}}\left(e^{-(-x)^{\gamma}}-1\right)}{n\left(e^{-\frac{(-x)^{\gamma}}{n}}-1\right)} + \frac{e^{-(-x)^{\gamma}}-1}{(-x)^{\gamma}}\right| \text{ ir } -\infty < x < 0,\ \gamma > 0; \qquad \textbf{(2.6.2.6)}$$

3) Kai $H_3(x)$, tai

$$\Delta_{2,N}(x) = \left|\frac{e^{-\frac{e^{-x}}{n}}\left(e^{-e^{-x}}-1\right)}{n\left(e^{-\frac{e^{-x}}{n}}-1\right)} + \frac{e^{-e^{-x}}-1}{e^{-x}}\right| \text{ ir } -\infty < x < \infty. \qquad \textbf{(2.6.2.7)}$$

Paklaidų paviršius Gumbelio skirstiniui pavaizduotas žemiau (2.6.2.4 pav).



2.6.2.4 pav. $\Delta_{3,N}(x)$ paklaidų paviršius, kai N_n yra tolygusis

Platesnė grafinė absoliučiųjų paklaidų $\Delta_N(x)$realizacija, kai N_n pasiskirstęs pagal diskretųjį tolygųjį skirstinį, pateikta 4 priede. Kai x ir (arba) n didėja, tai $\Delta_N^{(1)}(x)$ įverčio ir absoliučiųjų paklaidų reikšmės artėja prie nulio. Tiksliųjų absoliučiųjų paklaidų ir konvergavimo greičio įverčio palyginimas pateiktas 5 priede.

2.7. KONVERGAVIMO GREIČIO TYRIMAS APIBENDRINTIEM PARETO SKIRSTINIAMS

2.7.1. TIKSLIŲJŲ ABSOLIUČIŲJŲ PAKLAIDŲ IR JŲ ĮVERČIŲ SKAIČIAVIMAS, KAI N_n PASISKIRSTĘS PAGAL GEOMETRINĮ SKIRSTINĮ

Nagrinėsime netolygųjį konvergavimo greičio įvertį kai teisinga sąlyga (2.2.4), gautasis įvertis pateikiamas teorema.

2.7.1.1 Teorema.

Tarkime, tenkinamos (1.3.6), (1.3.7) ir (1.3.9) sąlygos ir N_n pasiskirstęs pagal geometrinį skirstinį, bei $z_n(x) = n(1 - F(xb_n + a_n)) = u(x)$.

Tuomet yra teisingas toks konvergavimo greičio netolygusis įvertis

$$\Delta_N^{(2)}(x) \le \frac{u(x)}{(1+u(x))^2} \cdot \left(u(x) \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) + \frac{\sqrt{e}(2+u(x))}{n} \right).$$

► Žinome $P(N_n = k) = pq^{k-1}$, kai $k \ge 1$, $p + q = 1$ ir $p = \frac{1}{n}$. Tai

$$P(N_n < x) = A_n(x) = \sum_{k=1}^{[x]} P(N_n = k) = p\sum_{k=1}^{[x]} q^{k-1} = 1 - p\sum_{k=[x]+1}^{\infty}(1-p)^{k-1} = 1 - \frac{p(1-p)^{[x]}}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^{[x]}.$$

$$P\left(\frac{N_n}{n} < x\right) = P(N_n < xn) = A_n(nx) = 1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{[xn]} \le 1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{xn}.$$

Nagrinėsime $I_n^{(1)}(x)$.

$$I_n^{(1)}(x) \le \frac{u^2(x)}{n}\int_0^\infty ze^{-zu(x)}dA_n(nz) = \frac{u^2(x)}{n}\int_0^\infty ze^{-zu(x)}d\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{zn}\right) =$$

$$= \frac{u^2(x)}{n}\cdot n\cdot \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\int_0^\infty ze^{-zu(x)}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{zn}dz \le u^2(x)\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\int_0^\infty ze^{-zu(x)}e^{-z}dz = u^2(x)\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\int_0^\infty ze^{-z(1+u(x))}dz =$$

$$= \frac{u^2(x)}{\left(1+u(x)\right)^2} \ln\left(\frac{n}{n-1}\right).$$

Remiantis (2.6.1.2) sąlyga

$$\left|A_n(nz) - A(z)\right| \le \frac{(1+z)\sqrt{e}}{e^z n},$$

Gauname

$$I_n^{(2)}(x) \le u(x) \left|\int_0^\infty A_n(nz) - A(z) e^{-zu(x)} dz\right| = \frac{u(x)\sqrt{e}}{n} \int_0^\infty (1+z) e^{-zu(x)} e^{-z} dz = \frac{u(x)\sqrt{e}}{n} \int_0^\infty e^{-zu(x)} e^{-z} dz +$$

$$\frac{u(x)\sqrt{e}}{n} \int_0^\infty z e^{-zu(x)} e^{-z} dz = \frac{u(x)\sqrt{e}}{n} \left(\frac{1}{1+u(x)} + \frac{1}{\left(1+u(x)\right)^2}\right) = \frac{u(x)\sqrt{e}\left(2+u(x)\right)}{n \cdot \left(1+u(x)\right)^2}.$$

Taigi $\Delta_N^{(2)}(x) \le I_n^{(1)}(x) + I_n^{(2)}(x) = \frac{u^2(x)}{\left(1+u(x)\right)^2} \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) + \frac{u(x)\sqrt{e}\left(2+u(x)\right)}{n \cdot \left(1+u(x)\right)^2} =$

$$= \frac{u(x)}{\left(1+u(x)\right)^2} \cdot \left(u(x) \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) + \frac{\sqrt{e}\left(2+u(x)\right)}{n}\right),$$

kai $n > 1$ ir $\frac{u(x)}{n} \le \frac{1}{2}$. ◄

Pritaikome apibendrintiems Pareto skirstiniams:

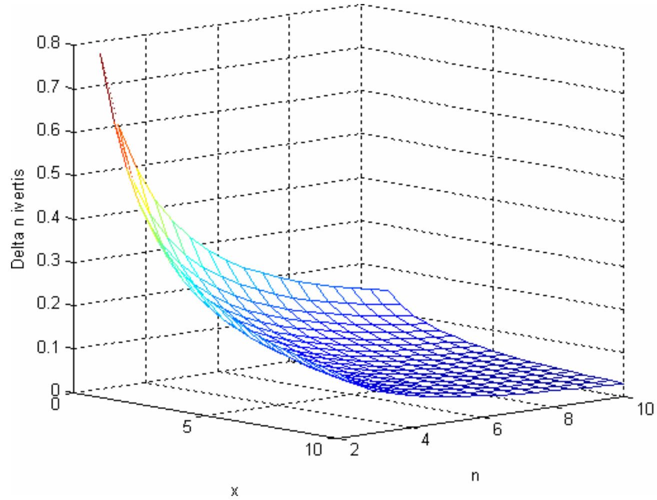
1) Kai $W_{1,\alpha}(x)$, tai $\Delta_{1,N}^{(2)}(x) \le \frac{x^{-\alpha}}{\left(1+x^{-\alpha}\right)^2} \cdot \left(x^{-\alpha} \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) + \frac{\sqrt{e}\left(2+x^{-\alpha}\right)}{n}\right)$ ir $\alpha > 0$, $x \ge 1$; **(2.7.1.1)**

2) Kai $W_{2,\alpha}(x)$, tai $\Delta_{2,N}^{(2)}(x) \le \frac{(-x)^{\alpha}}{\left(1+(-x)^{\alpha}\right)^2} \cdot \left((-x)^{\alpha} \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) + \frac{\sqrt{e}\left(2+(-x)^{\alpha}\right)}{n}\right)$ ir $\alpha > 0$, $-1 \le x \le 0$;

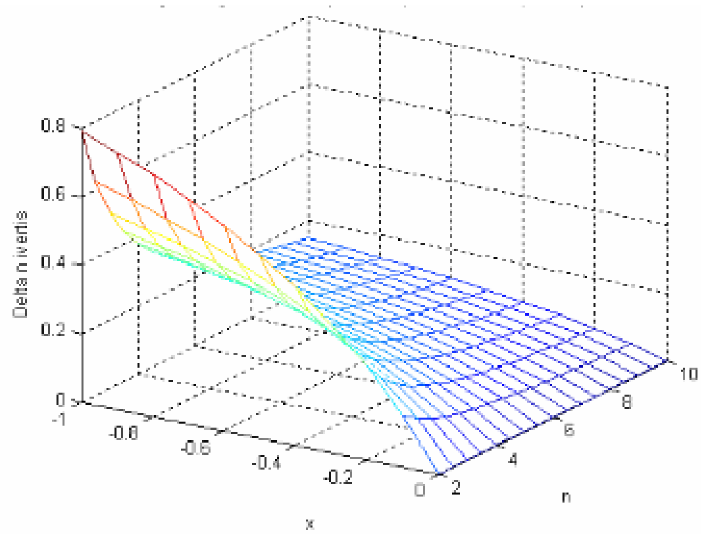
(2.7.1.2)

3) Kai $W_3(x)$, tai $\Delta_{3,N}^{(2)}(x) \le \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2} \cdot \left(e^{-x} \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) + \frac{\sqrt{e}\left(2+e^{-x}\right)}{n}\right)$ ir $x \ge 0$. **(2.7.1.3)**

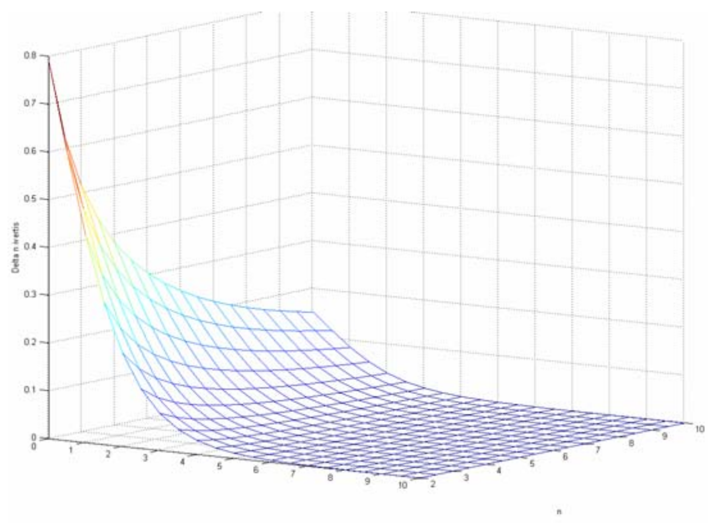
Braižome konvergavimo greičio įverčių paviršius kiekvienam iš trijų apibendrintų Pareto skirstinių. Kaip konvergavimo greičio įvertis priklauso nuo n ir (arba) nuo x detaliau vaizduoja grafikai pateikti 1 priede. 1 priede taip pat pateikiami ir paviršiai parenkant įvairius α parametrus.



2.7.1.1 pav. $\Delta_{1,N}^{(2)}(x)$ **įverčio paviršius, kai N_n yra geometrinis ir $\alpha = 1$**



2.7.1.2 pav. $\Delta_{2,N}^{(2)}(x)$ **įverčio paviršius, kai N_n yra geometrinis ir $\alpha = 1$**



2.7.1.3 pav. $\Delta_{3,N}^{(2)}(x)$ **įverčio paviršius, kai N_n yra geometrinis**

2.7.1.2 Teorema.

Tarkime, tenkinamos (1.3.6), (1.3.7) ir (1.3.9) sąlygos ir N_n pasiskirstęs pagal geometrinį skirstinį. Tuomet tiksliosios absoliučiosios paklaidos

$$\Delta_N(x) = \left| \frac{n-u(x)}{n+n\cdot u(x)-u(x)} - \frac{1}{1+u(x)} \right|.$$

►Nagrinėkime

$$P\left\{\frac{Z_{N_n}-a_n}{b_n} < x\right\} = P\left(Z_{N_n} < xb_n + a_n\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P\left(Z_{N_n} < xb_n + a_n, N_n = k\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(P\left(Z_{N_n} < xb_n + a_n\right)P\left(N_n = k\right)\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(F^k\left(xb_n + a_n\right)P\left(N_n = k\right)\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{n\left(1-F\left(xb_n + a_n\right)\right)}{n}\right)^k pq^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{u(x)}{n}\right)^k pq^{k-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{u(x)}{n}\right)^k\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} = \frac{n-u(x)}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(n-u(x))\cdot(n-1)}{n^2}\right)^{k-1} =$$

$$= \frac{n-u(x)}{n^2}\frac{1}{1-\frac{(n-u(x))\cdot(n-1)}{n^2}} = \frac{(n-u(x))\cdot n^2}{n^2\cdot\left(n^2-(n-u(x))\cdot(n-1)\right)} = \frac{n-u(x)}{n^2-(n-u(x))\cdot(n-1)} =$$

$$= \frac{n-u(x)}{n+n\cdot u(x)-u(x)}.$$

Taip pat

$$\Psi(x) = \int_0^{\infty} e^{-zu(x)}dA(z) = \int_0^{\infty} e^{-zu(x)}d\left(1-e^{-z}\right) = \int_0^{\infty} e^{-z(1+u(x))}dz = \frac{1}{1+u(x)}.$$

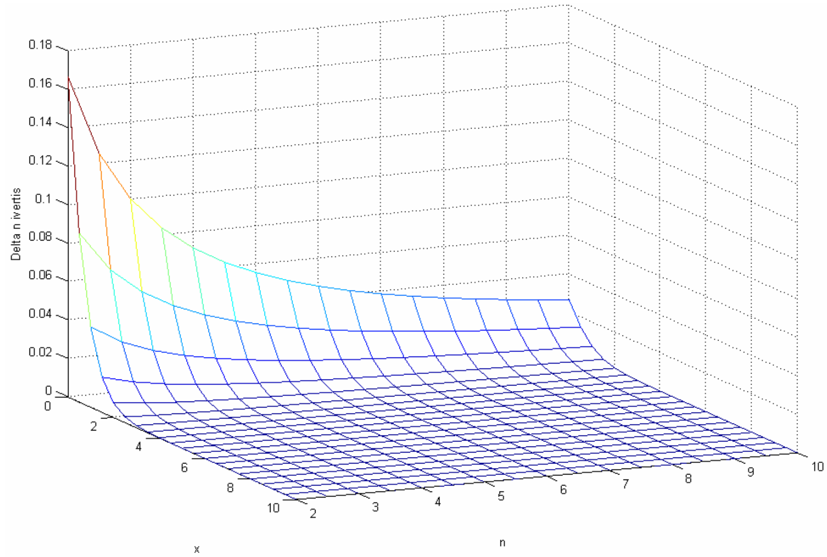
Taigi $\Delta_N(x) = \left|P\left(Z_{N_n} < xb_n + a_n\right) - \Psi(x)\right| = \left|\frac{n-u(x)}{n+n\cdot u(x)-u(x)} - \frac{1}{1+u(x)}\right|.$ ◄

Pritaikome apibendrintiems Pareto skirstiniams:

1) Kai $W_{1,\alpha}(x)$, tai $\Delta_{1,N}(x) = \left|\frac{n-x^{-\alpha}}{n+n\cdot x^{-\alpha}-x^{-\alpha}} - \frac{1}{1+x^{-\alpha}}\right|$ ir $\alpha > 0$, $x \geq 1$; **(2.7.1.4)**

2) Kai $W_{2,\alpha}(x)$, tai $\Delta_{2,N}(x) = \left|\frac{n-(-x)^{\alpha}}{n+n\cdot(-x)^{\alpha}-(-x)^{\alpha}} - \frac{1}{1+(-x)^{\alpha}}\right|$ ir $\alpha > 0$, $-1 \leq x \leq 0$; **(2.7.1.5)**

3) Kai $W_3(x)$, tai $\Delta_{3,N}(x) = \left|\frac{n-e^{-x}}{n+n\cdot e^{-x}-e^{-x}} - \frac{1}{1+e^{-x}}\right|$ ir $x \geq 0$. **(2.7.1.6)**



2.7.1.4 pav. $\Delta_{3,N}(x)$ **paklaidų paviršius, kai** N_n **yra geometrinis**

Platesnė grafinė absoliučiųjų paklaidų realizacija, kai N_n pasiskirstęs pagal geometrinį skirstinį, pateikta 2 priede. Kai x ir (arba) n didėja, tai įverčių ir absoliučiųjų paklaidų reikšmės artėja prie nulio. Tiksliųjų absoliučiųjų paklaidų ir konvergavimo greičio įverčių palyginimas pateiktas 5 priede.

2.7.2. TIKSLIŲJŲ ABSOLIUČIŲJŲ PAKLAIDŲ IR JŲ ĮVERČIŲ SKAIČIAVIMAS, KAI N_n PASISKIRSTĘS PAGAL DISKRETŲJĮ TOLYGŲJĮ SKIRSTINĮ

2.7.2.1 teorema

Tarkime, tenkinamos (1.3.6), (1.3.7) ir (1.3.9) sąlygos ir N_n pasiskirstęs pagal diskretųjį tolygųjį skirstinį, bei

$$z_n(x) = n(1 - F(xb_n + a_n)) = u(x).$$

Tuomet yra teisingas toks konvergavimo greičio netolygusis įvertis

$$\Delta_N^{(2)}(x) \le \frac{2 - e^{-u(x)} \cdot (u(x) + 2)}{n}.$$

► Žinome $P(N_n = k) = \dfrac{1}{n}$, kai $k = \overline{1, n}$. Tai

$$P\left(\frac{N_n}{n} < x\right) = P(N_n < xn) = A_n(nx) = x - \frac{\{xn\}}{n} \le x.$$

Nagrinėsime $I_n^{(1)}(x)$.

$$I_n^{(1)}(x) \le \frac{u^2(x)}{n}\int_0^1 ze^{-zu(x)}dA_n(nz) \le \frac{u^2(x)}{n}\int_0^1 ze^{-zu(x)}dz = \frac{u^2(x)}{n}\cdot\left(-\frac{e^{-u(x)}}{u(x)} - \frac{e^{-u(x)}}{u(x)^2} + \frac{1}{u(x)^2}\right) =$$

$$= \frac{u^2(x)}{n} \cdot \frac{e^{-u(x)} \cdot (-u(x)-1)+1}{u(x)^2} = \frac{e^{-u(x)} \cdot (-u(x)-1)+1}{n}.$$

Remiantis (2.6.2.1) sąlyga

$$|A_n(nz) - A(z)| \le \frac{1}{n},$$

gauname

$$I_n^{(2)}(x) \le u(x)\left|\int_0^1 A_n(nz) - A(z) e^{-zu(x)} dz\right| = \frac{u(x)}{n}\int_0^1 e^{-zu(x)} dz = \frac{u(x)}{n} \cdot \left(-\frac{e^{-u(x)}}{u(x)} + \frac{1}{u(x)}\right) =$$

$$= \frac{u(x)}{n} \cdot \frac{1-e^{-u(x)}}{u(x)} = \frac{1-e^{-u(x)}}{n}.$$

Taigi $\Delta_N^{(2)}(x) \le I_n^{(1)}(x) + I_n^{(2)}(x) = \dfrac{e^{-u(x)} \cdot (-u(x)-1)+1}{n} + \dfrac{1-e^{-u(x)}}{n} = \dfrac{2-e^{-u(x)} \cdot (u(x)+2)}{n}$,

kai $\dfrac{u(x)}{n} \le \dfrac{1}{2}$. ◄

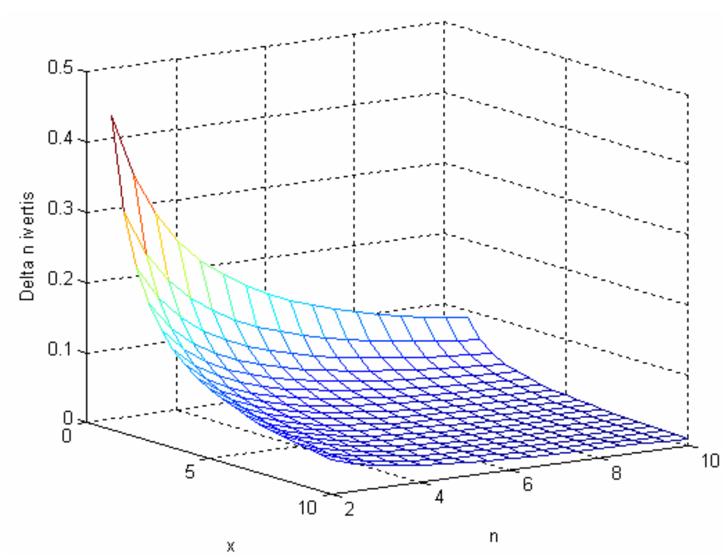
Pritaikome apibendrintiems Pareto skirstiniams:

1) Kai $W_{1,\alpha}(x)$, tai $\Delta_{1,N}^{(2)}(x) \le \dfrac{2-e^{-x^{-\alpha}} \cdot (x^{-\alpha}+2)}{n}$ ir $\alpha > 0$, $x \ge 1$; **(2.7.2.1)**

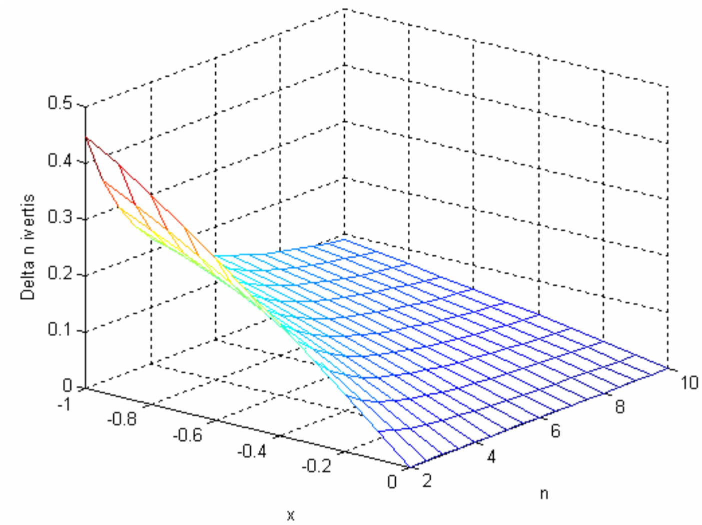
2) Kai $W_{2,\alpha}(x)$, tai $\Delta_{2,N}^{(2)}(x) \le \dfrac{2-e^{-(-x)^{\alpha}} \cdot ((-x)^{\alpha}+2)}{n}$ ir $\alpha > 0$, $-1 \le x \le 0$; **(2.7.2.2)**

3) Kai $W_3(x)$, tai $\Delta_{3,N}^{(2)}(x) \le \dfrac{2-e^{-e^{-x}} \cdot (e^{-x}+2)}{n}$ ir $x \ge 0$. **(2.7.2.3)**

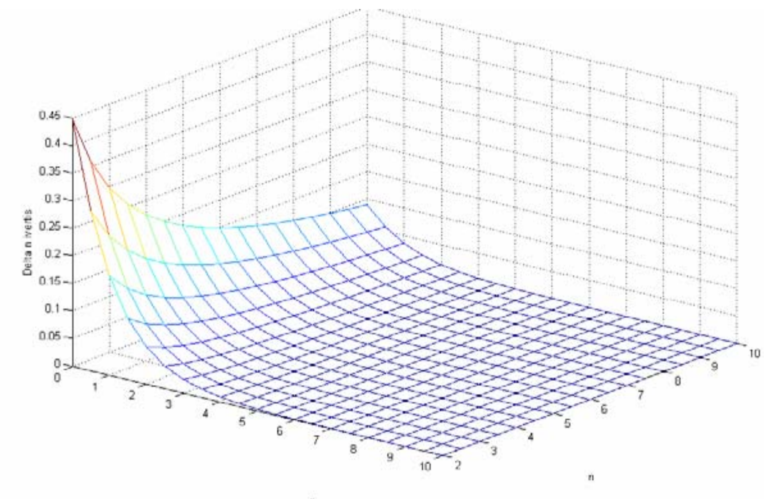
Braižome konvergavimo greičio įverčių paviršius atskirais apibendrintų Pareto skirstinių atvejais.



2.7.2.1 pav. $\Delta_{1,N}^{(2)}(x)$ įverčio paviršius, kai N_n yra tolygusis ir α = 1



2.7.2.2 pav. $\Delta_{2,N}^{(2)}(x)$ **įverčio paviršius, kai N_n yra tolygusis ir α = 1**



2.7.2.3 pav. $\Delta_{3,N}^{(2)}(x)$ **įverčio paviršius, kai N_n yra tolygusis**

Daugiau paviršių, su skirtingais parametrais α pateikta 3 priede. Kai x ir n didėja, tai $\Delta_N^{(2)}(x)$ reikšmės artėja prie nulio. Kaip paklaidos priklauso nuo n ir nuo x detaliau vaizduoja grafikai pateikti 3 priede.

2.7.2.2 teorema

Tarkime, tenkinamos (1.3.6), (1.3.7) ir (1.3.9) sąlygos ir N_n pasiskirstęs pagal diskretųjį tolygųjį skirstinį. Tuomet tiksliosios absoliučiosios paklaidos

$$\Delta_N(x) = \left| \frac{e^{-u(x)}}{u(x)} - \frac{1}{n} - \frac{1}{u(x)} \cdot \left(1 - \frac{u(x)}{n}\right)^{n+1} \right|.$$

►Nagrinėkime

$$P\left\{ \frac{Z_{N_n} - a_n}{b_n} < x \right\} = P\left(Z_{N_n} < xb_n + a_n\right) = \sum_{k=1}^{n} P\left(Z_{N_n} < xb_n + a_n, N_n = k\right) =$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(P\left(Z_{N_n}<xb_n+a_n\right)P\left(N_n=k\right)\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(F^k\left(xb_n+a_n\right)P\left(N_n=k\right)\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{n\left(1-F\left(xb_n+a_n\right)\right)}{n}\right)^k\frac{1}{n}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{u(x)}{n}\right)^k\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{u(x)}{n}\right)^k=\frac{1}{n}\cdot\frac{\left(1-\frac{u(x)}{n}\right)\cdot\left(\left(1-\frac{u(x)}{n}\right)^n-1\right)}{1-\frac{u(x)}{n}-1}=\frac{1-\frac{u(x)}{n}-\left(1-\frac{u(x)}{n}\right)^{n+1}}{u(x)}.$$

Taip pat $\Psi(x)=\int_0^1 e^{-zu(x)}dA(z)=\int_0^1 e^{-zu(x)}dz=\frac{1-e^{-u(x)}}{u(x)}$.

Taigi $\Delta_N(x)=\left|P\left(Z_{N_n}<xb_n+a_n\right)-\Psi(x)\right|=\left|\frac{1-\frac{u(x)}{n}-\left(1-\frac{u(x)}{n}\right)^{n+1}}{u(x)}-\frac{1-e^{-u(x)}}{u(x)}\right|=$

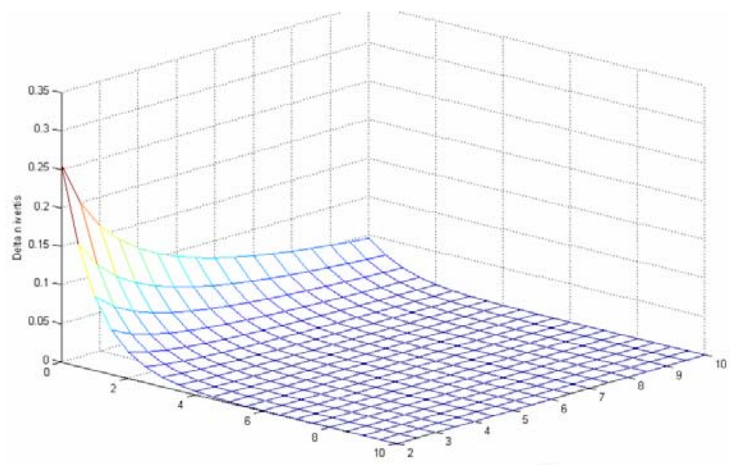
$$=\left|\frac{1-\frac{u(x)}{n}-\left(1-\frac{u(x)}{n}\right)^{n+1}-1+e^{-u(x)}}{u(x)}\right|=\left|\frac{e^{-u(x)}}{u(x)}-\frac{1}{n}-\frac{1}{u(x)}\cdot\left(1-\frac{u(x)}{n}\right)^{n+1}\right|. \qquad ◄$$

Pritaikome apibendrintiems Pareto skirstiniams:

1) Kai $W_{1,\alpha}(x)$, tai $\Delta_{1,N}(x)=\left|\frac{e^{-x^{-\alpha}}}{x^{-\alpha}}-\frac{1}{n}-\frac{1}{x^{-\alpha}}\cdot\left(1-\frac{x^{-\alpha}}{n}\right)^{n+1}\right|$ ir $\alpha>0$, $x\geq 1$; **(2.7.2.4)**

2) Kai $W_{2,\alpha}(x)$, tai $\Delta_{2,N}(x)=\left|\frac{e^{-(-x)^{\alpha}}}{(-x)^{\alpha}}-\frac{1}{n}-\frac{1}{(-x)^{\alpha}}\cdot\left(1-\frac{(-x)^{\alpha}}{n}\right)^{n+1}\right|$ ir $\alpha>0$, $-1\leq x\leq 0$; **(2.7.2.5)**

3) Kai $W_3(x)$, tai $\Delta_{3,N}(x)=\left|\frac{e^{-e^{-x}}}{e^{-x}}-\frac{1}{n}-\frac{1}{e^{-x}}\cdot\left(1-\frac{e^{-x}}{n}\right)^{n+1}\right|$ ir $x\geq 0$. **(2.7.2.6)**



2.7.2.4 pav. $\Delta_{3,N}^{(2)}(x)$ paklaidų paviršius, kai N_n yra tolygusis

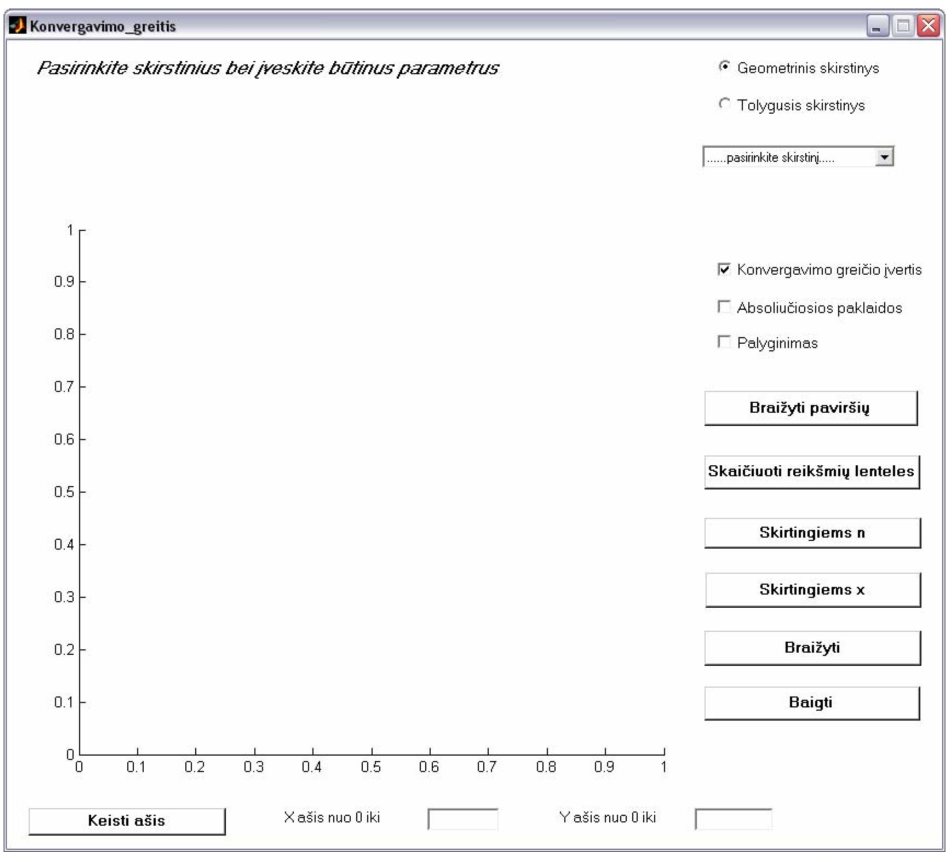
Tiksliųjų absoliučiųjų paklaidų paviršiai ir platesnės analizės rezultatai pateikti 4 priede, aukščiau pateiktas tik paklaidų paviršius eksponentiniam skirstiniui (2.7.2.3 pav). Galima pastebėti, kad kaip ir konvergavimo greičio įverčio atveju, didėjant x ir (arba) n paklaidos mažėja.

