



**KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA**

Birutė Pliskauskaitė

**VALDYMO SISTEMOS SU VĖLAVIMAIMS
ANALIZINIS TYRIMAS**

Magistro darbas

**Vadovas
prof. J. Rimas
Vadovas
doktorantė I. Ivanovienė**

KAUNAS, 2011



KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

TVIRTINU
Katedros vedėjas
doc. dr. N. Listopadskis
2011 06 02

VALDYMO SISTEMOS SU VĖLAVIMAIS
ANALIZINIS TYRIMAS

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

Vadovas
() prof. J. Rimas
2010 06 01

Vadovas
() doktorantė
I. Ivanovienė
2010 06 01

Recenzentas
() doc. dr. A. Zajančasuskas
2010 06 01

Atliko
FMM 7/1 gr. stud.
() B. Pliskauskaitė
2010 05 30

KAUNAS, 2011

KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

Pirmininkas: Leonas Saulis, profesorius (VGTU)

Sekretorius: Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)

Nariai: Algimantas Jonas Aksomaitis, profesorius (KTU)

Vytautas Janilionis, docentas (KTU)

Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU)

Rimantas Rudzkis, habil. dr., vyriausiasis analitikas (DnB NORD Bankas)

Zenonas Navickas, profesorius (KTU)

Arūnas Barauskas, dr., vice-prezidentas projektams (UAB „Baltic Amadeus“)

Pliskauskaitė B. Analytical analysis of control systems with delay: Master's work in applied mathematics / supervisor prof. dr. J. Rimas, doktorante I. Ivanovienė; Departament of Applied mathematics, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2011. - 68 p.

SUMMARY

The mutual synchronization system of the communication network, composed of four oscillators, is investigated in the work.

Following aims were raised in this work: to compose the mathematical model of the synchronization system, to find the exact expressions of the step responses of the system and of the phase differences of the oscillations of oscillators, to investigate the transients in the synchronization system.

The mathematical model of the system is the matrix differential equation with delayed argument. This equation is solved applying the method of consequent integration (method of “steps”). For this purpose the interval $0 \leq t < +\infty$ is divided to subintervals of equal length τ . The equation in each subinterval is solved separately, as ordinary differential equation without delayed argument. Using obtained expression of the solution, the expressions of step responses of the system are got. The expressions of step responses are applied investigating the transients in the synchronization system.

TURINYS

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS.....	7
I V A D A S.....	8
1. TEORINĖ DALIS.....	9
1.1. RYŠIO TINKLO SINCHRONIZACIJA. SINCHRONIZACIJOS STRATEGIJOS.....	9
1.2. APIBENDRINTOSIOS FUNKCIJOS.....	10
1.2.1. APIBENDRINTŲJŲ FUNCIJŲ DIFERENCIJAVIMAS.....	11
1.2.2. VIENETINĖ HEVISAIDO FUNCIJA.....	12
1.2.3. DIRAKO DELTA FUNCIJA.....	13
1.3 OPERACINIS SKAIČIAVIMAS.....	14
1.3.1. LAPLASO TRANSFORMACIJA. PIRMAVAIZDŽIO IR VAIZDO SĄVOKOS.....	14
1.3.2. LAPLASO TRANSFORMACIJOS SAVYBĖS.....	16
1.3.3. LAPLASO TRANSFORMACIJOS TAIKYMAI. TIESINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTIES SU PASTOVIAIS KOEFICIENTAIS SPRENDIMAS.....	18
1.3.4. NUOSEKLAUS INTEGRAVIMO (ŽINGSNIŲ) METODAS.....	19
2. TIRIAMOJI DALIS.....	20
2.1 TARPUSAVIO SINCHRONIZACIJOS SISTEMOS SCHEMA.....	20
2.2 SINCHRONIZACIJOS SISTEMOS MATEMATINIO MODELLIO SUDARYMAS..	20
2.3 MATRICINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTIES SPRENDIMAS.....	23
2.4 MATRICOS, NUSAKANČIOS VIDINĘ RYŠIŲ STRUKTŪRĄ, K- TOJO LAIPSNIO RADIMAS.....	29
2.5 MATRICOS B, PAKELTOS SVEIKUOJU LAIPSNIU, ELEMENTŲ SKAIČIAVIMAS.....	33
2.6 MATRICINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTIES LAISVOJO NARIO KOMPONENČIŲ ANALIZINĖS IŠRAIŠKOS.....	33
2.7 MATRICINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTIES SPRENDINIO TIKSLI ANALIZINĖ IŠRAIŠKA.....	34
2.8 SINCHRONIZACIJOS SISTEMOS PEREINAMŲJŲ PROCESŲ TYRIMAS.....	35
2.8.1. SISTEMOS PEREINAMŲJŲ PROCESŲ TYRIMAS, NAUDOJANT PEREINAMAŠIAS FUNKCIJAS.....	35

2.8.2. SISTEMOS PEREINAMOSIOS FUNKCIJOS.....	37
2.8.3. PEREINAMŪJŲ FUNKCIJŲ RIBINIŲ REIKŠMIŲ SKAIČIAVIMAS.....	38
2.8.4. PEREINAMOJO PROCESO PRIKLAUSOMYBĖS NUO SISTEMOS PARAMETRŲ TYRIMAS.....	40
2.8.5. SISTEMOS PEREINAMŪJŲ PROCESŲ PRIKLAUSOMYBĖ NUO PRADINIŲ SĄLYGŲ.....	43
2.8.6. GENERATORIŲ VIRPESIŲ FAZIŲ SKIRTUMŲ PEREINAMŪJŲ PROCESŲ TYRIMAS.....	48
IŠVADOS.....	56
LITERATŪRA.....	57
1 Priedas. PEREINAMŪJŲ FUNKCIJŲ SKAIČIAVIMO PROGRAMOS TEKSTAS.....	58
2 Priedas. GENERATORIŲ VIRPESIŲ FAZIŲ SKIRTUMŲ SKAIČIAVIMO PROGRAMOS TEKSTAS.....	58
3 Priedas. PEREINAMŪJŲ FUNKCIJŲ GRAFIKAI.....	64
4 Priedas. FAZIŲ SKIRTUMŲ $x_j(t) - x_i(t)$ GRAFIKAI.....	65

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

1.1 pav. Ryšio tinklo sinchronizavimo būdai.....	10
1.2 pav. Hevisaido vienetinės funkcijos grafikas.....	12
1.3 pav. Vėluojančiosios vienetinės funkcijos grafikas.....	13
1.4 pav. Funkcijos $\delta_h(t)$ grafikas.....	13
1.5 pav. Pirmavaizdžio vaizdo apibrėžimo sritis.....	15
2.1 pav. Sinchronizacijos sistemos schema.....	20
2.2 pav. Sinchronizacijos sistemos struktūrinė schema.....	21
2.3 Pereinamųjų funkcijų grafikai, kai $\kappa\tau = 0.5$	40
2.4 Pereinamųjų funkcijų grafikai, kai $\kappa\tau = 1$	41
2.5 Pereinamųjų funkcijų grafikai, kai $\kappa\tau = 0.5$	42
2.6 Pereinamųjų funkcijų grafikai, kai $\kappa\tau = 1$	43
2.7 pav. Fazių skirtumo grafikai prie skirtingų κ reikšmių.....	55
2.8 pav. Fazių skirtumo grafikai $\kappa = 0.5$	55

IVADAS

Modernūs ryšio tinklai yra ilgo evoliucinio proceso, prasidėjusio dar XIX a. pabaigoje rezultatas. Iš pradžių ryšio tinklo linijomis buvo perduodami analoginiai signalai, kurie buvo paskirstomi tinklo mazgų komutatoriuose. Šiame etape sinchronizuoti komutatorių nereikėjo.

Laikui bėgant, perdavimas ir komutavimas, vienas po kito buvo pakeisti į skaitmeninius. Informacija buvo perduodama skaitmeninėse ryšio linijose (naudojant skaitmenines ryšio sistemas) tarp analoginių komutatorių.

Vėliau atsirado poreikis skaitmenines technologijas taikyti ne tik perdavimo linijose, bet ir komutatoriuose. Norint išvengti informacijos nuostolių, kylančių dėl signalų poslinkių komutatorių įėjimuose, atsirado būtinybė sinchronizuoti tokius skaitmeninius komutatorius.

Darbe nagrinėjama ryšio tinklo sinchronizacijos sistema, sudaryta iš keturių tarpusavyje sinchronizuotų generatorių.

Darbo tikslas - sudaryti sinchronizacijos sistemos matematinį modelį, rasti sistemos pereinamųjų funkcijų ir generatorių virpesių fazių skirtumų tikslias analizes išraiškas, ištirti sistemos pereinamuosius procesus ir jos darbą nusistovėjusiame režime.

Nagrinėjamos sistemos matematinis modelis - matricinė diferencialinė lygtis su vėluojančiu argumentu. Ši lygtis sprendžiama „žingsnių“ metodu. Tuo tikslu intervalas $0 \leq t < \infty$ dalijamas į vienodo ilgio τ dalinius intervalus. Kiekviename daliniame intervale lygtis sprendžiama atskirai, kaip paprasta matricinė diferencialinė lygtis be vėluojančio argumento. Naudojantis gautu sprendiniu, rastos tikslios sinchronizacijos sistemos pereinamųjų funkcijų analizinės išraiškos. Remiantis šiomis išraiškomis, atliktas pereinamųjų procesų sinchronizacijos sistemoje tyrimas.

1. TEORINĖ DALIS

1.1 RYŠIO TINKLO SINCHRONIZACIJA. SINCHRONIZACIJOS STRATEGIJOS

Sinchronizacija – tai įvairių procesų suderinimas taip, kad jų vyksmo periodai sutaptų arba būtų kartotiniai (t.y. jų laiko skalės būtų suderintos). Šiuolaikinio ryšio tinklo sėkmingam funkcionavimui sinchronizacija yra būtina.

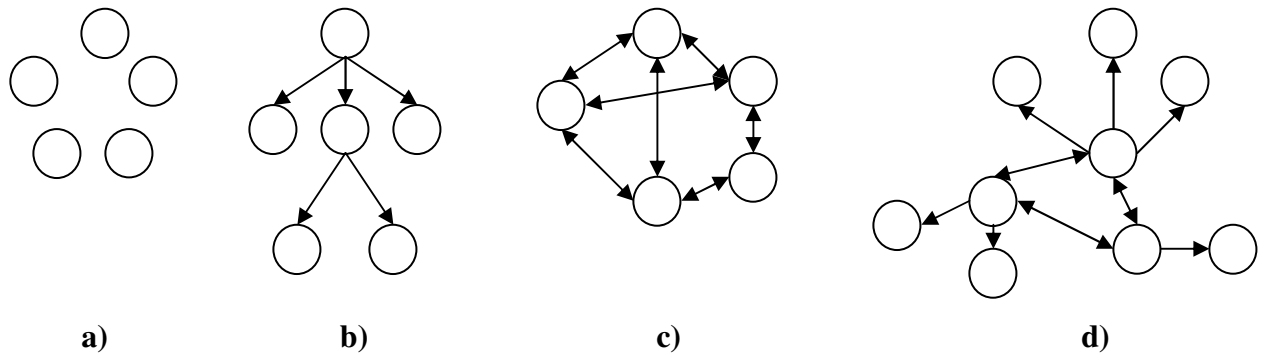
Ryšio tinklo pagrindinės funkcijos yra informacijos perdavimas ir paskirstymas. Perdavimo funkcija išpildoma perduodant informaciją iš vieno tinklo mazgo į bet kurį kitą. Paskirstymo funkcija yra vykdoma kiekviename ryšio tinklo mazge, komutuojant gautą informaciją taip, kad ji pasiektų adresatą. Sinchronizacijos sistema yra svarbi skaitmeninio ryšio tinklo sudedamoji dalis, nulemianti ryšio tinklo teikiamų paslaugų kokybę. Kad sinchronizacijos sistema dirbtų patikimai, nepakanka turėti tikslų sinchrosignalų šaltinį. Būtina užtikrinti patikimą sinchrosignalų perdavimą visiems tinklo mazgams. Buvo iširta nemažai skirtingų ryšio tinklo sinchronizavimo strategijų. Populiariausios iš jų yra:

- Pleziosinchronizacija (1.1 pav. a). Kiekvienas tinklo generatorius yra nepriklausomas nuo kitų (autonominis). Kad būtų maži informacijos, perduodamos tinklu, nuostoliai, taktiniai generatoriai, esantys tinklo mazguose, turi būti labai stabilūs ir tikslūs. Ši sinchronizavimo strategija taikoma labai retai, kadangi tokie generatoriai yra brangūs.

- Priverstinės sinchronizacijos strategija (1.1 pav. b) pagrįsta vieno pagrindinio taktinio generatoriaus dažnio paskirstymu kitiems tinklo taktiniams generatoriams. Kiekvieno (išskyrus pagrindinį) taktinio generatoriaus išėjimo signalas sinchronizuojamas (naudojant fazinę automatinę dažnio paderinimo sistemą) įėjimo signalu, atėjusio iš pagrindinio generatoriaus (tiesiogiai arba per kitus taktinius generatorius). Priverstinės sinchronizacijos realizavimas reikalauja mažesnių išlaidų, todėl ji yra plačiai naudojama.

- Tarpusavio sinchronizacija (1.1 pav. c) – tai tiesioginė abipuse kontrole pagrįsta tarpusavyje sujungtų generatorių sinchronizacijos strategija. Kiekvienas iš sujungtų generatorių turi įtakos kitų generatorių dažniams (dažnai keičiami naudojant modifikuotas automatines fazines dažnio keitimo sistemas). Nusistovėjusiam režime visi taktiniai generatoriai dirba vienodu dažniu, kuris gali skirtis nuo generatorių savųjų dažnių. Ši sinchronizacija pasižymi dideliu gyvybingumu (sugedus vienam ar keletui taktinių generatorių, likusieji lieka tarpusavyje sinchronizuoti).

▪ Hibridinė (1.1 pav. d) – dažnai taikomos ir šių sinchronizacijos strategijų įvairios kombinacijos, pavyzdžiui, priverstinės ir tarpusavio sinchronizacijų jungtys.



1.1 pav. Ryšio tinklo sinchronizavimo būdai

1.2 APIBENDRINTOSIOS FUNKCIJOS

1 Apibrėžimas.

Tegu Ω yra sritis erdvėje R^n . Pagrindinių funkcijų erdvei $D(\Omega)$ priskirsime be galo diferencijuojamas ir finičias srityje Ω funkcijas, t.y. $D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$.

2 Apibrėžimas.

Bet kurią tiesinį tolydų funkcionalą, apibrėžtą pagrindinių funkcijų erdvėje $D(\Omega)$, vadiname apibendrintąja funkcija. Apibendrintųjų funkcijų erdvę žymėsime $D^*(\Omega)$, arba trumpiau - D^* . Simboliu $\langle f, \varphi \rangle$ žymėsime funkcionalo $f \in D^*(\Omega)$ reikšmę taške $\varphi \in D(\Omega)$.

Paaiškinsime apibendrintosios funkcijos apibrėžimą.

1. Apibendrintoji funkcija f yra funkcionalas erdvėje $D(\Omega)$, t.y. kiekvienai funkcijai $\varphi \in D(\Omega)$ priskiria skaičių $\langle f, \varphi \rangle$ (bendru atveju kompleksinį).

2. Apibendrintoji funkcija f yra tiesinis funkcionalas erdvėje $D(\Omega)$, t.y. jeigu $\varphi, \psi \in D(\Omega), \lambda, \mu \in C$, tai

$$\langle f, \lambda\varphi + \mu\psi \rangle = \lambda\langle f, \varphi \rangle + \mu\langle f, \psi \rangle.$$

3. Apibendrintoji funkcija f yra tolydus funkcionalas erdvėje $D(\Omega)$, t.y. jeigu $\varphi_k \rightarrow \varphi$, kai $k \rightarrow \infty$, tai $\langle f, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$, kai $k \rightarrow \infty$.

Išskirsime dvi plačias apibendrintųjų funkcijų klases.

1. Reguliariosios apibendrintosios funkcijos.

3 Apibrėžimas.

Tegu f yra lokaliai integruojama srityje Ω funkcija, t.y. $f \in L_{loc}(\Omega)$.

Integralas

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx, \varphi \in D(\Omega) \quad (1.1.1)$$

kur $f \in D^*(\Omega)$ apibrėžia apibendrintą funkciją. Taip apibrėžta apibendrinta funkcija yra vadinama reguliariąja apibendrintąja funkcija ir žymima ta pačia raide f kaip ir ją generuojanti funkcija $f \in L_{loc}(\Omega)$.

1 savybė (tiesiškumo).

Apibendrintos funkcijos tiesiškumas išplaukia iš integralo savybių:

$$\langle f, \lambda\varphi + \mu\psi \rangle = \int_{\Omega} f(x)[\lambda\varphi(x) + \mu\psi(x)]dx = \lambda \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx + \mu \int_{\Omega} f(x)\psi(x)dx = \lambda\langle f, \varphi \rangle + \mu\langle f, \psi \rangle.$$

2 savybė (tolydumo).

Jos tolydumas išplaukia iš Lebeogo teoremos [1].

1 Lebeogo teorema apie ribinį perėjimą po integralo ženklų:

$$\langle f, \varphi_k \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi_k(x)dx \rightarrow \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx = \langle f, \varphi \rangle, \text{ jeigu tik } \varphi_k \rightarrow \varphi \text{ erdvėje } D, \text{ kai } k \rightarrow \infty.$$

2. Singuliariosios apibendrintosios funkcijos.

4 Apibrėžimas.

Apibendrintąsias funkcijas $f \in D^*$, kurių negalima išreikšti (1.1.1) formule, vadinsime singuliariosiomis apibendrintomis funkcijomis.

1.2.1 APIBENDRINTŲJŲ FUNKCIJŲ DIFERENCIJAVIMAS

Tegu $f \in C^k(\Omega)$, t.y. tolydžių srityje Ω funkcijų, turinčių tolydžias dalines išvestines iki k -osios eilės imtinai, aibė. Tada su visais $\alpha, |\alpha| \leq k$ ir $\varphi \in D(\Omega)$ teisinga integravimo dalimis formulė:

$$(D^\alpha f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} D^\alpha f(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (f, D^\alpha \varphi).$$

Šia lygybe pasinaudosime apibrėždami apibendrintosios funkcijos išvestinę.

5 Apibrėžimas.

Apibendrintosios funkcijos $f \in D^*(\Omega)$ išvestine vadiname funkcionalą $D^\alpha f$, apibrėžiamą formule $(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi)$, $\varphi \in D(\Omega)$.

Jeigu apibendrintoji funkcija f turi klasikinę išvestinę $D^\alpha f$, tai pastaroji sutampa su apibendrintosios funkcijos f išvestine.

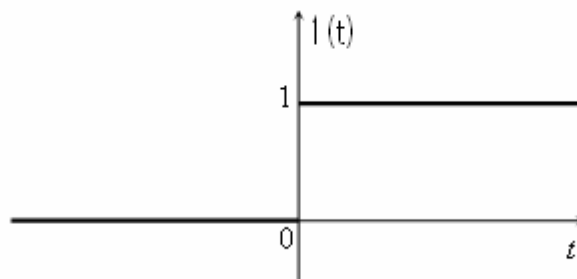
1.2.2 VIENETINĖ HEVISAIDO FUNKCIJA

6 Apibrėžimas.

Funkciją

$$f(t) = 1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

vadiname Hevisaido vienetine funkcija (1.1 pav.). Hevisaido vienetinė funkcija tenkina visas pirmavaizdį apibrėžiančias sąlygas, be to, turi didėjimo rodiklį $\sigma_0 = 0$.



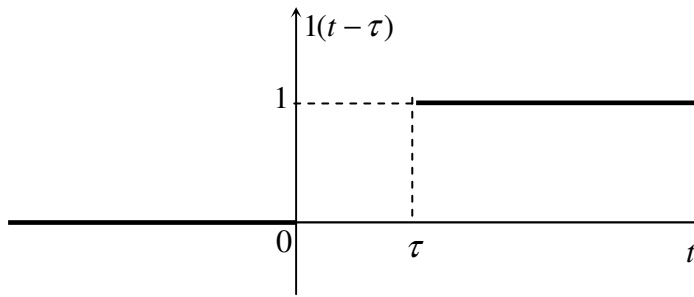
1.2 pav. Hevisaido vienetinės funkcijos grafikas

7 Apibrėžimas.

Funkciją

$$1(t - \tau) = \begin{cases} 1, & t \geq \tau, \\ 0, & t < \tau \end{cases}$$

vadiname vėluojančiąja vienetine funkcija (1.2 pav.).



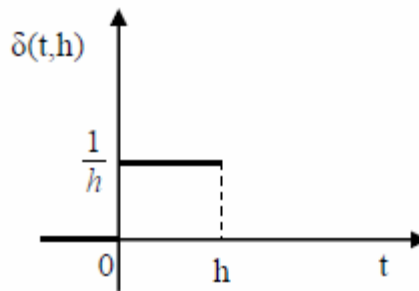
1.3 pav. Vėluojančiosios vienetinės funkcijos grafikas

1.2.3 DIRAKO DELTA FUNKCIJA

Panagrinėkime funkciją $\delta_h(t)$:

$$\delta_h = \begin{cases} 0, & t < 0, t > h, \\ \frac{1}{h}, & 0 < t < h, \end{cases}$$

kurios grafikas pavaizduotas 1.4 paveiksle.



1.4 pav. Funkcijos $\delta_h(t)$ grafikas

Ši funkcija atkarpoje $(0, h)$ turi pastovią reikšmę $\frac{1}{h}$, impulso plotas yra lygus vienetui, t.y.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_h(t) dt = \int_0^h \frac{dt}{h} = 1. \quad (1.2.3)$$

Tarkim, kad $h \rightarrow 0$. Akivaizdu, kad funkcijų $\delta_h(t)$ šeima diverguoja. Įveskime funkciją $\delta(t)$, kuri yra funkcijų $\delta_h(t)$ šeimos riba:

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta_h(t).$$

Šią funkciją vadiname nulinės eilės impulsine Dirako delta funkcija. $\delta(t)$ lygi nuliui visuose taškuose, išskyrus tašką $t = 0$, kuriame $\delta(t) = \infty$. Be to,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Impulsinės funkcijos $\delta_h(t)$ – vaizdas gali būti gaunamas iš funkcijos $\delta_h(t) = \frac{1}{h} [1(t) - 1(t-h)]$ vaizdo. Pritaikius vėlavimo teoremą turime:

$$\delta_h(t) \doteq \frac{1 - e^{-ph}}{ph}.$$

Perėję prie ribos, kai $h \rightarrow 0$, gauname

$$\delta(t) \doteq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-ph}}{ph} = 1. \quad (1.2.4)$$

Funkcijai $\delta(t)$ galioja pagrindinės Laplaso transformacijos savybės. Pavyzdžiui, vėlavimo teorema

$$\delta(t - \tau) \doteq e^{-p\tau}, \text{ vaizdų sandaugos teorema } 1 \cdot F(p) \doteq \int_0^t f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t).$$

Fizikine prasme delta funkcija gali būti suprantama kaip vienetinio krūvio, esančio koordinatų pradžioje, tankis. Jei krūvio dydis m , tai jo tankis $\rho(x) = m\delta(x)$.