Tiksliųjų absoliučiųjų paklaidų ir konvergavimo greičio įverčio palyginimas pateiktas 5 priede. Konvergavimo greičio netolygusis įvertis yra didesnis už tikrąsias absoliučiąsias paklaidas, ir didėjant n ir (arba) x, jų skirtumas artėja prie nulio.

3. PROGRAMINĖ REALIZACIJA

Darbe gautos matematinės formulės realizuojamos grafiniu būdu, MatLab 6.5 programinės įrangos pagalba. Pasirinkta ši programinė įranga, kadangi joje galima sukurti naujas funkcijas, priklausančias nuo tam tikrų parametrų, ir patogu taikant sukurtąsias funkcijas braižyti grafinius vaizdus esant skirtingoms pradinėms sąlygos. Sukurtąją funkciją galima taikyti daugelį kartų braižant to paties tipo grafikus, kai keičiami parametrai.

Programoje braižomi paviršiai, skaičiuojamos reikšmių lentelės, kuriom įvedimo duomenys imami iš tekstinių failų *x.txt* ir *n.txt*. Taip pat braižomi grafikai įvedant skirtingus x arba n.



3 pav. Programos vykdymo langas

DISKUSIJA

Gautieji netolygieji konvergavimo greičio įverčiai supaprastina skaičiavimus atskirų skirstinių atveju. Taip pat gautas tolygusis konvergavimo greičio įvertis perkėlimo teoremoje maks – stabiliųjų skirstinių atveju

$$\sup_x \Delta_N^{(1)}(x) \le \Delta_n^{(1)},$$

kai

$$\sup_z \left| A_n(nz) - A(z) \right| \le \Delta_n^{(1)}.$$

Jeigu atsitiktinių dydžių skaičius yra geometrinis, tai

$$\sup_x \Delta_N^{(1)}(x) \le \frac{\sqrt{e}}{n}.$$

Nagrinėjant antrąjį atvejį, kai $z_n(x) = u(x)$, jeigu $MN_n < \infty$, tai galima taikyti grubų įvertį

$$\Delta_N^{(2)}(x) \le \frac{u^2(x)}{n^2} MN_n + \Delta_N^{(1)}(x).$$

Įvertinus tiksliąsias absoliučiąsias paklaidas, kurios yra mažesnės už netolygųjį konvergavimo greičio įvertį, galima teigti, kad perkėlimo teorema maks – stabiliesiems bei apibendrintiems Pareto skirstiniams yra gera. Nes jau esant n=100, absoliučiosios paklaidos yra apytiksliai lygios 0,025 - apibendrintų Pareto skirstinių atveju arba 0,005 maks – stabiliųjų skirstinių atveju. Tai iliustruoja ir 6 priede pateiktos reikšmių lentelės.

IŠVADOS

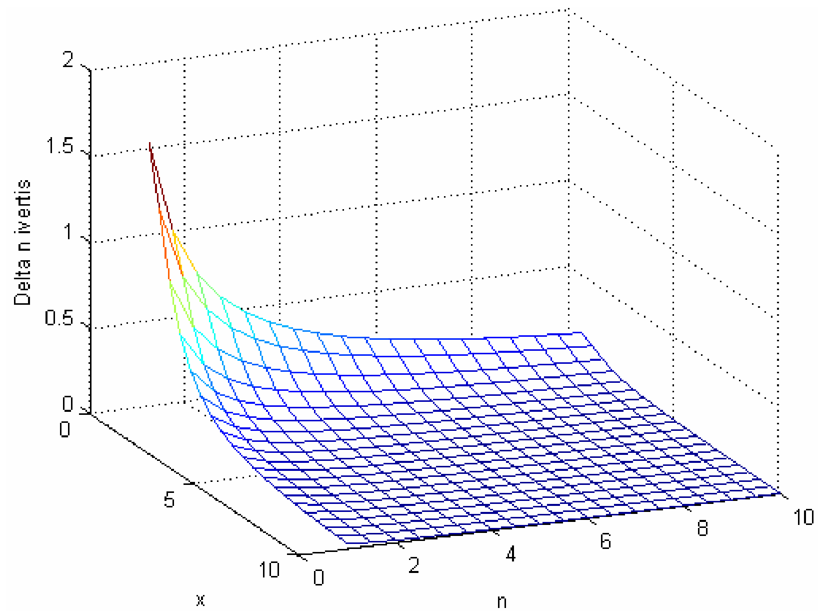
1. Maks – stabiliųjų skirstinių atveju konvergavimo greičio eilę n atžvilgiu apibrėžia komponenčių skaičiaus N_n (normuoto) konvergavimo greitis.
2. Nagrinėtasis antrasis atvejis, kai $z_n(x) = u(x)$ yra sudėtingesnis už maks – stabiliųjų skirstinių atvejį. Šiuo atveju konvergavimo greitį n atžvilgiu apibrėžia abi dedamosios.
3. Jeigu, nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai yra maks – stabilieji, tai, kai šių dydžių skaičius pasiskirstęs pagal geometrinį arba diskretųjį tolygųjį skirstinį, konvergavimo greičio netolygusis įvertis artėja prie nulio didėjant n ir (arba) x. Konvergavimo greičio įverčio eilė, atžvilgiu n yra $\frac{1}{n}$.
4. Jeigu, yra teisinga lygybė $z_n(x) = n(1 - F(xb_n + a_n)) = u(x)$, tai ją tenkinantiems apibendrintiems Pareto skirstiniams, netolygusis konvergavimo greičio įvertis artėja prie nulio didėjant n ir (arba) x, kai nepriklausomų atsitiktinių dydžių skaičius pasiskirstęs pagal geometrinį arba diskretųjį tolygųjį skirstinį.
5. Gautieji įverčiai patikslina konvergavimo greičio tyrimus gautus [2] ir supaprastina jų skaičiavimą.

LITERATŪRA

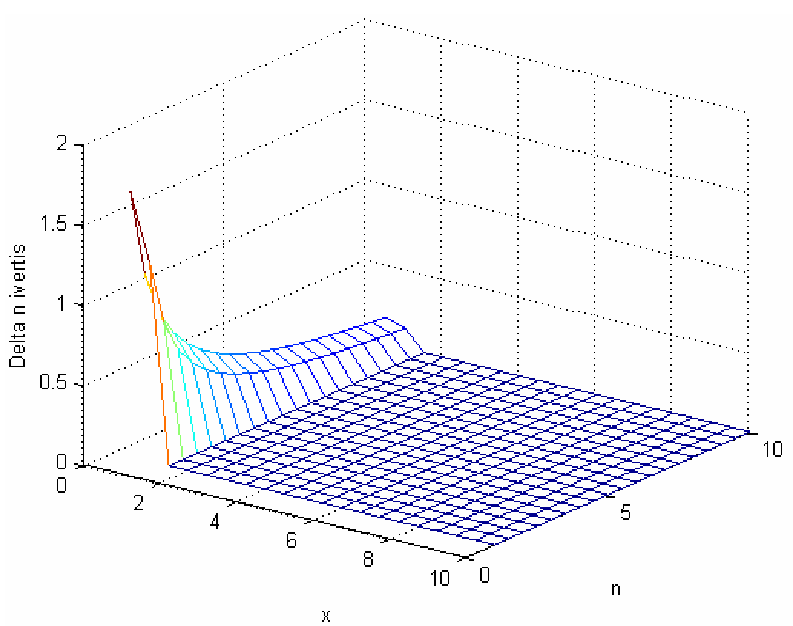
1. Aksomaitis A. Apie perkėlimo teoremą maksimumų schemoje. Lietuvos matematikų draugijos XXXVIII konferencijos darbai, Vilnius, Technika, 1997. 343 – 348 p.
2. Aksomaitis A. Rate of Convergence in the Transference Max – Limit Theorem. Prob. Theory and Math. Stat. Procedings. Vilnius, VSP, 1999. 1 – 4 p.
3. Aksomaitis A.Tikimybių teorija ir statistika. Kaunas, Technologija, 2002.
4. Brian R. Hunt, R. A guide to Matlab: for beginners and experienced users. [Cambridge], 2001.
5. Embrechts P. Kluppelberg C. Mikosch T. Modeling extremal events for insurance and finance. Berlin, 2001. 120-127 p.
6. Галамбош Я., Асимптотическая теория экстремалъных порядковых статистик. – М.: Наука, 1984, 48-55. с.
7. Гнеденко Б. В. Гнеденко Д. В. О распределениях Лапласа и логистическом как предельных в теории вероятностей.-Сердика, 1982. т. 8, 229-234 с.
8. Reiss R. D., Thomas M. Statistical Anglysis of Extreme Values. Berlin: Birkhauser, 2001. 3 - 25 p.
9. Pinkevičiūtė L., Aksomaitis A. Stabilieji maksimumų skirstiniai perkėlimo teoremoje. Taikomoji matematika – VI studentų konferencijos pranešimų programa. – Kaunas, Technologija, 2006. 55 – 56 p.
10. The 12th International Conference on Applied Stochastic Models and Data Anglysis (ASMDA 2007).

1 PRIEDAS. KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERČIŲ ANALIZĖ, KAI N_n PASISKIRSTĘS PAGAL GEOMETRINĮ SKIRSTINĮ

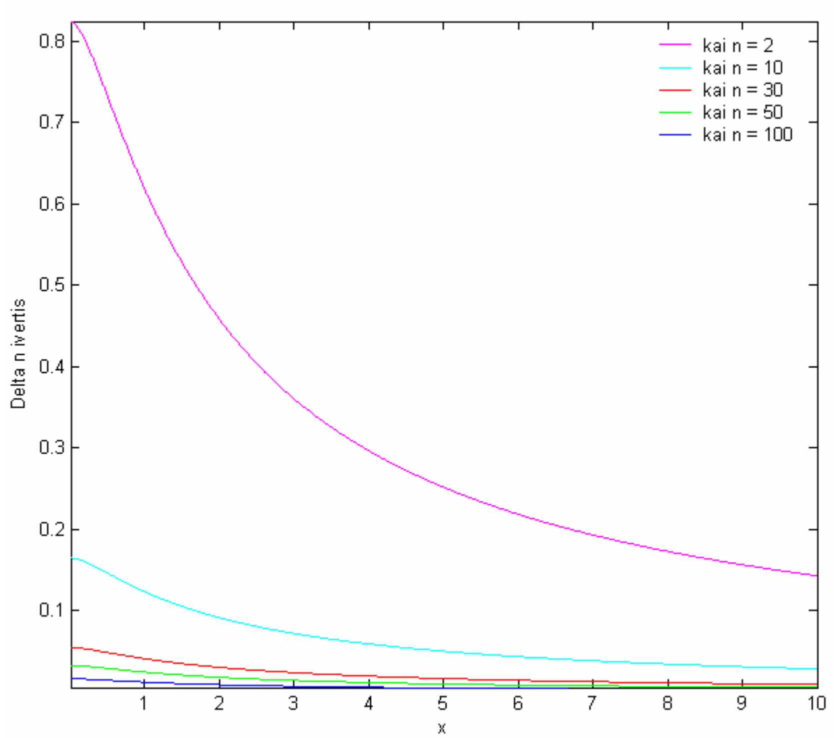
1) Freše skirstinio grafikai:



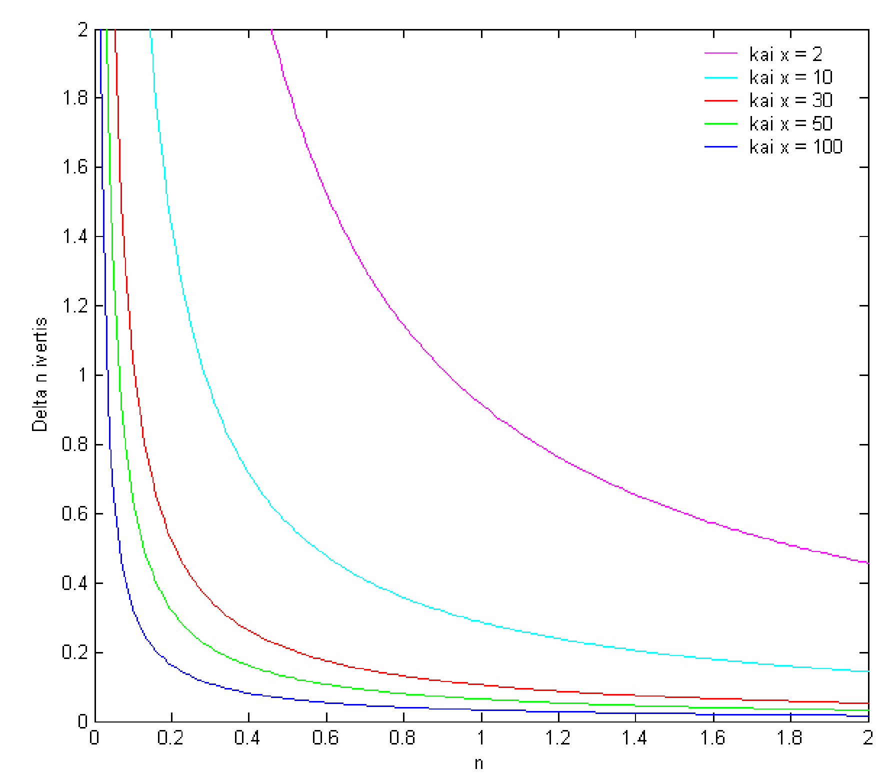
1 pav. $\Delta_{1,N}^{(1)}(x)$ **įvertis, kai γ = 2**



2 pav. $\Delta_{1,N}^{(1)}(x)$ **įvertis, kai γ = 50**

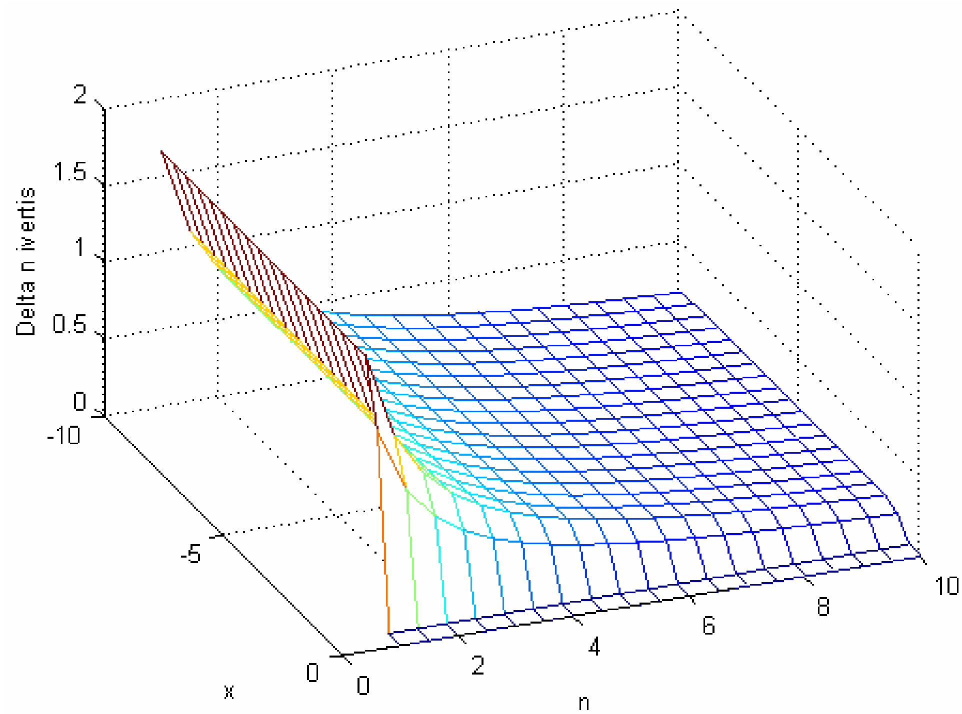


3 pav. $\Delta_{1,N}^{(1)}(x)$ **įvertis, kai n fiksuoti ir γ = 1**

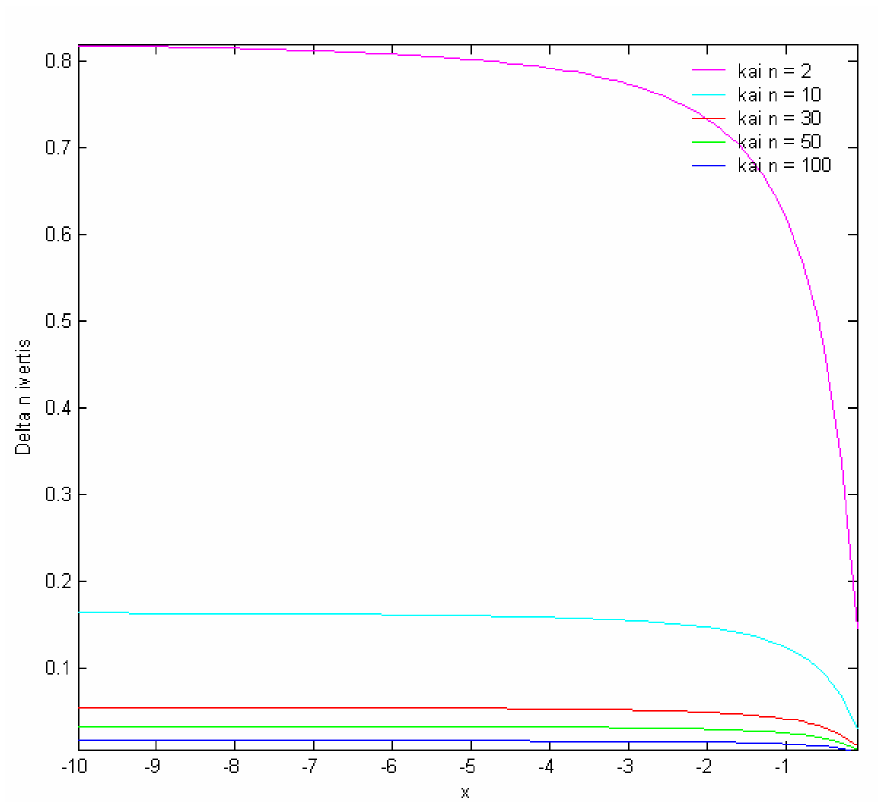


4 pav. $\Delta_{1,N}^{(1)}(x)$ **įvertis, kai x fiksuoti ir γ = 1**

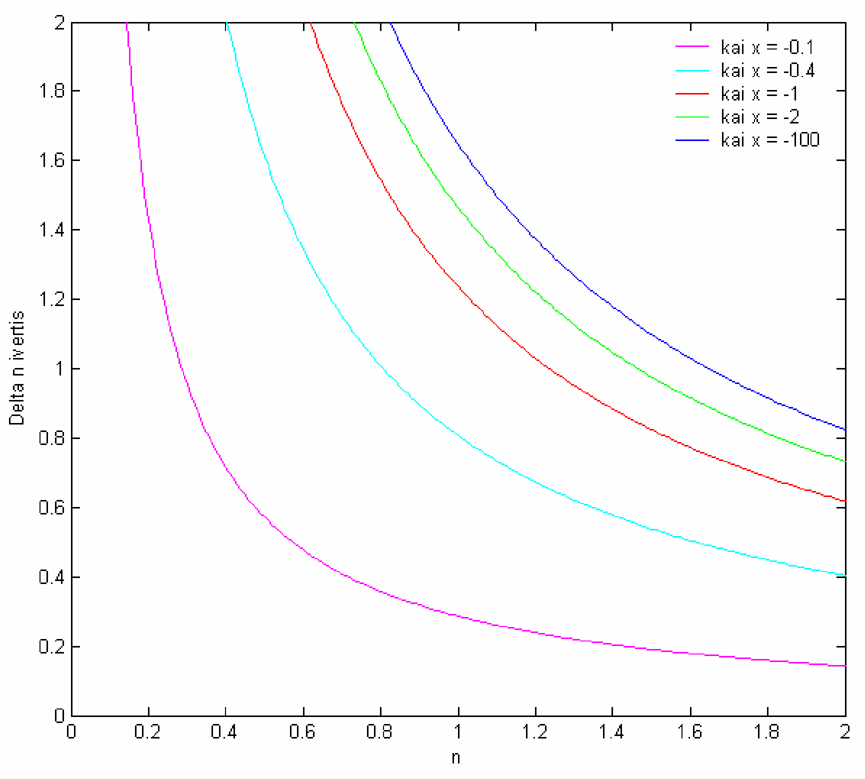
2) **Veibulo skirstinio grafikai:**



5 pav. $\Delta^{(1)}_{2,N}(x)$ **įvertis, kai γ = 50**

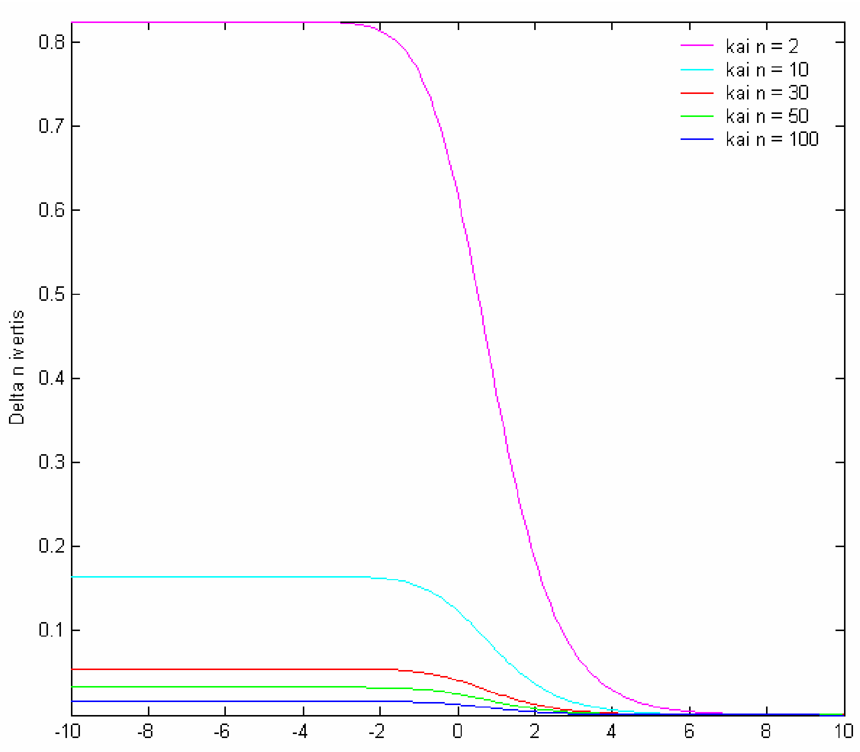


6 pav. $\Delta^{(1)}_{2,N}(x)$ **įvertis, kai n fiksuoti ir γ = 1**

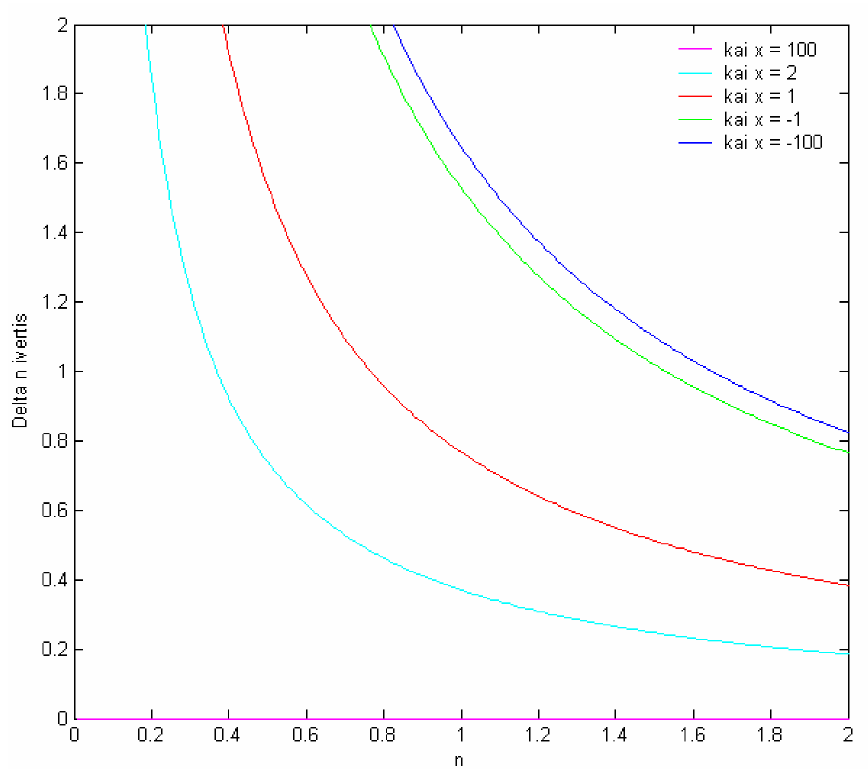


7 pav. $\Delta_{2,N}^{(1)}(x)$ **įvertis, kai x fiksuoti ir γ = 1**

3) Gumbelio skirstinio grafikai:

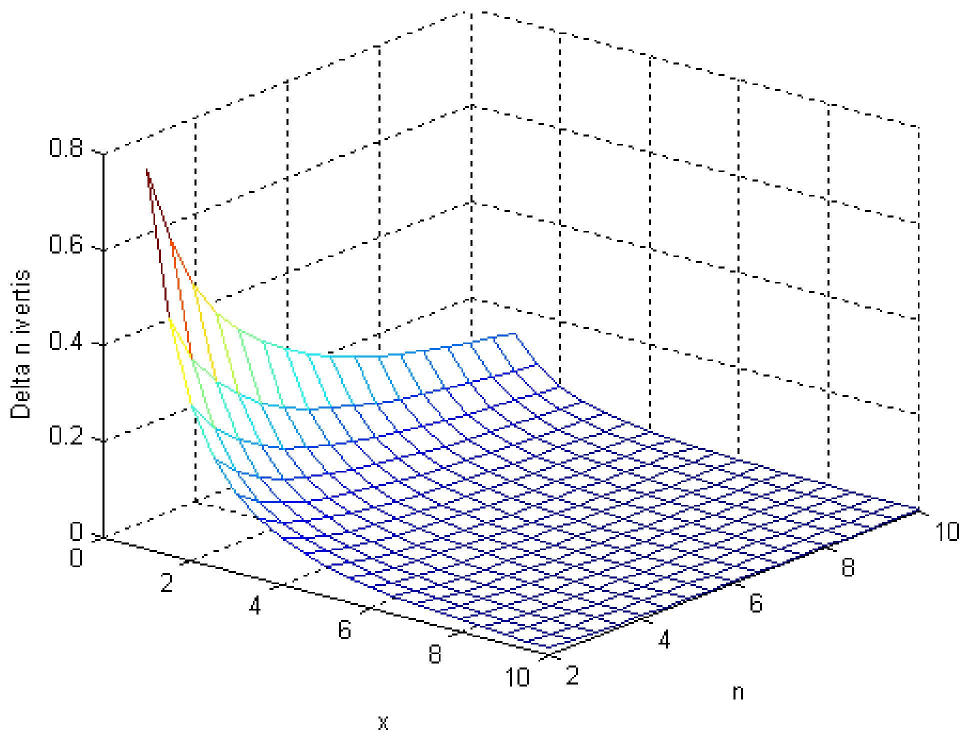


8 pav. $\Delta_{3,N}^{(1)}(x)$ **įvertis, kai n fiksuoti**

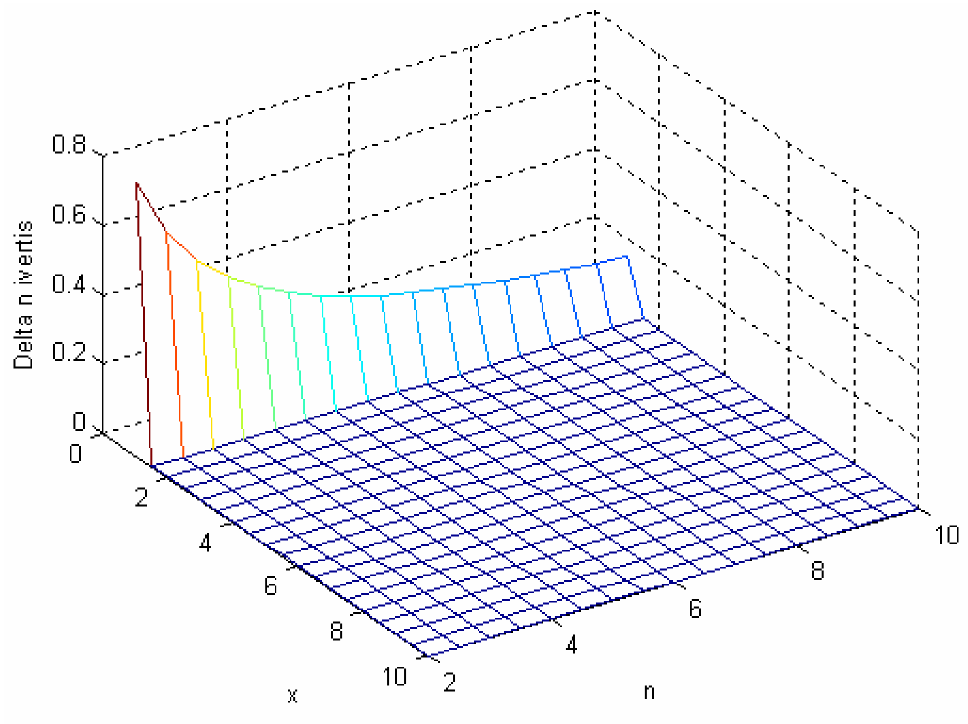


9 pav. $\Delta_{3,N}^{(1)}(x)$ **įvertis, kai x fiksuoti**

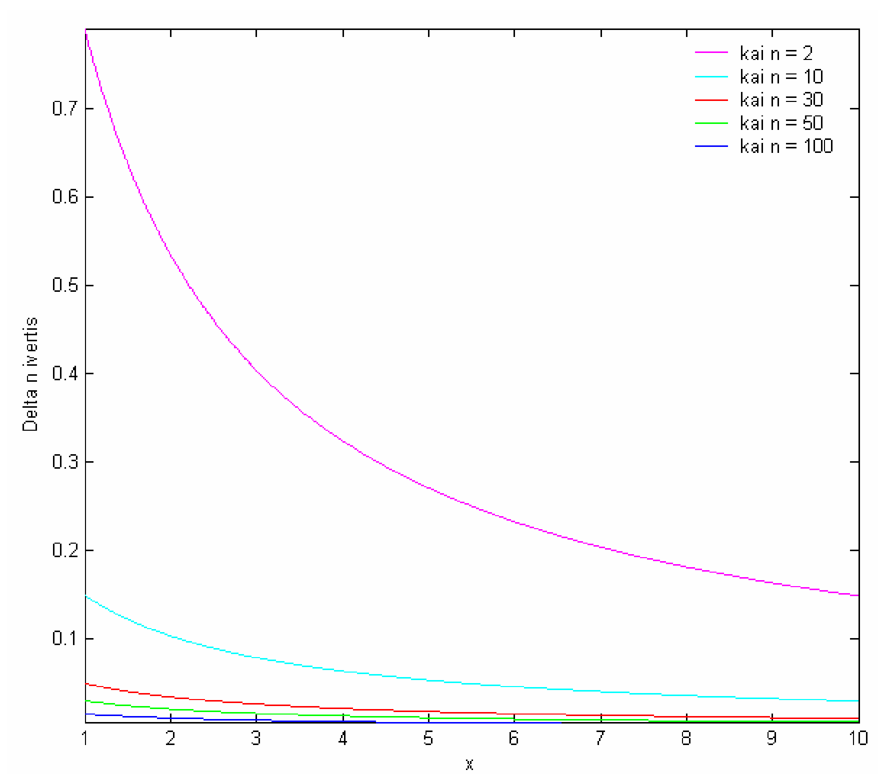
4) Pareto skirstinio grafikai:



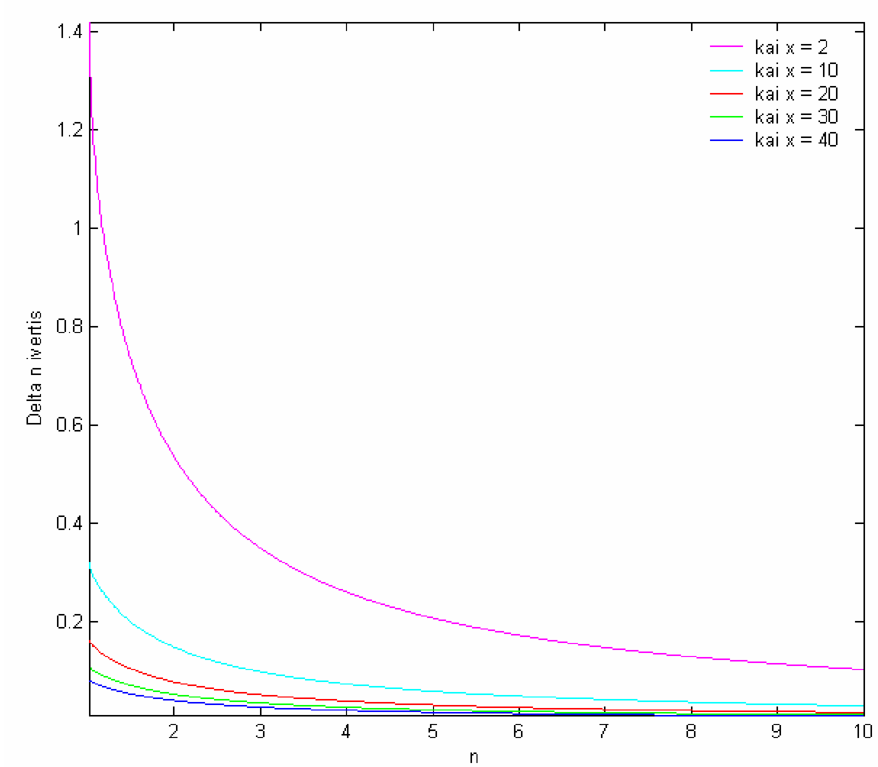
10 pav. $\Delta_{1,N}^{(2)}(x)$ **įvertis, kai α = 2**



11 pav. $\Delta_{1,N}^{(2)}(x)$ **įvertis, kai α = 50**

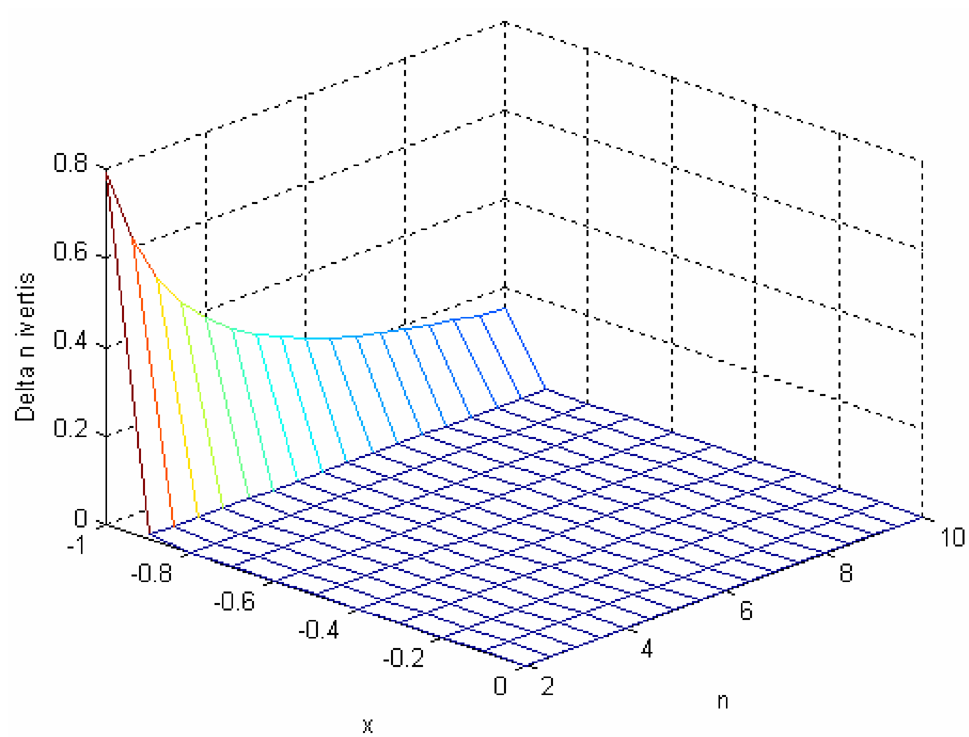


12 pav. $\Delta_{1,N}^{(2)}(x)$ **įvertis, kai n fiksuoti ir α = 1**

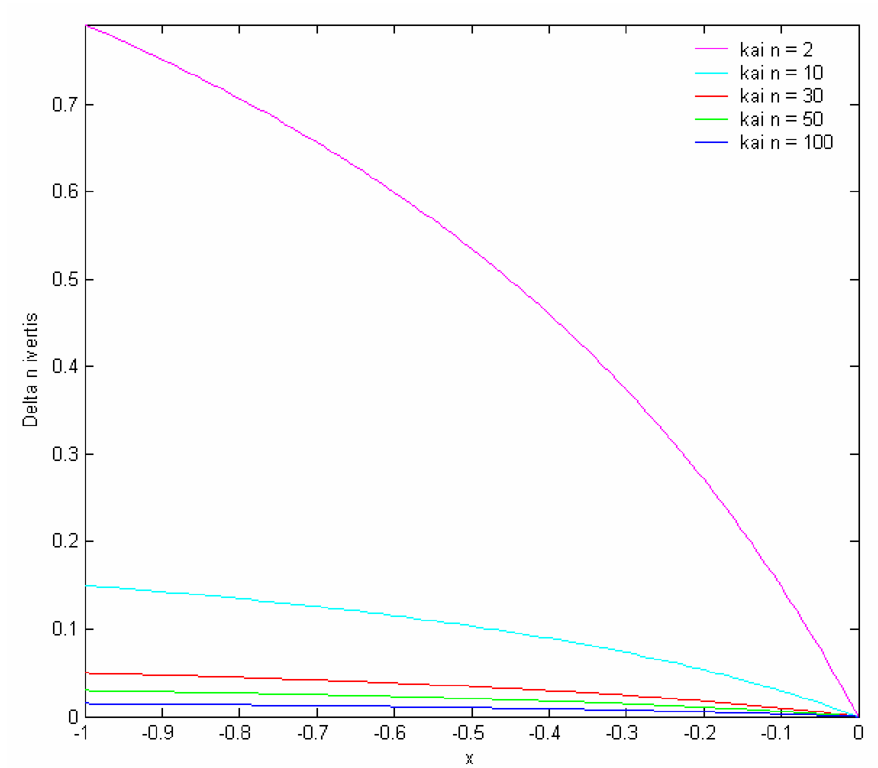


13 pav. $\Delta_{1,N}^{(2)}(x)$ **įvertis, kai x fiksuoti ir α = 1**

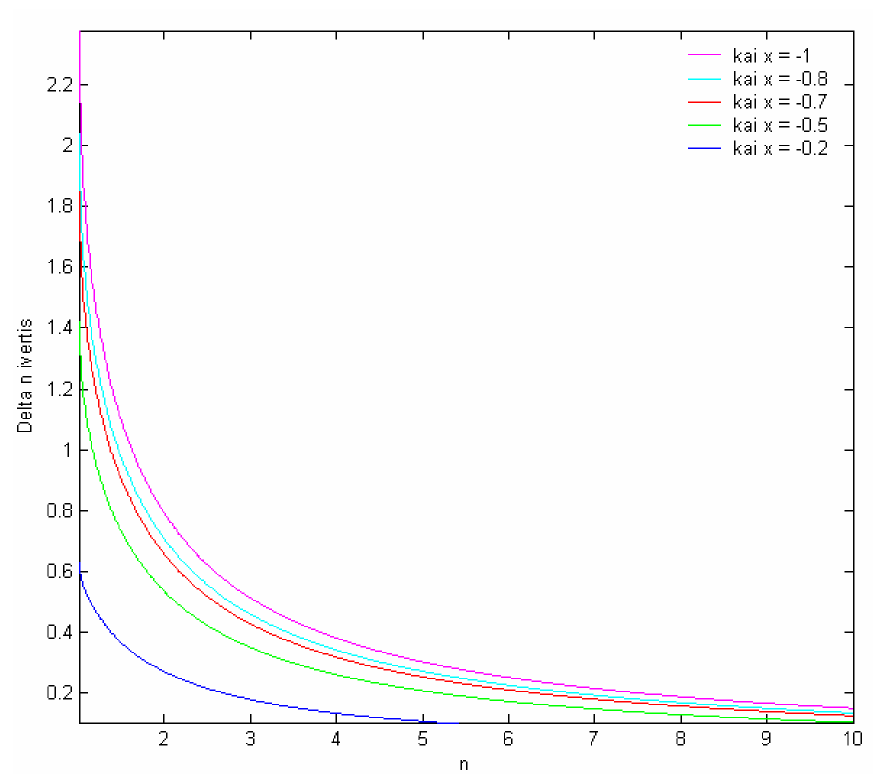
5) Beta skirstinio grafikai:



14 pav. $\Delta_{2,N}^{(2)}(x)$ **įvertis, kai α = 50**

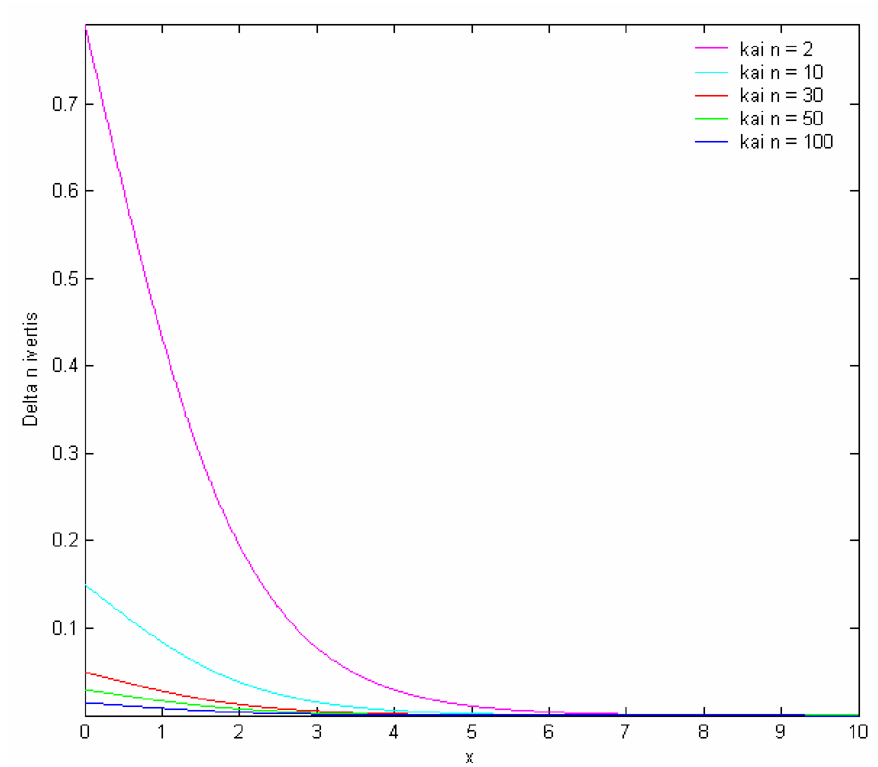


15 pav. $\Delta^{(2)}_{2,N}(x)$**įvertis, kai n fiksuoti ir α = 1**

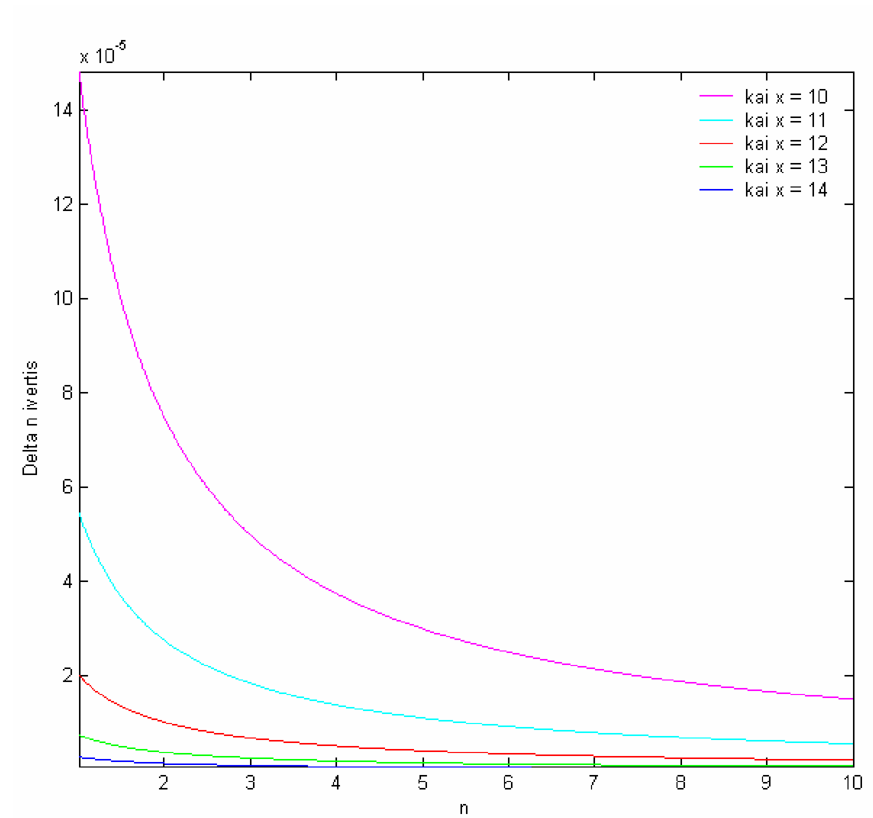


16 pav. $\Delta^{(2)}_{2,N}(x)$**įvertis, kai x fiksuoti ir α = 1**

6) Eksponentinio skirstinio grafikai:



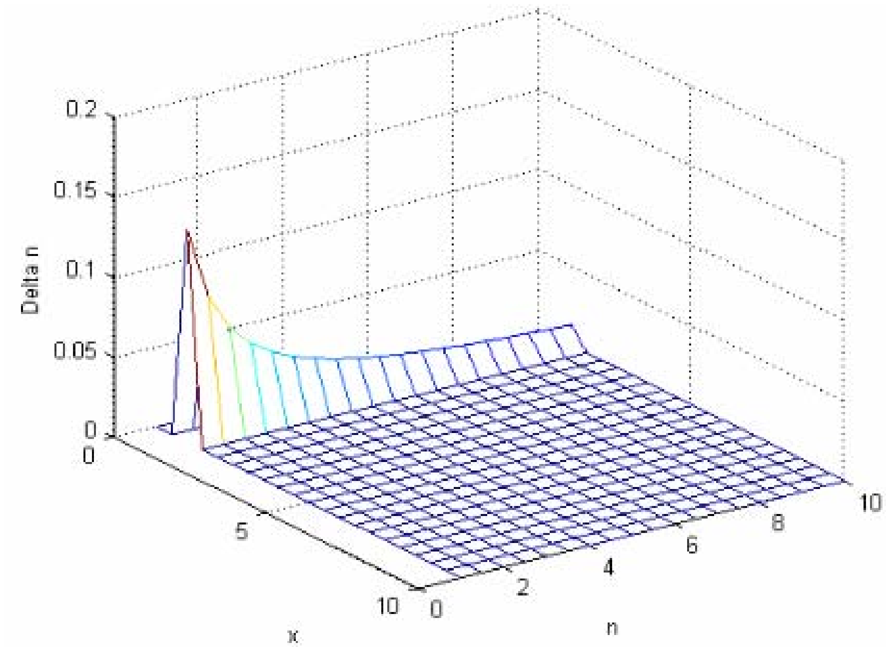
17 pav. $\Delta^{(2)}_{3,N}(x)$ **įvertis, kai n fiksuoti**



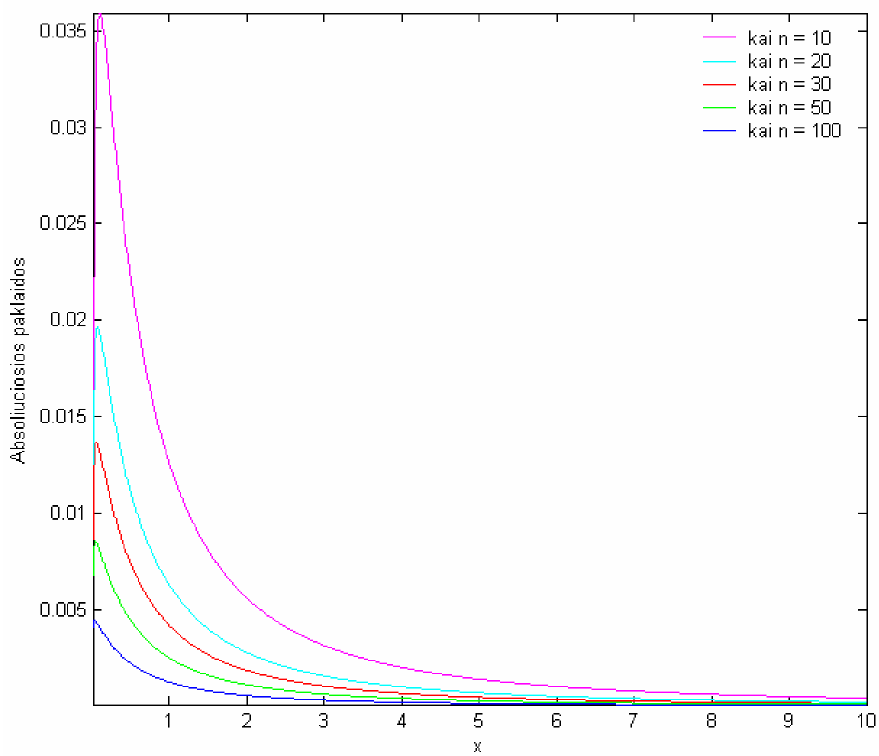
18 pav. $\Delta^{(2)}_{3,N}(x)$ **įvertis, kai x fiksuoti**

2 PRIEDAS. TIKSLIŲJŲ ABSOLIUČIŲJŲ PAKLAIDŲ ANALIZĖ, KAI N_n PASISKIRSTĘS PAGAL GEOMETRINĮ SKIRSTINĮ

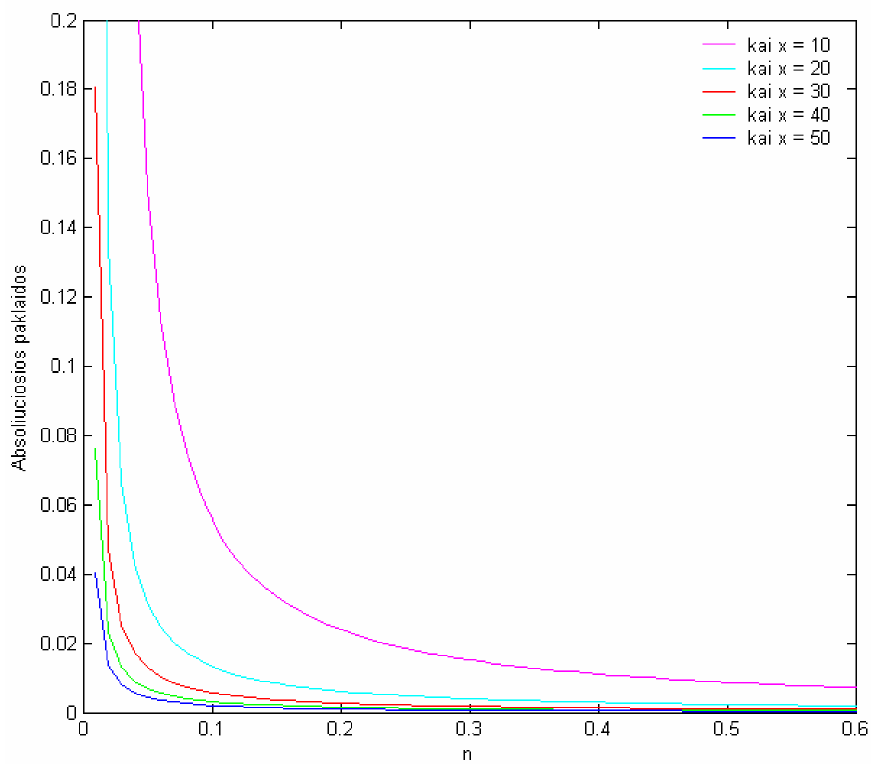
1) Freše skirstinio grafikai:



1 pav. $\Delta_{1,N}^{(1)}(x)$ **paklaidų paviršius, kai γ = 50**

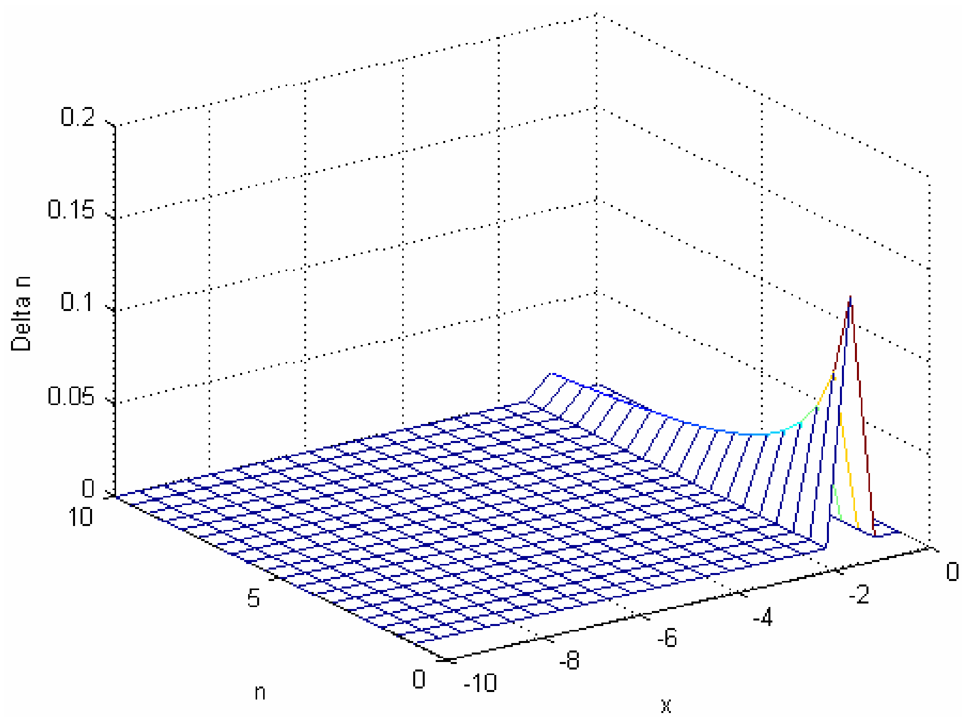


2 pav. $\Delta_{1,N}^{(1)}(x)$ **paklaidos, kai n fiksuoti ir γ = 1**

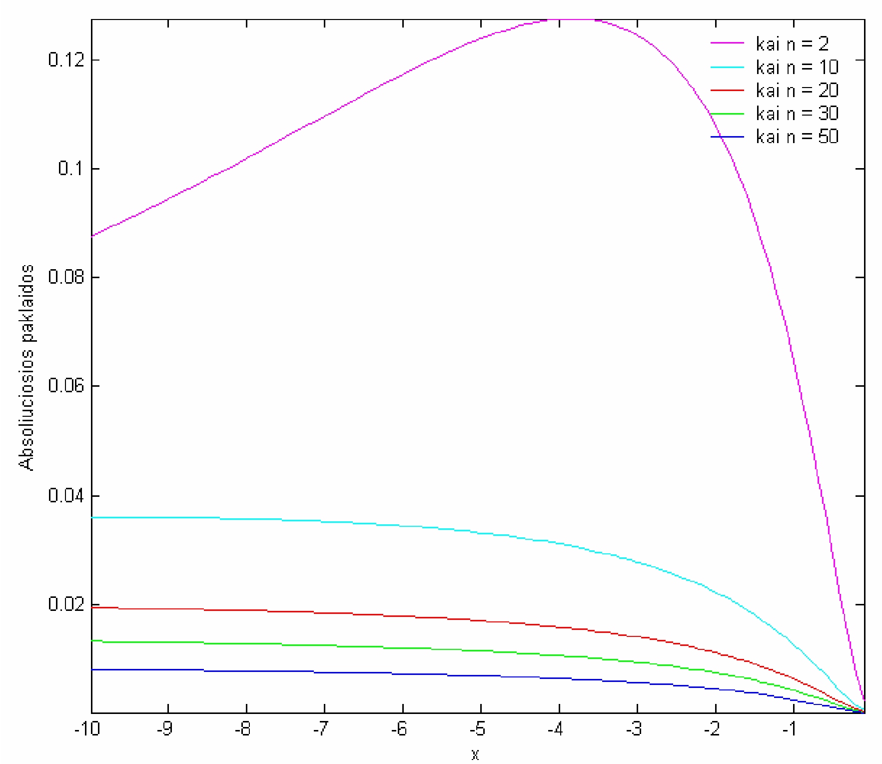


3 pav. $\Delta_{1,N}^{(1)}(x)$ paklaidos, kai x fiksuoti ir γ = 1

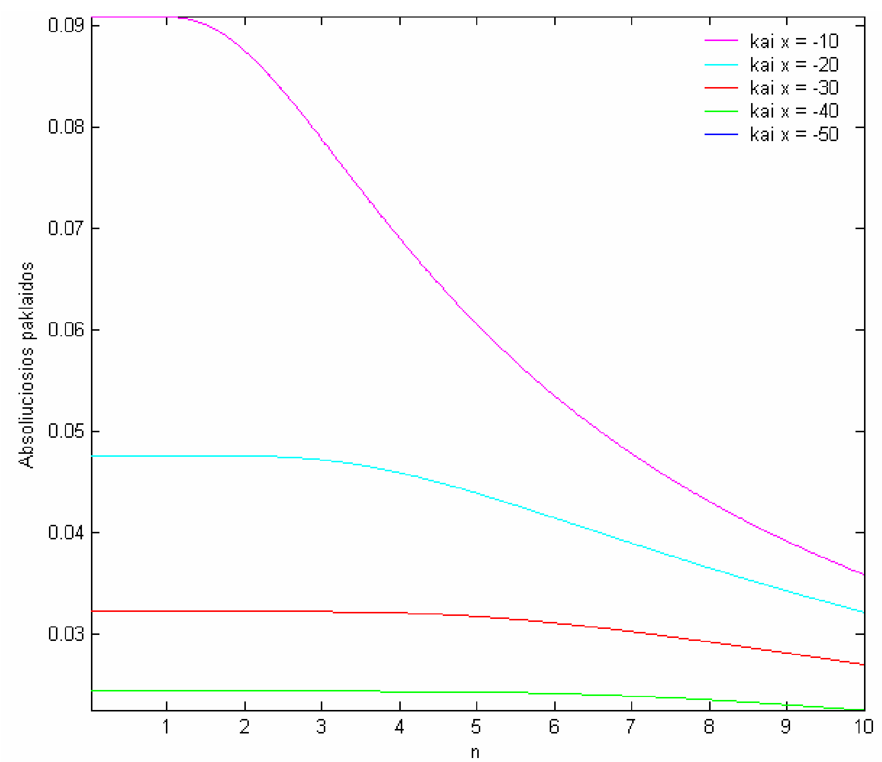
2) Veibulo skirstinio grafikai:



4 pav. $\Delta_{2,N}^{(1)}(x)$ paklaidų paviršius, kai γ = 50

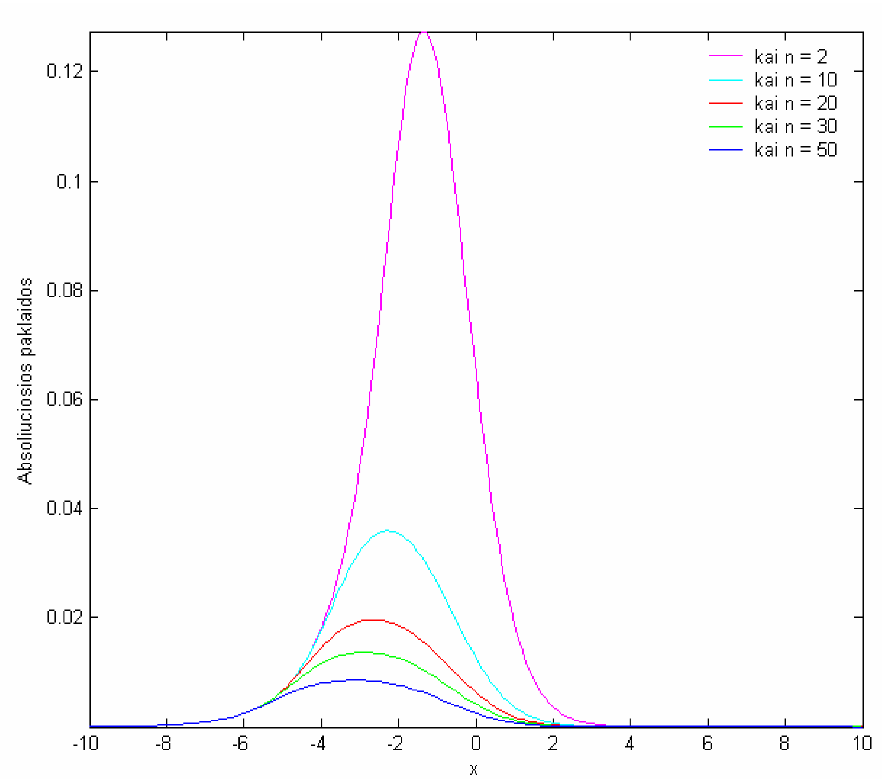


5 pav. $\Delta_{2,N}^{(1)}(x)$ **paklaidos, kai n fiksuoti ir γ = 1**

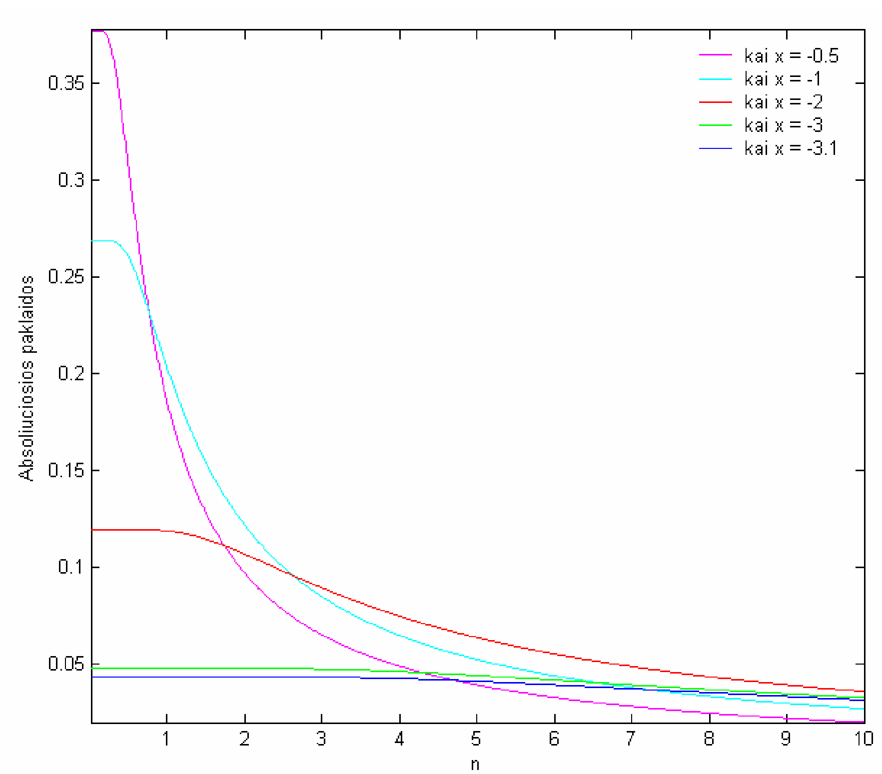


6 pav. $\Delta_{2,N}^{(1)}(x)$ **paklaidos, kai x fiksuoti ir γ = 1**

3) Gumbelio skirstinio grafikai:

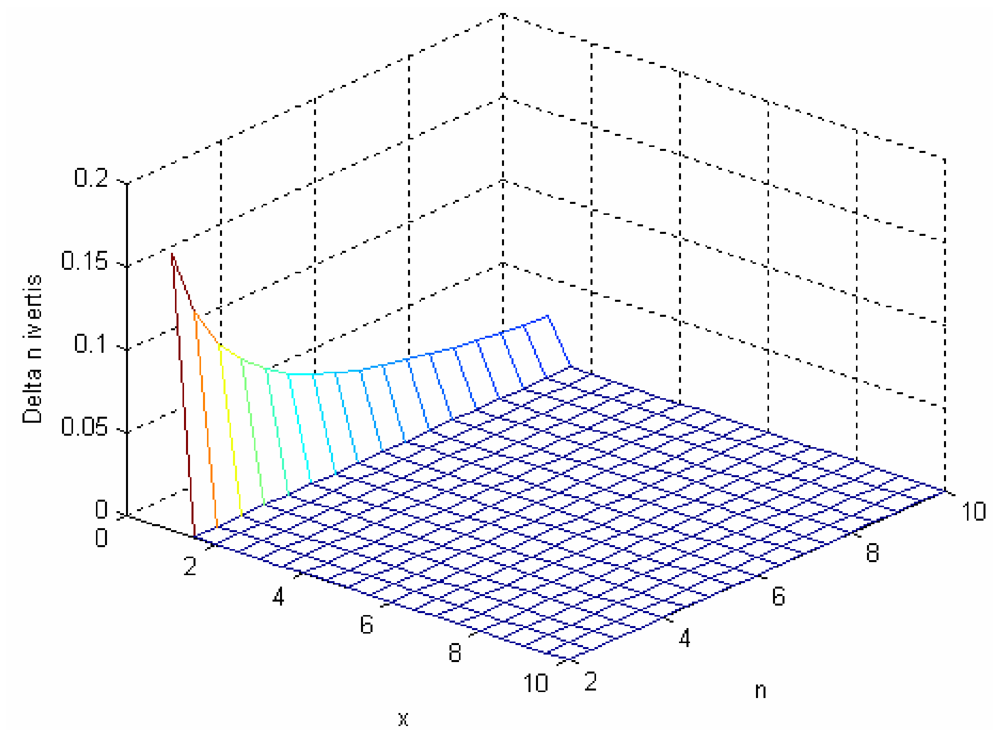


7 pav. $\Delta_{3,N}^{(1)}(x)$ **paklaidos, kai n fiksuoti**

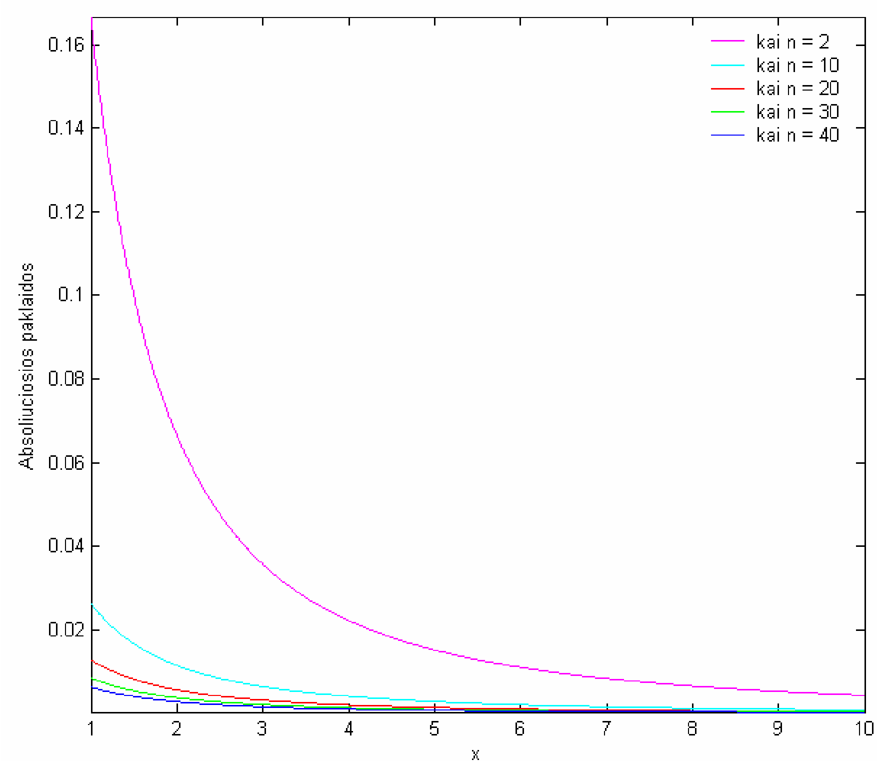


8 pav. $\Delta_{3,N}^{(1)}(x)$ **paklaidos, kai x fiksuoti**

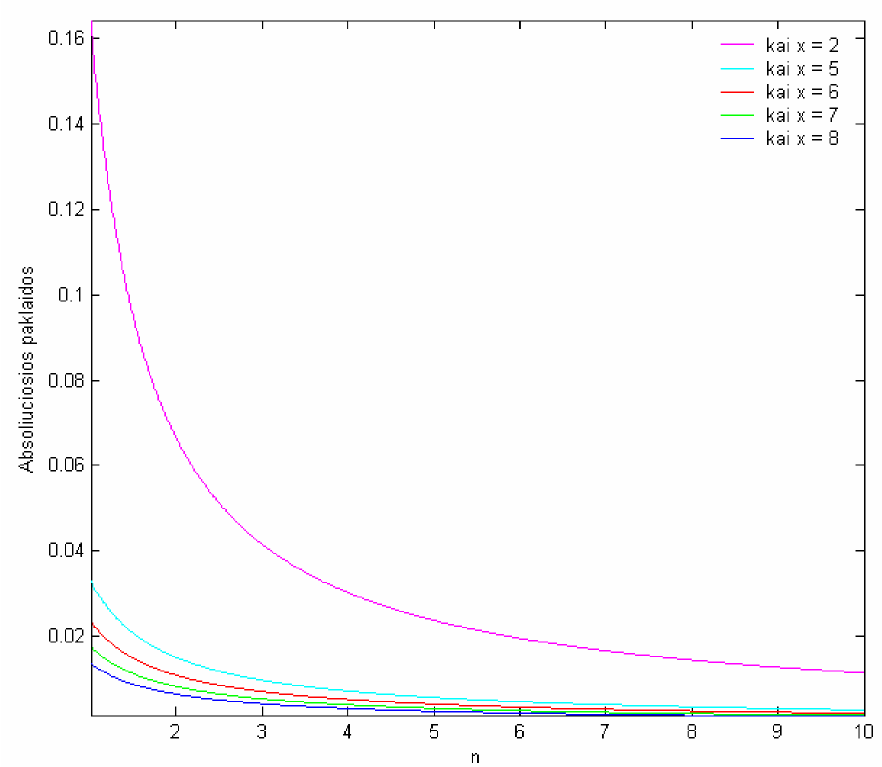
4) Pareto skirstinio grafikai:



9 pav. $\Delta_{1,N}^{(2)}(x)$ **paklaidų paviršius, kai α = 50**

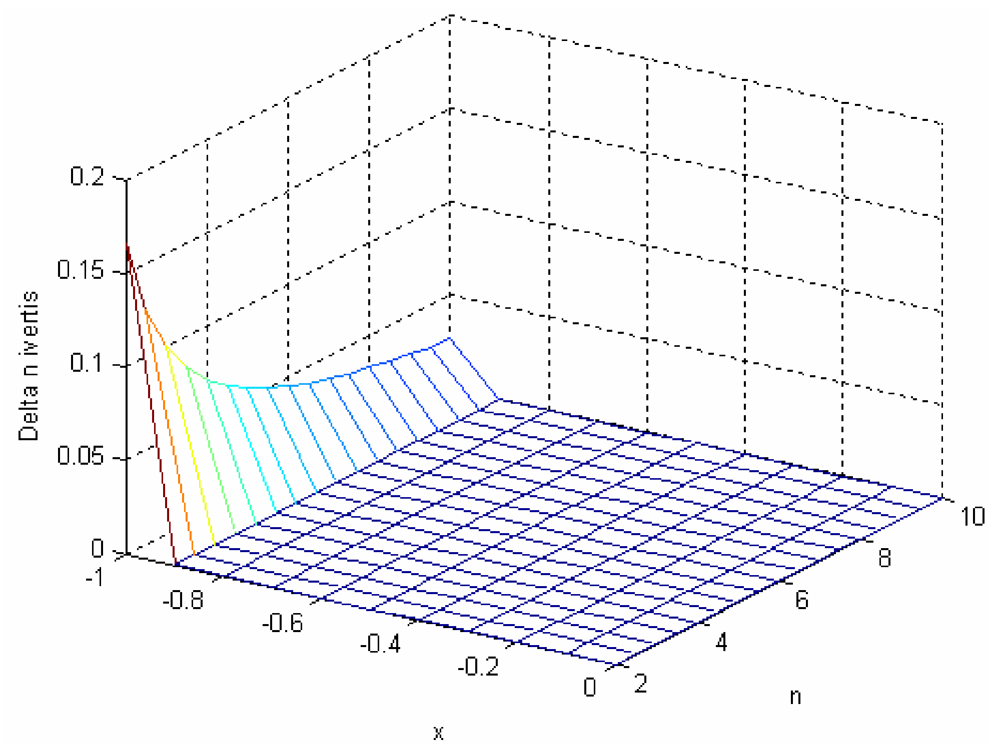


10 pav. $\Delta_{1,N}^{(2)}(x)$ **paklaidos, kai n fiksuoti ir α = 1**

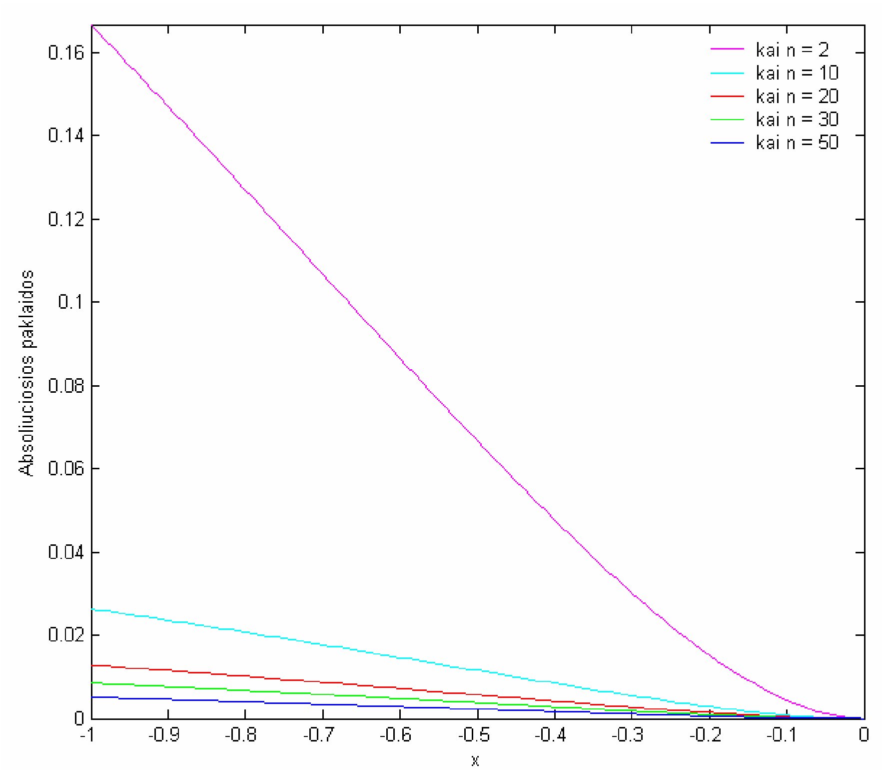


11 pav. $\Delta_{1,N}^{(2)}(x)$ paklaidos, kai x fiksuoti ir α = 1

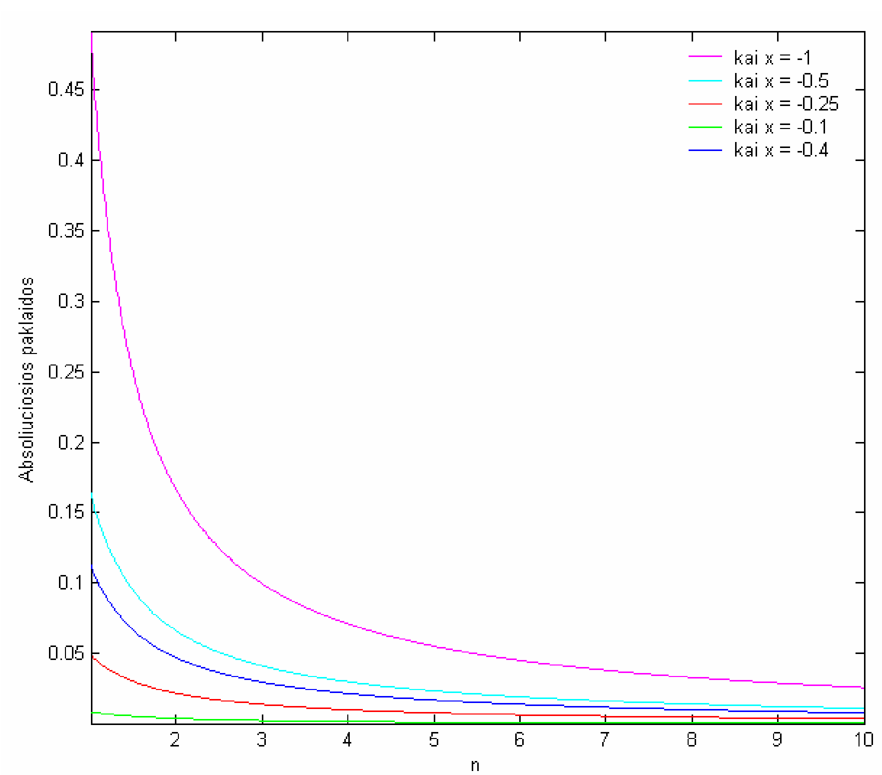
5) Beta skirstinio grafikai:



12 pav. $\Delta_{2,N}^{(2)}(x)$ paklaidos paviršius, kai α = 50

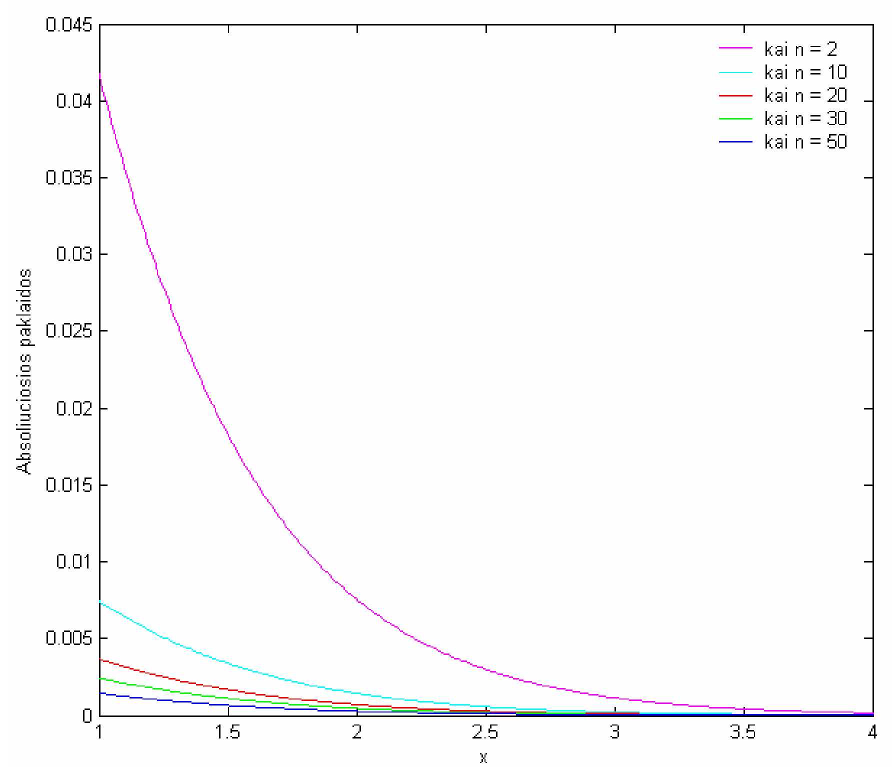


13 pav. $\Delta_{2,N}^{(2)}(x)$ paklaidos, kai n fiksuoti ir α = 1

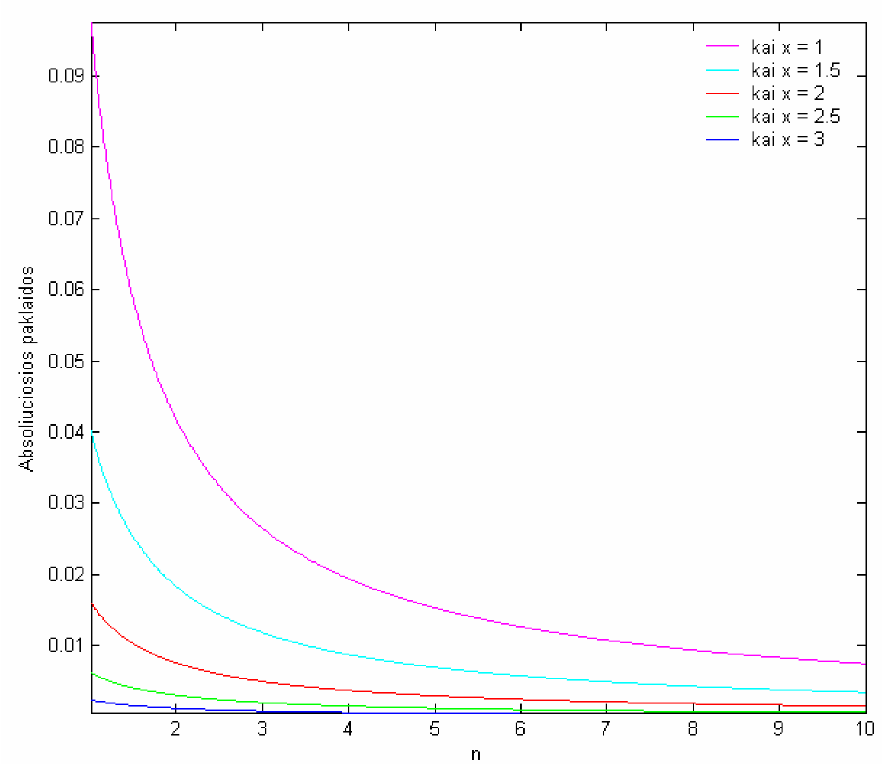


14 pav. $\Delta_{2,N}^{(2)}(x)$ paklaidos, kai x fiksuoti ir α = 1

6) Eksponentinio skirstinio grafikai:



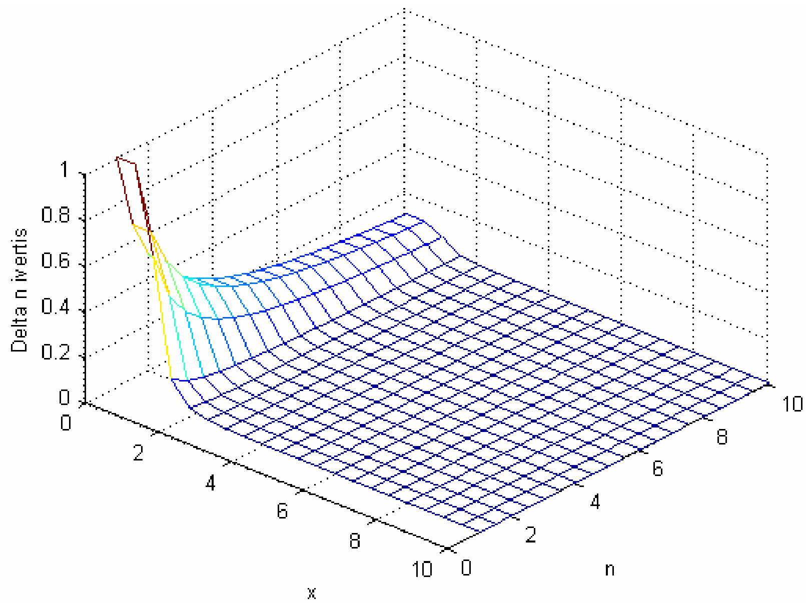
15 pav. $\Delta_{3,N}^{(2)}(x)$ **paklaidos, kai n fiksuoti**



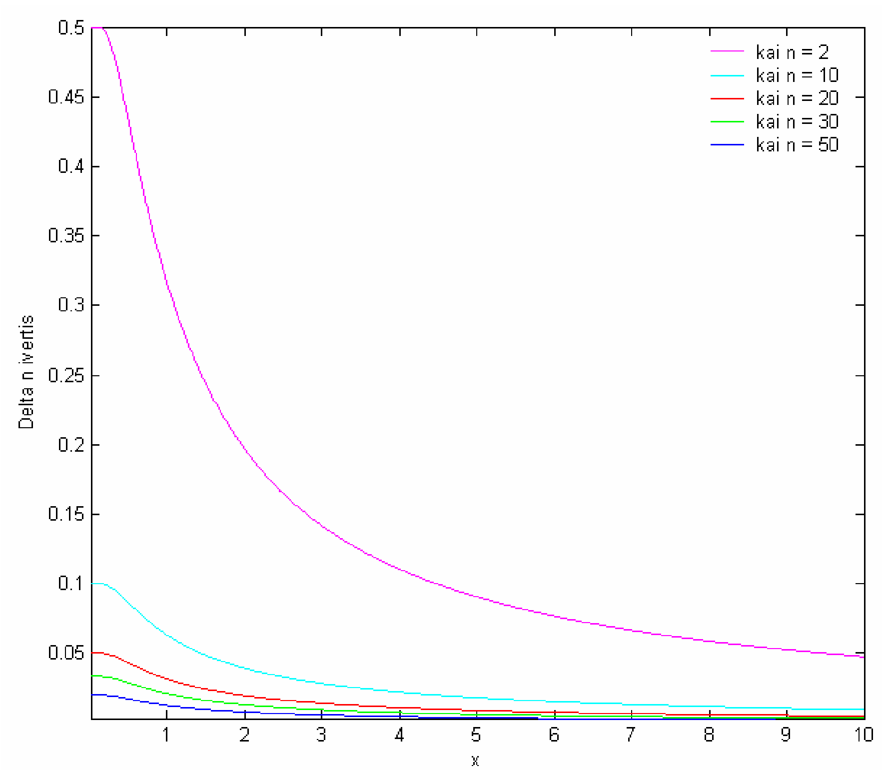
16 pav. $\Delta_{3,N}^{(2)}(x)$ **paklaidos, kai x fiksuoti**

3 PRIEDAS. KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERČIŲ ANALIZĖ, KAI N_n YRA DISKRETUSIS TOLYGUSIS SKIRSTINYS