1.3 OPERACINIS SKAIČIAVIMAS

Tiesinių grandinių analizės metodas, pagrįstas realaus kintamojo funkcijų Laplaso transformacija, vadinamas operaciniu. Čia veiksmai su funkcijomis pakeičiami veiksmiais su jų vaizdais. Daugeliu atveju veiksmai su vaizdais yra paprastesni. Uždavinių sprendimo metodą, kai pirmavaizdžiai keičiami į jų vaizdus, su vaizdais atliekami veiksmai ir nuo gautojo rezultato – vaizdo grįžtama prie jo pirmavaizdžio, vadiname operaciniu skaičiavimu.

Toliau paaiškinsime kai kurias sąvokas, naudojamas operaciniame skaičiavime.

1.3.1 LAPLASO TRANSFORMACIJA. PIRMAVAIZDŽIO IR VAIZDO SĄVOKOS

8 Apibrėžimas.

Realaus kintamojo t kompleksinę funkciją $f(t)$ vadiname pirmavaizdžiu, kai [9]:

1. funkcija $f(t)$ intervale $0 \leq t < \infty$ yra tolydi arba turi tiksliai pirmojo tipo trūkio taškus, kurių skaičius bet kuriame baigtiniame intervale yra baigtinis;

2. $f(t) = 0$, kai $t < 0$;

3. didėjant t , funkcijos $f(t)$ modulis didėja ne greičiau, kaip eksponentinė funkcija, t.y., egzistuoja tokie skaičiai $M > 0$ ir $\sigma > 0$, su kuriais

$$|f(t)| \leq M e^{-\sigma t}, \text{ kai } t > 0. \quad (1.3.1)$$

9 Apibrėžimas.

Tikslus apatinis visų skaičių σ , kuriems teisinga (1.3.1) nelygybė, režis σ_0 vadinamas funkcijos $f(t)$ didėjimo rodikliu.

10 Apibrėžimas.

Pirmavaizdžio $f(t)$ vaizdu vadiname kompleksinio kintamojo $p = \sigma + i\omega$ funkciją $F(p)$, apibrėžiamą netiesioginiu integralu

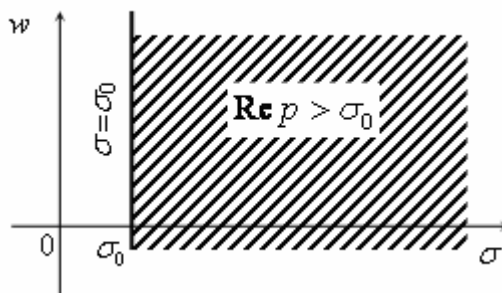
$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (1.3.2)$$

(1.3.2) integralas vadinamas funkcijos $f(t)$ Laplaso transformacija (kartais Laplaso integralu). Veiksmas, kuriuo randamas pirmavaizdžio $f(t)$ vaizdas $F(p)$, taip pat vadinamas Laplaso transformacija. Vaizdo $F(p)$ ir pirmavaizdžio $f(t)$ atitiktį žymėsime $F(p) \div f(t)$.

Pirmavaizdžio $f(t)$ vaizdas $F(p)$ yra apibrėžtas ne visoje kompleksinėje plokštumoje p .

2 Vaizdo egzistavimo teorema [9].

Kiekvienas pirmavaizdis $f(t)$ turi vaizdą $F(p)$, apibrėžtą pusplokštumėje $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, čia σ_0 - funkcijos $f(t)$ didėjimo rodiklis (1.5 pav.).



1.5 pav. Pirmavaizdžio vaizdo apibrėžimo sritis

Pirmavaizdžio $f(t)$ Laplaso integralas pusplokštumėje $\text{Re } p > \sigma_0$ konverguoja absoliučiai ir tolygiai.

1.3.2 LAPLASO TRANSFORMACIJOS SAVYBĖS

Pateiksime svarbiausias Laplaso transformacijos savybes [9].

1 savybė (tiesiškumas).

Jeigu pirmavaizdžių $f_1(t)$ ir $f_2(t)$ vaizdai yra atitinkamai $F_1(p)$ ir $F_2(p)$, t.y. $f_1(p) \div F_1(p)$, $f_2(p) \div F_2(p)$ ir C_1, C_2 - kompleksiniai skaičiai, tai

$$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \div C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p) \quad (1.3.3)$$

(tiesinį pirmavaizdžių darinį atitinka toks pat tiesinis jų vaizdų darinys). Laplaso transformacijos tiesiškumo savybė gali būti apibendrinta, imant bet kurį baigtinį dėmenų skaičių: jeigu $f_k(t) \div F_k(p)$, $k = \overline{1, n}$ ir $C_k \in C$, tai

$$\sum_{k=1}^n C_k f_k(t) \div \sum_{k=1}^n C_k F_k(p). \quad (1.3.4)$$

2 savybė (panašumas).

Jeigu $f(t) \div F(p)$ ir $\lambda > 0$, tai

$$f(\lambda t) \div \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right). \quad (1.3.5)$$

3 savybė (postūmis).

Jeigu α yra bet koks kompleksinis skaičius ir $F(p) \div f(t)$, tai

$$F(p - \alpha) \div e^{\alpha t} f(t). \quad (1.3.6)$$

4 savybė (vėlavimas).

Jeigu $\tau > 0$ ir $f(t) \div F(p)$, tai

$$f(t - \tau) \div e^{-p\tau} F(p). \quad (1.3.7)$$

Pirmavaizdžio vėlavimas laiku τ atitinka vaizdo dauginimą iš $e^{-p\tau}$.

3 teorema (pirmavaizdžio diferencijavimo).

Jeigu $f(t)$ yra tolydi, dalimis diferencijuojama funkcija, kai $t > 0$, be to, $f(t)$ ir $f'(t)$ yra pirmavaizdžiai ir $f(t) \div F(p)$, tai

$$f'(t) \div pF(p) - f(0); \quad (1.3.8)$$

čia $f(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$ - pradinė pirmavaizdžio reikšmė.

4 teorema (vaizdo diferencijavimas).

Jeigu $F(p) \div f(t)$, tai

$$F'(p) \div -tf(t). \quad (1.3.9)$$

Vaizdo diferencijavimas atitinka pirmavaizdžio dauginimą iš $(-t)$.

5 teorema (pradinė reikšmė).

Jeigu $f(t)$ ir $f'(t)$ yra pirmavaizdžiai ir $f(t) \div F(p)$, tai

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} p F(p) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t) = f(0).$$

6 teorema (ribinė reikšmė).

Jeigu $f(t) \div F(p)$ ir $f'(t)$ yra pirmavaizdis, be to, egzistuoja riba $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$, tai

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p F(p). \quad (1.3.10)$$

Ribinės reikšmės teorema yra naudinga tuo, kad galima sužinoti pereinamojo proceso nesutampančią reikšmę, neatliekant sudėtingų algebrinių skaičiavimų, net jei pereinamojo proceso trukmė yra ilga.

11 apibrėžimas.

Funkcijų $f(t)$ ir $F(p)$ atitiktį, aprašytą lygybe

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(p) e^{pt} dp \quad (1.3.11)$$

(čia $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0$, σ_0 - funkcijos $f(t)$ didėjimo rodiklis), vadiname atvirkštine Laplaso transformacija ir žymime $f(t) = L^{-1}(F(p))$.

Pritaikę Laplaso transformaciją tiesinei diferencialinei lygčiai, gauname vaizdų operatorinę lygtį (sprendinio vaizdą vadiname operatoriniu sprendiniu). Tokioje transformuotoje lygtyje pradinės

sąlygos jau yra įvertintos. Pritaikę atvirkštinę Laplaso transformaciją operatoriniam sprendiniui, gauname diferencialinės lygties sprendinį.

12 apibrėžimas.

Funkcija

$$f(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (1.3.12)$$

vadiname dviejų funkcijų $f_1(\tau)$ ir $f_2(\tau)$ sąsūka ir žymime $f_1(\tau) \circ f_2(\tau)$.

Sąsūkos operacija yra komutatyvi.

7 teorema (vaizdų sandauga).

Jeigu $F_1(p) \div f_1(t)$ ir $F_2(p) \div f_2(t)$, tai

$$F_1(p)F_2(p) \div \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau. \quad (1.3.13)$$

Laplaso transformaciją patogu taikyti tiesinių diferencialinių lygčių ir jų sistemų sprendimui.

1.3.3 LAPLASO TRANSFORMACIJOS TAIKYMAI. TIESINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTIES SU PASTOVIAIS KOEFICIENTAIS SPRENDIMAS

Tarkime, duota n -tosios eilės tiesinė diferencialinė lygtis su pastoviais koeficientais

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t); \quad (1.3.14)$$

čia $a_0 \neq 0$, $x = x(t)$, $t \geq 0$. Reikia rasti šios lygties atskirą aprendinį, tenkinant pradinės sąlygas

$$x(0) = x_0, x'(0) = x_0', \dots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}. \quad (1.3.15)$$

Sakykime, kad funkcija $f(t)$ ir sprendinys $x(t)$ kartu su savo išvestinėmis iki n -tosios eilės yra pirmavaizdžiai. Tada egzistuoja jų vaizdai. Pažymėkime $F(p) \div f(t)$, $X(p) \div x(t)$. Remdamiesi pirmavaizdžio diferencijavimo teorema ir (1.3.15) pradinėmis sąlygomis, turime

$$\begin{aligned} x'(t) &\div pX(p) - x_0, \\ x''(t) &\div p^2 X(p) - px_0 - x_0', \\ &\dots\dots\dots \\ x^{(n)}(t) &\div p^n X(p) - p^{n-1} x_0 - p^{n-2} x_0' - \dots - px_0^{(n-2)} - x_0^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Iš Laplaso transformacijos tiesiškumo savybės išplaukia

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x \div (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) X(p) - \sum_{k=0}^{n-1} (a_0 p^k + a_1 p^{k-1} + \dots + a_{k-1} p + a_k) x_0^{(n-1-k)};$$

čia $x_0^{(0)} = x_0$.

Pažymėję

$$A_n(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n, \quad (1.3.16)$$

$$B_{n-1}(p) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_0 p^k + a_1 p^{k-1} + \dots + a_{k-1} p + a_k) x_0^{(n-1-k)}; \quad (1.3.17)$$

Ir įvertinę tai, kad lygių pirmavaizdžių vaizdai yra lygūs, gauname

$$A_n(p) X(p) - B_{n-1}(p) = F(p). \quad (1.3.18)$$

Iš čia

$$X(p) = \frac{F(p) + B_{n-1}(p)}{A_n(p)}. \quad (1.3.19)$$

(1.3.18) lygtį vadiname operatorine lygtimi, o jos sprendinį $X(p)$ - operatoriniu sprendiniu. Suradę operatorinį sprendinį atitinkantį pirmavaizdį $x(t) \div X(p)$, turėsime (1.3.14) diferencialinės lygties atskirą sprendinį, tenkinantį (1.3.15) pradines sąlygas. Šis diferencialinių lygčių sprendimo metodas vadinamas operaciniu.

1.3.4 NUOSEKLAUS INTEGRAVIMO („ŽINGSNIŲ“) METODAS

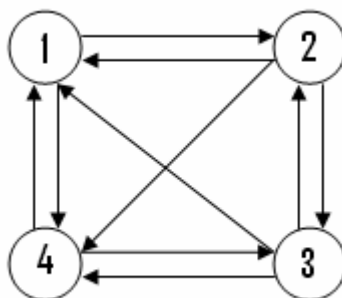
Nuoseklaus integravimo metodo esmė – sprendžiant matricinę lygtį su vėluojančiu argumentu intervalą $0 < t < +\infty$ dalijame į vienodo ilgio τ dalis. Kiekviename intervale $k\tau \leq t < (k+1)\tau$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) duotąją lygtį sprendžiame atskirai, kaip paprastą diferencialinę lygtį (be vėluojančio argumento). k - jame intervale gautas sprendinys yra pradinė sąlyga (t.y. pradinė funkcija) sprendžiant lygtį $k+1$ - jame intervale ($k = 0, 1, 2, \dots$).

2. TIRIAMOJI DALIS

2.1 TARPUSAVIO SINCHRONIZACIJOS SISTEMOS SCHEMA

Siekiant sumažinti informacijos, perduodamos ryšio tinklu, nuostolius būtina sinchronizuoti tinklo komutacijos mazgų taktinius generatorius. Vienas iš galimų tokios sinchronizacijos būdų yra dvipusė tarpusavyje sujungtų taktinių generatorių sinchronizacija.

Nagrinėsime sinchronizacijos sistemą, sudarytą iš keturių tarpusavyje sujungtų generatorių. Sinchronizacijos shema pateikta 2.1 paveiksle. Joje vaizduojami taktiniai generatoriui (skrituliukais) ir ryšio linijos, kuriomis perduodami sinchronizacijos signalai (orientuotų tiesių atkarpomis).



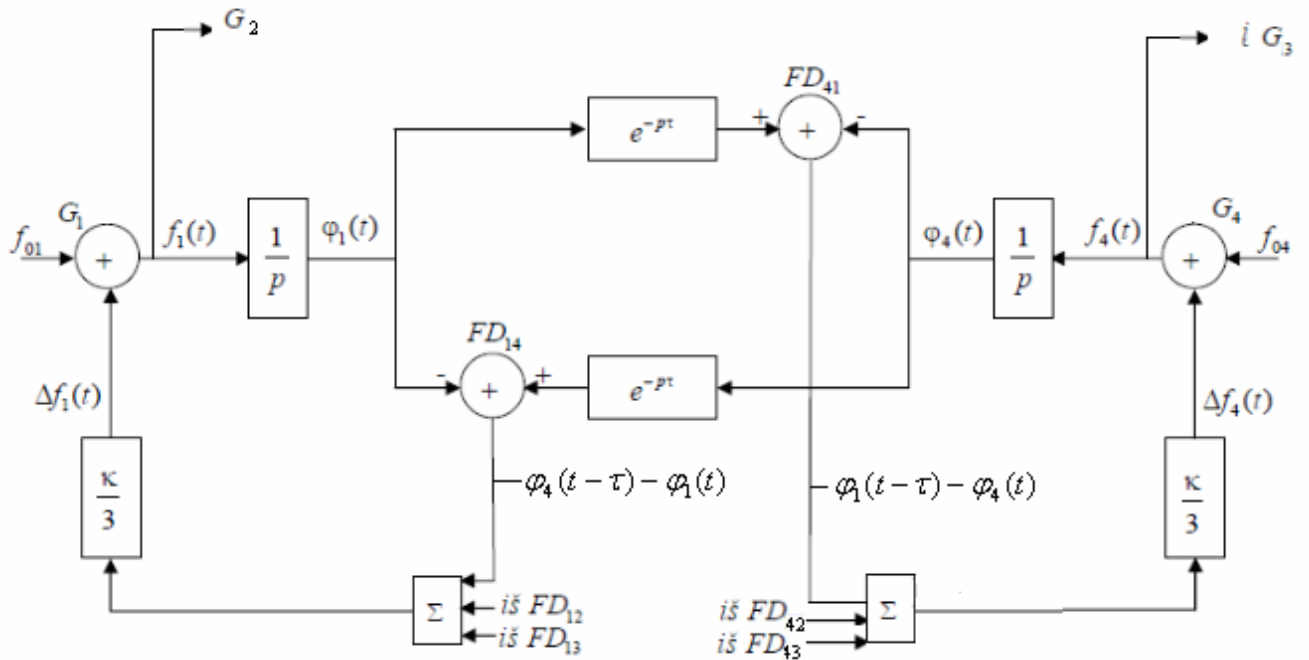
2.1 pav. Sinchronizacijos sistemos shema

Šiame darbe sudarysime genaratorių veikimo matematinį modelį – diferencialinių lygčių su vėluojančiu argumentu sistemą.

2.2 SINCRONIZACIJOS SISTEMOS MATEMATINIO MODELIO SUDARYMAS

Tarpusavio sinchronizacijos struktūrinė shema yra pateikta 2.2 paveiksle. Schemoje naudojamų simbolių paaiškinimai: τ - vėlavimas, kuris visose linijose yra vienodas, f_{0i} - i -tojo generatoriaus savasis dažnis (kai nėra įjungtas valdymas), $f_i(t)$ - i -tojo generatoriaus dažnis, $\varphi_i(t)$ - i -tojo generatoriaus virpesio fazė, κ - stiprinimo koeficientas, m - fazinių detektorių i – tajame mazge, skaičius ($m = 4$), FD_{ij} - ij -tosios linijos fazinis detektorius (ij - toji linija – tai ryšio linija, kuria signalas perduodamas iš j - tojo generatoriaus į i -tajį), G_i - i -tasis valdomas taktinis generatorius, $\Delta f_i(t)$ - i -tojo generatoriaus valdymo signalas.

i -tojo generatoriaus valdymo signalas $\Delta f_i(t)$ proporcingas generatorių virpesių fazių skirtumams fazinių detektorių FD_{ij} , $j = \overline{1, m}$ įėjimuose.



2.2 pav. Synchronizacijos sistemos struktūrinė schema

Valdymo lygtį i -tajam generatoriui užrašome taip:

$$f_i(t) = f_{0i} + \Delta f_i(t), i = \overline{1, 4}; \quad (2.2.1)$$

čia

$$\Delta f_1(t) = \frac{\kappa}{3} [(\varphi_2(t-\tau) - \varphi_1(t)) + (\varphi_3(t-\tau) - \varphi_1(t)) + (\varphi_4(t-\tau) - \varphi_1(t))] = \frac{\kappa}{3} \sum_{j=2}^4 [\varphi_j(t-\tau) - \varphi_1(t)],$$

$$\Delta f_2(t) = \frac{\kappa}{2} [(\varphi_1(t-\tau) - \varphi_2(t)) + (\varphi_3(t-\tau) - \varphi_2(t))] = \frac{\kappa}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq 2}}^3 [\varphi_j(t-\tau) - \varphi_2(t)],$$

$$\Delta f_3(t) = \frac{\kappa}{2} [(\varphi_2(t-\tau) - \varphi_3(t)) + (\varphi_4(t-\tau) - \varphi_3(t))] = \frac{\kappa}{2} \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq 3}}^4 [\varphi_j(t-\tau) - \varphi_3(t)],$$

$$\Delta f_4(t) = \frac{\kappa}{3} [(\varphi_1(t-\tau) - \varphi_4(t)) + (\varphi_2(t-\tau) - \varphi_4(t)) + (\varphi_3(t-\tau) - \varphi_4(t))] = \frac{\kappa}{3} \sum_{j=1}^3 [\varphi_j(t-\tau) - \varphi_4(t)]$$

Įvertinę i -tojo generatoriaus virpesio fazės ir dažnio sąryšį, $\varphi_i'(t) = f_i(t), i = \overline{1,4}$, ir panaudoję (2.2.1) lygtį, gauname diferencialinę lygčių sistemą

$$\varphi_i'(t) = f_{0i}(t) + \Delta f_i(t), i = \overline{1,4}. \quad (2.2.2)$$

Sistemą perrašome panaudoję apibendrinto diferencijavimo operatorių D . Pažymėję $x_i(t) = \varphi_i(t)1(t), i = \overline{1,4}$ (čia $1(t)$ - vienetinė Hevisaido funkcija), užrašome funkcijos $x_i(t)$ apibendrintą išvestinę:

$$Dx_i(t) = D(\varphi_i(t)1(t)) = \varphi_i'(t)1(t) + \varphi_i(t)\delta(t) = \varphi_i'(t)1(t) + \varphi_i(0)\delta(t); \quad (2.2.3)$$

čia $\varphi_i(0) = \varphi_{0i}$, i -tojo generatoriaus pradinė fazė, o $\delta(t)$ - delta funkcija.

Iš lygybės (2.2.3) gauname:

$$Dx_i(t) - \varphi_i(0)\delta(t) = \varphi_i'(t)1(t); \quad (2.2.4)$$

Padauginę (2.2.2) lygybės abi puses iš $1(t)$ ir panaudoję (2.2.4) turime:

$$\varphi_i'(t)1(t) = f_{0i}(t)1(t) + \Delta f_i(t)1(t), i = \overline{1,4}. \quad (2.2.5)$$

Toliau atliekame (2.2.5) lygybės pertvarkymus pasinaudoję (2.2.4) lygybe:

$$Dx_i(t) - \varphi_i(0)\delta(t) = f_{0i}(t)1(t) + \Delta f_i(t)1(t), i = \overline{1,4}, \quad (2.2.6)$$

$$Dx_i(t) = f_{0i}(t)1(t) + \Delta f_i(t)1(t) + \varphi_i(0)\delta(t), i = \overline{1,4}.$$

(2.2.6) diferencialinių lygčių sistemos pradines sąlygas užrašysime taip:

$$\varphi_i(t) = \varphi_{0i} + f_{0i}t, t \leq 0, i = \overline{1,4}. \quad (2.2.7)$$

(2.2.7) pradinių sąlygų fizikinė prasmė:

laiko momentu $t = 0$ visiems generatoriams įjungiamas valdymas, kai $t < 0$ visi generatoriai dirba savaisiais dažniais.

Įvertinę pradines sąlygas, (2.2.6) diferencialinę lygčių sistemą perrašome taip:

$$\begin{cases} Dx_1(t) = \frac{\kappa}{3} [(x_2(t-\tau) + x_3(t-\tau) + x_4(t-\tau))] - \kappa x_1(t) + z_1(t), \\ Dx_2(t) = \frac{\kappa}{2} [(x_1(t-\tau) + x_3(t-\tau))] - \kappa x_2(t) + z_2(t), \\ Dx_3(t) = \frac{\kappa}{2} [(x_2(t-\tau) + x_4(t-\tau))] - \kappa x_3(t) + z_3(t), \\ Dx_4(t) = \frac{\kappa}{3} [(x_1(t-\tau) + x_2(t-\tau) + x_3(t-\tau))] - \kappa x_4(t) + z_4(t); \end{cases} \quad (2.2.8)$$

čia

$$\begin{aligned}
 z_1(t) &= f_{01}(t)1(t) + \varphi_1(0)\delta(t) + \frac{\kappa}{3} \sum_{j=2}^4 \varphi_j(t-\tau)[1(t) - 1(t-\tau)], \\
 z_2(t) &= f_{02}(t)1(t) + \varphi_2(0)\delta(t) + \frac{\kappa}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^3 \varphi_j(t-\tau)[1(t) - 1(t-\tau)], \\
 z_3(t) &= f_{03}(t)1(t) + \varphi_3(0)\delta(t) + \frac{\kappa}{2} \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq 3}}^4 \varphi_j(t-\tau)[1(t) - 1(t-\tau)], \\
 z_4(t) &= f_{04}(t)1(t) + \varphi_4(0)\delta(t) + \frac{k}{3} \sum_{j=1}^3 \varphi_j(t-\tau)[1(t) - 1(t-\tau)].
 \end{aligned}
 \tag{2.2.9}$$

Gauta (2.2.8) diferencialinių lygčių su vėluojančiu argumentu sistema yra nagrinėjamos sinchronizacijos sistemos matematinis modelis.

2.3 MATRICINĖS DIFERIANCIALINĖS LYGTIES SPRENDIMAS

Nagrinėjamos sistemos matematinį modelį (2.2.8) pakeičiame viena matricine diferencialine lygtimi:

$$Dx(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + z(t); \tag{2.3.1}$$

čia $A = -\kappa E$, E - 4-tos eilės vienetinė matrica, κ - koeficientas,

$$B = \frac{\kappa}{3} B_1,$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1.5 & 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 1.5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.3.2}$$

B_1 matrica nurodo sistemos vidinių ryšių struktūrą, τ - pastovus vėlavimas, $x(t) = (x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t))^T$ - ieškoma vektorinė funkcija, $z(t)$ - vektorinė funkcija, priklausanti nuo pradinių sąlygų.

(2.3.1) matricinę diferencialinę lygtį sprendžiame „žingsniu“ metodu aprašytu skyrelyje 1.3.4. Remiantis šiuo metodu intervalą $0 \leq t < +\infty$ dalijame į vienodo ilgio τ dydžio atkarpas. Kiekviename

intervale $k\tau \leq t < (k+1)\tau, (k = 0, 1, 2, \dots)$ (2.3.1) diferencialinę lygtį sprendžiame atskirai, kaip paprastą matricinę diferencialinę lygtį be vėluojančio argumento. k-tajame intervale gautas sprendinys yra pradinė sąlyga, sprendžiant lygtį lygtį $(k+1)$ -jame intervale. Ieškodami sprendinio kiekviename daliniame intervale, taikome Laplaso transformaciją aprašytą skyrelyje 1.3.3.

(2.3.1) matricinės diferencialinės lygties sprendinį $x(t)$ k -tajame daliniame intervale pažymėkime simboliu $x_k(t)$:

$$x(t) = x_k(t), k\tau \leq t < (k+1)\tau, k = -1, 0, 1, 2, \dots \quad (2.3.3)$$

Intervale $[0; \tau)$ diferencialinę lygtį su vėluojančiu argumentu galime užrašyti:

$$Dx_0(t) = Ax_0(t) + Bx_{-1}(t - \tau) + z(t).$$

Įvertinę tai, kad $x_{-1}(t) = 0$, kai $-\tau < t < 0$, turime:

$x_{-1}(t - \tau) = 0$, kai $0 < t < \tau$. Tuomet iš (2.3.3) gauname lygtį be vėluojančio argumento:

$$Dx_0(t) = Ax_0(t) + z(t). \quad (2.3.4)$$

Šią lygtį (be vėluojančio argumento) sprendžiame operaciniu metodu (naudojame Laplaso transformaciją):

$$pX_0(p) = AX_0(p) + Z(p), \quad (2.3.5)$$

$$pX_0(p) - AX_0(p) = Z(p),$$

$$(pE - A)X_0(p) = Z(p),$$

$$X_0(p) = (pE - A)^{-1} Z(p) = (pE + \kappa E)^{-1} Z(p) = \frac{Z(p)}{p + \kappa}.$$

Remdamiesi vaizdų sandaugos teorema, gauname:

$$X_0(p) = L\{z(t)\}L\{e^{-\kappa t}\} \div \left[\int_0^t z(\tau) e^{-\kappa(t-\tau)} d\tau \right] 1(t) = x_0(t). \quad (2.3.6)$$

Gautas sprendinys atitinka sąlygas:

$$x_0(t) = \begin{cases} x_{-1}(t), & -\tau \leq t < 0, \\ x(t), & 0 \leq t < \tau. \end{cases}$$

Toliau ieškosime (2.3.1) matricinės lygties sprendinio intervale $[\tau; 2\tau)$. Sprendinys $x(t)$ šiame intervale pažymėtas $x_1(t)$, o intervale $[0; \tau)$ - $x_0(t)$. Įvertinę tai (2.3.1) lygtį parašome taip:

$$Dx_1(t) = Ax_1(t) + Bx_0(t - \tau) + z(t). \quad (2.3.7)$$

Kadangi $x_0(t)$, $t < \tau$ yra žinoma funkcija (2.3.6), tai (2.3.7) lygtis yra matricinė diferencialinė lygtis be vėluojančio argumento. Parašome jai atitinkančią operatorinę lygtį ir operatorinį sprendinį:

$$pX_1(p) = AX_1(p) + BX_0(p)e^{-p\tau} + Z(p), \quad (2.3.8)$$

$$X_1(p) = \frac{BX_0(p)}{p + \kappa} e^{-p\tau} + \frac{Z(p)}{p + \kappa} = \frac{BX_0(p)}{p + \kappa} e^{-p\tau} + X_0(p).$$

Panaudoję Laplaso transformacijos simbolį L ir taikydami vaizdų sandaugos teoremą, randame:

$$X_1(p) = BL\{x_0(t)\}L\{e^{-\kappa t}\}e^{-p\tau} + X_0(p) = BL\left\{\int_0^t x_0(w)e^{-\kappa(t-w)}dw\right\}e^{-p\tau} + X_0(p).$$

ir

$$X_1(p) \div B\left[\int_0^t x_0(w)e^{-\kappa(t-\tau-w)}dw\right]1(t-\tau) + x_0(t) = x_1(t) = \begin{cases} x_0(t), t < \tau, \\ \neq x_0(t), t > \tau. \end{cases}$$

Gautas sprendinys atitinka sąlygas:

$$x_1(t) = \begin{cases} x(t), \tau \leq t < 2\tau, \\ \neq x(t), t \geq 2\tau. \end{cases}$$

$$x_1(t) = \begin{cases} x(t), t < 2\tau, \\ \neq x(t), t \geq 2\tau. \end{cases}$$

Toliau (2.3.1) matricinę diferencialinę lygtį sprendžiame intervale $[2\tau; 3\tau)$. Remiantis (2.3.3) ir (2.3.1) lygtį parašome taip:

$$Dx_2(t) = Ax_2(t) + Bx_1(t - \tau) + z(t). \quad (2.3.9)$$

Kadangi $x_1(t)$ ($t < \tau$) yra žinoma funkcija, tai (2.3.9) lygtis yra matricinė diferencialinė lygtis be vėluojančio argumento. Užrašome jai atitinkančią operatorinę lygtį ir operatorinį sprendinį:

$$pX_2(p) = AX_2(p) + BX_1(p)e^{-p\tau} + Z(p), \quad (2.3.10)$$

$$X_2(p) = \frac{BX_1(p)}{p + \kappa} e^{-p\tau} + \frac{Z(p)}{p + \kappa} = \frac{B^2 X_0(p)}{(p + \kappa)^2} e^{-2p\tau} + \frac{BX_0(p)}{p + \kappa} e^{-p\tau} + \frac{Z(p)}{p + \kappa},$$

$$X_2(p) = \frac{B^2 X_0(p)}{(p + \kappa)^2} e^{-2p\tau} + X_1(p).$$

Pasinaudoję Laplaso transformacijos savybėmis, aprašytomis skyrelyje 1.3.2, randame:

$$X_2(p) = B^2 L\{x_0(t)\} L\{te^{-\kappa t}\} e^{-2p\tau} + X_1(p) = B^2 L\left\{\int_0^t x_0(w)(t-w)e^{-\kappa(t-w)} dw\right\} e^{-2p\tau} + X_1(p) \div$$

$$\div B^2 \left[\int_0^{t-2\tau} x_0(w)(t-w-2\tau)e^{-\kappa(t-2\tau-w)} dw \right] 1(t-2\tau) + x_1(t) = x_2(t) = \begin{cases} x_1(t), t < 2\tau, \\ \neq x_1(t), t \geq 2\tau. \end{cases}$$

Pastebėsime, kad gautas sprendinys atitinka sąlygas:

$$x_2(t) = \begin{cases} x(t), 2\tau \leq t < 3\tau, \\ \neq x(t), t \geq 3\tau. \end{cases}$$

$$x_1(t) = \begin{cases} x(t), t < 3\tau, \\ \neq x(t), t \geq 3\tau. \end{cases}$$

Toliau tęsdami (2.3.1) matricinės diferencialinės lygties sprendimą tuo pačiu būdu k kartų, randame:

$$x_k(t) = \begin{cases} x(t), kt \leq \tau < (k+1)\tau, \\ \neq x(t), t \geq (k+1)\tau, \end{cases} \quad (2.3.11)$$

$$x_k(t) = \begin{cases} x(t), t < (k+1)\tau, \\ \neq x(t), t \geq (k+1)\tau, k = 4, 5, \dots \end{cases}$$

Rasime sprendinio $x(t)$ analizinę išraišką. Pažymėkime:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(t) &= x_0(t) - x_{-1}(t) = x_0(t); \\ \varepsilon_1(t) &= x_1(t) - x_0(t), \\ \varepsilon_2(t) &= x_2(t) - x_1(t), \\ &\dots\dots\dots \\ \varepsilon_k(t) &= x_k(t) - x_{k-1}(t), \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

ir

$$\Theta_L(t) = \sum_{k=0}^L \varepsilon_k(t) = \varepsilon_0(t) + \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t) + \dots + \varepsilon_L(t). \quad (2.3.13)$$

Įvertinę (2.3.12) ir (2.3.13) išraiškas, randame:

$$\Theta_L(t) = \sum_{k=0}^L \varepsilon_k(t) = x_0(t) + [x_1(t) - x_0(t)] + [x_2(t) - x_1(t)] + \dots + [x_L(t) - x_{L-1}(t)] = x_L(t) = x(t),$$

kai $t < (L+1)\tau$.

Vektorius $x_L(t)$ atitinka sąlygas:

$$x_L(t) = \begin{cases} x(t), & t < (L+1)\tau, \\ \neq x(t), & t > (L+1)\tau, \end{cases}$$

todėl

$$\Theta_L(t) = \begin{cases} x(t), & t < (L+1)\tau, \\ \neq x(t), & t \geq (L+1)\tau. \end{cases}$$

Panaudoję (2.3.12) ir (2.3.13) pažymėjimus, sprendinį $x(t)$ užrašome taip:

$$x(t) = \Theta_L(t) = \sum_{k=0}^L \varepsilon_k(t), \quad 0 < t < (L+1).$$

Pritaikius šios lygybės dešiniajai pusei laplaso transformaciją, gauname:

$$x(t) \div \Theta_L(p) = \sum_{k=0}^L \int_0^{\infty} \varepsilon_k(x) e^{-px} dx. \quad (2.3.14)$$

Rasime funkcijos $\varepsilon_k(t)$, įrašytos (2.3.14) išraiškoje, Laplaso transformaciją:

$$L\{\varepsilon_k(t)\} = \int_0^{\infty} \varepsilon_k(x) e^{-px} dx. \quad (2.3.15)$$

Tuo tikslu sudarome diferencialinę lygtį vektoriaus $\varepsilon_k(t)$, ($k = 0, 1, 2, \dots$) atžvilgiu. Kadangi

$$\varepsilon_k(t) = x_k(t) - x_{k-1}(t)$$

ir

$$Dx_k(t) = Ax_k(t) + Bx_{k-1}(t - \tau) + Z(t), \quad (2.3.16)$$

$$Dx_{k-1}(t) = Ax_{k-1}(t) + Bx_{k-2}(t - \tau) + Z(t). \quad (2.3.17)$$

Tai, atėmę (2.3.17) lygtį iš (2.3.16), gausime:

$$D\varepsilon_k(t) = A\varepsilon_k(t) + B\varepsilon_{k-1}(t - \tau). \quad (2.3.18)$$

Ieškosime operatorinės lygties, atitinkančios (2.3.18) diferencialinę lygtį su vėluojančiu argumentu. Abiems (2.3.18) lygties pusėms taikome Laplaso transformaciją:

$$(pE - A) \int_0^{\infty} \varepsilon_k(t) e^{-pt} dt = B \int_0^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t - \tau) e^{-pt} dt. \quad (2.3.19)$$

Pertvarkome dešiniojos pusės integralą:

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t-\tau)e^{-pt} dt = \left\{ \begin{array}{l} t-\tau = \theta \quad dt = d\theta \\ t = 0 \quad \theta = -\tau \\ t = \infty \quad \tau = \infty \end{array} \right\} = \int_{-\tau}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(\theta)e^{-p(\tau+\theta)} d\theta = e^{-p\tau} \int_{-\tau}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t)e^{-pt} dt. \quad (2.3.20)$$

Pasinaudodami (2.3.20) išraiška, (2.3.19) perrašome taip:

$$(pE - A) \int_0^{\infty} \varepsilon_k(t)e^{-pt} dt = B e^{-p\tau} \int_{-\tau}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t)e^{-pt} dt. \quad (2.3.21)$$

Kadangi $pE - A = (p + \kappa)E$, tai

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_k(t)e^{-pt} dt = \frac{B}{p + \kappa} e^{-p\tau} \int_{-\tau}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t)e^{-pt} dt. \quad (2.3.22)$$

Pažymėkime $M = \frac{B}{p + \kappa} e^{-p\tau}$. Tada

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_k(t)e^{-pt} dt = M \int_{-\tau}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t)e^{-pt} dt. \quad (2.3.23)$$

Įvertinę funkcijos $\varepsilon_k(t)$ savybes ($\varepsilon_k(t) = 0, t < k\tau$ ir $\varepsilon_{k-1}(t) = 0, t < (k-1)\tau$) galime rašyti:

$$\varepsilon_{k-1}(t) = 0, t < 0, k = 1, 2, \dots$$

ir

$$\int_{-\tau}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t)e^{-pt} dt.$$

Tuomet išraiška (2.3.23) įgyja pavidalą:

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_k(t)e^{-pt} dt = M \int_0^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t)e^{-pt} dt. \quad (2.3.24)$$

Žinome, kad $\varepsilon_0(t) = x_0(t)$. Taikant šiai lygybei Laplaso transformaciją, gauname:

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_k(t)e^{-pt} dt = X_0(p). \quad (2.3.25)$$

Skirtingiems $k = 1, 2, \dots$ iš (2.3.23) randame

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_1(t)e^{-pt} dt = M \int_0^{\infty} \varepsilon_0(t)e^{-pt} dt = M X_0(p),$$

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_2(t)e^{-pt} dt = M \int_0^{\infty} \varepsilon_1(t)e^{-pt} dt = M^2 X_0(p),$$

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_k(t) e^{-pt} dt = M \int_0^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t) e^{-pt} dt = M^k X_0(p).$$

Iš (2.3.14) gauname:

$$x(t) \div \sum_{k=0}^L M^k X_0(p) = \sum_{k=0}^L \frac{B^k}{(p + \kappa)^k} e^{-pk\tau} X_0(p), 0 < t < (L+1)\tau. \quad (2.3.26)$$

Įvertinę (2.3.5), gauname:

$$x(t) \div \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{3}\right)^k \frac{1}{(p + \kappa)^{k+1}} B_1^k e^{-pk\tau} Z(p), 0 < t < (L+1)\tau, \text{ kai } 0 < t < (L+1)\tau. \quad (2.3.27)$$

2.4 MATRICOS, NUSAKANČIOS VIDINĘ RYŠIŲ STRUKTŪRĄ, K-TOJO LAIPSNIO RADIMAS

$$\text{Matrica } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1.5 & 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 1.5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ nusako vidinę ryšių struktūrą, jos schema pateikta (1.2 pav.),}$$

k -tąją laipsnį ($k \in N$) ieškosime remdamiesi lygybe $B^k = TJ^kT^{-1}$;

čia J - matricos Žordano forma, T - transformuojančioji matrica. Abi šias matricas rasime žinodami matricos B tikrines reikšmes ir tikrinius vektorius.

Užrašome matricos B charakteristinę lygtį:

$$|B - \lambda E| = 0. \quad (2.4.1)$$

Šios lygties šaknys yra matricos B tikrinės reikšmės. (2.4.1) lygtį užrašome taip:

$$\Delta = |B - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1.5 & -\lambda & 1.5 & 0 \\ 0 & 1.5 & -\lambda & 1.5 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.4.2)$$

Apskaičiuojame determinantą Δ , skleidžiant pirmos eilutės elementais:

$$\Delta = (-1)^{1+1} \cdot (-\lambda) \cdot M_{11} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot M_{12} + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot M_{13} + (-1)^{1+4} \cdot 1 \cdot M_{14};$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1.5 & 0 \\ 1.5 & -\lambda & 1.5 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \frac{15}{4}\lambda + \frac{9}{4}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 1.5 & 1.5 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1.5 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \frac{3}{2}\lambda^2,$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1.5 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1.5 & 1.5 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\frac{15}{4}\lambda - \frac{9}{4}, \quad M_{14} = \begin{vmatrix} 1.5 & -\lambda & 1.5 \\ 0 & 1.5 & -\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{3}{2}\lambda.$$

Ištačius apskaičiuotų minorų reikšmes į determinanto Δ išraišką, gauname:

$$\Delta = \lambda^4 - \frac{25}{4}\lambda^2 - \frac{30}{4}\lambda - \frac{9}{4} = 0.$$

Išsprendus ketvirtojo laipsnio lygtį, randame keturias realiąsias šaknis (matricos B tikrines reikšmes):

$$\lambda_1 = -1.5, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = -0.5, \quad \lambda_4 = 3.$$

Kadangi visos tikrinės reikšmės yra skirtingos, tai matricos B Žordano forma yra diagonalioji matrica, kurią užrašome taip:

$$J = \begin{pmatrix} -1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad (2.4.3)$$

Rasime matricos B tikrinius vektorius. Pasinaudosime lygybe:

$$BX_i = \lambda_i X_i, \quad i = \overline{1,4}; \quad (2.4.4)$$

čia λ_i matricos B tikrinė reikšmė, $X_i = (x_1^{(i)} \quad x_2^{(i)} \quad x_3^{(i)} \quad x_4^{(i)})^T$ - matricos tikrinis vektorius, atitinkantis tikrinei reikšmei λ_i .

(2.4.4) matricinę lygtį perrašome taip:

$$\begin{pmatrix} -\lambda_i & 1 & 1 & 1 \\ 1.5 & -\lambda_i & 1.5 & 0 \\ 0 & 1.5 & -\lambda_i & 1.5 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ x_3^{(i)} \\ x_4^{(i)} \end{pmatrix} = 0. \quad (2.4.5)$$

Remdamiesi (2.4.5), užrašome lygčių sistemas, kurias spęsdami rasime matricos B tikrinių vektorių komponentes.

Kai $\lambda_1 = -1.5$, turime:

$$\begin{cases} \frac{3}{2} \cdot x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + x_3^{(1)} + x_4^{(1)} = 0, \\ \frac{3}{2} x_1^{(1)} + \frac{3}{2} x_2^{(1)} + \frac{3}{2} x_3^{(1)} = 0, \\ \frac{3}{2} x_2^{(1)} + \frac{3}{2} x_3^{(1)} + \frac{3}{2} x_4^{(1)} = 0, \\ x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + x_3^{(1)} + \frac{3}{2} x_4^{(1)} = 0. \end{cases}$$

Išspėdę šią lygčių sistemą, randame matricos B tikrinį vektorių, atitinkantį tikrinę reikšmę λ_1 :

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ x_4^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ -x_2^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_1^{(1)} \end{pmatrix};$$

čia $x_1^{(1)}, x_2^{(1)} \in R$. Parenkame $x_1^{(1)} = 0, x_2^{(1)} = 1$, tuomet $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Istatę į (2.4.5) vietoje λ_i $\lambda_2 = -1, \lambda_3 = -0.5, \lambda_4 = 3$, užrašome lygčių sistemas kitoms tikrinių vektorių komponentėms rasti. Išspėdę gauname tikrinius vektorius X_2, X_3, X_4 :

$$X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{4} \\ 3 \\ -\frac{4}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, X_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Kadangi visos matricos B tikrinės reikšmės yra paprastosios (skirtingos), tai transformuojančios matricos T stulpelius sudaro matricos tikriniai vektoriai. Įvertinę tai, užrašome matricą T :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -\frac{3}{4} & 1 \\ 1 & 3 & -\frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2.4.6)$$

Apskaičiuojame šiai matricai atvirkštinę matricą T^{-1} :

$$T^{-1} = \frac{1}{|T|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{bmatrix}; \quad (2.4.7)$$

čia $A_{ij}, i, j = \overline{1,4}$, matricos T elementų adjunktai.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & -\frac{3}{4} & 1 \\ 3 & -\frac{3}{4} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 10.5, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -\frac{3}{4} & 1 \\ 1 & -\frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3.5,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{14} = (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 & -\frac{3}{4} \\ 1 & 3 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.5,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -\frac{3}{4} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.75, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{24} = (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & -\frac{3}{4} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3.5, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -\frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{34} = (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{41} = (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & -\frac{3}{4} & 1 \\ 3 & -\frac{3}{4} & 1 \end{vmatrix} = -10.5, \quad A_{42} = (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -\frac{3}{4} & 1 \\ 1 & -\frac{3}{4} & 1 \end{vmatrix} = 3.5,$$

$$A_{43} = (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{44} = (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & -\frac{3}{4} \\ 1 & 3 & -\frac{3}{4} \end{vmatrix} = 1.5.$$

Apskaičiuojame matricos T determinantą:

$$|T| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -\frac{3}{4} & 1 \\ 1 & 3 & -\frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7.$$

Įstatę į (2.4.7) visas adjunktų ir determinanto reikšmes apskaičiuojame atvirkštinę matricą T^{-1} .

$$T^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 10.5 & -1.75 & 3.5 & -10.5 \\ -3.5 & 0 & 0 & 3.5 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \\ 1.5 & 2 & 2 & 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 & -0.5 & 0.5 & -1.5 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.286 & -0.286 & -0.286 & 0.286 \\ 0.214 & 0.286 & 0.286 & 0.214 \end{pmatrix}.$$

2.5 MATRICOS B , PAKELTOS SVEIKUOJU LAIPSNIU, ELEMENTŲ SKAIČIAVIMAS

Turėdami matricas J , T , T^{-1} apskaičiuosime matricą B^k , ($k = 1, 2, 3, \dots$).

$$B^k = TJ^kT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -\frac{3}{4} & 1 \\ 1 & 3 & -\frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1.5)^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-0.5)^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (3)^k \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} 1.5 & -0.5 & 0.5 & -1.5 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.286 & -0.286 & -0.286 & 0.286 \\ 0.214 & 0.286 & 0.286 & 0.214 \end{pmatrix}$$

Sudauginę matricas randame:

$$B^k = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \\ a_3 & a_2 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}; \quad (2.5.1)$$

čia

$$a_1 = 0.286(-0.5)^k + 0.5(-1)^k + 0.214 \cdot 3^k,$$

$$a_2 = -0.286(-0.5)^k + 0.286 \cdot 3^k,$$

$$a_3 = 0.286(-0.5)^k - 0.5(-1)^k + 0.214 \cdot 3^k,$$

$$a_4 = -0.2145(-0.5)^k + 1.5(-1)^k - 1.5(-1.5)^k + 0.214 \cdot 3^k,$$

$$a_5 = 0.2145(-0.5)^k + 0.5(-1.5)^k + 0.286 \cdot 3^k,$$

$$a_6 = 0.2145(-0.5)^k - 0.5(-1.5)^k + 0.286 \cdot 3^k,$$

$$a_7 = -0.2145(-0.5)^k - 1.5(-1)^k + 1.5(-1.5)^k + 0.214 \cdot 3^k.$$

2.6 MATRICINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTIES LAISVOJO NARIO KOMPONENČIŲ ANALIZINĖS IŠRAIŠKOS

Vektorius $z(t) = (z_1(t) \ z_2(t) \ z_3(t) \ z_4(t))^T$ priklauso nuo pradinių sąlygų, t.y. nuo generatorių savųjų dažnių f_i ir pradinių fazių $\varphi_{0i}, i = \overline{1,4}$.