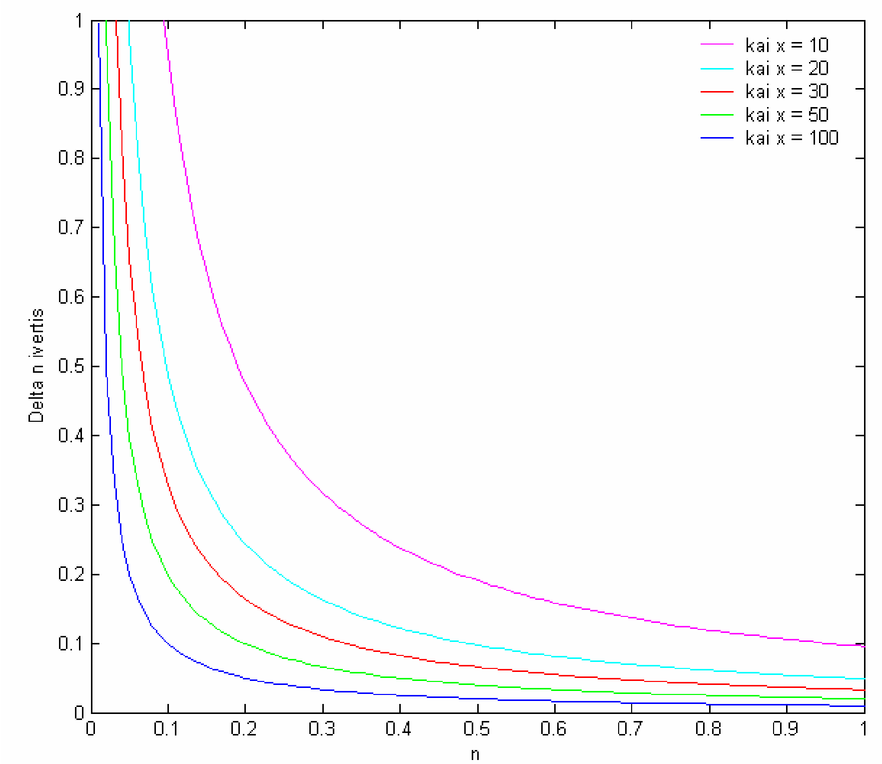
1) **Freše skirstinio grafikai:**



1 pav. $\Delta^{(1)}_{1,N}(x)$ **įvertis, kai γ = 5**

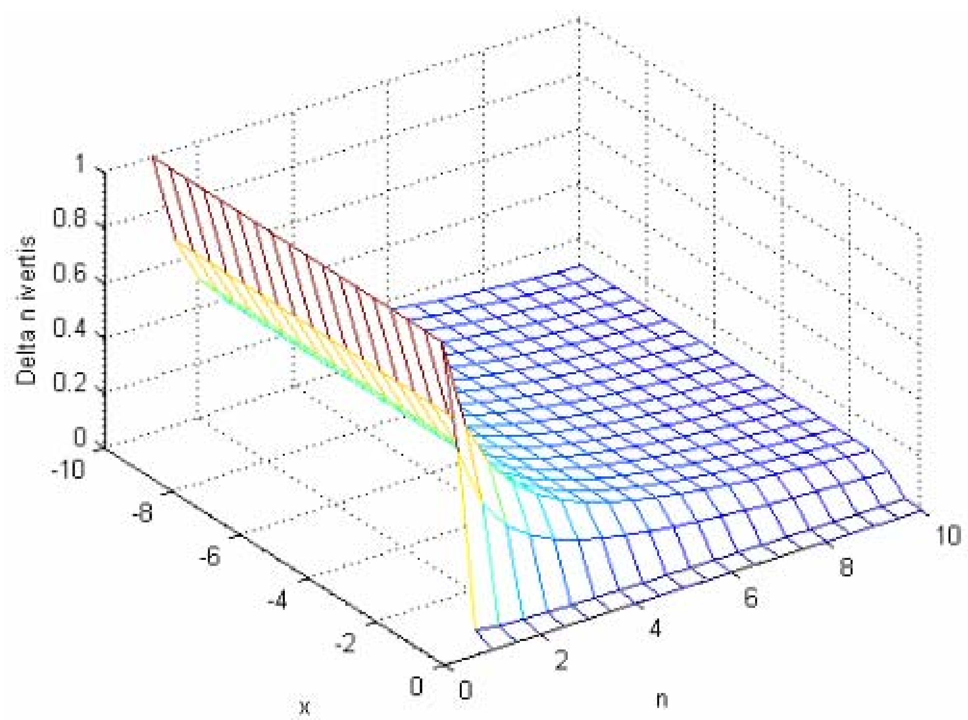


2 pav. $\Delta^{(1)}_{1,N}(x)$ **įvertis, kai n fiksuoti ir γ = 1**

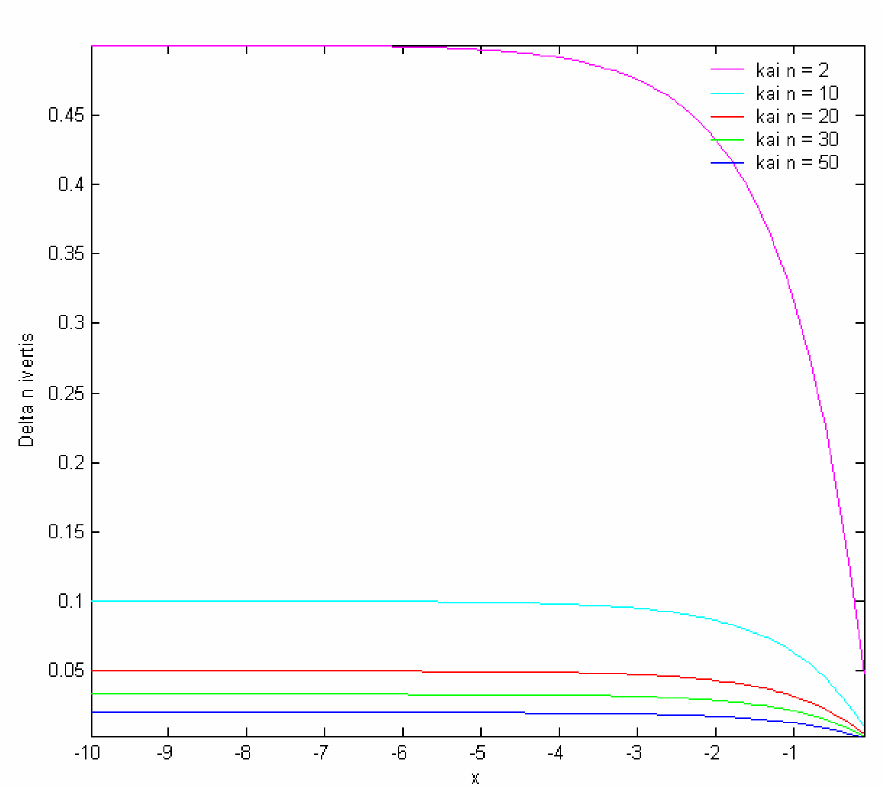


3 pav. $\Delta_{1,N}^{(1)}(x)$ **įvertis, kai x fiksuoti ir γ = 1**

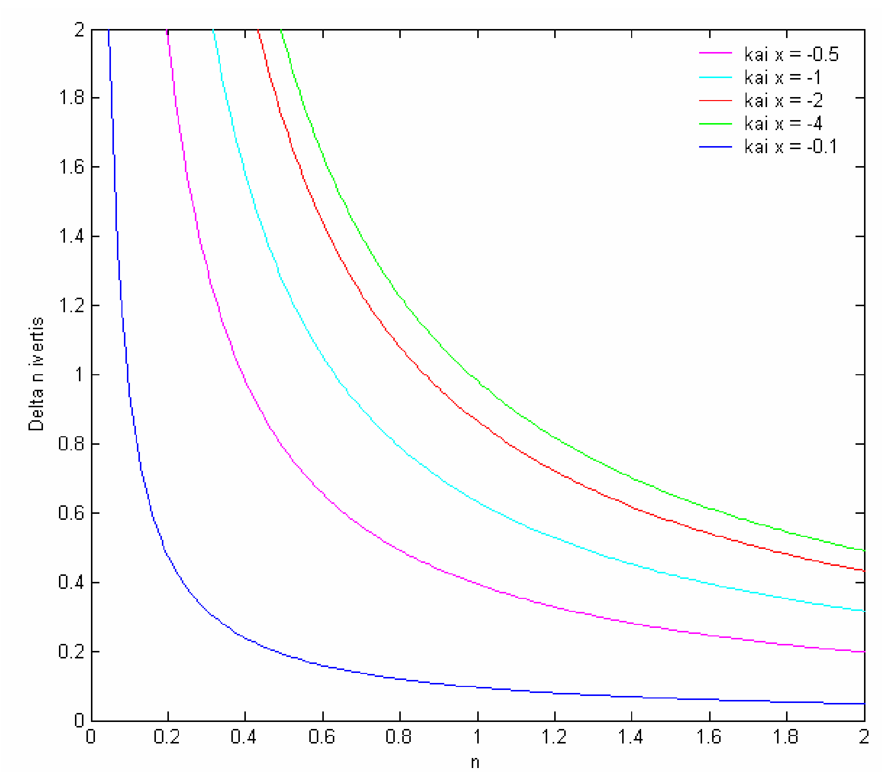
2) Veibulo skirstinio grafikai:



4 pav. $\Delta_{2,N}^{(1)}(x)$**įvertis, kai γ = 5**

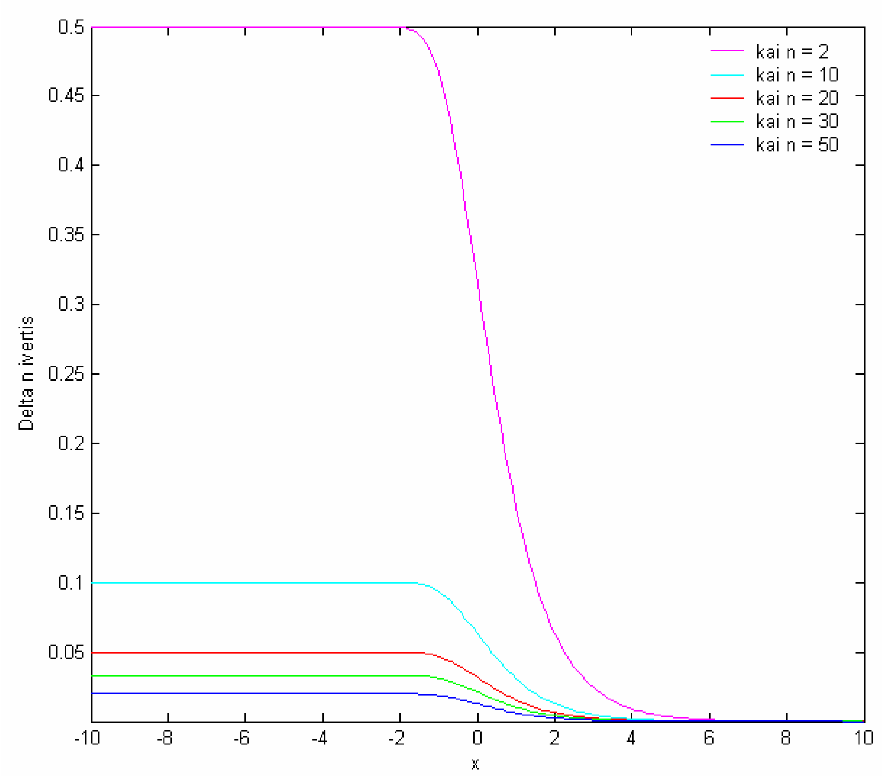


5 pav. $\Delta_{2,N}^{(1)}(x)$ **įvertis, kai n fiksuoti ir γ = 1**

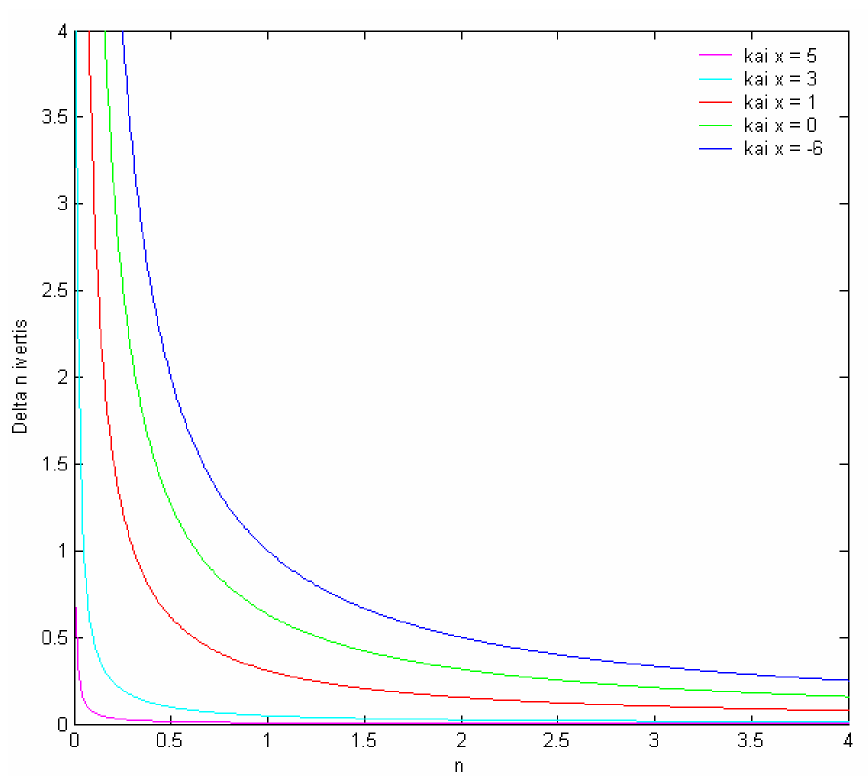


6 pav. $\Delta_{2,N}^{(1)}(x)$ **įvertis, kai x fiksuoti ir γ = 1**

3) Gumbelio skirstinio grafikai:

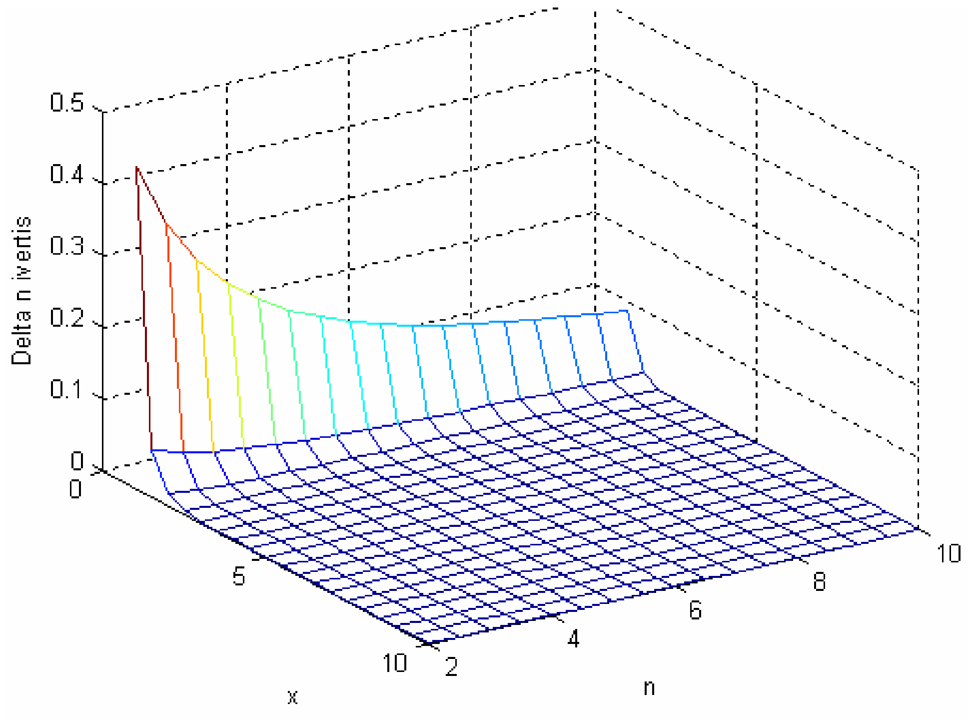


7 pav. $\Delta_{3,N}^{(1)}(x)$ **įvertis, kai n fiksuoti**

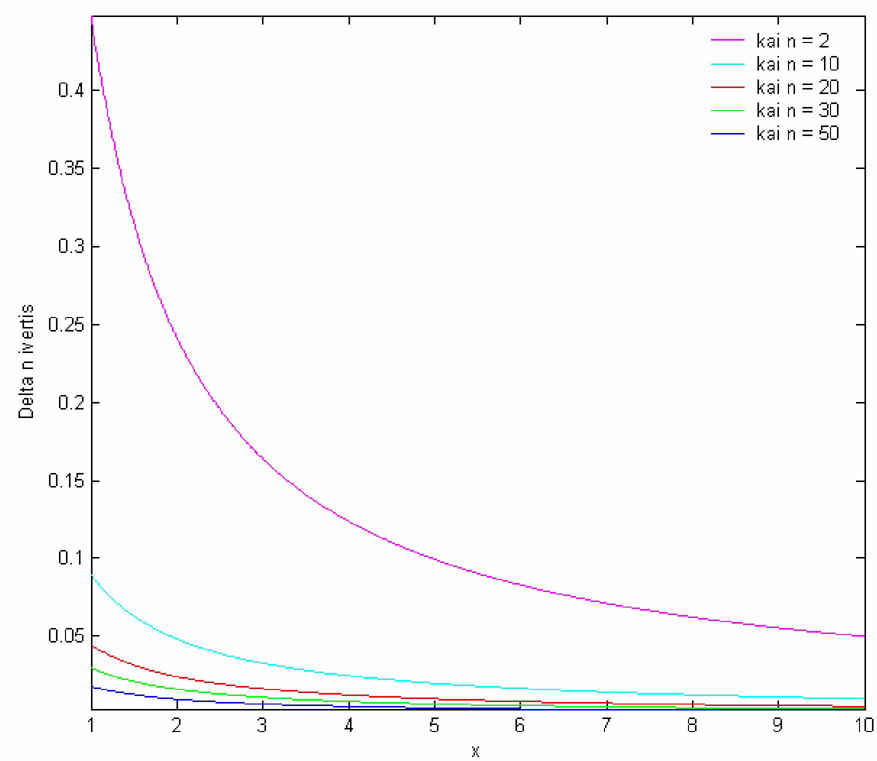


8 pav. $\Delta_{3,N}^{(1)}(x)$**įvertis, kai x fiksuoti**

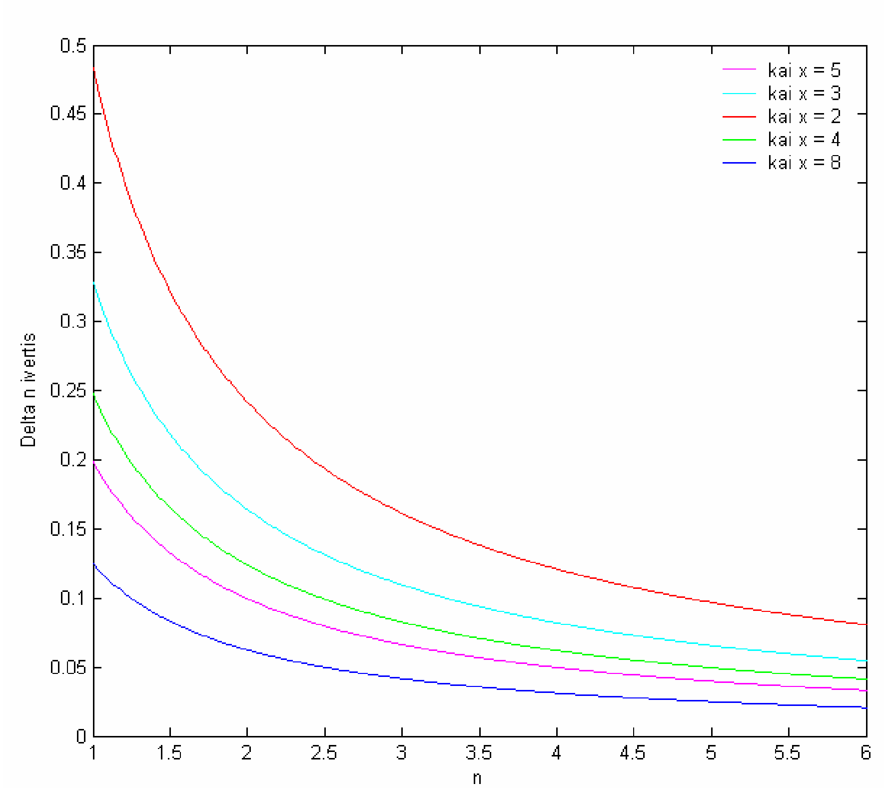
4) Pareto skirstinio grafikai:



9 pav. $\Delta_{1,N}^{(2)}(x)$ **įvertis, kai α = 5**

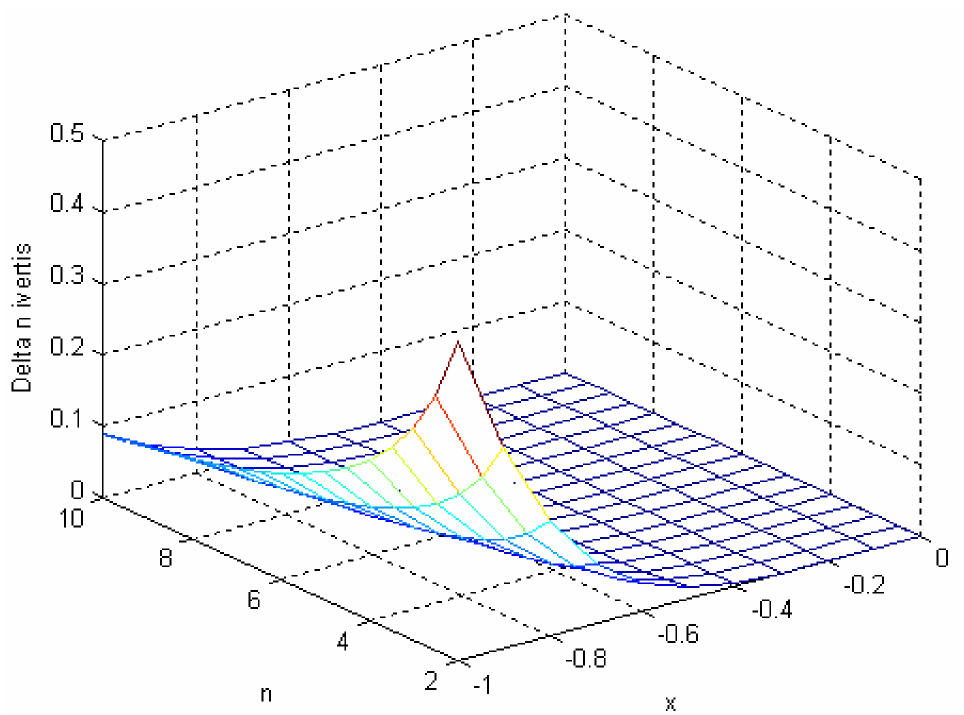


10 pav. $\Delta_{1,N}^{(2)}(x)$ **įvertis, kai n fiksuoti ir α = 1**

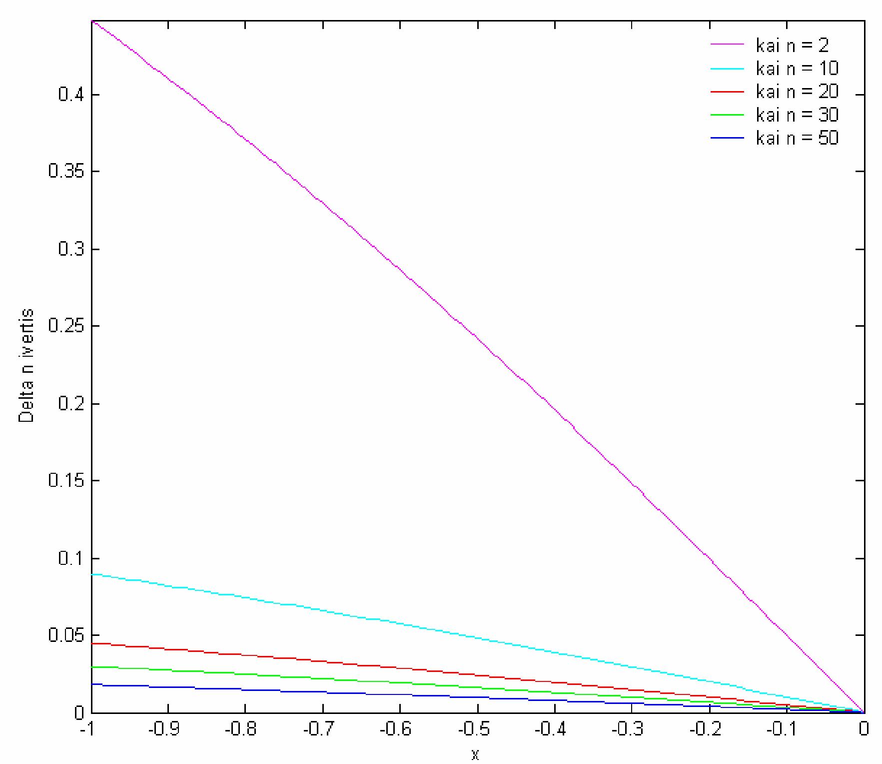


11 pav. $\Delta_{1,N}^{(2)}(x)$ **įvertis, kai x fiksuoti ir α = 1**

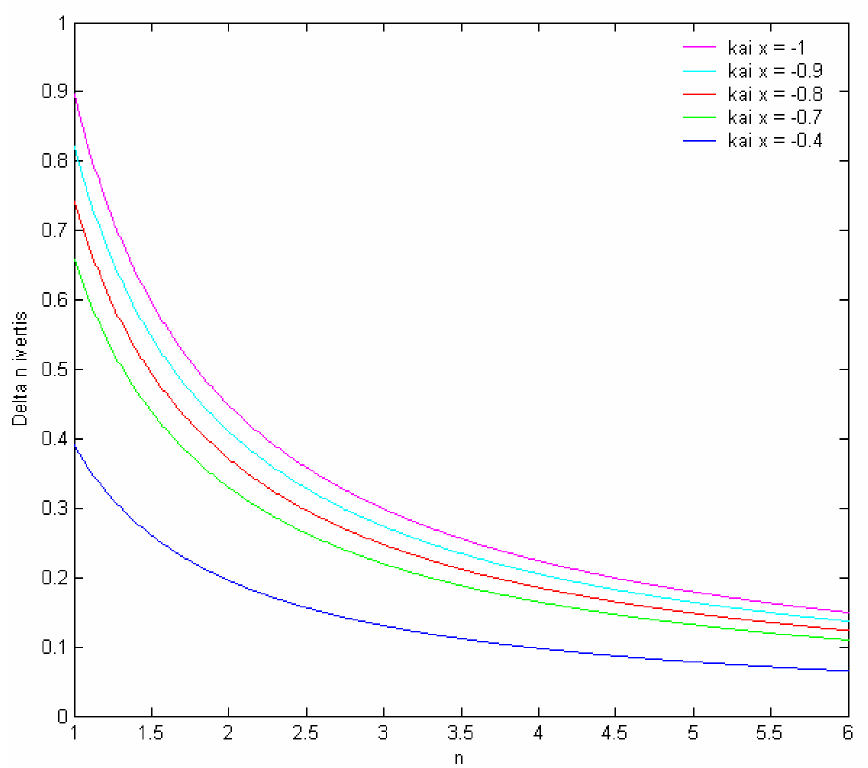
5) Beta skirstinio grafikai:



12 pav. $\Delta_{2,N}^{(2)}(x)$ **įvertis, kai α = 5**

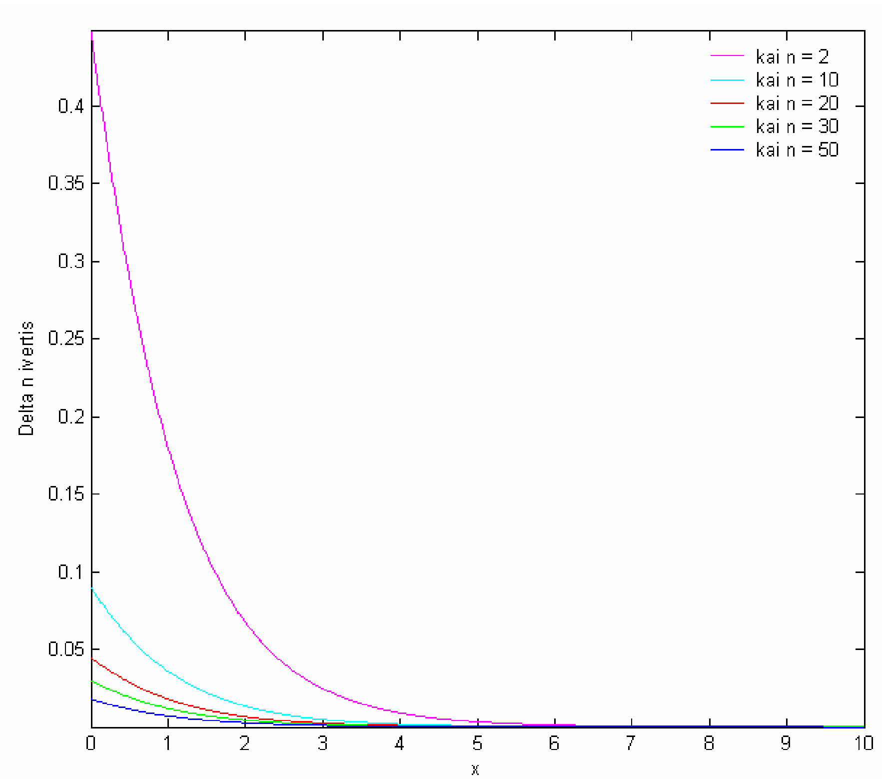


13 pav. $\Delta_{2,N}^{(2)}(x)$ **įvertis, kai n fiksuoti ir α = 1**

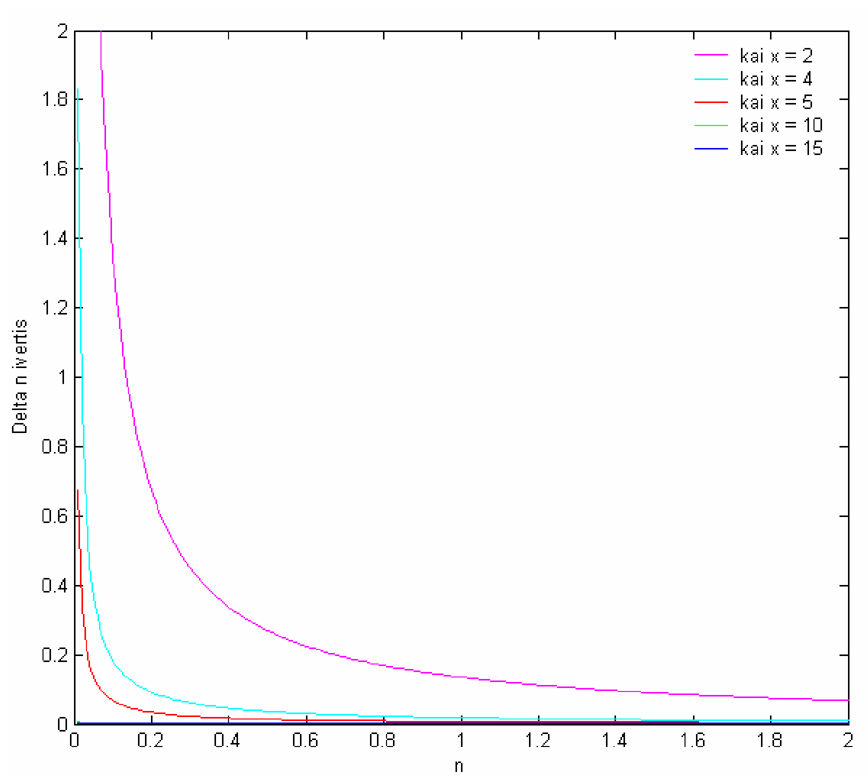


14 pav. $\Delta_{2,N}^{(2)}(x)$ **įvertis, kai x fiksuoti ir α = 1**

6) Eksponentinio skirstinio grafikai:



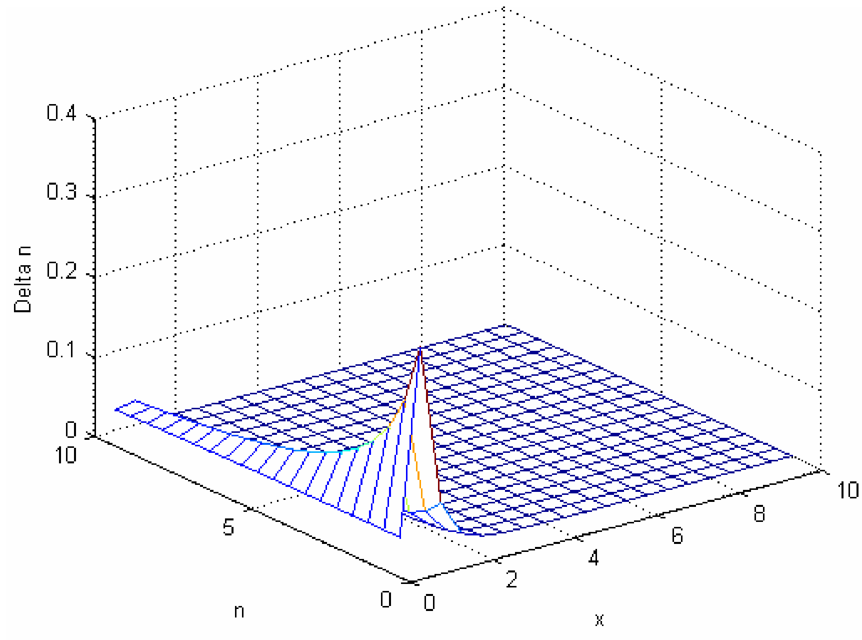
15 pav. $\Delta_{3,N}^{(2)}(x)$ **įvertis, kai n fiksuoti**