Vektoriaus $z(t)$ komponentės:

$$z_1(t) = f_{01}(t)1(t) + \varphi_1(0)\delta(t) + \frac{\kappa}{3} \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq 1}}^4 \varphi_j(t-\tau)[1(t) - 1(t-\tau)],$$

$$z_2(t) = f_{02}(t)1(t) + \varphi_2(0)\delta(t) + \frac{\kappa}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^3 \varphi_j(t-\tau)[1(t) - 1(t-\tau)],$$

$$z_3(t) = f_{03}(t)1(t) + \varphi_3(0)\delta(t) + \frac{\kappa}{2} \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq 3}}^4 \varphi_j(t-\tau)[1(t) - 1(t-\tau)],$$

$$z_4(t) = f_{04}(t)1(t) + \varphi_4(0)\delta(t) + \frac{\kappa}{3} \sum_{j=1}^3 \varphi_j(t-\tau)[1(t) - 1(t-\tau)].$$

Išskleidę Hevisaido ir vėluojančios vienetinių funkcijų skirtumo ir vėluojančios funkcijos $\varphi_j(t-\tau)$ sandaugą dauginamaisiais, kai $i = \overline{1,4}$, gauname kiekvienos sistemos lygties laisvojo nario funkcijas $z_i(t)$ ir pritaikę laplaso transformaciją bei įvedę pažymėjimus: $f_{0i} + f_{0j} = f_{ij}$,

$f_{0i} - f_{0j} = f_{0ij}$, $\varphi_{0i} + \varphi_{0j} = \varphi_{ij}$, $\varphi_{0i} - \varphi_{0j} = \varphi_{0ij}$, kur $i, j = \overline{1,4}$. gauname visų komponentių vaizdų išraiškas:

$$Z_1(p) = \varphi_{01} + \frac{f_{01}}{p} - \frac{\kappa f_{234}}{3p^2} - \frac{\kappa f_{234}\tau}{3p} + \frac{\kappa \varphi_{234}}{3p} - \frac{\kappa f_{234}e^{-p\tau}}{3p^2} - \frac{\kappa \varphi_{234}e^{-p\tau}}{3p},$$

$$Z_2(p) = \varphi_{02} + \frac{f_{02}}{p} - \frac{\kappa f_{13}}{2p^2} - \frac{\kappa f_{13}\tau}{2p} + \frac{\kappa \varphi_{13}}{2p} - \frac{\kappa f_{13}e^{-p\tau}}{2p^2} - \frac{\kappa \varphi_{13}e^{-p\tau}}{2p},$$

$$Z_3(p) = \varphi_{03} + \frac{f_{03}}{p} - \frac{\kappa f_{24}}{2p^2} - \frac{\kappa f_{24}\tau}{2p} + \frac{\kappa \varphi_{24}}{2p} - \frac{\kappa f_{24}e^{-p\tau}}{2p^2} - \frac{\kappa \varphi_{24}e^{-p\tau}}{2p},$$

$$Z_4(p) = \varphi_{04} + \frac{f_{04}}{p} - \frac{\kappa f_{123}}{3p^2} - \frac{\kappa f_{123}\tau}{3p} + \frac{\kappa \varphi_{123}}{3p} - \frac{\kappa f_{123}e^{-p\tau}}{3p^2} - \frac{\kappa \varphi_{123}e^{-p\tau}}{3p}.$$

2.7 MATRICINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTIES SPRENDINIO TIKSLI ANALIZINĖ IŠRAIŠKA

Skyrelyje 2.3 radome matricinės diferencialinės lygties sprendinį:

$$x(t) \div \sum_{k=0}^L \left(\frac{k}{3}\right)^k \frac{1}{(p+\kappa)^{k+1}} \cdot B^k e^{-pk\tau} Z(p);$$

Pasinaudoję matricos diferencialinės lygties sprendiniu ir rastomis $Z(p)$ komponentių, matricos B^k elementų išraiškomis, parašome matricinės diferencialinės lygties sprendinio tikslia, analizinę išraišką. Šio sprendinio pirmoji komponentė $x_1(t)$ išreiškiama taip:

$$x_1(t) \div \sum_{k=0}^L \left(\frac{k}{3}\right)^k \frac{1}{(p+\kappa)^{k+1}} \cdot (a_1 Z_1(p) + a_2 Z_2(p) + a_3 Z_3(p) + a_4 Z_4(p)) e^{-pk\tau}; \quad (2.7.1)$$

čia a_1, a_2, a_3, a_4 yra matricos B^k pirmos eilutės elementai (2.5.1). Toliau įstatome a_i ir $Z_m(p)$ išraiškas į (2.7.1):

$$\begin{aligned} x_1(t) \div \sum_{k=0}^L \left[\left(\frac{k}{3}\right)^k \frac{1}{(p+\kappa)^{k+1}} e^{-pk\tau} \cdot ((0.2143 \cdot 3^k + 0.5 \cdot (-1)^k + 0.2857 \cdot (-0.5)^k)(\varphi_{01} + \frac{f_{01}}{p} \frac{\kappa f_{234}}{3p^2} - \frac{\kappa f_{234} \tau}{3p} + \right. \\ \left. \frac{\kappa \varphi_{234}}{3p} - \frac{\kappa f_{234} e^{-p\tau}}{3p^2} - \frac{\kappa \varphi_{234} e^{-p\tau}}{3p}) + (0.2857 \cdot 3^k - 0.2857 \cdot (-0.5)^k)(\varphi_{02} + \frac{f_{02}}{p} - \frac{\kappa f_{13}}{2p^2} - \frac{\kappa f_{13} \tau}{2p} + \right. \\ \left. + \frac{\kappa \varphi_{13}}{2p} - \frac{\kappa f_{13} e^{-p\tau}}{2p^2} - \frac{\kappa \varphi_{13} e^{-p\tau}}{2p}) + (0.2857 \cdot 3^k - 0.2857 \cdot (-0.5)^k)(\varphi_{03} + \frac{f_{03}}{p} - \frac{\kappa f_{24}}{2p^2} - \frac{\kappa f_{24} \tau}{2p} + \right. \\ \left. + \frac{\kappa \varphi_{24}}{2p} - \frac{\kappa f_{24} e^{-p\tau}}{2p^2} - \frac{\kappa \varphi_{24} e^{-p\tau}}{2p}) + (0.2143 \cdot 3^k - 0.5 \cdot (-1)^k + 0.2857 \cdot (-0.5)^k)(\varphi_{04} + \frac{f_{04}}{p} - \right. \\ \left. - \frac{\kappa f_{123}}{3p^2} - \frac{\kappa f_{123} \tau}{3p} + \frac{\kappa \varphi_{123}}{3p} - \frac{\kappa f_{123} e^{-p\tau}}{3p^2} - \frac{\kappa \varphi_{123} e^{-p\tau}}{3p}) + \frac{1}{p+\kappa} (\varphi_{01} + \frac{f_{01}}{p} - \frac{\kappa f_{234}}{3p^2} - \frac{\kappa f_{234} \tau}{3p} + \right. \\ \left. + \frac{\kappa \varphi_{234}}{3p} - \frac{\kappa f_{234} e^{-p\tau}}{3p^2} - \frac{\kappa \varphi_{234} e^{-p\tau}}{3p}) \right]. \end{aligned}$$

Likusių sprendinio komponentių analizinės išraiškos randamos analogiškai, kurios yra 5 priede.

2.8 SINCHRONIZACIJOS SISTEMOS PEREINAMŪJŲ PROCESŲ TYRIMAS

2.8.1 SISTEMOS PEREINAMŪJŲ PROCESŲ TYRIMAS, NAUDOJANT PEREINAMĄSIAS FUNKCIJAS

Pereinamasis procesas – tai grandinės reakcija laikotarpyje tarp dviejų stacionariųjų būsenų. Sistemos dinamiką (jos pereinamuosius procesus) tirsime remdamiesi jos reakcija į vienetinį fazės šuolį. Sistemos i -tojo generatoriaus virpesio fazės reakciją į j -tojo generatoriaus virpesio fazės vienetinį šuolį, vadinsime sistemos pereinamąja funkcija $h_{ij}(t)$. Pereinamųjų funkcijų $h_{ij}(t)$, ($i, j = \overline{1,4}$) visuma sudaro sistemos pereinamųjų funkcijų matricą $h(t) = (h_{ij}(t))$. Šią matricą rasime, remdamiesi (2.3.1) diferencialinės lygties (2.3.27) sprendiniu.

2.8.2 SISTEMOS PEREINAMOSIOS FUNKCIJOS

Skaičiuosime sinchronizacijos sistemos pereinamąsias funkcijas. Kai vienetinis fazės šuolis veikia j -tojo generatoriaus virpesio fazę, (2.3.1) lygties laisvasis narys įgauna pokyti:

$$\Delta z(t) = \delta(t)I^{(j)}; \quad (2.8.2.1)$$

čia $I^{(j)}$ - vektorius, kurio j -tasis elementas lygus 1, o likusieji 0. $\delta(t)$ - delta funkcija ($\delta(t) \div 1$).

Remdamiesi (2.3.27) sprendiniu ir (2.8.2.1) išraiška randame

$$h(t) \div \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{3}\right)^k \frac{1}{(p + \kappa)^{k+1}} \cdot B_1^k e^{-pk\tau} \quad (2.8.2.2)$$

(2.8.2.2) išraiškai taikome atvirkštinę Laplaso transformaciją ir gauname pereinamųjų funkcijų matricos elementų skaičiavimo formulę:

$$h_{ij}(t) = \sum_{k=0}^L \frac{\kappa^k (t - k\tau)^k}{3^k k!} \cdot e^{-\kappa(t-k\tau)} \{B_1^k\}_{ij} 1(t - k\tau), 0 < t < (L + 1)\tau. \quad (2.8.2.3)$$

Pereinamųjų funkcijų tikslias analizes išraiškas randame įstatę matricos B_1 , pakeltos k -tuoju laipsniu ($k \in N$), elementus.

2.8.3 PEREINAMŪJŲ FUNKCIJŲ RIBINIŲ REIKŠMIŲ SKAIČIAVIMAS

Pereinamųjų funkcijų ribines reikšmes skaičiuojame remdamiesi (2.8.2.1) išraiška ir ribinės reikšmės teorema:

$$h_{ij}(+\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pH_{ij}(p), i, j = \overline{1,4}. \quad (2.8.3.1)$$

Sistemos 1-ojo generatoriaus virpesio fazės reakcija į 1-ojo generatoriaus virpesio fazės vienetinį šuolį, užrašome taip:

$$\begin{cases} Dh_{11}(t) = \frac{\kappa}{3} [(h_{21}(t-\tau) + h_{31}(t-\tau) + h_{41}(t-\tau) - 3h_{11}(t))] + \delta(t), \\ Dh_{21}(t) = \frac{\kappa}{2} [(h_{11}(t-\tau) + h_{31}(t-\tau) - 2h_{21}(t))], \\ Dh_{31}(t) = \frac{\kappa}{2} [(h_{21}(t-\tau) + h_{41}(t-\tau) - 2h_{31}(t))], \\ Dh_{41}(t) = \frac{\kappa}{3} [(h_{11}(t-\tau) + h_{21}(t-\tau) + h_{31}(t-\tau) - 3h_{41}(t))]; \end{cases}$$

Pritaikome Laplaso transformaciją:

$$\begin{cases} pH_{11}(p) = \frac{\kappa}{3} e^{-p\tau} [(H_{21}(p) + H_{31}(p) + H_{41}(p))] - \kappa H_{11}(p) + 1, \\ pH_{21}(p) = \frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} [(H_{11}(p) + H_{31}(p))] - \kappa H_{21}(p), \\ pH_{31}(p) = \frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} [(H_{21}(p) + H_{41}(p))] - \kappa H_{31}(p), \\ pH_{41}(p) = \frac{\kappa}{3} e^{-p\tau} [(H_{11}(p) + H_{21}(p) + H_{31}(p))] - \kappa H_{41}(p); \end{cases} \quad (2.8.3.2)$$

Šios sistemos sprendinį rasime remdamiesi Kramerio taisykle. Užrašome sistemos (2.8.3.2) koeficientų matricą:

$$Q = \begin{pmatrix} p + \kappa & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} \\ \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} & p + \kappa & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} & p + \kappa & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} \\ \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} & p + \kappa \end{pmatrix} \quad (2.8.3.3)$$

Apskaičiuojame matricos Q determinantą:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+\kappa & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} \\ \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} & p+\kappa & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} & p+\kappa & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} \\ \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} & p+\kappa \end{vmatrix} = (p+\kappa)^4 - \frac{25}{36} \kappa^2 e^{-2p\tau} (p+\kappa)^2 - \frac{5}{18} \kappa^3 e^{-3p\tau} (p+\kappa) - \frac{1}{36} \kappa^4 e^{-4p\tau}. \quad (2.8.3.4)$$

Matricos Q pirmą stulpelį keisdami sistemos laisvųjų narių stulpeliu $b = (1; 0; 0; 0)^T$ apskaičiuojame determinantą Δ_{11} :

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} \\ 0 & p+\kappa & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} & p+\kappa & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} \\ 0 & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} & p+\kappa \end{vmatrix} = (p+\kappa)^3 - \frac{5}{12} \kappa^2 e^{-2p\tau} (p+\kappa) - \frac{1}{12} \kappa^3 e^{-3p\tau}.$$

Toliau ieškome ribos:

$$\lim_{p \rightarrow 0} pH_{11} = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p((p+\kappa)^3 - \frac{5}{12} \kappa^2 e^{-2p\tau} (p+\kappa) - \frac{1}{12} \kappa^3 e^{-3p\tau})}{(p+\kappa)^4 - \frac{25}{36} \kappa^2 e^{-2p\tau} (p+\kappa)^2 - \frac{5}{18} \kappa^3 e^{-3p\tau} (p+\kappa) - \frac{1}{36} \kappa^4 e^{-4p\tau}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Kadangi gaunasi neapibrėžtumas taikome Liopitalio taisyklę:

$$\lim_{p \rightarrow 0} pH_{11} = \frac{3}{14(\kappa\tau + 1)};$$

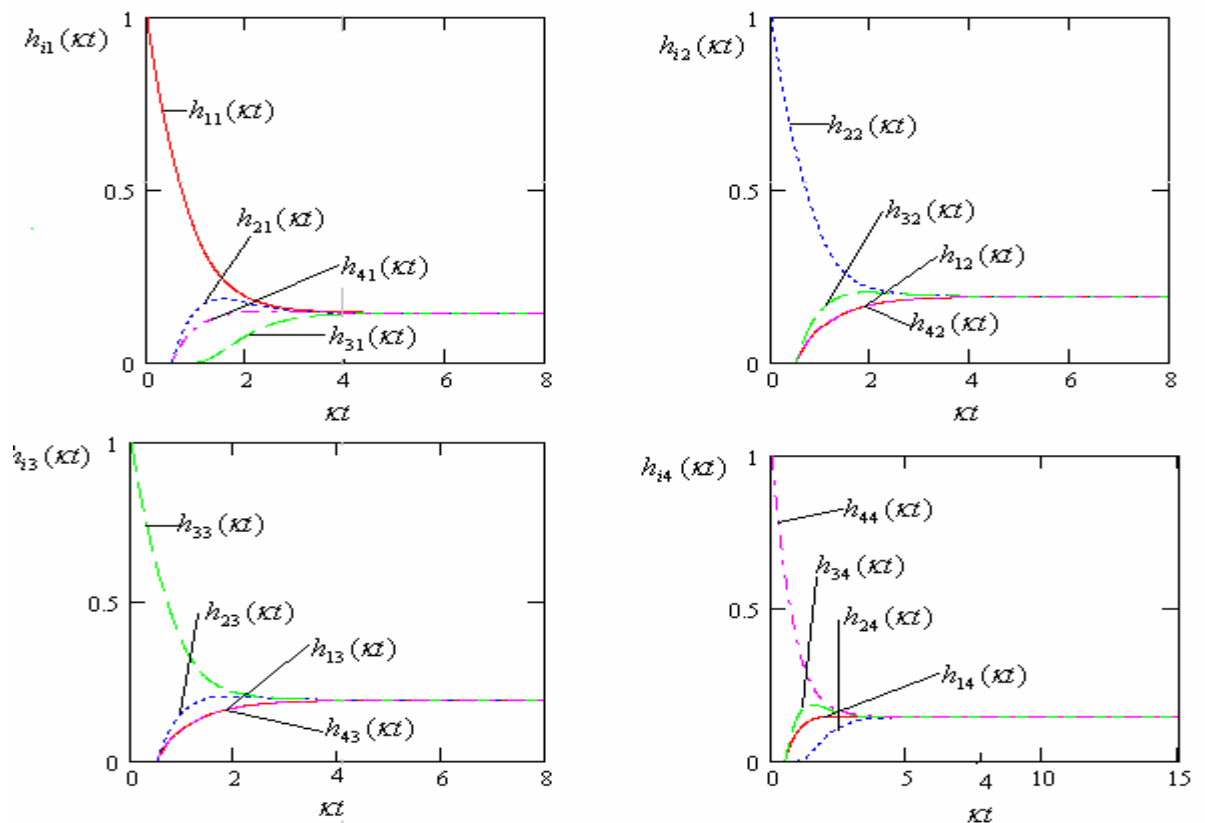
Analogiškai gauname šiuos rezultatus:

$$\lim_{p \rightarrow 0} pH_{21} = \frac{3}{14(\kappa\tau + 1)}; \quad \lim_{p \rightarrow 0} pH_{31} = \frac{3}{14(\kappa\tau + 1)}; \quad \lim_{p \rightarrow 0} pH_{41} = \frac{3}{14(\kappa\tau + 1)}; \quad (2.8.3.5)$$

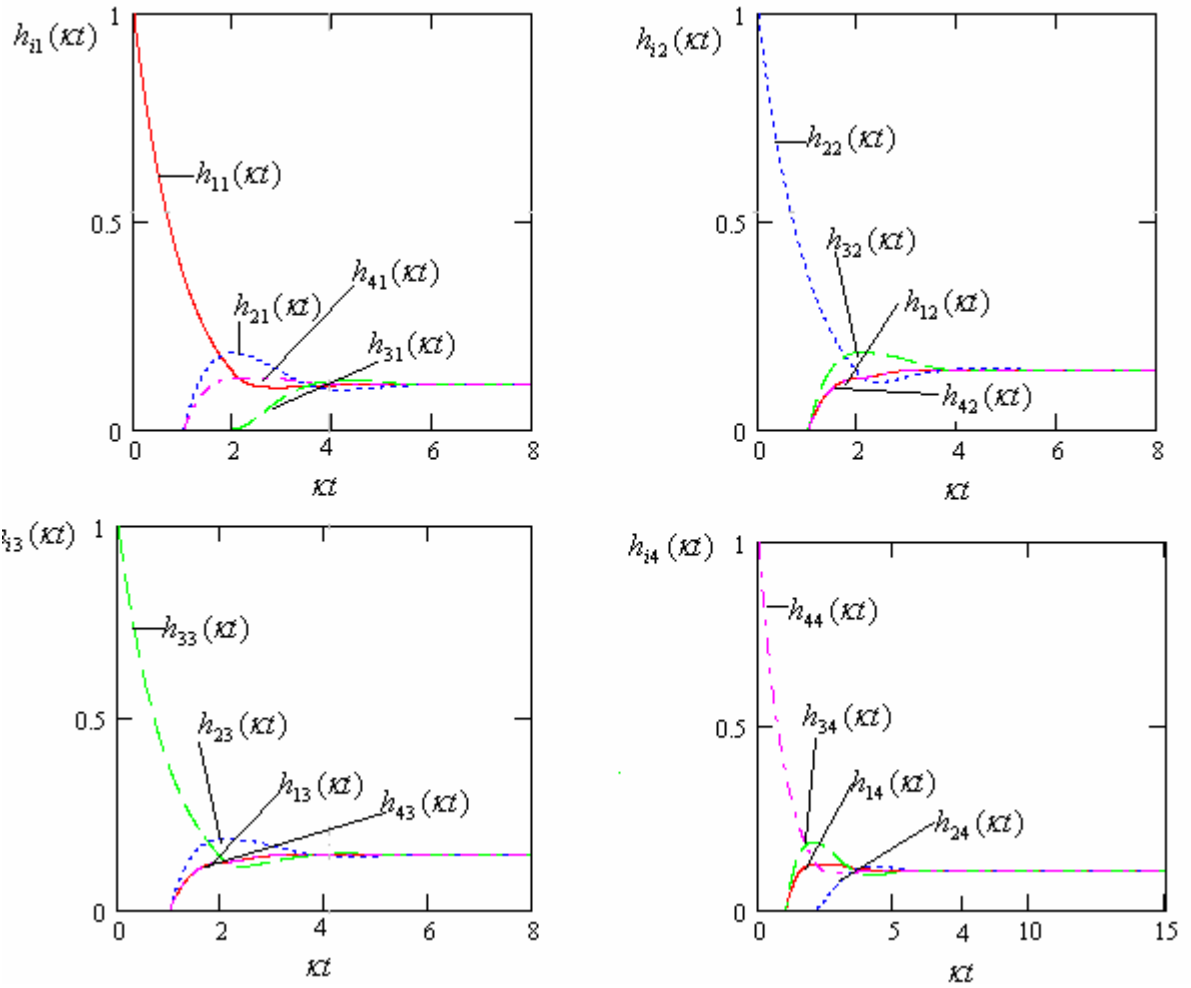
$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} pH_{14} &= \frac{3}{14(\kappa\tau + 1)}; & \lim_{p \rightarrow 0} pH_{24} &= \frac{3}{14(\kappa\tau + 1)}; & \lim_{p \rightarrow 0} pH_{34} &= \frac{3}{14(\kappa\tau + 1)}; \\ \lim_{p \rightarrow 0} pH_{44} &= \frac{3}{14(\kappa\tau + 1)}; & \lim_{p \rightarrow 0} pH_{12} &= \frac{2}{7(\kappa\tau + 1)}; & \lim_{p \rightarrow 0} pH_{22} &= \frac{2}{7(\kappa\tau + 1)}; \\ \lim_{p \rightarrow 0} pH_{32} &= \frac{2}{7(\kappa\tau + 1)}; & \lim_{p \rightarrow 0} pH_{42} &= \frac{2}{7(\kappa\tau + 1)}; & \lim_{p \rightarrow 0} pH_{13} &= \frac{2}{7(\kappa\tau + 1)}; \\ \lim_{p \rightarrow 0} pH_{23} &= \frac{2}{7(\kappa\tau + 1)}; & \lim_{p \rightarrow 0} pH_{33} &= \frac{2}{7(\kappa\tau + 1)}; & \lim_{p \rightarrow 0} pH_{43} &= \frac{2}{7(\kappa\tau + 1)}. \end{aligned}$$

2.8.4 PEREINAMOJO PROCESO PRIKLAUSOMYBĖS NUO SISTEMOS PARAMETRŲ TYRIMAS

Pereinamojo proceso pobūdis synchronizacijos sistemoje priklauso nuo parametrų κ ir τ sandaugos. Paveiksle 2.3 ir 2.4 pavaizduoti grafikai, prie skirtingų sandaugos $\kappa\tau$ reikšmių.



2.3 Pereinamųjų funkcijų grafikai, kai $\kappa\tau = 0.5$



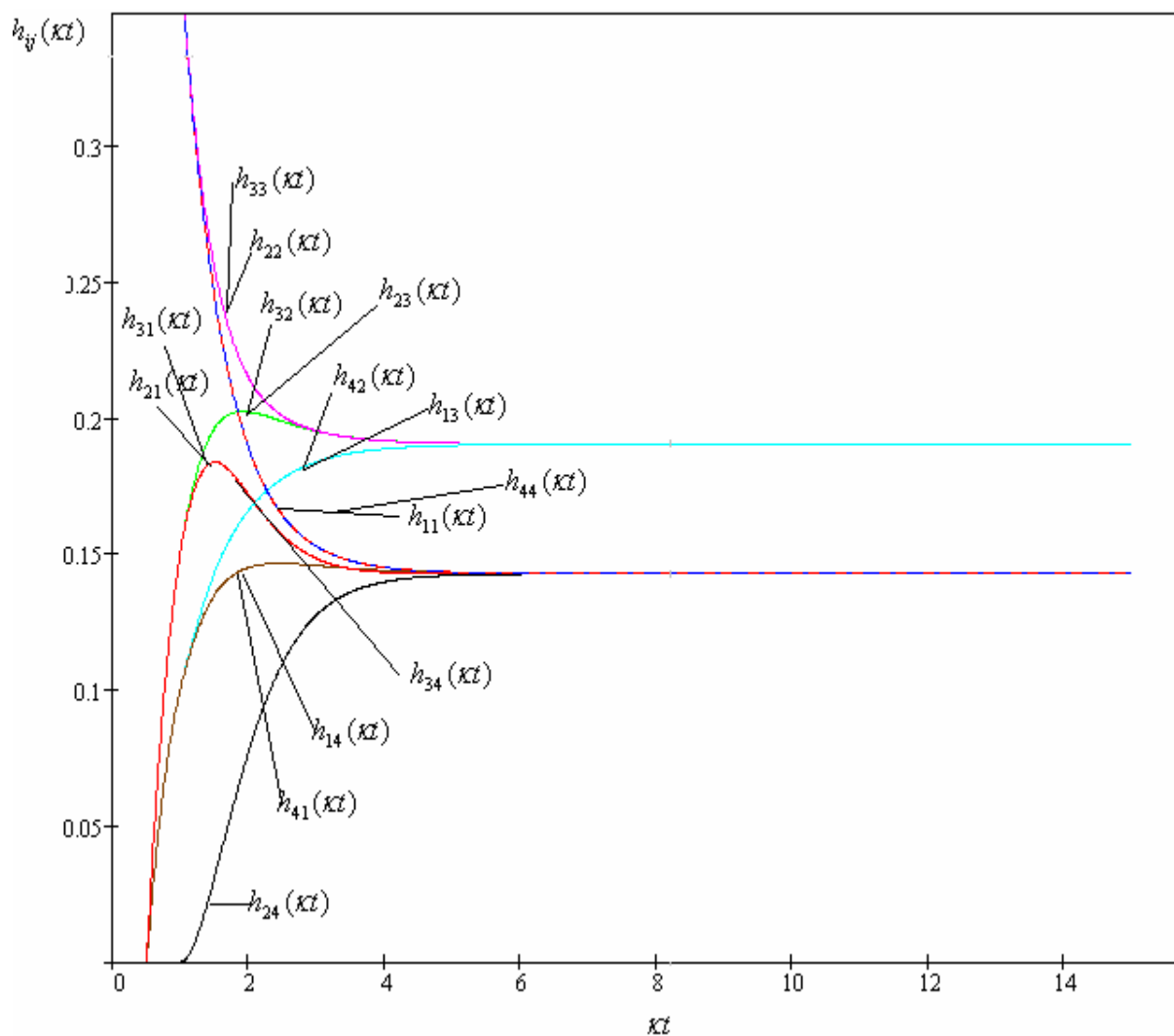
2.4 Pereinamųjų funkcijų grafikai, kai $\kappa\tau = 1$

Matome, kad pereinamojo proceso trukmė, kai $\kappa\tau$ sandauga didesnė, trunka ilgiau. Ribines reikšmes apskaičiuojame naudodamiesi (2.8.3.4) išraiškomis. Kai $\kappa\tau = 0.5$, tai

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_{i1}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} h_{i4}(t) = \frac{3}{14(0.5 + 1)} = 0.143,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_{i2}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} h_{i3}(t) = \frac{2}{7(0.5 + 1)} = 0.19, \quad i = \overline{1,4}.$$

Kai vienetinis fazės šuolis suteikiamas 1 ir 4 generatoriui, tai ribinė reikšmė yra 0.143, kai 2 ir 3 generatoriui – 0.19. Tai pavaizduota bendram grafike 2.5.



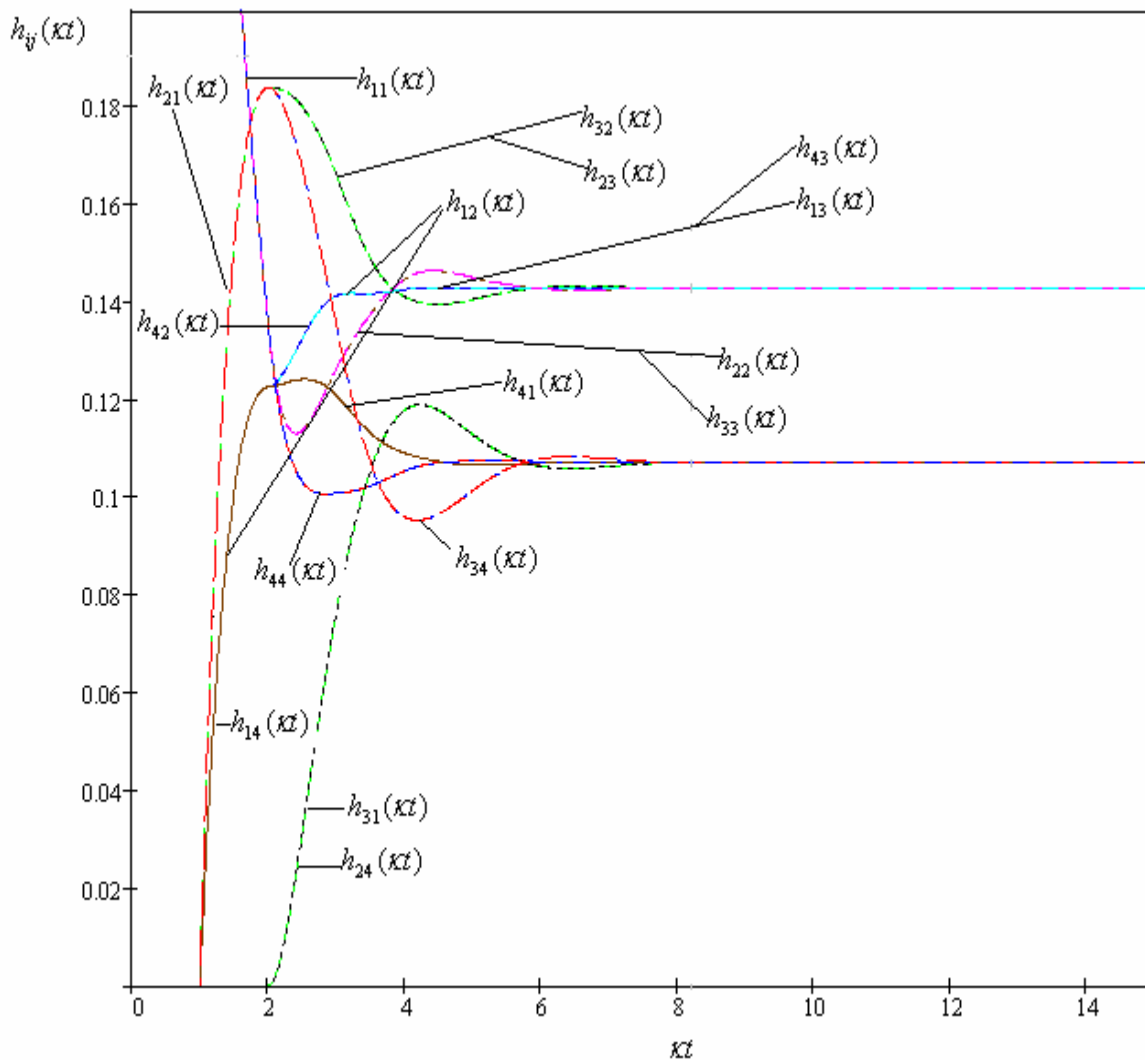
2.5 Pereinamųjų funkcijų grafikai, kai $\kappa\tau = 0.5$

Jei $\kappa\tau = 1$, tai

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_{i1}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} h_{i4}(t) = \frac{3}{14(1+1)} = 0.107,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_{i2}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} h_{i3}(t) = \frac{2}{7(1+1)} = 0.143, \quad i = \overline{1,4}.$$

Kai vienetinis fazės šuolis suteikiamas 1 ir 4 generatoriui, tai ribinė reikšmė yra 0.107, kai 2 ir 3 generatoriui – 0.143. Tai pavaizduota bendram grafike 2.6.



2.6 Pereinamųjų funkcijų grafikai, kai $\kappa\tau = 1$

2.8.5 SISTEMOS PEREINAMŪJŲ PROCESŲ PRIKLAUSOMYBĖ NUO PRADINIŲ SĄLYGŲ

Tiriame sistemos pereinamuosius procesus, įvertindami pradines sąlygas. Jas apibrėšime taip:

Laiko momentu $t = 0$ visiems generatoriams įjungiamas valdymas. Kai $t < 0$, generatorių dažniai $f_i(t) = f_{0i}$, o fazės $\varphi_i(t) = f_{0i}t + \varphi_{0i}$, ($i = \overline{1,4}$); f_{0i} - i -tojo generatoriaus savasis dažnis, $\varphi_{0i}(t)$ - i -tojo generatoriaus virpesio pradinė fazė.

Generatorių virpesių fazių skirtumų ribines reikšmes skaičiuosime, naudodami ribinės reikšmės teoremą:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_j(t) - x_i(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} p(X_j(p) - X_i(p)), i, j = \overline{1,4}, i \neq j. \quad (2.8.5.1)$$

Turime (2.2.8) diferencialinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} Dx_1(t) = \frac{\kappa}{3} [(x_2(t-\tau) + x_3(t-\tau) + x_4(t-\tau))] - \kappa x_1(t) + z_1(t), \\ Dx_2(t) = \frac{\kappa}{2} [(x_1(t-\tau) + x_3(t-\tau))] - \kappa x_2(t) + z_2(t), \\ Dx_3(t) = \frac{\kappa}{2} [(x_2(t-\tau) + x_4(t-\tau))] - \kappa x_3(t) + z_3(t), \\ Dx_4(t) = \frac{\kappa}{3} [(x_1(t-\tau) + x_2(t-\tau) + x_3(t-\tau))] - \kappa x_4(t) + z_4(t). \end{cases}$$

Pritaikome Laplaso transformaciją:

$$\begin{cases} pX_1(p) = \frac{\kappa}{3} e^{-p\tau} [(X_2(p) + X_3(p) + X_4(p))] - \kappa X_1(p) + Z_1(p), \\ pX_2(p) = \frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} [(X_1(p) + X_3(p))] - \kappa X_2(p) + Z_2(p), \\ pX_3(p) = \frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} [(X_2(p) + X_4(p))] - \kappa X_3(p) + Z_3(p), \\ pX_4(p) = \frac{\kappa}{3} e^{-p\tau} [(X_1(p) + X_2(p) + X_3(p))] - \kappa X_4(p) + Z_4(p). \end{cases}$$

Šios sistemos sprendinių radimui naudosime Kramerio taisyklę. Rasime $\lim_{p \rightarrow 0} p(X_j(p) - X_i(p))$,

kur $X_i(p) = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = \overline{1,4}$.

Matrica (2.8.3.3), kuri sudaryta iš koeficientų prie X_i ir šios matricos determinantas (2.8.3.4).

Sistemos laisvųjų narių stulpelis $b = (Z_1(p), Z_2(p), Z_3(p), Z_4(p))^T$. Determinanto Δ stulpelius paėliui keiskime sistemos laisvųjų narių stulpeliu b ir gausime tokius determinantus:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} Z_1(p) & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} \\ Z_2(p) & p+\kappa & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} & 0 \\ Z_3(p) & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} & p+\kappa & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} \\ Z_4(p) & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} & p+\kappa \end{vmatrix}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} p+\kappa & Z_1(p) & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} \\ \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} & Z_2(p) & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} & 0 \\ 0 & Z_3(p) & p+\kappa & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} \\ \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} & Z_4(p) & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} & p+\kappa \end{vmatrix};$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} p+\kappa & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} & Z_1(p) & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} \\ \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} & p+\kappa & Z_2(p) & 0 \\ 0 & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} & Z_3(p) & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} \\ \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} & Z_4(p) & p+\kappa \end{vmatrix}; \Delta_4 = \begin{vmatrix} p+\kappa & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} & Z_1(p) \\ \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} & p+\kappa & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} & Z_2(p) \\ 0 & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{2} & p+\kappa & Z_3(p) \\ \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} & \frac{-\kappa \cdot e^{-p\tau}}{3} & Z_4(p) \end{vmatrix};$$

Ieškome $\lim_{p \rightarrow 0} p(X_2 - X_1)$:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} p(X_2(p) - X_1(p)) &= \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{\Delta} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{\Delta} (Z_1(p)(\Delta_{12} - \Delta_{11}) + (Z_2(p)(\Delta_{22} - \Delta_{21}) + \\ &+ (Z_3(p)(\Delta_{32} - \Delta_{31}) + (Z_4(p)(\Delta_{42} - \Delta_{41})); \end{aligned} \quad (2.8.5.2)$$

čia Δ_{ij} , $j = 1, 2, i = \overline{1, 4}$ matricos Q ij -tojo elemento adjunktas.

Gauname neapibrėžtumą, todėl taikysime Liopitalio taisyklę. Pertvarkome (2.8.5.2) išraišką:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} p(X_2 - X_1) &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^2 Z_1(p)}{\Delta} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Delta_{12} - \Delta_{11}}{p} + \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^2 Z_2(p)}{\Delta} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Delta_{22} - \Delta_{21}}{p} + \\ &+ \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^2 Z_3(p)}{\Delta} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Delta_{32} - \Delta_{31}}{p} + \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^2 Z_4(p)}{\Delta} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Delta_{42} - \Delta_{41}}{p} = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p^2 Z_1(p))'_p}{\Delta'_p} \lim_{p \rightarrow 0} (\Delta_{12} - \Delta_{11})'_p + \\ &+ \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p^2 Z_2(p))'_p}{\Delta'_p} \lim_{p \rightarrow 0} (\Delta_{22} - \Delta_{21})'_p + \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p^2 Z_3(p))'_p}{\Delta'_p} \lim_{p \rightarrow 0} (\Delta_{32} - \Delta_{31})'_p + \\ &+ \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p^2 Z_4(p))'_p}{\Delta'_p} \lim_{p \rightarrow 0} (\Delta_{42} - \Delta_{41})'_p. \end{aligned} \quad (2.8.5.3)$$

Ieškome ribas:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} \Delta' &= \lim_{p \rightarrow 0} ((p + \kappa)^4 - \frac{25}{36} \kappa^2 e^{-2p\tau} (p + \kappa)^2 - \frac{5}{18} \kappa^3 e^{-3p\tau} (p + \kappa) - \frac{1}{36} \kappa^4 e^{-4p\tau})' = \\ \lim_{p \rightarrow 0} (4(p + \kappa)^3 - \frac{25}{36} \kappa^2 e^{-2p\tau} \cdot (-2\tau) \cdot (p + \kappa)^2 - \frac{25}{36} \kappa^2 e^{-2p\tau} \cdot 2(p + \kappa) - \frac{5}{18} \kappa^3 e^{-3p\tau} \cdot (-3\tau)(p + \kappa) - \\ - \frac{5}{18} \kappa^3 e^{-3p\tau} - \frac{1}{36} \kappa^4 e^{-4p\tau} \cdot (-4\tau)) &= \frac{7\kappa^3(1 + \kappa\tau)}{3}, \end{aligned}$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} p + \kappa & \frac{-\kappa}{2} e^{-p\tau} & 0 \\ \frac{-\kappa}{2} e^{-p\tau} & p + \kappa & \frac{-\kappa}{2} e^{-p\tau} \\ \frac{-\kappa}{3} e^{-p\tau} & \frac{-\kappa}{3} e^{-p\tau} & p + \kappa \end{vmatrix},$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{11} = \frac{13}{12} \kappa^3 \tau + \frac{31}{12} \kappa^2,$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{21} = 0,$$

$$\Delta_{31} = \begin{vmatrix} \frac{-\kappa}{3} e^{-p\tau} & \frac{-\kappa}{3} e^{-p\tau} & \frac{-\kappa}{3} e^{-p\tau} \\ p + \kappa & \frac{-\kappa}{2} e^{-p\tau} & 0 \\ \frac{-\kappa}{3} e^{-p\tau} & \frac{-\kappa}{3} e^{-p\tau} & p + \kappa \end{vmatrix},$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{31} = \frac{17}{18} \kappa^2 - \frac{19}{18} \kappa^3 \tau,$$

$$\Delta_{41} = - \begin{vmatrix} \frac{-\kappa}{3} e^{-p\tau} & \frac{-\kappa}{3} e^{-p\tau} & \frac{-\kappa}{3} e^{-p\tau} \\ p + \kappa & \frac{-\kappa}{2} e^{-p\tau} & 0 \\ \frac{-\kappa}{2} e^{-p\tau} & p + \kappa & \frac{-\kappa}{2} e^{-p\tau} \end{vmatrix},$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{41} = 0.$$

Analogiškai randame ir kitas ribas:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{14} = 0,$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{24} = \frac{17}{18} \kappa^2 - \frac{19}{18} \kappa^3 \tau,$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{34} = 0,$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{44} = \frac{13}{12} \kappa^3 \tau - \frac{31}{12} \kappa^2,$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{12} = 0,$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{22} = \frac{13}{18} \kappa^3 \tau - \frac{49}{18} \kappa^2,$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{32} = 0,$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{42} = \frac{5}{12} \kappa^2 - \frac{13}{12} \kappa^3 \tau,$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{13} = \frac{5}{12} \kappa^2 - \frac{13}{12} \kappa^3 \tau,$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{23} = 0,$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{33} = \frac{13}{18} \kappa^3 \tau + \frac{49}{18} \kappa^2,$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{43} = 0.$$