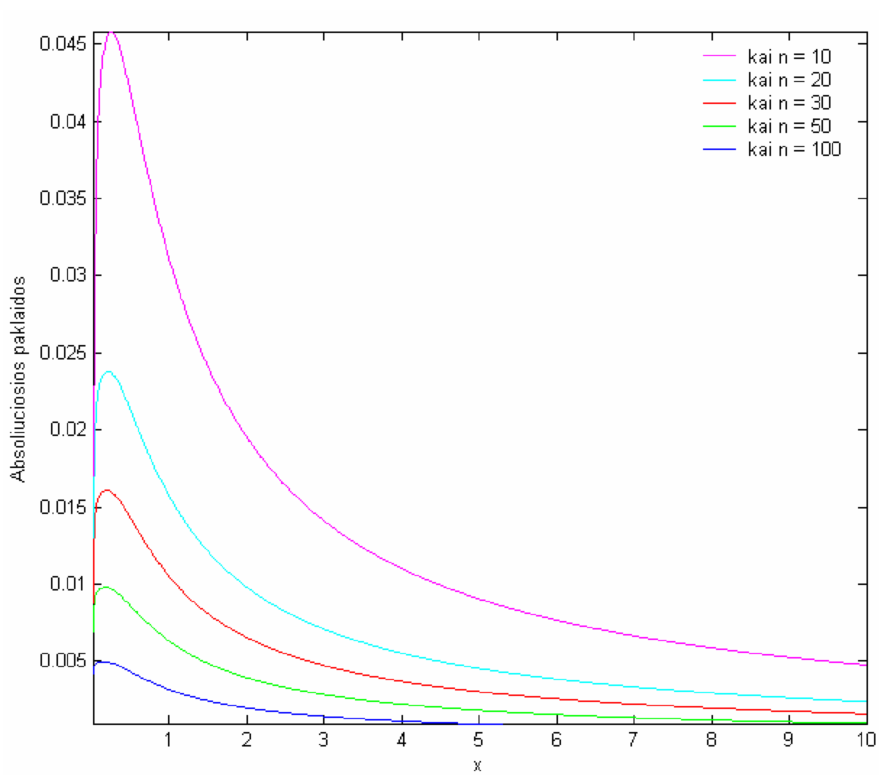
16 pav. $\Delta_{3,N}^{(2)}(x)$**įvertis, kai x fiksuoti**

4 PRIEDAS. TIKSLIŲJŲ ABSOLIUČIŲJŲ PAKLAIDŲ ANALIZĖ, KAI N_n YRA DISKRETUSIS TOLYGUSIS SKIRSTINYS

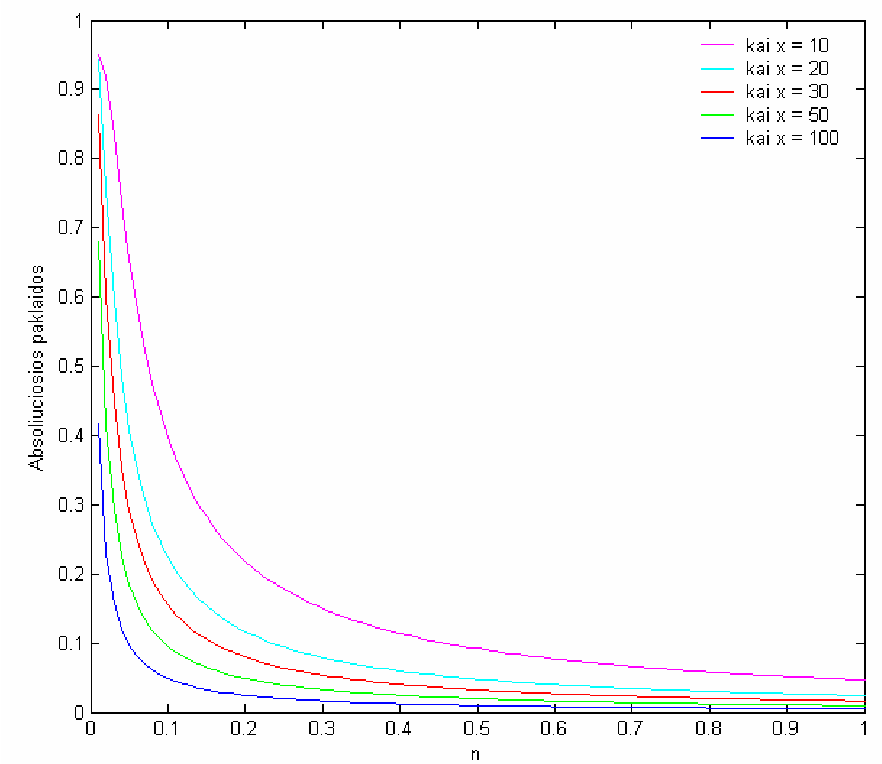
1) Freše skirstinio grafikai:



1 pav. $\Delta^{(1)}_{1,N}(x)$ **paklaidų paviršius, kai γ = 5**

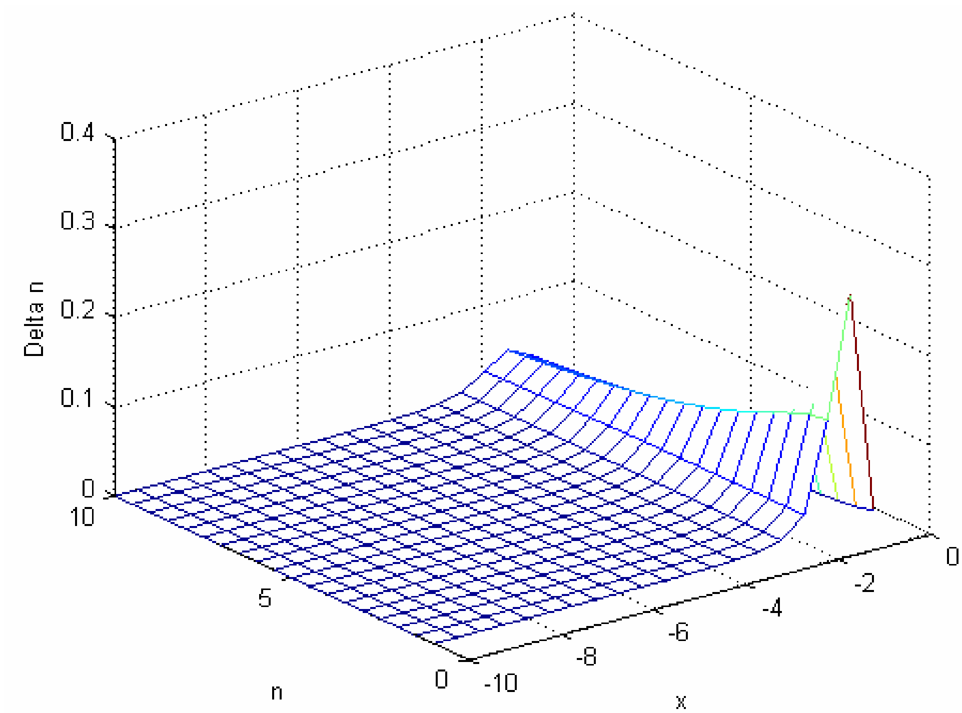


2 pav. $\Delta^{(1)}_{1,N}(x)$ **paklaidos, kai n fiksuoti ir γ = 1**

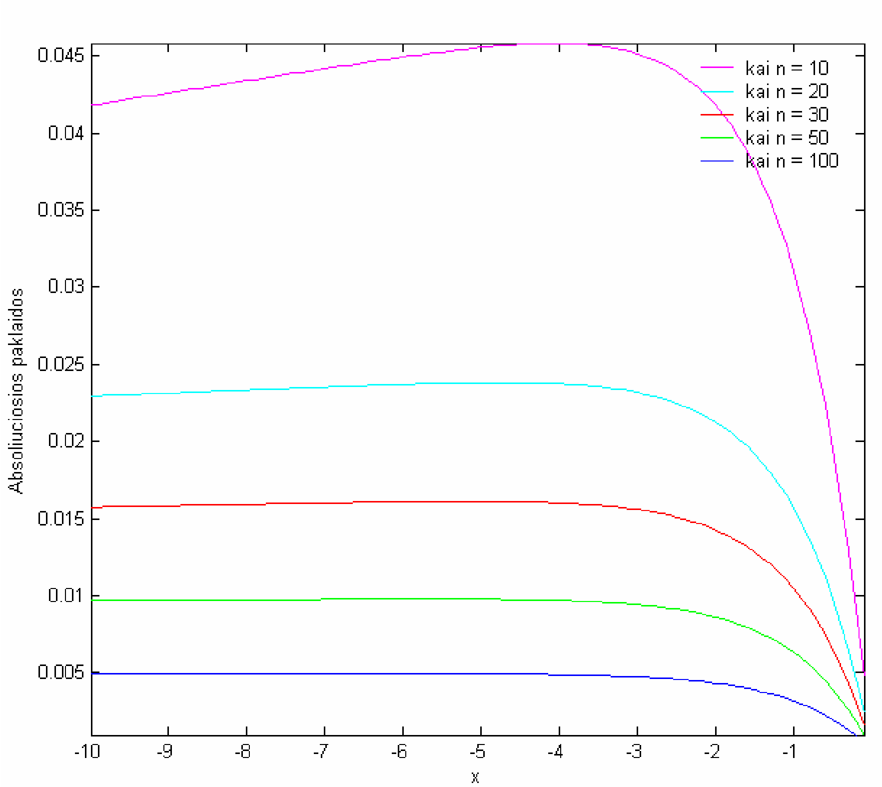


3 pav. $\Delta_{1,N}^{(1)}(x)$ paklaidos, kai x fiksuoti ir γ = 1

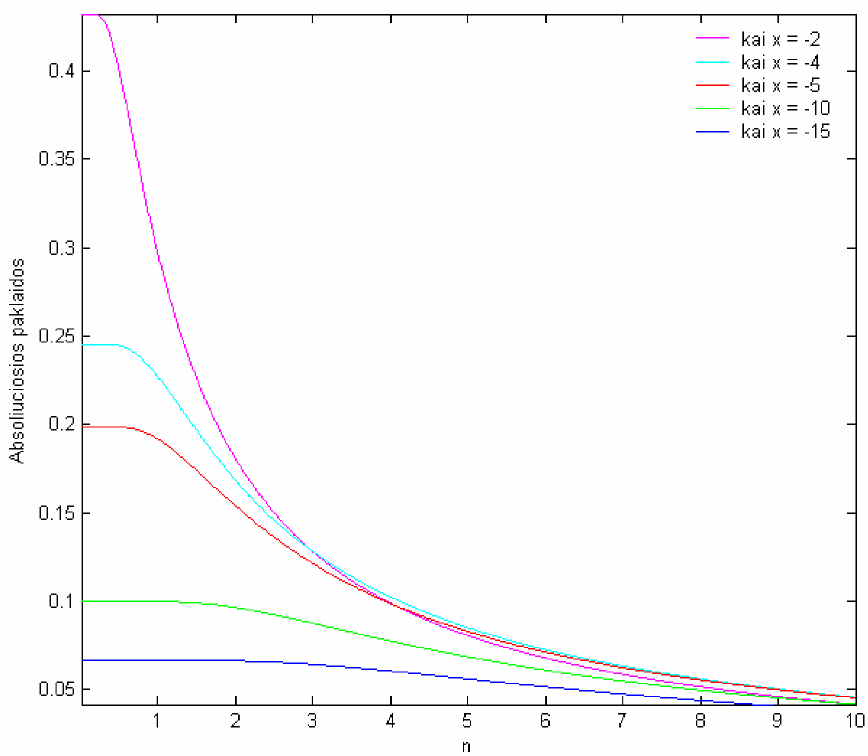
2) Veibulo skirstinio grafikai:



4 pav. $\Delta_{2,N}^{(1)}(x)$ paklaidų paviršius, kai γ = 5

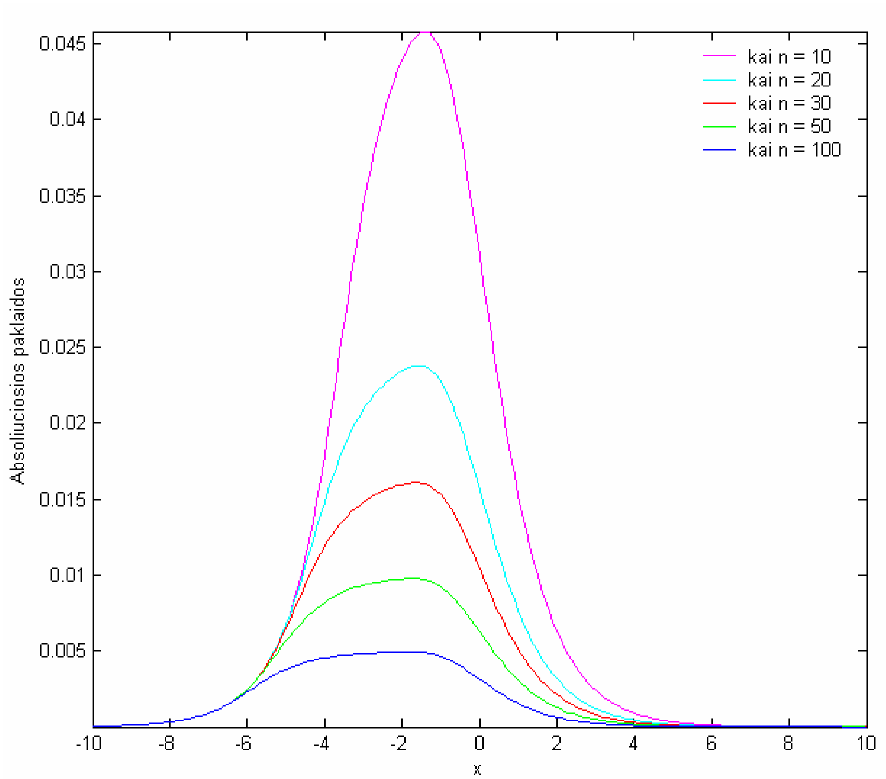


5 pav. $\Delta_{2,N}^{(1)}(x)$ **paklaidos, kai n fiksuoti ir γ = 1**

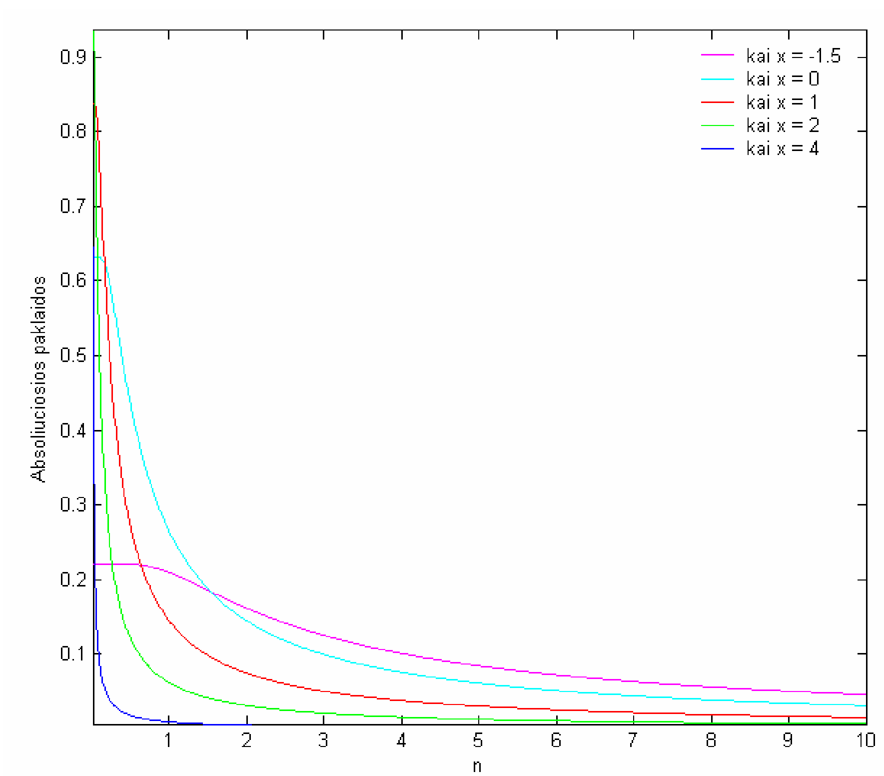


6 pav. $\Delta_{2,N}^{(1)}(x)$ **paklaidos, kai x fiksuoti ir γ = 1**

3) Gumbelio skirstinio grafikai:

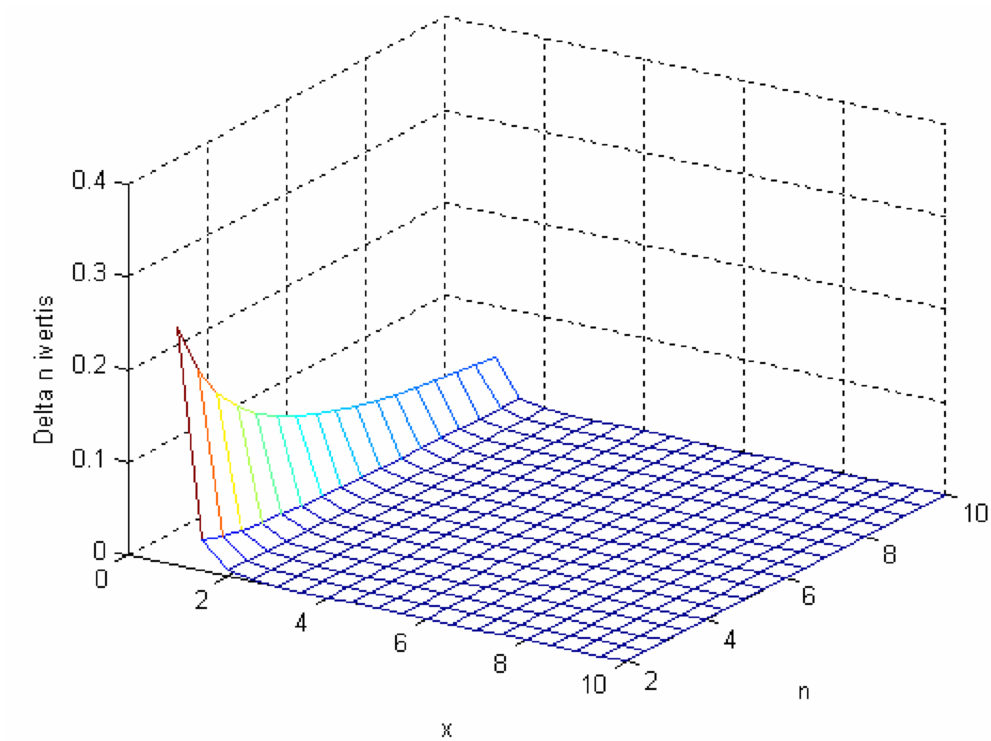


7 pav. $\Delta_{3,N}^{(1)}(x)$ **paklaidos, kai n fiksuoti**

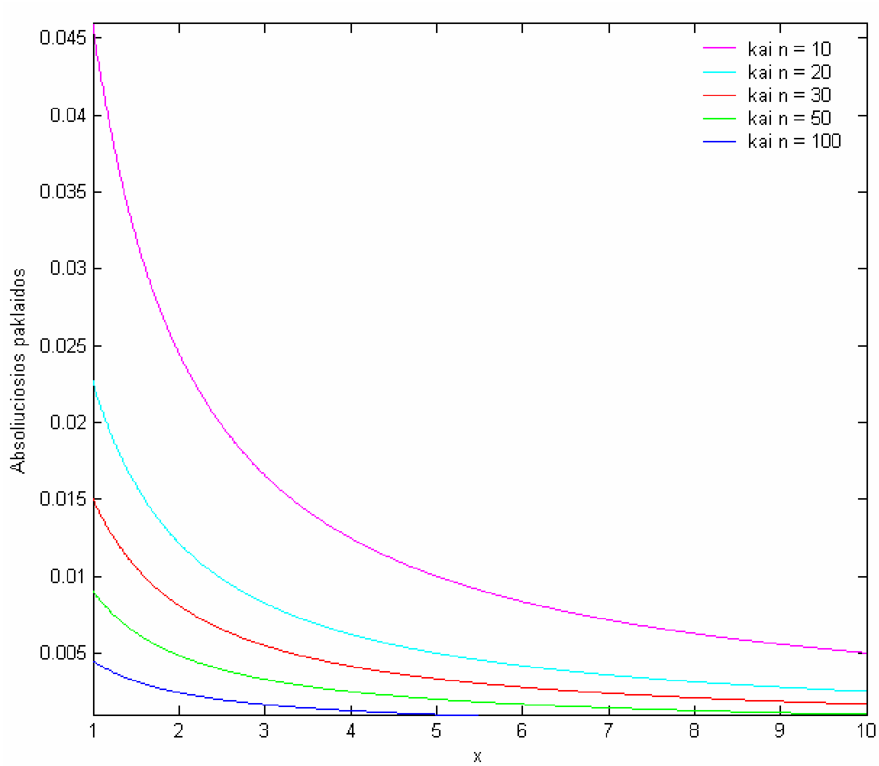


8 pav. $\Delta_{3,N}^{(1)}(x)$ **paklaidos, kai x fiksuoti**

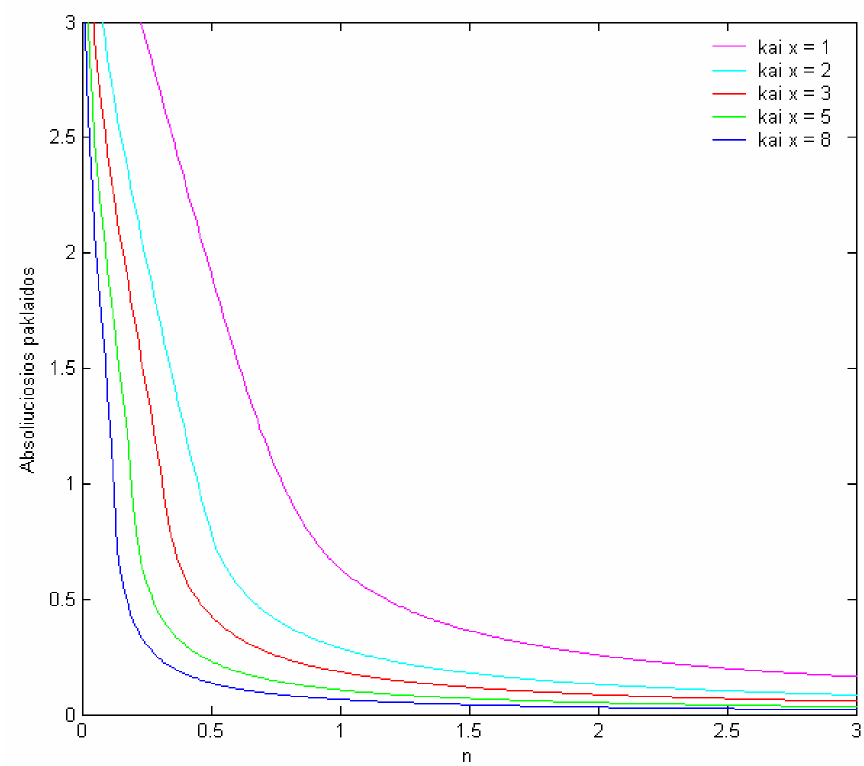
4) Pareto skirstinio grafikai:



9 pav. $\Delta_{1,N}^{(2)}(x)$ paklaidų paviršius, kai α = 5

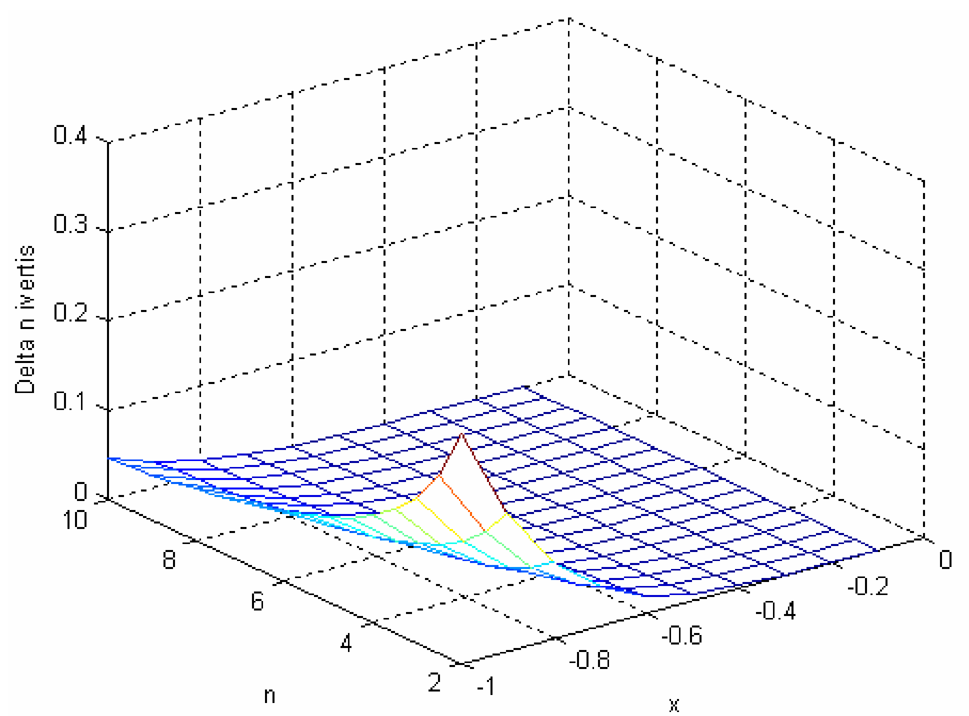


10 pav. $\Delta_{1,N}^{(2)}(x)$ paklaidos, kai n fiksuoti ir α = 1

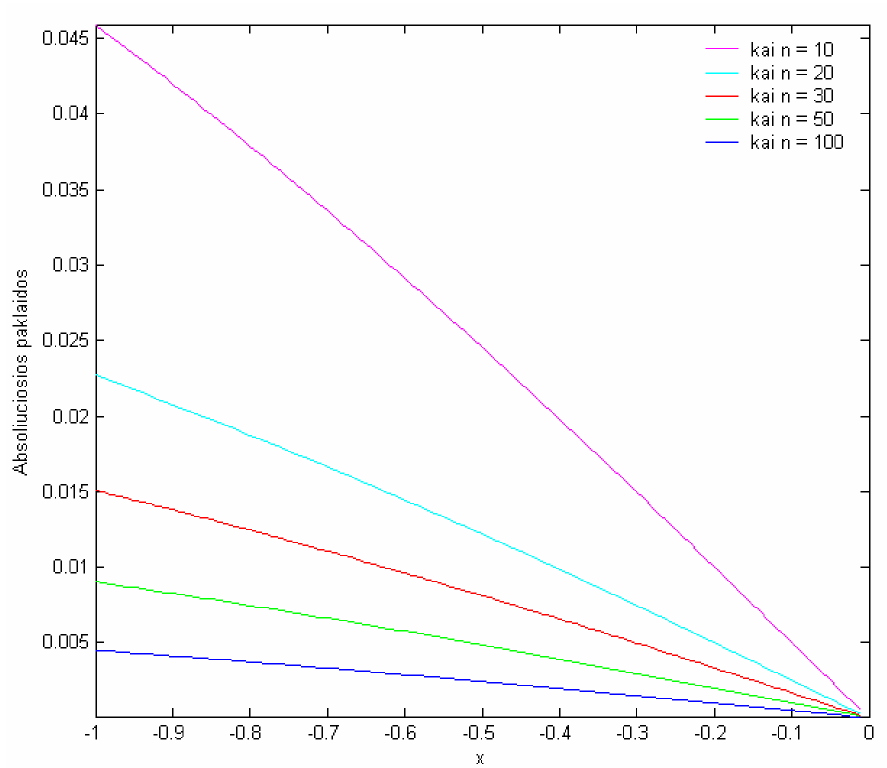


11 pav. $\Delta_{1,N}^{(2)}(x)$ **paklaidos, kai x fiksuoti ir α = 1**

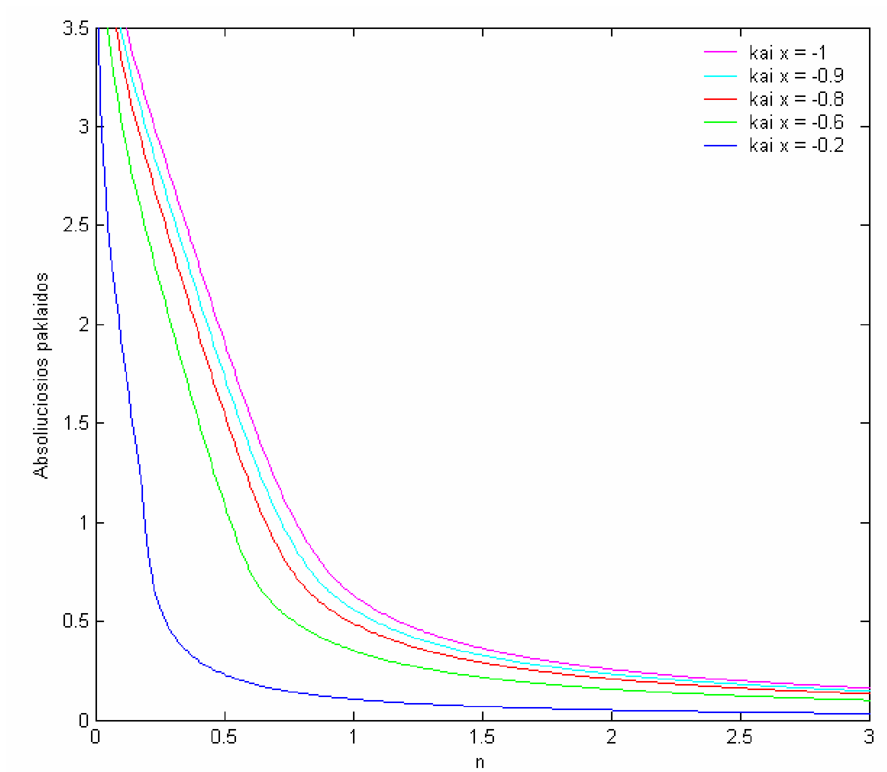
5) Beta skirstinio grafikai:



12 pav. $\Delta_{2,N}^{(2)}(x)$ **paklaidos paviršius, kai α = 5**

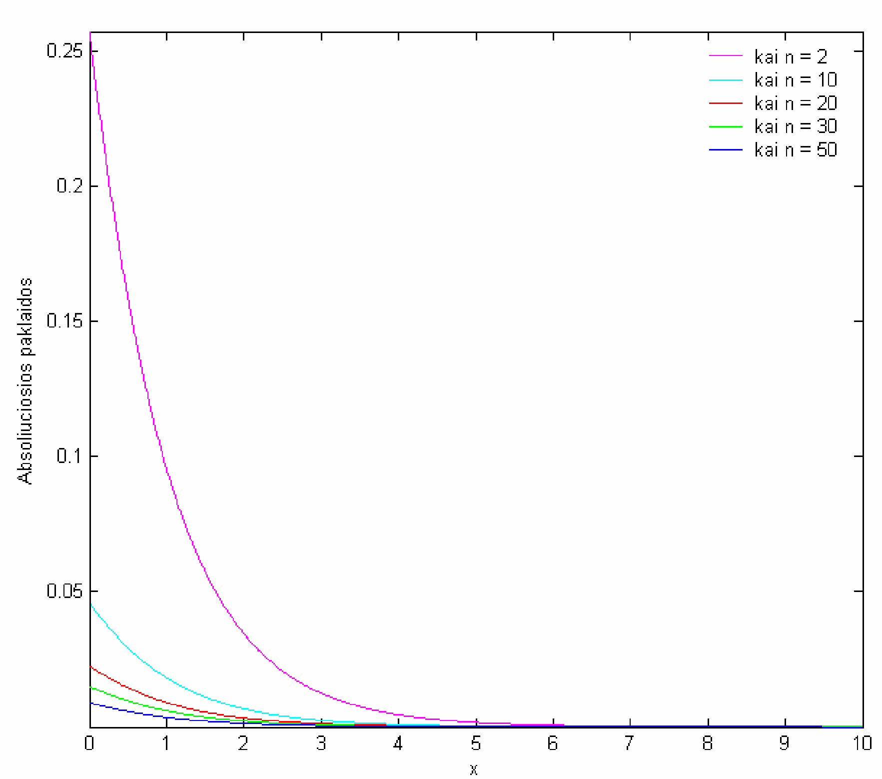


13 pav. $\Delta_{2,N}^{(2)}(x)$ paklaidos, kai n fiksuoti ir α = 1

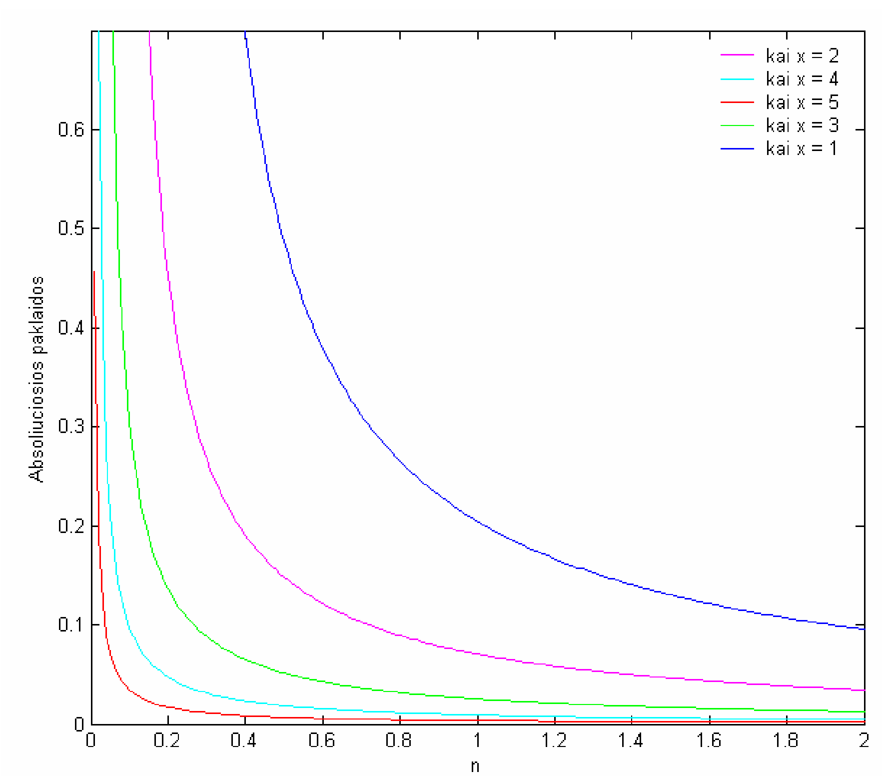


14 pav. $\Delta_{2,N}^{(2)}(x)$ paklaidos, kai x fiksuoti ir α = 1

6) Eksponentinio skirstinio grafikai:



15 pav. $\Delta^{(2)}_{3,N}(x)$ paklaidos, kai n fiksuoti

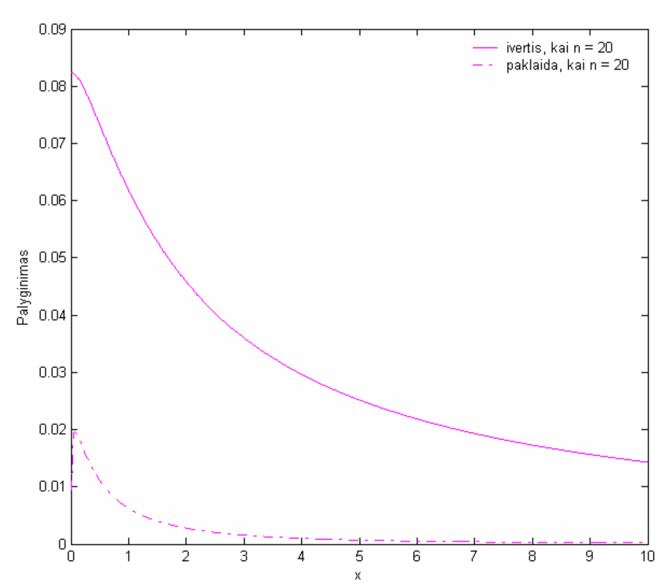


16 pav. $\Delta^{(2)}_{3,N}(x)$ paklaidos, kai x fiksuoti

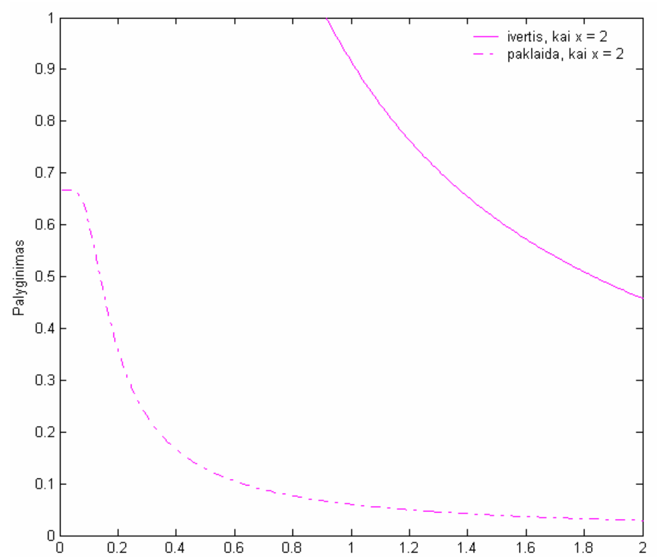
5 PRIEDAS. TIKSLIŲJŲ ABSOLIUČIŲJŲ PAKLAIDŲ IR KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERČIŲ PALYGINAMOJI ANALIZĖ

Nagrinėsi atvejį, kai atsitiktinių dydžių skaičius pasiskirstęs pagal geometrinį skirstinį.

1) Freše skirstinio grafikai:

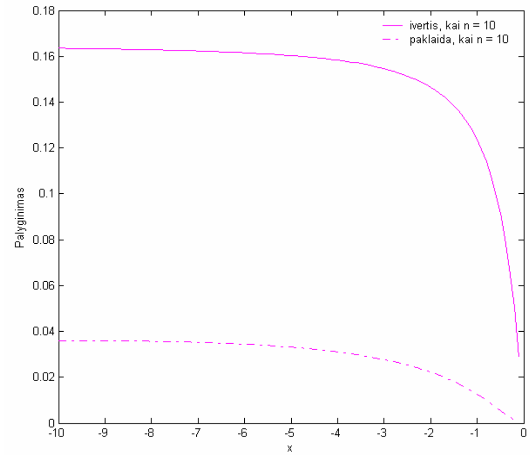


1 pav. $\Delta_{1,N}^{(1)}(x)$ **įverčių ir paklaidų grafikas, kai n fiksuoti ir $\gamma = 1$**



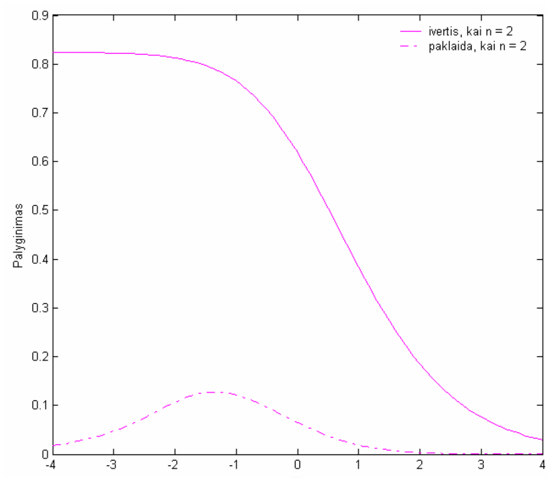
2 pav. $\Delta_{1,N}^{(1)}(x)$ **įverčių ir paklaidų grafikas, kai x fiksuoti ir $\gamma = 1$**

2) Veibulo skirstinio grafikai:



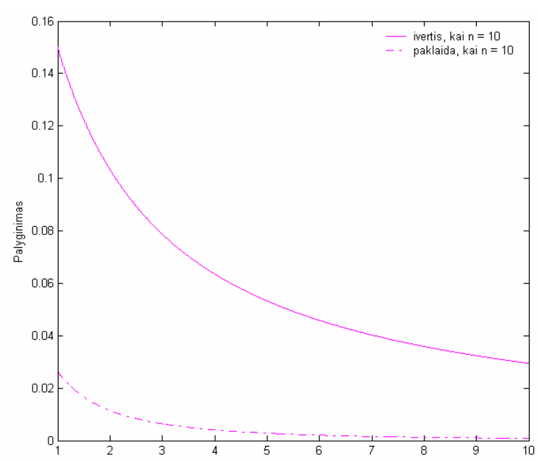
3 pav. $\Delta^{(1)}_{2,N}(x)$ įverčių ir paklaidų grafikas, kai n fiksuoti ir γ = 1

3) Gumbelio skirstinio grafikai:

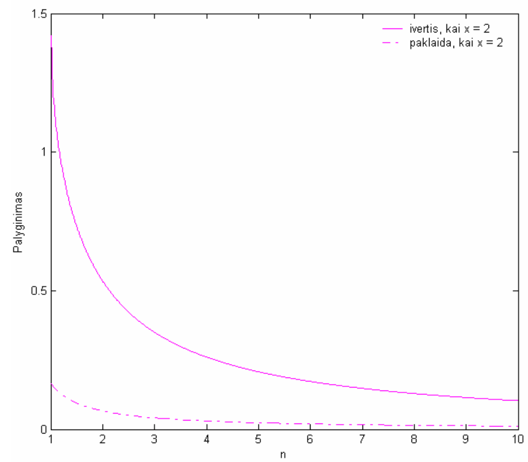


4 pav. $\Delta^{(1)}_{3,N}(x)$ įverčių ir paklaidų grafikas, kai n fiksuoti

4) Pareto skirstinio grafikai:

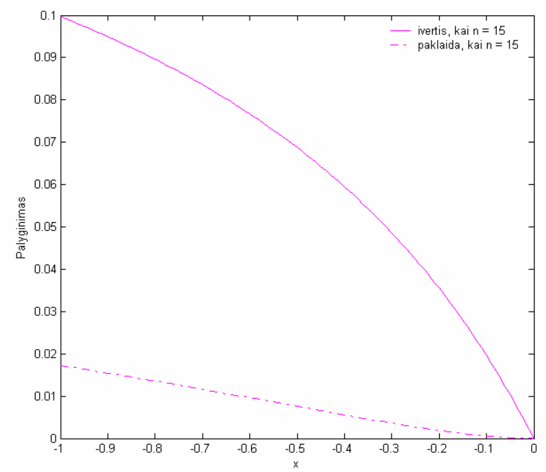


5 pav. $\Delta^{(2)}_{1,N}(x)$ įverčių ir paklaidų grafikas, kai n fiksuoti ir α = 1



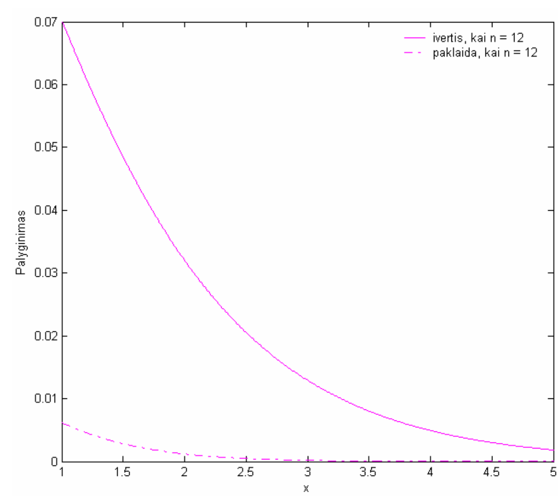
6 pav. $\Delta_{1,N}^{(2)}(x)$ įverčių ir paklaidų grafikas, kai x fiksuoti ir α = 1

5) Beta skirstinio grafikai:



7 pav. $\Delta_{2,N}^{(2)}(x)$ įverčių ir paklaidų grafikas, kai n fiksuoti ir α = 1

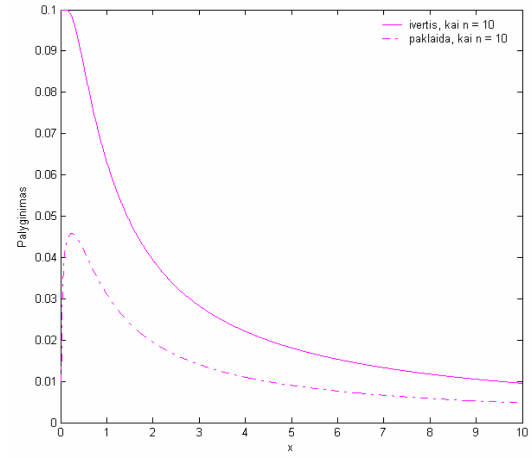
6) Eksponentinio skirstinio grafikai:



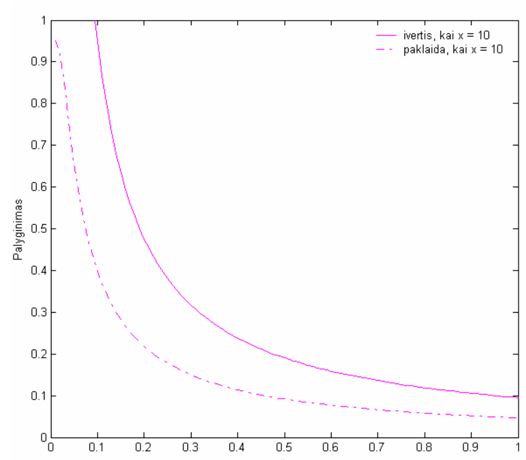
8 pav. $\Delta_{3,N}^{(2)}(x)$ įverčių ir paklaidų grafikas, kai x fiksuoti

Nagrinėsi atvejį, kai atsitiktinių dydžių skaičius pasiskirstęs pagal diskretųjį tolygųjį skirstinį.

1) Freše skirstinio grafikai:

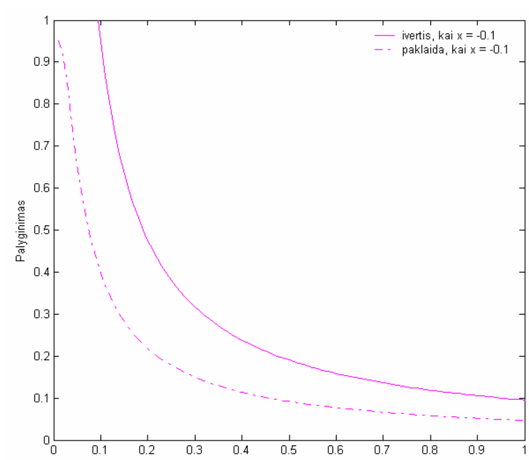


1 pav. $\Delta_{1,N}^{(1)}(x)$ įverčių ir paklaidų grafikas, kai n fiksuoti ir γ = 1



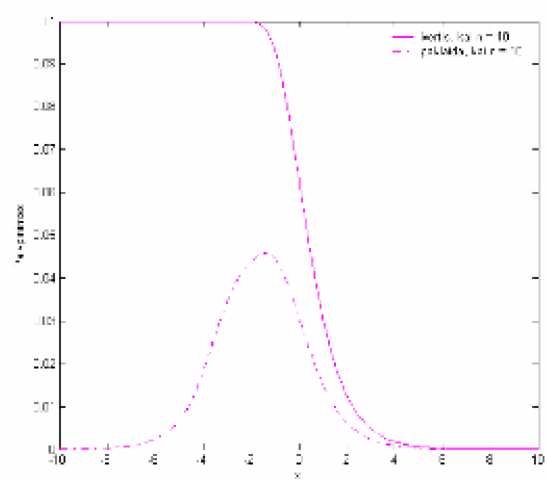
2 pav. $\Delta_{1,N}^{(1)}(x)$ įverčių ir paklaidų grafikas, kai x fiksuoti ir γ = 1

2) Veibulo skirstinio grafikai:



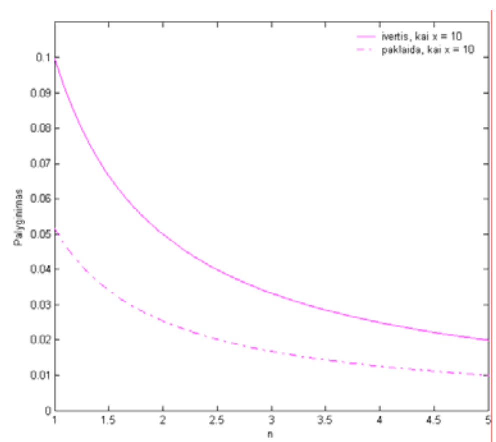
3 pav. $\Delta_{2,N}^{(1)}(x)$ įverčių ir paklaidų grafikas, kai x fiksuoti ir γ = 1

3) Gumbelio skirstinio grafikai:



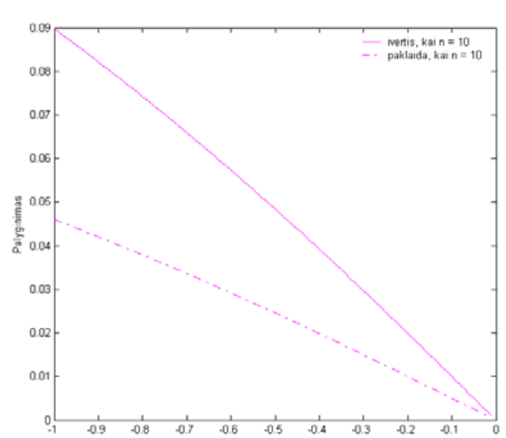
4 pav. $\Delta_{3,N}^{(1)}(x)$ įverčių ir paklaidų grafikas, kai n fiksuoti

4) Pareto skirstinio grafikai:



5 pav. $\Delta_{1,N}^{(2)}(x)$ įverčių ir paklaidų grafikas, kai x fiksuoti ir α = 1

5) Beta skirstinio grafikai:



6 pav. $\Delta_{2,N}^{(2)}(x)$ įverčių ir paklaidų grafikas, kai n fiksuoti ir α = 1

6 PRIEDAS. KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERČIŲ IR TIKSLIŲJŲ ABSOLIUČIŲJŲ PAKLAIDŲ REIKŠMIŲ LENTELĖS

Nagrinėsi atvejį, kai atsitiktinių dydžių skaičius pasiskirstęs pagal geometrinį skirstinį.

1) Freše skirstinio:

1 lentelė

Konvergavimo greičių įverčių reikšmės

x\n	2	5	10	20	50	100	150	200
1	6.18E-01	2.47E-01	1.24E-01	6.18E-02	2.47E-02	1.24E-02	8.24E-03	6.18E-03
2	4.58E-01	1.83E-01	9.16E-02	4.58E-02	1.83E-02	9.16E-03	6.11E-03	4.58E-03
4	2.97E-01	1.19E-01	5.94E-02	2.97E-02	1.19E-02	5.94E-03	3.96E-03	2.97E-03
5	2.52E-01	1.01E-01	5.04E-02	2.52E-02	1.01E-02	5.04E-03	3.36E-03	2.52E-03
7	1.93E-01	7.73E-02	3.86E-02	1.93E-02	7.73E-03	3.86E-03	2.58E-03	1.93E-03
9	1.57E-01	6.27E-02	3.13E-02	1.57E-02	6.27E-03	3.13E-03	2.09E-03	1.57E-03
12	1.22E-01	4.88E-02	2.44E-02	1.22E-02	4.88E-03	2.44E-03	1.63E-03	1.22E-03
15	9.98E-02	3.99E-02	2.00E-02	9.98E-03	3.99E-03	2.00E-03	1.33E-03	9.98E-04
20	7.66E-02	3.07E-02	1.53E-02	7.66E-03	3.07E-03	1.53E-03	1.02E-03	7.66E-04

2 lentelė

Tiksliųjų absoliučiųjų paklaidų reikšmės

x\n	2	5	10	20	50	100	150	200
1	6.47E-02	2.54E-02	1.26E-02	6.28E-03	2.50E-03	1.25E-03	8.34E-04	6.25E-04
2	2.89E-02	1.13E-02	5.60E-03	2.79E-03	1.11E-03	5.56E-04	3.71E-04	2.78E-04
3	1.62E-02	6.34E-03	3.15E-03	1.57E-03	6.26E-04	3.13E-04	2.08E-04	1.56E-04
4	1.03E-02	4.05E-03	2.01E-03	1.00E-03	4.00E-04	2.00E-04	1.33E-04	1.00E-04
5	7.12E-03	2.81E-03	1.40E-03	6.96E-04	2.78E-04	1.39E-04	9.26E-05	6.95E-05
6	5.21E-03	2.06E-03	1.02E-03	5.11E-04	2.04E-04	1.02E-04	6.80E-05	5.10E-05
7	3.98E-03	1.57E-03	7.84E-04	3.91E-04	1.56E-04	7.82E-05	5.21E-05	3.91E-05
8	3.14E-03	1.24E-03	6.19E-04	3.09E-04	1.24E-04	6.18E-05	4.12E-05	3.09E-05
9	2.54E-03	1.01E-03	5.02E-04	2.50E-04	1.00E-04	5.00E-05	3.33E-05	2.50E-05

2) Veibulo skirstinio:

3 lentelė

Konvergavimo greičių įverčių reikšmės

x\n	2	5	10	20	50	100	150	200
-20	8.22E-01	3.29E-01	1.65E-01	8.22E-02	3.29E-02	1.65E-02	1.10E-02	8.22E-03
-15	8.21E-01	3.28E-01	1.64E-01	8.21E-02	3.28E-02	1.64E-02	1.09E-02	8.21E-03
-12	8.19E-01	3.28E-01	1.64E-01	8.19E-02	3.28E-02	1.64E-02	1.09E-02	8.19E-03
-9	8.16E-01	3.26E-01	1.63E-01	8.16E-02	3.26E-02	1.63E-02	1.09E-02	8.16E-03
-8	8.14E-01	3.26E-01	1.63E-01	8.14E-02	3.26E-02	1.63E-02	1.09E-02	8.14E-03
-7	8.11E-01	3.25E-01	1.62E-01	8.11E-02	3.25E-02	1.62E-02	1.08E-02	8.11E-03
-6	8.08E-01	3.23E-01	1.62E-01	8.08E-02	3.23E-02	1.62E-02	1.08E-02	8.08E-03
-5	8.01E-01	3.21E-01	1.60E-01	8.01E-02	3.21E-02	1.60E-02	1.07E-02	8.01E-03
-4	7.91E-01	3.17E-01	1.58E-01	7.91E-02	3.17E-02	1.58E-02	1.06E-02	7.91E-03

4 lentelė

Tiksliųjų absoliučiųjų paklaidų reikšmės

x\n	2	5	10	20	50	100	150	200
-20	4.76E-02	4.39E-02	3.22E-02	1.93E-02	8.54E-03	4.40E-03	2.97E-03	2.24E-03
-15	6.22E-02	5.21E-02	3.46E-02	1.97E-02	8.43E-03	4.30E-03	2.89E-03	2.17E-03
-12	7.57E-02	5.74E-02	3.56E-02	1.96E-02	8.25E-03	4.19E-03	2.81E-03	2.11E-03
-9	9.44E-02	6.19E-02	3.59E-02	1.91E-02	7.93E-03	4.01E-03	2.68E-03	2.01E-03
-8	1.02E-01	6.30E-02	3.57E-02	1.88E-02	7.76E-03	3.92E-03	2.62E-03	1.97E-03
-7	1.10E-01	6.36E-02	3.52E-02	1.84E-02	7.54E-03	3.80E-03	2.54E-03	1.91E-03
-6	1.17E-01	6.35E-02	3.44E-02	1.78E-02	7.26E-03	3.65E-03	2.44E-03	1.83E-03
-5	1.24E-01	6.24E-02	3.31E-02	1.70E-02	6.89E-03	3.46E-03	2.31E-03	1.73E-03
-4	1.27E-01	5.97E-02	3.10E-02	1.58E-02	6.36E-03	3.19E-03	2.13E-03	1.60E-03

3) Gumbelio skirstinio:

5 lentelė

Konvergavimo greičių įverčių reikšmės

x\n	2	5	10	20	50	100	150	200
-20	8.24E-01	3.30E-01	1.65E-01	8.24E-02	3.30E-02	1.65E-02	1.10E-02	8.24E-03
-12	8.24E-01	3.30E-01	1.65E-01	8.24E-02	3.30E-02	1.65E-02	1.10E-02	8.24E-03
-9	8.24E-01	3.30E-01	1.65E-01	8.24E-02	3.30E-02	1.65E-02	1.10E-02	8.24E-03
-7	8.24E-01	3.30E-01	1.65E-01	8.24E-02	3.30E-02	1.65E-02	1.10E-02	8.24E-03
-5	8.24E-01	3.30E-01	1.65E-01	8.24E-02	3.30E-02	1.65E-02	1.10E-02	8.24E-03
-3	8.23E-01	3.29E-01	1.65E-01	8.23E-02	3.29E-02	1.65E-02	1.10E-02	8.23E-03
0	6.18E-01	2.47E-01	1.24E-01	6.18E-02	2.47E-02	1.24E-02	8.24E-03	6.18E-03
1	3.84E-01	1.54E-01	7.68E-02	3.84E-02	1.54E-02	7.68E-03	5.12E-03	3.84E-03
3	7.63E-02	3.05E-02	1.53E-02	7.63E-03	3.05E-03	1.53E-03	1.02E-03	7.63E-04
6	4.07E-03	1.63E-03	8.14E-04	4.07E-04	1.63E-04	8.14E-05	5.43E-05	4.07E-05
7	1.50E-03	6.01E-04	3.00E-04	1.50E-04	6.01E-05	3.00E-05	2.00E-05	1.50E-05
12	1.01E-05	4.05E-06	2.03E-06	1.01E-06	4.05E-07	2.03E-07	1.35E-07	1.01E-07
20	3.40E-09	1.36E-09	6.80E-10	3.40E-10	1.36E-10	6.80E-11	4.53E-11	3.40E-11

6 lentelė

Tiksliųjų absoliučiųjų paklaidų reikšmės

x\n	2	5	10	20	50	100	150	200
-20	2.06E-09	2.06E-09	2.06E-09	2.06E-09	2.06E-09	2.06E-09	2.06E-09	2.06E-09
-12	6.14E-06	6.14E-06	6.14E-06	6.14E-06	6.14E-06	6.14E-06	6.14E-06	6.14E-06
-9	1.23E-04	1.23E-04	1.23E-04	1.23E-04	1.23E-04	1.23E-04	1.23E-04	1.23E-04
-7	9.11E-04	9.11E-04	9.11E-04	9.11E-04	9.11E-04	9.11E-04	9.07E-04	8.90E-04
-5	6.69E-03	6.69E-03	6.69E-03	6.66E-03	5.61E-03	3.77E-03	2.76E-03	2.17E-03
-3	4.74E-02	4.38E-02	3.22E-02	1.93E-02	8.54E-03	4.41E-03	2.97E-03	2.24E-03
0	6.47E-02	2.54E-02	1.26E-02	6.28E-03	2.50E-03	1.25E-03	8.34E-04	6.25E-04
1	1.88E-02	7.34E-03	3.64E-03	1.81E-03	7.24E-04	3.62E-04	2.41E-04	1.81E-04
3	5.67E-04	2.26E-04	1.13E-04	5.63E-05	2.25E-05	1.12E-05	7.50E-06	5.62E-06
6	1.53E-06	6.11E-07	3.06E-07	1.53E-07	6.11E-08	3.06E-08	2.04E-08	1.53E-08
7	2.08E-07	8.30E-08	4.15E-08	2.08E-08	8.30E-09	4.15E-09	2.77E-09	2.08E-09
12	9.44E-12	3.78E-12	1.89E-12	9.43E-13	3.76E-13	1.88E-13	1.10E-13	9.26E-14
20	1.11E-16	2.22E-16	4.44E-16	1.11E-16	2.22E-16	5.55E-15	2.00E-15	5.77E-15

4) Pareto skirstinio:

7 lentelė

Konvergavimo greičių įverčių reikšmės

x\n	2	5	10	20	50	100	150	200
1	7.92E-01	3.03E-01	1.50E-01	7.47E-02	2.98E-02	1.49E-02	9.92E-03	7.44E-03
2	5.35E-01	2.08E-01	1.03E-01	5.15E-02	2.06E-02	1.03E-02	6.85E-03	5.14E-03
3	4.04E-01	1.58E-01	7.87E-02	3.93E-02	1.57E-02	7.84E-03	5.23E-03	3.92E-03
4	3.25E-01	1.28E-01	6.36E-02	3.17E-02	1.27E-02	6.34E-03	4.22E-03	3.17E-03
5	2.71E-01	1.07E-01	5.33E-02	2.66E-02	1.06E-02	5.32E-03	3.54E-03	2.66E-03
6	2.33E-01	9.20E-02	4.59E-02	2.29E-02	9.16E-03	4.58E-03	3.05E-03	2.29E-03
7	2.04E-01	8.08E-02	4.03E-02	2.01E-02	8.04E-03	4.02E-03	2.68E-03	2.01E-03
8	1.82E-01	7.20E-02	3.59E-02	1.79E-02	7.17E-03	3.58E-03	2.39E-03	1.79E-03
9	1.64E-01	6.49E-02	3.24E-02	1.62E-02	6.47E-03	3.23E-03	2.16E-03	1.62E-03
12	1.26E-01	5.01E-02	2.50E-02	1.25E-02	5.00E-03	2.50E-03	1.67E-03	1.25E-03
15	1.03E-01	4.08E-02	2.04E-02	1.02E-02	4.07E-03	2.04E-03	1.36E-03	1.02E-03
20	7.82E-02	3.12E-02	1.56E-02	7.78E-03	3.11E-03	1.56E-03	1.04E-03	7.78E-04

8 lentelė

Tiksliųjų absoliučiųjų paklaidų reikšmės

x\n	2	5	10	20	50	100	150	200
1	1.67E-01	5.56E-02	2.63E-02	1.28E-02	5.05E-03	2.51E-03	1.67E-03	1.25E-03
2	6.67E-02	2.38E-02	1.15E-02	5.65E-03	2.24E-03	1.11E-03	7.42E-04	5.56E-04
3	3.57E-02	1.32E-02	6.41E-03	3.16E-03	1.26E-03	6.27E-04	4.17E-04	3.13E-04
4	2.22E-02	8.33E-03	4.08E-03	2.02E-03	8.03E-04	4.01E-04	2.67E-04	2.00E-04
5	1.52E-02	5.75E-03	2.82E-03	1.40E-03	5.57E-04	2.78E-04	1.85E-04	1.39E-04
6	1.10E-02	4.20E-03	2.07E-03	1.03E-03	4.09E-04	2.04E-04	1.36E-04	1.02E-04
7	8.33E-03	3.21E-03	1.58E-03	7.86E-04	3.13E-04	1.56E-04	1.04E-04	7.82E-05
8	6.54E-03	2.53E-03	1.25E-03	6.21E-04	2.47E-04	1.24E-04	8.24E-05	6.18E-05
9	5.26E-03	2.04E-03	1.01E-03	5.03E-04	2.00E-04	1.00E-04	6.67E-05	5.00E-05
12	3.08E-03	1.20E-03	5.96E-04	2.97E-04	1.19E-04	5.92E-05	3.95E-05	2.96E-05
15	2.02E-03	7.91E-04	3.93E-04	1.96E-04	7.82E-05	3.91E-05	2.61E-05	1.95E-05
20	1.16E-03	4.58E-04	2.28E-04	1.14E-04	4.54E-05	2.27E-05	1.51E-05	1.13E-05

5) Beta skirstinio:

9 lentelė

Konvergavimo greičių įverčių reikšmės

x\n	2	5	10	20	50	100	150	200
-1	7.92E-01	3.03E-01	1.50E-01	7.47E-02	2.98E-02	1.49E-02	9.92E-03	7.44E-03
-0.9	7.52E-01	2.88E-01	1.43E-01	7.11E-02	2.84E-02	1.42E-02	9.45E-03	7.08E-03
-0.8	7.07E-01	2.72E-01	1.35E-01	6.71E-02	2.68E-02	1.34E-02	8.92E-03	6.69E-03
-0.7	6.57E-01	2.53E-01	1.26E-01	6.26E-02	2.50E-02	1.25E-02	8.32E-03	6.24E-03
-0.6	6.00E-01	2.32E-01	1.15E-01	5.74E-02	2.29E-02	1.15E-02	7.64E-03	5.73E-03
-0.5	5.35E-01	2.08E-01	1.03E-01	5.15E-02	2.06E-02	1.03E-02	6.85E-03	5.14E-03
-0.4	4.60E-01	1.80E-01	8.94E-02	4.46E-02	1.78E-02	8.90E-03	5.93E-03	4.45E-03
-0.3	3.73E-01	1.47E-01	7.29E-02	3.64E-02	1.45E-02	7.27E-03	4.84E-03	3.63E-03
-0.2	2.71E-01	1.07E-01	5.33E-02	2.66E-02	1.06E-02	5.32E-03	3.54E-03	2.66E-03
-0.1	1.49E-01	5.91E-02	2.95E-02	1.47E-02	5.89E-03	2.94E-03	1.96E-03	1.47E-03

10 lentelė

Tiksliųjų absoliučiųjų paklaidų reikšmės

x\n	2	5	10	20	50	100	150	200
-1	1.67E-01	5.56E-02	2.63E-02	1.28E-02	5.05E-03	2.51E-03	1.67E-03	1.25E-03
-0.9	1.47E-01	4.96E-02	2.36E-02	1.15E-02	4.53E-03	2.25E-03	1.50E-03	1.12E-03
-0.8	1.27E-01	4.34E-02	2.07E-02	1.01E-02	3.99E-03	1.98E-03	1.32E-03	9.90E-04
-0.7	1.07E-01	3.70E-02	1.77E-02	8.66E-03	3.42E-03	1.70E-03	1.13E-03	8.50E-04
-0.6	8.65E-02	3.04E-02	1.46E-02	7.17E-03	2.83E-03	1.41E-03	9.40E-04	7.04E-04
-0.5	6.67E-02	2.38E-02	1.15E-02	5.65E-03	2.24E-03	1.11E-03	7.42E-04	5.56E-04
-0.4	4.76E-02	1.73E-02	8.40E-03	4.14E-03	1.64E-03	8.19E-04	5.45E-04	4.09E-04
-0.3	3.01E-02	1.12E-02	5.45E-03	2.69E-03	1.07E-03	5.34E-04	3.56E-04	2.67E-04
-0.2	1.52E-02	5.75E-03	2.82E-03	1.40E-03	5.57E-04	2.78E-04	1.85E-04	1.39E-04
-0.1	4.33E-03	1.68E-03	8.34E-04	4.15E-04	1.66E-04	8.27E-05	5.51E-05	4.13E-05

6) Eksponentinio skirstinio:

11 lentelė

Konvergavimo greičių įverčių reikšmės

x\n	2	5	10	20	50	100	150	200
0	7.92E-01	3.03E-01	1.50E-01	7.47E-02	2.98E-02	1.49E-02	9.92E-03	7.44E-03
1	4.34E-01	1.70E-01	8.44E-02	4.21E-02	1.68E-02	8.40E-03	5.60E-03	4.20E-03
2	1.95E-01	7.71E-02	3.85E-02	1.92E-02	7.68E-03	3.84E-03	2.56E-03	1.92E-03
3	7.79E-02	3.10E-02	1.55E-02	7.75E-03	3.10E-03	1.55E-03	1.03E-03	7.75E-04
4	2.96E-02	1.18E-02	5.91E-03	2.96E-03	1.18E-03	5.91E-04	3.94E-04	2.96E-04
5	1.10E-02	4.41E-03	2.20E-03	1.10E-03	4.41E-04	2.20E-04	1.47E-04	1.10E-04
6	4.08E-03	1.63E-03	8.15E-04	4.07E-04	1.63E-04	8.15E-05	5.43E-05	4.07E-05
7	1.50E-03	6.01E-04	3.00E-04	1.50E-04	6.01E-05	3.00E-05	2.00E-05	1.50E-05
8	5.53E-04	2.21E-04	1.11E-04	5.53E-05	2.21E-05	1.11E-05	7.37E-06	5.53E-06
9	2.03E-04	8.14E-05	4.07E-05	2.03E-05	8.14E-06	4.07E-06	2.71E-06	2.03E-06
12	1.01E-05	4.05E-06	2.03E-06	1.01E-06	4.05E-07	2.03E-07	1.35E-07	1.01E-07
15	5.04E-07	2.02E-07	1.01E-07	5.04E-08	2.02E-08	1.01E-08	6.72E-09	5.04E-09
20	3.40E-09	1.36E-09	6.80E-10	3.40E-10	1.36E-10	6.80E-11	4.53E-11	3.40E-11

12 lentelė

Tiksliųjų absoliučiųjų paklaidų reikšmės

x\n	2	5	10	20	50	100	150	200
0	1.67E-01	5.56E-02	2.63E-02	1.28E-02	5.05E-03	2.51E-03	1.67E-03	1.25E-03
1	4.18E-02	1.53E-02	7.43E-03	3.67E-03	1.45E-03	7.25E-04	4.83E-04	3.62E-04
2	7.56E-03	2.91E-03	1.44E-03	7.15E-04	2.85E-04	1.42E-04	9.48E-05	7.11E-05
3	1.15E-03	4.54E-04	2.26E-04	1.13E-04	4.50E-05	2.25E-05	1.50E-05	1.12E-05
4	1.63E-04	6.49E-05	3.24E-05	1.62E-05	6.47E-06	3.24E-06	2.16E-06	1.62E-06
5	2.25E-05	8.97E-06	4.48E-06	2.24E-06	8.96E-07	4.48E-07	2.99E-07	2.24E-07
6	3.06E-06	1.22E-06	6.12E-07	3.06E-07	1.22E-07	6.11E-08	4.08E-08	3.06E-08
7	4.15E-07	1.66E-07	8.30E-08	4.15E-08	1.66E-08	8.30E-09	5.53E-09	4.15E-09
8	5.62E-08	2.25E-08	1.12E-08	5.62E-09	2.25E-09	1.12E-09	7.50E-10	5.62E-10
9	7.61E-09	3.05E-09	1.52E-09	7.61E-10	3.05E-10	1.52E-10	1.02E-10	7.61E-11
12	1.89E-11	7.55E-12	3.78E-12	1.89E-12	7.55E-13	3.77E-13	2.52E-13	1.89E-13
15	4.70E-14	1.87E-14	9.33E-15	4.66E-15	1.78E-15	7.77E-16	5.55E-16	3.33E-16
20	1.11E-16	1.11E-16	1.11E-16	1.11E-16	1.11E-16	1.11E-16	1.11E-16	1.11E-16

Nagrinėsi atvejį, kai atsitiktinių dydžių skaičius pasiskirstęs pagal diskretųjį tolygųjį skirstinį.

1) Freše skirstinio:

13 lentelė

Konvergavimo greičių įverčių reikšmės

x\n	2	5	10	20	50	100	150	200
1	3.16E-01	1.26E-01	6.32E-02	3.16E-02	1.26E-02	6.32E-03	4.21E-03	3.16E-03
2	1.97E-01	7.87E-02	3.93E-02	1.97E-02	7.87E-03	3.93E-03	2.62E-03	1.97E-03
3	1.42E-01	5.67E-02	2.83E-02	1.42E-02	5.67E-03	2.83E-03	1.89E-03	1.42E-03
4	1.11E-01	4.42E-02	2.21E-02	1.11E-02	4.42E-03	2.21E-03	1.47E-03	1.11E-03
5	9.06E-02	3.63E-02	1.81E-02	9.06E-03	3.63E-03	1.81E-03	1.21E-03	9.06E-04
6	7.68E-02	3.07E-02	1.54E-02	7.68E-03	3.07E-03	1.54E-03	1.02E-03	7.68E-04
7	6.66E-02	2.66E-02	1.33E-02	6.66E-03	2.66E-03	1.33E-03	8.87E-04	6.66E-04
8	5.88E-02	2.35E-02	1.18E-02	5.88E-03	2.35E-03	1.18E-03	7.83E-04	5.88E-04
9	5.26E-02	2.10E-02	1.05E-02	5.26E-03	2.10E-03	1.05E-03	7.01E-04	5.26E-04
10	4.76E-02	1.90E-02	9.52E-03	4.76E-03	1.90E-03	9.52E-04	6.34E-04	4.76E-04

14 lentelė

Tiksliųjų absoliučiųjų paklaidų reikšmės

x\n	2	5	10	20	50	100	150	200
1	1.45E-01	6.11E-02	3.11E-02	1.57E-02	6.30E-03	3.16E-03	2.10E-03	1.58E-03
2	9.43E-02	3.87E-02	1.95E-02	9.80E-03	3.93E-03	1.97E-03	1.31E-03	9.83E-04
3	6.89E-02	2.80E-02	1.41E-02	7.07E-03	2.83E-03	1.42E-03	9.45E-04	7.08E-04
4	5.41E-02	2.19E-02	1.10E-02	5.52E-03	2.21E-03	1.11E-03	7.37E-04	5.53E-04
5	4.46E-02	1.80E-02	9.03E-03	4.52E-03	1.81E-03	9.06E-04	6.04E-04	4.53E-04
6	3.78E-02	1.53E-02	7.65E-03	3.83E-03	1.53E-03	7.67E-04	5.12E-04	3.84E-04
7	3.29E-02	1.32E-02	6.64E-03	3.32E-03	1.33E-03	6.65E-04	4.44E-04	3.33E-04
8	2.91E-02	1.17E-02	5.86E-03	2.93E-03	1.17E-03	5.87E-04	3.92E-04	2.94E-04
9	2.60E-02	1.05E-02	5.25E-03	2.63E-03	1.05E-03	5.26E-04	3.50E-04	2.63E-04
10	2.36E-02	9.48E-03	4.75E-03	2.38E-03	9.51E-04	4.76E-04	3.17E-04	2.38E-04

2) Veibulo skirstinio:

15 lentelė

Konvergavimo greičių įverčių reikšmės

x\n	2	5	10	20	50	100	150	200
-10	5.00E-01	2.00E-01	1.00E-01	5.00E-02	2.00E-02	1.00E-02	6.67E-03	5.00E-03
-9	5.00E-01	2.00E-01	1.00E-01	5.00E-02	2.00E-02	1.00E-02	6.67E-03	5.00E-03
-8	5.00E-01	2.00E-01	1.00E-01	5.00E-02	2.00E-02	1.00E-02	6.66E-03	5.00E-03
-7	5.00E-01	2.00E-01	9.99E-02	5.00E-02	2.00E-02	9.99E-03	6.66E-03	5.00E-03
-6	4.99E-01	2.00E-01	9.98E-02	4.99E-02	2.00E-02	9.98E-03	6.65E-03	4.99E-03
-5	4.97E-01	1.99E-01	9.93E-02	4.97E-02	1.99E-02	9.93E-03	6.62E-03	4.97E-03
-4	4.91E-01	1.96E-01	9.82E-02	4.91E-02	1.96E-02	9.82E-03	6.54E-03	4.91E-03
-3	4.75E-01	1.90E-01	9.50E-02	4.75E-02	1.90E-02	9.50E-03	6.33E-03	4.75E-03
-2	4.32E-01	1.73E-01	8.65E-02	4.32E-02	1.73E-02	8.65E-03	5.76E-03	4.32E-03
-1	3.16E-01	1.26E-01	6.32E-02	3.16E-02	1.26E-02	6.32E-03	4.21E-03	3.16E-03

16 lentelė

Tiksliųjų absoliučiųjų paklaidų reikšmės

x\n	2	5	10	20	50	100	150	200
-10	9.66E-02	6.87E-02	4.18E-02	2.29E-02	9.67E-03	4.92E-03	3.30E-03	2.48E-03
-9	1.05E-01	7.15E-02	4.26E-02	2.31E-02	9.70E-03	4.92E-03	3.30E-03	2.48E-03
-8	1.16E-01	7.44E-02	4.34E-02	2.33E-02	9.73E-03	4.93E-03	3.30E-03	2.48E-03
-7	1.27E-01	7.73E-02	4.42E-02	2.35E-02	9.76E-03	4.94E-03	3.30E-03	2.48E-03
-6	1.40E-01	8.03E-02	4.49E-02	2.37E-02	9.78E-03	4.94E-03	3.30E-03	2.48E-03
-5	1.54E-01	8.30E-02	4.55E-02	2.38E-02	9.77E-03	4.92E-03	3.29E-03	2.47E-03
-4	1.69E-01	8.52E-02	4.58E-02	2.37E-02	9.69E-03	4.88E-03	3.26E-03	2.45E-03
-3	1.80E-01	8.56E-02	4.51E-02	2.32E-02	9.41E-03	4.73E-03	3.16E-03	2.37E-03
-2	1.81E-01	8.07E-02	4.18E-02	2.13E-02	8.59E-03	4.31E-03	2.88E-03	2.16E-03
-1	1.45E-01	6.11E-02	3.11E-02	1.57E-02	6.30E-03	3.16E-03	2.10E-03	1.58E-03

3) Gumbelio skirstinio:

17 lentelė

Konvergavimo greičių įverčių reikšmės

x\n	2	5	10	20	50	100	150	200
-10	5.00E-01	2.00E-01	1.00E-01	5.00E-02	2.00E-02	1.00E-02	6.67E-03	5.00E-03
-8	5.00E-01	2.00E-01	1.00E-01	5.00E-02	2.00E-02	1.00E-02	6.67E-03	5.00E-03
-7	5.00E-01	2.00E-01	1.00E-01	5.00E-02	2.00E-02	1.00E-02	6.67E-03	5.00E-03
-5	5.00E-01	2.00E-01	1.00E-01	5.00E-02	2.00E-02	1.00E-02	6.67E-03	5.00E-03
-3	5.00E-01	2.00E-01	1.00E-01	5.00E-02	2.00E-02	1.00E-02	6.67E-03	5.00E-03
-1	4.67E-01	1.87E-01	9.34E-02	4.67E-02	1.87E-02	9.34E-03	6.23E-03	4.67E-03
0	3.16E-01	1.26E-01	6.32E-02	3.16E-02	1.26E-02	6.32E-03	4.21E-03	3.16E-03
1	1.54E-01	6.16E-02	3.08E-02	1.54E-02	6.16E-03	3.08E-03	2.05E-03	1.54E-03
4	9.07E-03	3.63E-03	1.81E-03	9.07E-04	3.63E-04	1.81E-04	1.21E-04	9.07E-05
5	3.36E-03	1.34E-03	6.72E-04	3.36E-04	1.34E-04	6.72E-05	4.48E-05	3.36E-05
7	4.56E-04	1.82E-04	9.11E-05	4.56E-05	1.82E-05	9.11E-06	6.08E-06	4.56E-06
8	1.68E-04	6.71E-05	3.35E-05	1.68E-05	6.71E-06	3.35E-06	2.24E-06	1.68E-06
10	2.27E-05	9.08E-06	4.54E-06	2.27E-06	9.08E-07	4.54E-07	3.03E-07	2.27E-07

18 lentelė

Tiksliųjų absoliučiųjų paklaidų reikšmės

x\n	2	5	10	20	50	100	150	200
-10	4.54E-05	4.54E-05	4.54E-05	4.54E-05	4.54E-05	4.54E-05	4.54E-05	4.54E-05
-8	3.35E-04	3.35E-04	3.35E-04	3.35E-04	3.35E-04	3.35E-04	3.35E-04	3.35E-04
-7	9.12E-04	9.12E-04	9.12E-04	9.12E-04	9.12E-04	9.12E-04	9.07E-04	8.91E-04
-5	6.74E-03	6.74E-03	6.74E-03	6.71E-03	5.65E-03	3.81E-03	2.79E-03	2.19E-03
-3	4.98E-02	4.61E-02	3.43E-02	2.09E-02	9.33E-03	4.83E-03	3.26E-03	2.46E-03
-1	1.82E-01	8.50E-02	4.46E-02	2.28E-02	9.26E-03	4.65E-03	3.10E-03	2.33E-03
0	1.45E-01	6.11E-02	3.11E-02	1.57E-02	6.30E-03	3.16E-03	2.10E-03	1.58E-03
1	7.46E-02	3.04E-02	1.53E-02	7.67E-03	3.07E-03	1.54E-03	1.03E-03	7.69E-04
4	4.53E-03	1.81E-03	9.07E-04	4.54E-04	1.81E-04	9.07E-05	6.05E-05	4.54E-05
5	1.68E-03	6.71E-04	3.36E-04	1.68E-04	6.72E-05	3.36E-05	2.24E-05	1.68E-05
7	2.28E-04	9.11E-05	4.56E-05	2.28E-05	9.11E-06	4.56E-06	3.04E-06	2.28E-06
8	8.38E-05	3.35E-05	1.68E-05	8.39E-06	3.35E-06	1.68E-06	1.12E-06	8.39E-07
10	1.14E-05	4.54E-06	2.27E-06	1.14E-06	4.54E-07	2.27E-07	1.51E-07	1.13E-07

4) Pareto skirstinio:

19 lentelė

Konvergavimo greičių įverčių reikšmės

x\n	2	5	10	20	50	100	150	200
1	4.48E-01	1.79E-01	8.96E-02	4.48E-02	1.79E-02	8.96E-03	5.98E-03	4.48E-03
2	2.42E-01	9.67E-02	4.84E-02	2.42E-02	9.67E-03	4.84E-03	3.22E-03	2.42E-03
3	1.64E-01	6.56E-02	3.28E-02	1.64E-02	6.56E-03	3.28E-03	2.19E-03	1.64E-03
4	1.24E-01	4.95E-02	2.48E-02	1.24E-02	4.95E-03	2.48E-03	1.65E-03	1.24E-03
5	9.94E-02	3.98E-02	1.99E-02	9.94E-03	3.98E-03	1.99E-03	1.33E-03	9.94E-04
6	8.30E-02	3.32E-02	1.66E-02	8.30E-03	3.32E-03	1.66E-03	1.11E-03	8.30E-04
7	7.12E-02	2.85E-02	1.42E-02	7.12E-03	2.85E-03	1.42E-03	9.49E-04	7.12E-04
8	6.23E-02	2.49E-02	1.25E-02	6.23E-03	2.49E-03	1.25E-03	8.31E-04	6.23E-04
9	5.54E-02	2.22E-02	1.11E-02	5.54E-03	2.22E-03	1.11E-03	7.39E-04	5.54E-04
10	4.99E-02	2.00E-02	9.98E-03	4.99E-03	2.00E-03	9.98E-04	6.66E-04	4.99E-04

20 lentelė

Tiksliųjų absoliučiųjų paklaidų reikšmės

x\n	2	5	10	20	50	100	150	200
1	2.57E-01	9.43E-02	4.59E-02	2.27E-02	9.01E-03	4.49E-03	2.99E-03	2.24E-03
2	1.31E-01	4.98E-02	2.45E-02	1.22E-02	4.85E-03	2.42E-03	1.61E-03	1.21E-03
3	8.65E-02	3.35E-02	1.66E-02	8.24E-03	3.29E-03	1.64E-03	1.09E-03	8.21E-04
4	6.45E-02	2.52E-02	1.25E-02	6.22E-03	2.48E-03	1.24E-03	8.26E-04	6.19E-04
5	5.13E-02	2.01E-02	1.00E-02	4.99E-03	1.99E-03	9.95E-04	6.63E-04	4.97E-04
6	4.26E-02	1.68E-02	8.34E-03	4.16E-03	1.66E-03	8.30E-04	5.53E-04	4.15E-04
7	3.64E-02	1.44E-02	7.15E-03	3.57E-03	1.43E-03	7.12E-04	4.75E-04	3.56E-04
8	3.18E-02	1.26E-02	6.26E-03	3.12E-03	1.25E-03	6.24E-04	4.16E-04	3.12E-04
9	2.82E-02	1.12E-02	5.56E-03	2.78E-03	1.11E-03	5.55E-04	3.70E-04	2.77E-04
10	2.54E-02	1.01E-02	5.01E-03	2.50E-03	9.99E-04	4.99E-04	3.33E-04	2.50E-04

5) Beta skirstinio:

21 lentelė

Konvergavimo greičių įverčių reikšmės

x\n	2	5	10	20	50	100	150	200
-1	4.48E-01	1.79E-01	8.96E-02	4.48E-02	1.79E-02	8.96E-03	5.98E-03	4.48E-03
-0.9	4.10E-01	1.64E-01	8.21E-02	4.10E-02	1.64E-02	8.21E-03	5.47E-03	4.10E-03
-0.8	3.71E-01	1.48E-01	7.42E-02	3.71E-02	1.48E-02	7.42E-03	4.95E-03	3.71E-03
-0.7	3.30E-01	1.32E-01	6.59E-02	3.30E-02	1.32E-02	6.59E-03	4.39E-03	3.30E-03
-0.6	2.87E-01	1.15E-01	5.73E-02	2.87E-02	1.15E-02	5.73E-03	3.82E-03	2.87E-03
-0.5	2.42E-01	9.67E-02	4.84E-02	2.42E-02	9.67E-03	4.84E-03	3.22E-03	2.42E-03
-0.4	1.96E-01	7.82E-02	3.91E-02	1.96E-02	7.82E-03	3.91E-03	2.61E-03	1.96E-03
-0.3	1.48E-01	5.92E-02	2.96E-02	1.48E-02	5.92E-03	2.96E-03	1.97E-03	1.48E-03
-0.2	9.94E-02	3.98E-02	1.99E-02	9.94E-03	3.98E-03	1.99E-03	1.33E-03	9.94E-04
-0.1	4.99E-02	2.00E-02	9.98E-03	4.99E-03	2.00E-03	9.98E-04	6.66E-04	4.99E-04

22 lentelė

Tiksliųjų absoliučiųjų paklaidų reikšmės

x\n	2	5	10	20	50	100	150	200
-1	2.57E-01	9.43E-02	4.59E-02	2.27E-02	9.01E-03	4.49E-03	2.99E-03	2.24E-03
-0.9	2.33E-01	8.60E-02	4.20E-02	2.08E-02	8.25E-03	4.11E-03	2.74E-03	2.05E-03
-0.8	2.08E-01	7.75E-02	3.79E-02	1.87E-02	7.45E-03	3.72E-03	2.48E-03	1.86E-03
-0.7	1.83E-01	6.85E-02	3.36E-02	1.66E-02	6.62E-03	3.30E-03	2.20E-03	1.65E-03
-0.6	1.57E-01	5.93E-02	2.91E-02	1.44E-02	5.75E-03	2.87E-03	1.91E-03	1.43E-03
-0.5	1.31E-01	4.98E-02	2.45E-02	1.22E-02	4.85E-03	2.42E-03	1.61E-03	1.21E-03
-0.4	1.04E-01	4.01E-02	1.98E-02	9.84E-03	3.92E-03	1.96E-03	1.31E-03	9.79E-04
-0.3	7.77E-02	3.02E-02	1.49E-02	7.44E-03	2.97E-03	1.48E-03	9.88E-04	7.41E-04
-0.2	5.13E-02	2.01E-02	1.00E-02	4.99E-03	1.99E-03	9.95E-04	6.63E-04	4.97E-04
-0.1	2.54E-02	1.01E-02	5.01E-03	2.50E-03	9.99E-04	4.99E-04	3.33E-04	2.50E-04

6) Eksponentinio:

23 lentelė

Konvergavimo greičių įverčių reikšmės

x\n	2	5	10	20	50	100	150	200
0	4.48E-01	1.79E-01	8.96E-02	4.48E-02	1.79E-02	8.96E-03	5.98E-03	4.48E-03
1	1.80E-01	7.22E-02	3.61E-02	1.80E-02	7.22E-03	3.61E-03	2.41E-03	1.80E-03
2	6.75E-02	2.70E-02	1.35E-02	6.75E-03	2.70E-03	1.35E-03	9.00E-04	6.75E-04
3	2.49E-02	9.95E-03	4.98E-03	2.49E-03	9.95E-04	4.98E-04	3.32E-04	2.49E-04
4	9.16E-03	3.66E-03	1.83E-03	9.16E-04	3.66E-04	1.83E-04	1.22E-04	9.16E-05
5	3.37E-03	1.35E-03	6.74E-04	3.37E-04	1.35E-04	6.74E-05	4.49E-05	3.37E-05
6	1.24E-03	4.96E-04	2.48E-04	1.24E-04	4.96E-05	2.48E-05	1.65E-05	1.24E-05
7	4.56E-04	1.82E-04	9.12E-05	4.56E-05	1.82E-05	9.12E-06	6.08E-06	4.56E-06
8	1.68E-04	6.71E-05	3.35E-05	1.68E-05	6.71E-06	3.35E-06	2.24E-06	1.68E-06
9	6.17E-05	2.47E-05	1.23E-05	6.17E-06	2.47E-06	1.23E-06	8.23E-07	6.17E-07
10	2.27E-05	9.08E-06	4.54E-06	2.27E-06	9.08E-07	4.54E-07	3.03E-07	2.27E-07

24 lentelė

Tiksliųjų absoliučiųjų paklaidų reikšmės

x\n	2	5	10	20	50	100	150	200
0	2.57E-01	9.43E-02	4.59E-02	2.27E-02	9.01E-03	4.49E-03	2.99E-03	2.24E-03
1	9.57E-02	3.69E-02	1.83E-02	9.07E-03	3.62E-03	1.81E-03	1.20E-03	9.03E-04
2	3.45E-02	1.36E-02	6.78E-03	3.38E-03	1.35E-03	6.75E-04	4.50E-04	3.37E-04
3	1.25E-02	4.99E-03	2.49E-03	1.25E-03	4.98E-04	2.49E-04	1.66E-04	1.24E-04
4	4.59E-03	1.83E-03	9.16E-04	4.58E-04	1.83E-04	9.16E-05	6.11E-05	4.58E-05
5	1.69E-03	6.74E-04	3.37E-04	1.68E-04	6.74E-05	3.37E-05	2.25E-05	1.68E-05
6	6.20E-04	2.48E-04	1.24E-04	6.20E-05	2.48E-05	1.24E-05	8.26E-06	6.20E-06
7	2.28E-04	9.12E-05	4.56E-05	2.28E-05	9.12E-06	4.56E-06	3.04E-06	2.28E-06
8	8.39E-05	3.35E-05	1.68E-05	8.39E-06	3.35E-06	1.68E-06	1.12E-06	8.39E-07
9	3.09E-05	1.23E-05	6.17E-06	3.09E-06	1.23E-06	6.17E-07	4.11E-07	3.09E-07
10	1.14E-05	4.54E-06	2.27E-06	1.14E-06	4.54E-07	2.27E-07	1.51E-07	1.13E-07

7 PRIEDAS. PUBLIKACIJOS

Šiame priede pateikiami publikuoti straipsniai:

1. Pinkevičiūtė L., Aksomaitis A. Stabilieji maksimumų skirstiniai perkėlimo teoremoje. Taikomoji matematika – VI studentų konferencijos pranešimų programa. – Kaunas, Technologija, 2006. 55 – 56 p.
2. The 12th International Conference on Applied Stochastic Models and Data Anglysis (ASMDA 2007).