Apskaičiuosime $\lim_{p \rightarrow 0} (p^2 Z_i(p))'$, (išraiškas $Z_i(p)$ rastos 2.6 skyrelyje):

$$\lim_{p \rightarrow 0} (p^2 Z_1(p))' = \lim_{p \rightarrow 0} (p^2 (\varphi_{01} + \frac{f_{01}}{p} - \frac{\kappa f_{234}}{3p^2} - \frac{\kappa f_{234} \tau}{3p} + \frac{\kappa \varphi_{234}}{3p} - \frac{\kappa f_{234} e^{-p\tau}}{3p^2} - \frac{\kappa \varphi_{234} e^{-p\tau}}{3p}))' = f_{01},$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} (p^2 Z_2(p))' = \lim_{p \rightarrow 0} (p^2 (\varphi_{02} + \frac{f_{02}}{p} - \frac{\kappa f_{13}}{2p^2} - \frac{\kappa f_{13} \tau}{2p} + \frac{\kappa \varphi_{13}}{2p} - \frac{\kappa f_{13} e^{-p\tau}}{2p^2} - \frac{\kappa \varphi_{13} e^{-p\tau}}{2p}))' = f_{02},$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} (p^2 Z_3(p))' = \lim_{p \rightarrow 0} (p^2 (\varphi_{03} + \frac{f_{03}}{p} - \frac{\kappa f_{24}}{2p^2} - \frac{\kappa f_{24} \tau}{2p} + \frac{\kappa \varphi_{24}}{2p} - \frac{\kappa f_{24} e^{-p\tau}}{2p^2} - \frac{\kappa \varphi_{24} e^{-p\tau}}{2p}))' = f_{03},$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} (p^2 Z_4(p))' = \lim_{p \rightarrow 0} (p^2 (\varphi_{04} + \frac{f_{04}}{p} - \frac{\kappa f_{123}}{3p^2} - \frac{\kappa f_{123} \tau}{3p} + \frac{\kappa \varphi_{123}}{3p} - \frac{\kappa f_{123} e^{-p\tau}}{3p^2} - \frac{\kappa \varphi_{123} e^{-p\tau}}{3p}))' = f_{04}.$$

Gautus rezultatus įstatome į (2.8.5.4):

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} p(X_2(p) - X_1(p)) &= \frac{3f_{01}}{7\kappa^3(1+\kappa\tau)} \left(-\frac{19}{12} \kappa^3 \tau - \frac{19}{12} \kappa^2 \right) + \frac{3f_{02}}{7\kappa^3(1+\kappa\tau)} \left(\frac{16}{9} \kappa^3 \tau + \frac{16}{9} \kappa^2 \right) + \\ &+ \frac{3f_{03}}{7\kappa^3(1+\kappa\tau)} \left(\frac{2}{9} \kappa^3 \tau + \frac{2}{9} \kappa^2 \right) + \frac{3f_{04}}{7\kappa^3(1+\kappa\tau)} \left(-\frac{5}{12} \kappa^3 \tau - \frac{5}{12} \kappa^2 \right) = \frac{-19f_{01}}{28\kappa} + \frac{16f_{02}}{21\kappa} + \frac{2f_{03}}{21\kappa} - \frac{5f_{04}}{28\kappa} = \\ &= \frac{64f_{02} - 64f_{01}}{84\kappa} + \frac{8f_{03} - 8f_{01}}{84\kappa} + \frac{15f_{01} - 15f_{04}}{84\kappa} = \frac{16}{21} \cdot \frac{f_{02} - f_{01}}{\kappa} + \frac{2}{21} \cdot \frac{f_{03} - f_{01}}{\kappa} + \frac{5}{28} \cdot \frac{f_{01} - f_{04}}{\kappa}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} p(X_3 - X_1) &= \frac{3f_{01}}{7\kappa^3(1+\kappa\tau)} \left(-\frac{13}{6} \kappa^3 \tau - \frac{13}{6} \kappa^2 \right) + \frac{3f_{02}}{7\kappa^3(1+\kappa\tau)} \cdot \left(\frac{2}{9} \kappa^3 \tau + \frac{2}{9} \kappa^2 \right) + \\ &+ \frac{3f_{03}}{7\kappa^3(1+\kappa\tau)} \left(\frac{16}{9} \kappa^3 \tau + \frac{16}{9} \kappa^2 \right) + \frac{3f_{04}}{7\kappa^3(1+\kappa\tau)} \cdot \left(\frac{1}{6} \kappa^3 \tau + \frac{1}{6} \kappa^2 \right) = \frac{-13f_{01}}{14\kappa} + \frac{2f_{02}}{21\kappa} + \frac{16f_{03}}{21\kappa} + \frac{1f_{04}}{14\kappa} = \\ &= \frac{32f_{03} - 32f_{01}}{42\kappa} + \frac{4f_{02} - 4f_{01}}{42\kappa} + \frac{3f_{04} - 3f_{01}}{42\kappa} = \frac{16}{21} \cdot \frac{f_{03} - f_{01}}{\kappa} + \frac{2}{21} \cdot \frac{f_{02} - f_{01}}{\kappa} + \frac{1}{14} \cdot \frac{f_{04} - f_{01}}{\kappa}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} p(X_3(p) - X_2(p)) &= \frac{3f_{01}}{7\kappa^3(1+\kappa\tau)} \left(\frac{-7}{12} \kappa^3 \tau - \frac{7}{12} \kappa^2 \right) + \frac{3f_{02}}{7\kappa^3(1+\kappa\tau)} \left(-\frac{14}{9} \kappa^3 \tau - \frac{14}{9} \kappa^2 \right) + \\ &+ \frac{3f_{03}}{7\kappa^3(1+\kappa\tau)} \left(\frac{14}{9} \kappa^3 \tau + \frac{14}{9} \kappa^2 \right) + \frac{3f_{04}}{7\kappa^3(1+\kappa\tau)} \left(\frac{7}{12} \kappa^3 \tau + \frac{7}{12} \kappa^2 \right) = -\frac{f_{01}}{4\kappa} - \frac{2f_{02}}{3\kappa} + \frac{2f_{03}}{3\kappa} + \frac{f_{04}}{4\kappa} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{f_{04} - f_{01}}{\kappa} + \frac{2}{3} \cdot \frac{f_{03} - f_{02}}{\kappa}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} p(X_4(p) - X_1(p)) &= \frac{3f_{01}}{7\kappa^3(1+\kappa\tau)} \left(\frac{-7}{4} \kappa^3 \tau - \frac{7}{4} \kappa^2 \right) + \frac{3f_{02}}{7\kappa^3(1+\kappa\tau)} \cdot 0 + \\ &+ \frac{3f_{03}}{7\kappa^3(1+\kappa\tau)} \cdot 0 + \frac{3f_{04}}{7\kappa^3(1+\kappa\tau)} \left(\frac{7}{4} \kappa^3 \tau + \frac{7}{4} \kappa^2 \right) = -\frac{3f_{01}}{4\kappa} + \frac{3f_{04}}{4\kappa} = \frac{3}{4} \cdot \frac{f_{04} - f_{01}}{\kappa}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} p(X_4(p) - X_2(p)) &= \frac{3f_{01}}{7\kappa^3(1+\kappa\tau)} \cdot \left(-\frac{1}{6} \kappa^3 \tau - \frac{1}{6} \kappa^2 \right) + \frac{3f_{02}}{7\kappa^3(1+\kappa\tau)} \left(-\frac{16}{9} \kappa^3 \tau - \frac{16}{9} \kappa^2 \right) + \\ &+ \frac{3f_{03}}{7\kappa^3(1+\kappa\tau)} \cdot \left(-\frac{2}{9} \kappa^3 \tau - \frac{2}{9} \kappa^2 \right) + \frac{3f_{04}}{7\kappa^3(1+\kappa\tau)} \left(\frac{13}{6} \kappa^3 \tau + \frac{13}{6} \kappa^2 \right) = \frac{-3f_{01}}{42\kappa} - \frac{16f_{02}}{21\kappa} - \frac{2f_{03}}{21\kappa} + \frac{13f_{04}}{14\kappa} = \\ &= \frac{3f_{04} - 3f_{01}}{42\kappa} + \frac{32f_{04} - 32f_{02}}{42\kappa} + \frac{4f_{04} - 4f_{03}}{42\kappa} = \frac{1}{14} \cdot \frac{f_{04} - f_{01}}{\kappa} + \frac{16}{21} \cdot \frac{f_{04} - f_{02}}{\kappa} + \frac{2}{21} \cdot \frac{f_{04} - f_{03}}{\kappa}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} p(X_4(p) - X_3(p)) &= \frac{3f_{01}}{7\kappa^3(1+\kappa\tau)} \left(\frac{5}{12} \kappa^3 \tau + \frac{5}{12} \kappa^2 \right) + \frac{3f_{02}}{7\kappa^3(1+\kappa\tau)} \left(-\frac{2}{9} \kappa^3 \tau - \frac{2}{9} \kappa^2 \right) + \\ &+ \frac{3f_{03}}{7\kappa^3(1+\kappa\tau)} \left(-\frac{16}{9} \kappa^3 \tau - \frac{16}{9} \kappa^2 \right) + \frac{3f_{04}}{7\kappa^3(1+\kappa\tau)} \left(\frac{19}{12} \kappa^3 \tau + \frac{19}{12} \kappa^2 \right) = \frac{5f_{01}}{28\kappa} - \frac{2f_{02}}{21\kappa} - \frac{16f_{03}}{21\kappa} + \frac{19f_{04}}{28\kappa} = \\ &= \frac{8f_{04} - 8f_{02}}{84\kappa} + \frac{64f_{04} - 64f_{03}}{84\kappa} + \frac{15f_{01} - 15f_{04}}{84\kappa} = \frac{2}{21} \cdot \frac{f_{04} - f_{02}}{\kappa} + \frac{16}{21} \cdot \frac{f_{04} - f_{03}}{\kappa} + \frac{5}{28} \cdot \frac{f_{01} - f_{04}}{\kappa}. \end{aligned}$$

2.8.6 GENERATORIŲ VIRPESIŲ FAZIŲ SKIRTUMŲ PEREINAMŲJŲ PROCESŲ TYRIMAS

Pradinių sąlygų įtaką pereinamiesiems procesams sistemoje tirsime remdamiesi (2.3.27) sprendiniu. Parašome i -tojo ir j -tojo ($i, j = \overline{1,4}, i \neq j$) generatorių virpesių fazių skirtumo analizinę išraišką:

$$x_j(t) - x_i(t) \div \sum_{k=1}^L \frac{\kappa^k}{3^k (p + \kappa)^{k+1}} e^{-p\kappa\tau} g_{ji}(k), \quad 0 < t < (L+1)\tau; \quad (2.8.6.1)$$

čia $g_{ji}(k) = \sum_{m=1}^4 (\{B_1^k\}_{jm} - \{B_1^k\}_{im}) Z_m(p)$. $Z_m(p)$ yra vektoriaus $Z(p) \div z(t)$, priklausančio nuo pradinių

sąlygų, m -toji komponentė.

Pažymėkime $\{B_1^k\}_{jm} - \{B_1^k\}_{im} = \beta_{ji}(m, k)$, $m = \overline{1,4}$. Kadangi B_1^0 vienetinė matrica, tai kai $k = 0$, $\beta_{ji}(m, 0) = \delta_{ji}(m)$. Ieškosime skirtumo:

$$x_j(t) - x_i(t) \div \sum_{k=1}^L \left[\frac{\kappa^k}{3^k (p + \kappa)^{k+1}} e^{-pk\tau} (Z_1(p)\beta_{ji}(1, k) + Z_2(p)\beta_{ji}(2, k) + Z_3(p)\beta_{ji}(3, k) + Z_4(p)\beta_{ji}(4, k)) + \frac{1}{p + \kappa} (Z_1(p)\delta_{ji}(1) + Z_2(p)\delta_{ji}(2) + Z_3(p)\delta_{ji}(3) + Z_4(p)\delta_{ji}(4)) \right]$$

Istatome $Z_m(p)$ išraiškas ir atliekame pertvarkymus:

$$\begin{aligned} x_j(t) - x_i(t) \div & \sum_{k=1}^L \frac{\kappa^k}{3^k (p + \kappa)^{k+1}} e^{-pk\tau} \cdot (\beta_{ji}(1, k)(\varphi_{01} + \frac{f_{01}}{p} - \frac{\kappa f_{234}}{3p^2} - \frac{\kappa f_{234}\tau}{3p} + \frac{\kappa \varphi_{234}}{3p} - \frac{\kappa f_{234}e^{-p\tau}}{3p^2} - \frac{\kappa \varphi_{234}e^{-p\tau}}{3p}) + \\ & + \beta_{ji}(2, k)(\varphi_{02} + \frac{f_{02}}{p} - \frac{\kappa f_{13}}{2p^2} - \frac{\kappa f_{13}\tau}{2p} + \frac{\kappa \varphi_{13}}{2p} - \frac{\kappa f_{13}e^{-p\tau}}{2p^2} - \frac{\kappa \varphi_{13}e^{-p\tau}}{2p}) + \beta_{ji}(3, k)(\varphi_{03} + \frac{f_{03}}{p} - \\ & - \frac{\kappa f_{24}}{2p^2} - \frac{\kappa f_{24}\tau}{2p} + \frac{\kappa \varphi_{24}}{2p} - \frac{\kappa f_{24}e^{-p\tau}}{2p^2} - \frac{\kappa \varphi_{24}e^{-p\tau}}{2p}) + \beta_{ji}(4, k)(\varphi_{04} + \frac{f_{04}}{p} - \frac{\kappa f_{123}}{3p^2} - \frac{\kappa f_{123}\tau}{3p} + \\ & + \frac{\kappa \varphi_{123}}{3p} - \frac{\kappa f_{123}e^{-p\tau}}{3p^2} - \frac{\kappa \varphi_{123}e^{-p\tau}}{3p}) + \frac{1}{p + \kappa} (\delta_{ji}(1)(\varphi_{01} + \frac{f_{01}}{p} - \frac{\kappa f_{234}}{3p^2} - \frac{\kappa f_{234}\tau}{3p} + \frac{\kappa \varphi_{234}}{3p} - \\ & - \frac{\kappa f_{234}e^{-p\tau}}{3p^2} - \frac{\kappa \varphi_{234}e^{-p\tau}}{3p}) + \delta_{ji}(2)(\varphi_{02} + \frac{f_{02}}{p} - \frac{\kappa f_{13}}{2p^2} - \frac{\kappa f_{13}\tau}{2p} + \frac{\kappa \varphi_{13}}{2p} - \frac{\kappa f_{13}e^{-p\tau}}{2p^2} - \frac{\kappa \varphi_{13}e^{-p\tau}}{2p}) + \\ & + \delta_{ji}(3)(\varphi_{03} + \frac{f_{03}}{p} - \frac{\kappa f_{24}}{2p^2} - \frac{\kappa f_{24}\tau}{2p} + \frac{\kappa \varphi_{24}}{2p} - \frac{\kappa f_{24}e^{-p\tau}}{2p^2} - \frac{\kappa \varphi_{24}e^{-p\tau}}{2p}) + \delta_{ji}(4)(\varphi_{04} + \frac{f_{04}}{p} - \frac{\kappa f_{123}}{3p^2} - \\ & - \frac{\kappa f_{123}\tau}{3p} + \frac{\kappa \varphi_{123}}{3p} - \frac{\kappa f_{123}e^{-p\tau}}{3p^2} - \frac{\kappa \varphi_{123}e^{-p\tau}}{3p}) = \\ & = \sum_{k=1}^L \frac{\kappa^k}{3^k (p + \kappa)^{k+1}} e^{-pk\tau} ((\varphi_{01}\beta_{ji}(1, k) + \varphi_{02}\beta_{ji}(2, k) + \varphi_{03}\beta_{ji}(3, k) + \varphi_{04}\beta_{ji}(4, k)) + \\ & + \frac{f_{01}\beta_{ji}(1, k) + f_{02}\beta_{ji}(2, k) + f_{03}\beta_{ji}(3, k) + f_{04}\beta_{ji}(4, k)}{p} - \frac{\kappa}{p} e^{-p\tau} (\frac{\varphi_{234}}{3}\beta_{ji}(1, k) + \\ & + \frac{\varphi_{13}}{2}\beta_{ji}(2, k) + \frac{\varphi_{24}}{2}\beta_{ji}(3, k) + \frac{\varphi_{123}}{3}\beta_{ji}(4, k)) + \frac{\kappa}{p^2} (\frac{f_{234}}{3}\beta_{ji}(1, k) + \frac{f_{13}}{2}\beta_{ji}(2, k) + \\ & + \frac{f_{24}}{2}\beta_{ji}(3, k) + \frac{f_{123}}{3}\beta_{ji}(4, k)) - \frac{\kappa}{p^2} e^{-p\tau} (\frac{f_{234}}{3}\beta_{ji}(1, k) + \frac{f_{13}}{2}\beta_{ji}(2, k) + \frac{f_{24}}{2}\beta_{ji}(3, k) + \\ & + \frac{f_{123}}{3}\beta_{ji}(4, k)) - \frac{\kappa\tau}{p} (\frac{f_{234}}{3}\beta_{ji}(1, k) + \frac{f_{13}}{2}\beta_{ji}(2, k) + \frac{f_{24}}{2}\beta_{ji}(3, k) + \frac{f_{123}}{3}\beta_{ji}(4, k)) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\kappa}{p} \left(\frac{\varphi_{234}}{3} \beta_{ji}(1, k) + \frac{\varphi_{13}}{2} \beta_{ji}(2, k) + \frac{\varphi_{24}}{2} \beta_{ji}(3, k) + \frac{\varphi_{123}}{3} \beta_{ji}(4, k) \right) + \frac{1}{p + \kappa} \left((\varphi_{01} \delta_{ji}(1) + \right. \\
& \left. + \varphi_{02} \delta_{ji}(2) + \varphi_{03} \delta_{ji}(3) + \varphi_{04} \delta_{ji}(4)) + \frac{f_{01} \delta_{ji}(1) + f_{02} \delta_{ji}(2) + f_{03} \delta_{ji}(3) + f_{04} \delta_{ji}(4)}{p} - \right. \\
& \left. - \frac{\kappa}{p} e^{-p\tau} \left(\frac{\varphi_{234}}{3} \delta_{ji}(1) + \frac{\varphi_{13}}{2} \delta_{ji}(2) + \frac{\varphi_{24}}{2} \delta_{ji}(3) + \frac{\varphi_{123}}{3} \delta_{ji}(4) \right) + \frac{\kappa}{p^2} \left(\frac{f_{234}}{3} \delta_{ji}(1) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{f_{13}}{2} \delta_{ji}(2) + \frac{f_{24}}{2} \delta_{ji}(3) + \frac{f_{123}}{3} \delta_{ji}(4) \right) - \frac{\kappa}{p^2} e^{-p\tau} \left(\frac{f_{234}}{3} \delta_{ji}(1) + \frac{f_{13}}{2} \delta_{ji}(2) + \frac{f_{24}}{2} \delta_{ji}(3) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{f_{123}}{3} \delta_{ji}(4) \right) - \frac{\kappa\tau}{p} \left(\frac{f_{234}}{3} \delta_{ji}(1) + \frac{f_{13}}{2} \delta_{ji}(2) + \frac{f_{24}}{2} \delta_{ji}(3) + \frac{f_{123}}{3} \delta_{ji}(4) \right) + \frac{\kappa}{p} \left(\frac{\varphi_{234}}{p} \delta_{ji}(1) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\varphi_{13}}{2} \delta_{ji}(2) + \frac{\varphi_{24}}{2} \delta_{ji}(3) + \frac{\varphi_{123}}{3} \delta_{ji}(4) \right) + \frac{\kappa}{p} \left(\frac{\varphi_{234}}{3} \delta_{ji}(1) + \frac{\varphi_{13}}{2} \delta_{ji}(2) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\varphi_{24}}{2} \delta_{ji}(3) + \frac{\varphi_{123}}{3} \delta_{ji}(4) \right) \right).
\end{aligned}$$

Pažymime:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \varphi_{01} \beta_{ji}(1, k) + \varphi_{02} \beta_{ji}(2, k) + \varphi_{03} \beta_{ji}(3, k) + \varphi_{04} \beta_{ji}(4, k), \\
\alpha_2 &= f_{01} \beta_{ji}(1, k) + f_{02} \beta_{ji}(2, k) + f_{03} \beta_{ji}(3, k) + f_{04} \beta_{ji}(4, k), \\
\alpha_3 &= \frac{f_{234}}{3} \beta_{ji}(1, k) + \frac{f_{13}}{2} \beta_{ji}(2, k) + \frac{f_{24}}{2} \beta_{ji}(3, k) + \frac{f_{123}}{3} \beta_{ji}(4, k), \\
\eta_1 &= \varphi_{01} \delta_{ji}(1) + \varphi_{02} \delta_{ji}(2) + \varphi_{03} \delta_{ji}(3) + \varphi_{04} \delta_{ji}(4), \\
\eta_2 &= f_{01} \delta_{ji}(1) + f_{02} \delta_{ji}(2) + f_{03} \delta_{ji}(3) + f_{04} \delta_{ji}(4), \\
\eta_3 &= \frac{f_{234}}{3} \delta_{ji}(1) + \frac{f_{13}}{2} \delta_{ji}(2) + \frac{f_{24}}{2} \delta_{ji}(3) + \frac{f_{123}}{3} \delta_{ji}(4), \\
\eta_4 &= \frac{\varphi_{234}}{3} \delta_{ji}(1) + \frac{\varphi_{13}}{2} \delta_{ji}(2) + \frac{\varphi_{24}}{2} \delta_{ji}(3) + \frac{\varphi_{123}}{3} \delta_{ji}(4).
\end{aligned}$$

(2.8.6.2)

Panaudojame (2.8.6.2) išraiškas:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^L \frac{\kappa^k}{3^k (p+\kappa)^{k+1}} e^{-pk\tau} \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{p} + \frac{\kappa}{p^2} \alpha_3 - \frac{\kappa\tau}{p} \alpha_3 + \frac{\kappa}{p} \alpha_4 - \frac{\kappa}{p^2} \alpha_3 e^{-p\tau} - \frac{\kappa}{p} \alpha_4 e^{-p\tau} \right) + \frac{1}{p+\kappa} \left(\eta_1 + \frac{\eta_2}{p} + \frac{\kappa}{p^2} \eta_3 - \right. \\
& \left. - \frac{\kappa\tau}{p} \eta_3 + \frac{\kappa}{p} \eta_4 - \frac{\kappa}{p^2} \eta_3 e^{-p\tau} - \frac{\kappa}{p} \eta_4 e^{-p\tau} \right) = \sum_{k=1}^L \alpha_1 \frac{\kappa^k}{3^k (p+\kappa)^{k+1}} e^{-pk\tau} + \sum_{k=1}^L (\alpha_2 - \kappa\tau\alpha_3 + \kappa\alpha_4) \frac{\kappa^k}{3^k p(p+\kappa)^{k+1}} e^{-pk\tau} + \\
& + \sum_{k=1}^L \alpha_3 \kappa \frac{\kappa^k}{3^k p^2 (p+\kappa)^{k+1}} e^{-pk\tau} - \sum_{k=1}^L \alpha_3 \kappa \frac{\kappa^k}{3^k p^2 (p+\kappa)^{k+1}} e^{-p(k+1)\tau} - \sum_{k=1}^L \alpha_4 \kappa \frac{\kappa^k}{3^k p(p+\kappa)^{k+1}} e^{-p(k+1)\tau} + \\
& + \frac{\eta_1}{p+\kappa} + \frac{\eta_2 + \kappa\tau\eta_3 + \kappa\eta_4}{p(p+\kappa)} + \frac{\kappa\eta_3}{p^2(p+\kappa)} - \frac{\kappa\eta_3}{p^2(p+\kappa)} e^{-p\tau} - \frac{\kappa\eta_4}{p(p+\kappa)} e^{-p\tau}.
\end{aligned}$$

Pažymėkime:

$$\begin{aligned}
S_1(p) &= \sum_{k=1}^L \alpha_1 \frac{\kappa^k}{3^k (p+\kappa)^{k+1}} e^{-pk\tau}, \\
S_2(p) &= \sum_{k=1}^L (\alpha_2 - \kappa\tau\alpha_3 + \kappa\alpha_4) \frac{\kappa^k}{3^k p(p+\kappa)^{k+1}} e^{-pk\tau}, \\
S_2(p) &= \sum_{k=1}^L (\alpha_2 - \kappa\tau\alpha_3 + \kappa\alpha_4) \frac{\kappa^k}{3^k p(p+\kappa)^{k+1}} e^{-pk\tau}, \\
S_3(p) &= \sum_{k=1}^L \alpha_3 \kappa \frac{\kappa^k}{3^k p^2 (p+\kappa)^{k+1}} e^{-pk\tau}, \\
S_4(p) &= \sum_{k=1}^L \alpha_4 \kappa \frac{\kappa^k}{3^k p(p+\kappa)^{k+1}} e^{-pk\tau}, \\
S_{11}(p) &= \frac{\eta_1}{p+\kappa}, \\
S_{21}(p) &= \frac{\eta_2 + \kappa\tau\eta_3 + \kappa\eta_4}{p(p+\kappa)}, \\
S_{31}(p) &= \frac{\kappa\eta_3}{p^2(p+\kappa)}, \\
S_{41}(p) &= \frac{\kappa\eta_4}{p(p+\kappa)}.
\end{aligned}$$

Tada

$$\begin{aligned}
& x_j(t) - x_i(t) \div S_1(p) + S_2(p) + S_3(p) - S_3(p)e^{-p\tau} - S_4(p)e^{-p\tau} + S_{11}(p) + S_{21}(p) + \\
& + S_{31}(p) - S_{31}(p)e^{-p\tau} - S_{41}(p)e^{-p\tau} \div S_1(t) + S_2(t) + S_3(t) - S_3(t-\tau)l(t-\tau) - \\
& - S_4(t-\tau)l(t-\tau) + S_{11}(t) + S_{21}(t) + S_{31}(t) - S_{31}(t-\tau)l(t-\tau) - S_{41}(t-\tau)l(t-\tau);
\end{aligned} \tag{2.8.6.3}$$

čia

$$S_1(t) = \sum_{k=1}^L \alpha_1 \frac{(\kappa t - k \kappa \tau)^k}{3^k k!} e^{-(\kappa t - k \kappa \tau)} 1(t - k \tau),$$

$$\kappa S_2(t) = \sum_{k=1}^L \frac{(\alpha_2 - \kappa \tau \alpha_3 + \kappa \alpha_4)}{3^k} \left(1 - \sum_{v=0}^k \frac{(\kappa t - k \kappa \tau)^v}{v!} e^{-(\kappa t - k \kappa \tau)}\right) 1(t - k \tau),$$

$$\kappa^2 S_3(t) = \sum_{k=1}^L \frac{\alpha_3}{3^k} (\kappa t - k \kappa \tau - (k+1)) + \sum_{v=0}^k \sum_{r=0}^v \frac{(\kappa t - k \kappa \tau)^r}{r!} e^{-(\kappa t - k \kappa \tau)} 1(t - k \tau),$$

$$\kappa S_4(t) = \sum_{k=1}^L \frac{\alpha_4}{3^k} \left(1 - \sum_{v=0}^k \frac{(\kappa t - k \kappa \tau)^v}{v!} e^{-(\kappa t - k \kappa \tau)}\right) 1(t - k \tau),$$

$$S_{11}(t) = \eta_1 e^{-\kappa t},$$

$$\kappa S_{21}(t) = (\eta_2 - \kappa \tau \eta_3 + \kappa \eta_4)(1 - e^{-\kappa t}),$$

$$\kappa^2 S_{31}(t) = \eta_3 (\kappa - 1 + e^{-\kappa t}),$$

$$\kappa S_{41}(t) = \eta_4 (1 - e^{-\kappa t}).$$

Remdamiesi Diuamelio formulę:

$$pF_1(p)F_2(p) \div f_1(t)f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau)f_2'(t-\tau)d\tau. \quad (2.8.6.4)$$

Gauname išraišką, kuriomis toliau pasinaudosime:

$$\frac{1}{p(p+\kappa)^{k+1}} \div \frac{1}{\kappa^{k+1}} - \frac{1}{\kappa^{k+1}} \sum_{v=0}^k \frac{(\kappa t)^v}{v!} e^{-\kappa t}, \quad (2.8.6.5)$$

$$\frac{1}{p^2(p+\kappa)^{k+1}} \div \frac{1}{\kappa^{k+1}} - \frac{k+1}{\kappa^{k+2}} + \frac{1}{\kappa^{k+2}} \sum_{v=0}^k \sum_{r=0}^v \frac{(\kappa t)^r}{r!} e^{-\kappa t}. \quad (2.8.6.6)$$

Taikydami atvirkštinę Laplaso transformaciją, randame pirmavaizdžius:

$$\frac{1}{(p+\kappa)^{k+1}} \div \frac{t^k}{k!} e^{-\kappa t} = f_1(t),$$

$$\frac{1}{p^2} \div t = f_2(t).$$

Randame

$$f_2(0) = 0; f_2'(t) = 1.$$

Istatome gautus reiškinius į formulę (2.8.6.4):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{p(p+\kappa)^{k+1}} \div \frac{t^k}{k!} e^{-\kappa t} \cdot 0 + \int_0^t \frac{\tau^k}{k!} e^{-\kappa \tau} d\tau = \left(\begin{array}{l} u = \tau^k \quad dv = e^{-\kappa \tau} d\tau \\ du = k\tau^{k-1} \quad v = -\frac{1}{\kappa} e^{-\kappa \tau} \end{array} \right) = \\
& = -\frac{1}{\kappa} e^{-\kappa \tau} \tau^k \frac{1}{k!} \Big|_0^t - \frac{1}{k!} \int_0^t \left(-\frac{1}{\kappa} \right) e^{-\kappa \tau} k\tau^{k-1} d\tau = \frac{t^k e^{-\kappa t}}{\kappa k!} + \frac{k}{\kappa k!} \int_0^t \tau^{k-1} e^{-\kappa \tau} d\tau = \\
& = \left(\begin{array}{l} u = \tau^{k-1} \quad dv = e^{-\kappa \tau} d\tau \\ du = (k-1)\tau^{k-2} d\tau \quad v = -\frac{1}{\kappa} e^{-\kappa \tau} \end{array} \right) = \frac{t^k e^{-\kappa t}}{\kappa k!} + \frac{t^{k-1} e^{-\kappa t}}{\kappa^2 (k-1)!} + \frac{k-1}{\kappa^2 (k-1)!} \int_0^t e^{-\kappa \tau} \tau^{k-2} d\tau = \\
& = \dots = \frac{1}{\kappa^{k+1}} - \frac{1}{\kappa^{k+1}} \sum_{v=0}^k \frac{(\kappa t)^v}{v!} e^{-\kappa t}.
\end{aligned}$$

Gavome (2.8.6.5) išraišką.

Pažymime:

$$S_2^*(t) = \sum_{k=1}^L \frac{(\alpha_2^* - \kappa t \alpha_3^* + \kappa \alpha_4^*)}{3^k} \left(1 - \sum_{v=0}^k \frac{(\kappa - k\kappa \tau)^v}{v!} e^{-(\kappa - k\kappa \tau)} \right) 1(t - k\tau),$$

$$S_{21}^*(t) = (\eta_2^* - \kappa t \eta_3^* + \kappa \eta_4^*) (1 - e^{-\kappa t}),$$

$$S_3^*(t) = \sum_{k=1}^L \frac{\alpha_3^*}{3^k} (\kappa - k\kappa \tau - (k+1) + \sum_{v=0}^k \sum_{r=0}^v \frac{(\kappa - k\kappa \tau)^r}{r!} e^{-(\kappa - k\kappa \tau)}) 1(t - k\tau),$$

$$S_{31}^*(t) = \eta_3^* (\kappa - 1 + e^{-\kappa t}),$$

$$\alpha_2^* = \frac{f_{01}}{\kappa} \beta_{ji}(1, k) + \frac{f_{02}}{\kappa} \beta_{ji}(2, k) + \frac{f_{03}}{\kappa} \beta_{ji}(3, k) + \frac{f_{04}}{\kappa} \beta_{ji}(4, k),$$

$$\alpha_3^* = \frac{f_{234}}{3\kappa} \beta_{ji}(1, k) + \frac{f_{13}}{2\kappa} \beta_{ji}(2, k) + \frac{f_{24}}{2\kappa} \beta_{ji}(3, k) + \frac{f_{123}}{3\kappa} \beta_{ji}(4, k),$$

$$\eta_2^* = \frac{f_{01}}{\kappa} \delta_{ji}(1) + \frac{f_{02}}{\kappa} \delta_{ji}(2) + \frac{f_{03}}{\kappa} \delta_{ji}(3) + \frac{f_{04}}{\kappa} \delta_{ji}(4),$$

$$\eta_3^* = \frac{f_{234}}{3\kappa} \delta_{ji}(1) + \frac{f_{13}}{2\kappa} \delta_{ji}(2) + \frac{f_{24}}{2\kappa} \delta_{ji}(3) + \frac{f_{123}}{3\kappa} \delta_{ji}(4).$$

ir parašome galutinę fazių skirtumo išraišką:

$$x_j(t) - x_i(t) \div S_1(t) + S_2^*(t) + S_3(t) - S_3^*(t - \tau)1(t - \tau) - S_4(t - \tau)1(t - \tau) + \quad (2.8.6.7)$$

$$S_{11}(t) + S_{21}^*(t) + S_{31}^*(t) - S_{31}^*(t - \tau)1(t - \tau) - S_{41}(t - \tau)1(t - \tau).$$

Apskaičiuojame $\beta_{ji}(m, k)$ ir $\delta_{ji}(m)$, $m = \overline{1,4}$, $i \neq j$, $k = \overline{1,4}$:

kai $j = 2, i = 1$, tai

$$\beta_{21}(1, k) = (-1)^k - 0.5005(-0.5)^k - 1.5(-1.5)^k, \beta_{21}(2, k) = 0.5005(-0.5)^k + 0.5(-1.5)^k,$$

$$\beta_{21}(3, k) = 0.5005(-0.5)^k - 0.5(-1.5)^k, \beta_{21}(4, k) = (-1)(-1)^k - 0.5005(-0.5)^k + 1.5(-1.5)^k,$$

$$\delta_{21}(1) = -1, \delta_{21}(2) = 1, \delta_{21}(3) = 0, \delta_{21}(4) = 0.$$

kai $j = 3, i = 1$, tai

$$\beta_{31}(1, k) = -2(-1)^k - 0.5005(-0.5)^k + 1.5(-1.5)^k, \beta_{31}(2, k) = 0.5005(-0.5)^k - 0.5(-1.5)^k,$$

$$\beta_{31}(3, k) = 0.5005(-0.5)^k + 0.5(-1.5)^k, \beta_{31}(4, k) = 2(-1)^k - 0.5005(-0.5)^k - 1.5(-1.5)^k,$$

$$\delta_{31}(1) = -1, \delta_{31}(2) = 0, \delta_{31}(3) = 1, \delta_{31}(4) = 0.$$

kai $j = 3, i = 2$, tai

$$\beta_{32}(1, k) = -3(-1)^k + 3(-1.5)^k, \beta_{32}(2, k) = -1(-1.5)^k, \beta_{32}(3, k) = (-1.5)^k,$$

$$\beta_{32}(4, k) = 3(-1)^k - 3(-1.5)^k,$$

$$\delta_{32}(1) = 0, \delta_{32}(2) = -1, \delta_{32}(3) = 1, \delta_{32}(4) = 0.$$

kai $j = 4, i = 1$, tai

$$\beta_{41}(1, k) = -1(-1)^k, \beta_{41}(2, k) = 0, \beta_{41}(3, k) = 0, \beta_{41}(4, k) = (-1)^k,$$

$$\delta_{41}(1) = -1, \delta_{41}(2) = 0, \delta_{41}(3) = 0, \delta_{41}(4) = 1.$$

kai $j = 4, i = 2$, tai

$$\beta_{42}(1, k) = 0.5005(-0.5)^k - 2(-1)^k + 1.5(-1.5)^k, \beta_{42}(2, k) = -0.5005(-0.5)^k - 0.5(-1.5)^k,$$

$$\beta_{42}(3, k) = -0.5005(-0.5)^k + 0.5(-1.5)^k, \beta_{42}(4, k) = 0.5005(-0.5)^k + 2(-1)^k - 1.5(-1.5)^k,$$

$$\delta_{42}(1) = 0, \delta_{42}(2) = -1, \delta_{42}(3) = 0, \delta_{42}(4) = 1.$$

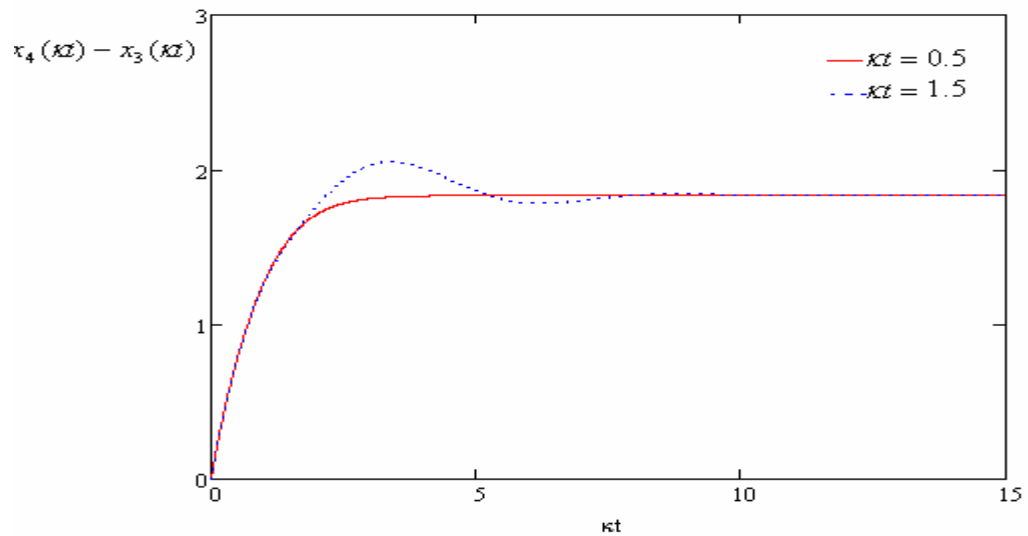
kai $j = 4, i = 3$, tai

$$\beta_{43}(1, k) = 0.5005(-0.5)^k + (-1)^k - 1.5(-1.5)^k, \beta_{43}(2, k) = -0.5005(-0.5)^k + 0.5(-1.5)^k,$$

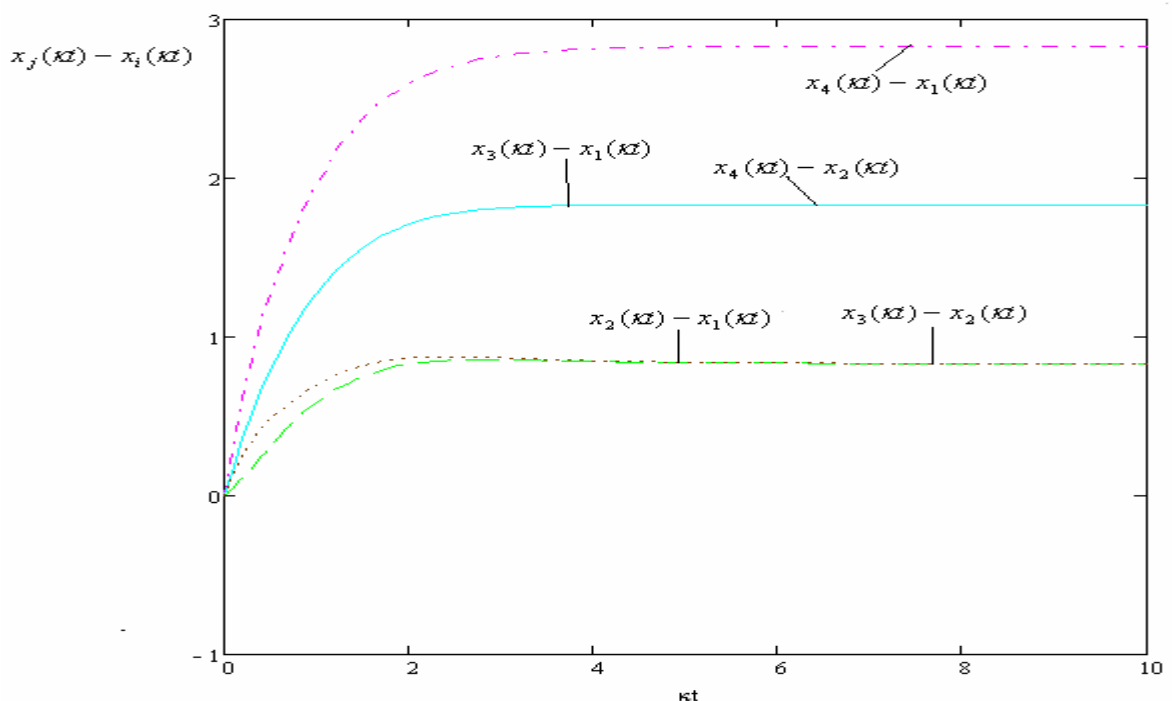
$$\beta_{43}(3, k) = -0.5005(-0.5)^k - 0.5(-1.5)^k, \beta_{43}(4, k) = 0.5005(-0.5)^k - (-1)^k + 1.5(-1.5)^k,$$

$$\delta_{43}(1) = 0, \delta_{43}(2) = 1, \delta_{43}(3) = -1, \delta_{43}(4) = 1.$$

Generatorių virpesių fazių skirtumų pereinamieji procesai priklauso nuo pradinių sąlygų, t.y. nuo generatorių savųjų dažnių f_{0i} ir pradinių fazių φ_{0i} , $i = \overline{1,4}$. Taip pat nuo parametrų $\kappa\tau$ sandaugos. Didėjant $\kappa\tau$ pereinamojo proceso trukmė didėja, tai matyti 2.7 paveiksle. Fazių skirtumų grafikai pateikti 2.8 paveiksle, kai $\frac{f_{01}}{\kappa} = 1999$, $\frac{f_{02}}{\kappa} = 2000$, $\frac{f_{03}}{\kappa} = 2001$, $\frac{f_{04}}{\kappa} = 2002$, $\varphi_{01} = 0.5$, $i = \overline{1,4}$. Daugiau grafikų pateikta 4 priede.



2.7 pav. Fazių skirtumo grafikai prie skirtingų $\kappa\tau$ reikšmių



2.8 pav. Fazių skirtumo grafikai $\kappa = 0.5$

Generatorių virpesių fazių ribinės reikšmės:

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_2(p) - X_1(p)) = 0.833,$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_3 - X_1) = 1.833,$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_3(p) - X_2(p)) = 0.833,$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_4(p) - X_1(p)) = 2.833,$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_4(p) - X_2(p)) = 1.833,$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_4(p) - X_3(p)) = 0.833.$$

IŠVADOS

Darbe nagrinėjome tarpusavio sinchronizacijos sistemą, sudarytą iš keturių generatorių. Atlikę skaičiavimus bei išanalizavus grafikus, darome tokias išvadas:

1. Pereinamojo proceso trukmė sinchronizacijos sistemoje priklauso nuo parametrų κ ir τ sandaugos. Didėjant $\kappa\tau$, pereinamojo proceso trukmė turi tendenciją didėti. Kuo didesnis $\kappa\tau$, tuo tarpusavio sinchronizacijos sistemą sudarantiems generatoriams reikia daugiau laiko pasiekti sinchronizmą.

2. Kai vėlavimo τ ir koeficiento κ sandauga daug mažesnė už vienetą ($\kappa\tau < 0.001$), pereinamosios funkcijos praktiškai nepriklauso nuo vėlavimo dydžio. Tuo atveju galima nagrinėti supaprastintą matematinį modelį – matricinę diferencialinę lygtį be vėluojančio argumento.

3. Pereinamasis procesas sinchronizacijos sistemoje tampa virpamu, kai $\kappa\tau > 1$. Toliau didinant sandaugos $\kappa\tau$ reikšmę, pereinamojo proceso virpamasis pobūdis stiprėja.

4. Generatorių virpesių fazių skirtumų nusistovėjusios reikšmės sinchronizacijos sistemoje yra tiesiogiai proporcingos generatorių savųjų dažnių skirtumams ir atvirkščiai proporcingos koeficientui κ . Jos nepriklauso nuo vėlavimo τ dydžio ir generatorių virpesių fazių reikšmių pradiniu laiko momentu.

LITERATŪRA

1. Ambrazevičius, A.; Domarkas, A. *Matematinės fizikos lygtys*. Vilnius: Aldorija, 1999, 388 p.
2. Apynis, A.; Stankus, E. *Matematika*. Vilnius, 2001, 357 p.
3. Barauskas, A.; Navickas, Z.; Tėvelis, V. *Kompleksinio kintamojo funkcijos ir operacinis skaičiavimas*. Vilnius, 1986, 302 p.
4. Dosinas, G. S; Papreckienė, L. *Diferencialinės lygtys*. Kaunas, 2011, 224 p.
5. <http://mokslasplius.lt/eksperimentai/pereinamieji-procesai-elekrinese-grandinese>
6. Krivickas, R.; Jočys, A. *Grandinių teorijos pagrindai*. Vilnius: Mokslas, 1980, 294 p.
7. Kvedaras, B. *Matricų teorija*. Kaunas, 1999, 362 p.
8. Lapinskas, A. *Matematikos Praktikumai su Mathcad*. Akademija, 2006, 35 p.
9. Rimas, J. *Operacinis skaičiavimas*. Kaunas, 2006, 65 p.
10. Stefano Bregni, C. *A Historical Perspective on Telecommunications Network Synchronization*. //IEEE Communications magazine, June 1998, p. 158-166.

1 Priedas. PEREINAMŪJŲ FUNKCIJŲ SKAIČIAVIMO PROGRAMOS TEKSTAS

$\kappa\tau := 0.5$

ORIGIN := 1

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1.5 & 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 1.5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L := \left(\frac{15}{\kappa\tau} \right) - 1$$

$t\kappa := 0,0.01..(L + 1) \cdot \kappa\tau$

$d := \text{floor}(L) \quad k := 0..d$

$P(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$

$$h(t\kappa, i, j) := \sum_{k=0}^d \left[\frac{(t\kappa - k\kappa\tau)^k \cdot e^{-(t\kappa - k\kappa\tau)} \cdot (B^k)_{i,j} \cdot (P(t\kappa - k\kappa\tau))}{3^k \cdot k!} \right]$$

2 Priedas. GENERATORIŲ VIRPESIŲ FAZIŲ SKIRTUMŲ SKAIČIAVIMO PROGRAMOS TEKSTAS

$f_{01\kappa} := 1999$

$f_{02\kappa} := 2000$

$f_{03\kappa} := 2001$

$f_{04\kappa} := 2002$

$\phi_{01} := 0.5$

$\phi_{02} := 0.5$

$\phi_{03} := 0.5$

$\phi_{04} := 0.5$

$\kappa\tau := 1$

$f_{234\kappa} := f_{02\kappa} + f_{03\kappa} + f_{04\kappa}$

$f_{123\kappa} := f_{01\kappa} + f_{02\kappa} + f_{03\kappa}$

$f_{13\kappa} := f_{01\kappa} + f_{03\kappa}$

$f_{24\kappa} := f_{02\kappa} + f_{04\kappa}$

$$\phi_{234} := \phi_{02} + \phi_{03} + \phi_{04}$$

$$\phi_{123} := \phi_{01} + \phi_{02} + \phi_{03}$$

$$\phi_{13} := \phi_{01} + \phi_{03}$$

$$\phi_{24} := \phi_{02} + \phi_{04}$$

$$L := \left(\frac{15}{\kappa\tau} \right) - 1$$

$$\kappa t := 0, 0.1 \dots (L+1) \cdot \kappa\tau$$

$$d := \text{floor}(L)$$

$$P(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\beta_1(k) := -2(-1)^k - 0.5005(-0.5)^k + 1.5(-1.5)^k$$

$$\beta_2(k) := 0.5005(-0.5)^k - 0.5(-1.5)^k$$

$$\beta_3(k) := 0.5(-1.5)^k + 0.5005(-0.5)^k$$

$$\beta_4(k) := 2(-1)^k - 0.5005(-0.5)^k - 1.5(-1.5)^k$$

$$\alpha_1(k) := \phi_{01} \cdot \beta_1(k) + \phi_{02} \cdot \beta_2(k) + \phi_{03} \cdot \beta_3(k) + \phi_{04} \cdot \beta_4(k)$$

$$\alpha_2(k) := f_{01\kappa} \cdot \beta_1(k) + f_{02\kappa} \cdot \beta_2(k) + f_{03\kappa} \cdot \beta_3(k) + f_{04\kappa} \cdot \beta_4(k)$$

$$\alpha_3(k) := \frac{f_{234\kappa} \cdot \beta_1(k)}{3} + \frac{f_{13\kappa} \cdot \beta_2(k)}{2} + \frac{f_{24\kappa} \cdot \beta_3(k)}{2} + \frac{f_{123\kappa} \cdot \beta_4(k)}{3}$$

$$\alpha_4(k) := \frac{\phi_{234} \cdot \beta_1(k)}{3} + \frac{\phi_{13} \cdot \beta_2(k)}{2} + \frac{\phi_{24} \cdot \beta_3(k)}{2} + \frac{\phi_{123} \cdot \beta_4(k)}{3}$$

$$S_1(\kappa t) := \sum_{k=1}^d \left[\frac{\alpha_1(k) (\kappa t - k \cdot \kappa\tau)^k}{3^k \cdot k!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa\tau)} \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

$$S_2(\kappa t) := \sum_{k=1}^d \left[\frac{\alpha_2(k) - \kappa\tau \alpha_3(k) + \alpha_4(k)}{3^k} \left[1 - \sum_{v=0}^k \left[\frac{(\kappa t - k \cdot \kappa\tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

$$S_3(\kappa t) := \sum_{k=1}^d \left[\frac{\alpha_3(k)}{3^k} \left[\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau - (k+1) + \sum_{v=0}^k \sum_{r=0}^v \left[\frac{(\kappa t - k \cdot \kappa\tau)^r}{r!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

$$S_4(\kappa t) := \sum_{k=1}^d \left[\frac{\alpha_4(k)}{3^k} \left[1 - \sum_{v=0}^k \left[\frac{(\kappa t - k \cdot \kappa\tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

$$S_{11}(\kappa t) := \sum_{k=0}^0 \left[\frac{(-\phi_{01} + \phi_{03}) (\kappa t - k \cdot \kappa\tau)^k}{3^k \cdot k!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa\tau)} \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

$$S_{21}(\kappa t) := \sum_{k=0}^0 \left[\frac{\left(-f_{01\kappa} + f_{03\kappa} - \kappa\tau \cdot \frac{-2f_{234\kappa} + 3f_{24\kappa}}{6} \right) - \frac{\phi_{234}}{3} + \frac{\phi_{24}}{2}}{3^k} \left[1 - \sum_{v=0}^k \left[\frac{(\kappa t - k \cdot \kappa\tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

$$S_{31}(\kappa t) := \sum_{k=0}^0 \left[\frac{-2f_{234\kappa} + 3f_{24\kappa}}{6} \left[\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau - (k+1) + \sum_{v=0}^k \sum_{r=0}^v \left[\frac{(\kappa t - k \cdot \kappa\tau)^r}{r!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa\tau)} \right] \right] \right] \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa\tau)$$

$$S_{41}(\kappa\tau) := \sum_{k=0}^0 \left[\frac{-2\phi_{234} + 3\phi_{24}}{3^k} \left[1 - \sum_{v=0}^k \left[\frac{(\kappa\tau - k\kappa\tau)^v}{v!} e^{-(\kappa\tau - k\kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k\kappa\tau) \right]$$

$$x_{31}(\kappa\tau) := S_1(\kappa\tau) + S_2(\kappa\tau) + S_3(\kappa\tau) - S_3(\kappa\tau - \kappa\tau) \cdot P(\kappa\tau - \kappa\tau) - S_4(\kappa\tau - \kappa\tau) \cdot P(\kappa\tau - \kappa\tau) +$$

$$+ S_{11}(\kappa\tau) + S_{21}(\kappa\tau) + S_{31}(\kappa\tau) - S_{31}(\kappa\tau - \kappa\tau) \cdot P(\kappa\tau - \kappa\tau) - S_{41}(\kappa\tau - \kappa\tau) \cdot P(\kappa\tau - \kappa\tau)$$

$$\beta_1(k) := -0.5005(-0.5)^k + (-1)^k - 1.5(-1.5)^k$$

$$\beta_2(k) := 0.5(-1.5)^k + 0.5005(-0.5)^k$$

$$\beta_3(k) := -0.5(-1.5)^k + 0.5005(-0.5)^k$$

$$\beta_4(k) := -(-1)^k - 0.5005(-0.5)^k + 1.5(-1.5)^k$$

$$S_1(\kappa\tau) := \sum_{k=1}^d \left[\frac{\alpha_1(k) (\kappa\tau - k\kappa\tau)^k}{3^k \cdot k!} e^{-(\kappa\tau - k\kappa\tau)} \cdot P(\kappa\tau - k\kappa\tau) \right]$$

$$S_2(\kappa\tau) := \sum_{k=1}^d \left[\frac{\alpha_2(k) - \kappa\tau \cdot \alpha_3(k) + \alpha_4(k)}{3^k} \left[1 - \sum_{v=0}^k \left[\frac{(\kappa\tau - k\kappa\tau)^v}{v!} e^{-(\kappa\tau - k\kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k\kappa\tau) \right]$$

$$S_3(\kappa\tau) := \sum_{k=1}^d \left[\frac{\alpha_3(k)}{3^k} \left[\kappa\tau - k\kappa\tau - (k+1) + \sum_{v=0}^k \sum_{r=0}^v \left[\frac{(\kappa\tau - k\kappa\tau)^r}{r!} e^{-(\kappa\tau - k\kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k\kappa\tau) \right]$$

$$S_4(\kappa\tau) := \sum_{k=1}^d \left[\frac{\alpha_4(k)}{3^k} \left[1 - \sum_{v=0}^k \left[\frac{(\kappa\tau - k\kappa\tau)^v}{v!} e^{-(\kappa\tau - k\kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k\kappa\tau) \right]$$

$$S_{11}(\kappa\tau) := \sum_{k=0}^0 \left[\frac{(-\phi_{01} + \phi_{02})(\kappa\tau - k\kappa\tau)^k}{3^k \cdot k!} e^{-(\kappa\tau - k\kappa\tau)} \cdot P(\kappa\tau - k\kappa\tau) \right]$$

$$S_{21}(\kappa\tau) := \sum_{k=0}^0 \left[\frac{\left(-f_{01\kappa} + f_{02\kappa} - \kappa\tau \cdot \frac{-2f_{234\kappa} + 3f_{13\kappa}}{6} \right) - \frac{\phi_{234}}{3} + \frac{\phi_{13}}{2}}{3^k} \left[1 - \sum_{v=0}^k \left[\frac{(\kappa\tau - k\kappa\tau)^v}{v!} e^{-(\kappa\tau - k\kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k\kappa\tau) \right]$$

$$S_{31}(\kappa\tau) := \sum_{k=0}^0 \left[\frac{-2f_{234\kappa} + 3f_{13\kappa}}{3^k} \left[\kappa\tau - k\kappa\tau - (k+1) + \sum_{v=0}^k \sum_{r=0}^v \left[\frac{(\kappa\tau - k\kappa\tau)^r}{r!} e^{-(\kappa\tau - k\kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k\kappa\tau) \right]$$

$$S_{41}(\kappa\tau) := \sum_{k=0}^0 \left[\frac{-2\phi_{234} + 3\phi_{13}}{3^k} \left[1 - \sum_{v=0}^k \left[\frac{(\kappa\tau - k\kappa\tau)^v}{v!} e^{-(\kappa\tau - k\kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k\kappa\tau) \right]$$

$$x_{21}(\kappa\tau) := S_1(\kappa\tau) + S_2(\kappa\tau) + S_3(\kappa\tau) - S_3(\kappa\tau - \kappa\tau) \cdot P(\kappa\tau - \kappa\tau) - S_4(\kappa\tau - \kappa\tau) \cdot P(\kappa\tau - \kappa\tau)$$

$$+ S_{11}(\kappa\tau) + S_{21}(\kappa\tau) + S_{31}(\kappa\tau) - S_{31}(\kappa\tau - \kappa\tau) \cdot P(\kappa\tau - \kappa\tau) - S_{41}(\kappa\tau - \kappa\tau) \cdot P(\kappa\tau - \kappa\tau)$$

$$\beta_1(k) := 3(-1.5)^k - 3(-1)^k$$

$$\beta_2(k) := -(-1.5)^k$$

$$\beta_3(k) := (-1.5)^k$$

$$\beta_4(k) := -3(-1.5)^k + 3(-1)^k$$

$$S_1(\kappa\tau) := \sum_{k=1}^d \left[\frac{\alpha_1(k) (\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)^k}{3^k \cdot k!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)} \cdot P(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

$$S_2(\kappa\tau) := \sum_{k=1}^d \left[\frac{\alpha_2(k) - \kappa\tau \cdot \alpha_3(k) + \alpha_4(k)}{3^k} \left[1 - \sum_{v=0}^k \left[\frac{(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

$$S_3(\kappa\tau) := \sum_{k=1}^d \left[\frac{\alpha_3(k)}{3^k} \left[\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau - (k+1) + \sum_{v=0}^k \sum_{r=0}^v \left[\frac{(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)^r}{r!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

$$S_4(\kappa\tau) := \sum_{k=1}^d \left[\frac{\alpha_4(k)}{3^k} \left[1 - \sum_{v=0}^k \left[\frac{(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

$$S_{11}(\kappa\tau) := \sum_{k=0}^0 \left[\frac{(-\phi_{02} + \phi_{03})(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)^k}{3^k \cdot k!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)} \cdot P(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

$$S_{21}(\kappa\tau) := \sum_{k=0}^0 \left[\frac{\left(-f_{02\kappa} + f_{03\kappa} - \kappa\tau \cdot \frac{-f_{13\kappa} + f_{24\kappa}}{2} \right) - \frac{\phi_{13}}{2} + \frac{\phi_{24}}{2}}{3^k} \left[1 - \sum_{v=0}^k \left[\frac{(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

$$S_{31}(\kappa\tau) := \sum_{k=0}^0 \left[\frac{-f_{13\kappa} + f_{24\kappa}}{3^k} \left[\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau - (k+1) + \sum_{v=0}^k \sum_{r=0}^v \left[\frac{(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)^r}{r!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

$$S_{41}(\kappa\tau) := \sum_{k=0}^0 \left[\frac{-\phi_{13} + \phi_{24}}{3^k} \left[1 - \sum_{v=0}^k \left[\frac{(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

$$x_{32}(\kappa\tau) := S_1(\kappa\tau) + S_2(\kappa\tau) + S_3(\kappa\tau) - S_3(\kappa\tau - \kappa\tau) \cdot P(\kappa\tau - \kappa\tau) - S_4(\kappa\tau - \kappa\tau) \cdot P(\kappa\tau - \kappa\tau) + S_{11}(\kappa\tau) + S_{21}(\kappa\tau) + S_{31}(\kappa\tau) - S_{31}(\kappa\tau - \kappa\tau)$$

$$\beta_1(k) := -1(-1)^k$$

$$\beta_2(k) := 0$$

$$\beta_3(k) := 0$$

$$\beta_4(k) := (-1)^k$$

$$S_1(\kappa\tau) := \sum_{k=1}^d \left[\frac{\alpha_1(k) (\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)^k}{3^k \cdot k!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)} \cdot P(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

$$S_2(\kappa\tau) := \sum_{k=1}^d \left[\frac{\alpha_2(k) - \kappa\tau \cdot \alpha_3(k) + \alpha_4(k)}{3^k} \left[1 - \sum_{v=0}^k \left[\frac{(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

$$S_3(\kappa\tau) := \sum_{k=1}^d \left[\frac{\alpha_3(k)}{3^k} \left[\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau - (k+1) + \sum_{v=0}^k \sum_{r=0}^v \left[\frac{(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)^r}{r!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

$$S_{41}(\kappa t) := \sum_{k=1}^d \left[\frac{\alpha_4(k)}{3^k} \left[1 - \sum_{v=0}^k \left[\frac{(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$S_{111}(\kappa t) := \sum_{k=0}^0 \left[\frac{(-\phi_{01} + \phi_{04})(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^k}{3^k \cdot k!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$S_{21}(\kappa t) := \sum_{k=0}^0 \left[\frac{\left(-f_{01\kappa} + f_{04\kappa} - \kappa \tau \cdot \frac{-f_{234\kappa} + f_{123\kappa}}{3} \right) - \frac{\phi_{234}}{3} + \frac{\phi_{123}}{3}}{3^k} \left[1 - \sum_{v=0}^k \left[\frac{(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$S_{211}(\kappa t) := \sum_{k=0}^0 \left[\frac{-f_{234\kappa} + f_{123\kappa}}{3^k} \left[\kappa \tau - k \cdot \kappa \tau - (k+1) + \sum_{v=0}^k \sum_{r=0}^v \left[\frac{(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^r}{r!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$S_{411}(\kappa t) := \sum_{k=0}^0 \left[\frac{-\phi_{234} + \phi_{123}}{3^k} \left[1 - \sum_{v=0}^k \left[\frac{(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$x_{41}(\kappa t) := S_1(\kappa t) + S_2(\kappa t) + S_3(\kappa t) - S_3(\kappa t - \kappa \tau) \cdot P(\kappa t - \kappa \tau) - S_4(\kappa t - \kappa \tau) \cdot P(\kappa t - \kappa \tau) +$$

$$+ S_{11}(\kappa t) + S_{21}(\kappa t) + S_{31}(\kappa t) - S_{31}(\kappa t - \kappa \tau) \cdot P(\kappa t - \kappa \tau) - S_{41}(\kappa t - \kappa \tau) \cdot P(\kappa t - \kappa \tau)$$

$$\beta_1(k) := -2(-1)^k + 1.5(-1.5)^k + 0.5005(-0.5)^k$$

$$\beta_2(k) := -0.5005(-0.5)^k - 0.5(-1.5)^k$$

$$\beta_3(k) := -0.5005(-0.5)^k + 0.5(-1.5)^k$$

$$\beta_4(k) := 0.5005(-0.5)^k + 2(-1)^k - 1.5(-1.5)^k$$

$$S_{11}(\kappa t) := \sum_{k=1}^d \left[\frac{\alpha_1(k) (\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^k}{3^k \cdot k!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$S_2(\kappa t) := \sum_{k=1}^d \left[\frac{\alpha_2(k) - \kappa \tau \cdot \alpha_3(k) + \alpha_4(k)}{3^k} \left[1 - \sum_{v=0}^k \left[\frac{(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$S_{21}(\kappa t) := \sum_{k=1}^d \left[\frac{\alpha_3(k)}{3^k} \left[\kappa \tau - k \cdot \kappa \tau - (k+1) + \sum_{v=0}^k \sum_{r=0}^v \left[\frac{(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^r}{r!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$S_{41}(\kappa t) := \sum_{k=1}^d \left[\frac{\alpha_4(k)}{3^k} \left[1 - \sum_{v=0}^k \left[\frac{(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$S_{111}(\kappa t) := \sum_{k=0}^0 \left[\frac{(-\phi_{02} + \phi_{04})(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^k}{3^k \cdot k!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right]$$

$$\begin{aligned}
S_{21}(\kappa\tau) &:= \sum_{k=0}^0 \left[\frac{\left(-f_{02\kappa} + f_{04\kappa} - \kappa\tau \cdot \frac{-3f_{13\kappa} + 2f_{123\kappa}}{6} \right) - \frac{\phi_{13}}{2} + \frac{\phi_{123}}{3}}{3^k} \left[1 - \sum_{v=0}^k \left[\frac{(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau) \right] \\
S_{21}(\kappa\tau) &:= \sum_{k=0}^0 \left[\frac{-3f_{13\kappa} + 2f_{123\kappa}}{3^k} \left[\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau - (k+1) + \sum_{v=0}^k \sum_{r=0}^v \left[\frac{(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)^r}{r!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau) \right] \\
S_{41}(\kappa\tau) &:= \sum_{k=0}^0 \left[\frac{-3\phi_{13} + 2\phi_{123}}{3^k} \left[1 - \sum_{v=0}^k \left[\frac{(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{42}(\kappa\tau) &:= S_1(\kappa\tau) + S_2(\kappa\tau) + S_3(\kappa\tau) - S_3(\kappa\tau - \kappa\tau) \cdot P(\kappa\tau - \kappa\tau) - S_4(\kappa\tau - \kappa\tau) \cdot P(\kappa\tau - \kappa\tau) + \\
&\quad + S_{11}(\kappa\tau) + S_{21}(\kappa\tau) + S_{31}(\kappa\tau) - S_{31}(\kappa\tau - \kappa\tau) \cdot P(\kappa\tau - \kappa\tau) - S_{41}(\kappa\tau - \kappa\tau) \cdot P(\kappa\tau - \kappa\tau)
\end{aligned}$$

$$\beta_1(k) := (-1)^k - 1.5(-1.5)^k + 0.5005(-0.5)^k$$

$$\beta_2(k) := -0.5005(-0.5)^k + 0.5(-1.5)^k$$

$$\beta_3(k) := -0.5005(-0.5)^k - 0.5(-1.5)^k$$

$$\beta_4(k) := -1(-1)^k + 1.5(-1.5)^k + 0.5005(-0.5)^k$$

$$S_{11}(\kappa\tau) := \sum_{k=1}^d \left[\frac{\alpha_1(k) (\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)^k}{3^k \cdot k!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)} \cdot P(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

$$S_{21}(\kappa\tau) := \sum_{k=1}^d \left[\frac{\alpha_2(k) - \kappa\tau \cdot \alpha_3(k) + \alpha_4(k)}{3^k} \left[1 - \sum_{v=0}^k \left[\frac{(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

$$S_{21}(\kappa\tau) := \sum_{k=1}^d \left[\frac{\alpha_3(k)}{3^k} \left[\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau - (k+1) + \sum_{v=0}^k \sum_{r=0}^v \left[\frac{(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)^r}{r!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

$$S_{41}(\kappa\tau) := \sum_{k=1}^d \left[\frac{\alpha_4(k)}{3^k} \left[1 - \sum_{v=0}^k \left[\frac{(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

$$S_{11}(\kappa\tau) := \sum_{k=0}^0 \left[\frac{(-\phi_{03} + \phi_{04})(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)^k}{3^k \cdot k!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)} \cdot P(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

$$S_{21}(\kappa\tau) := \sum_{k=0}^0 \left[\frac{\left(-f_{03\kappa} + f_{04\kappa} - \kappa\tau \cdot \frac{-3f_{24\kappa} + 2f_{123\kappa}}{6} \right) - \frac{\phi_{24}}{2} + \frac{\phi_{123}}{3}}{3^k} \left[1 - \sum_{v=0}^k \left[\frac{(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

$$S_{21}(\kappa\tau) := \sum_{k=0}^0 \left[\frac{-3f_{24\kappa} + 2f_{123\kappa}}{3^k} \left[\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau - (k+1) + \sum_{v=0}^k \sum_{r=0}^v \left[\frac{(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)^r}{r!} \cdot e^{-(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau)} \right] \right] \cdot P(\kappa\tau - k \cdot \kappa\tau) \right]$$

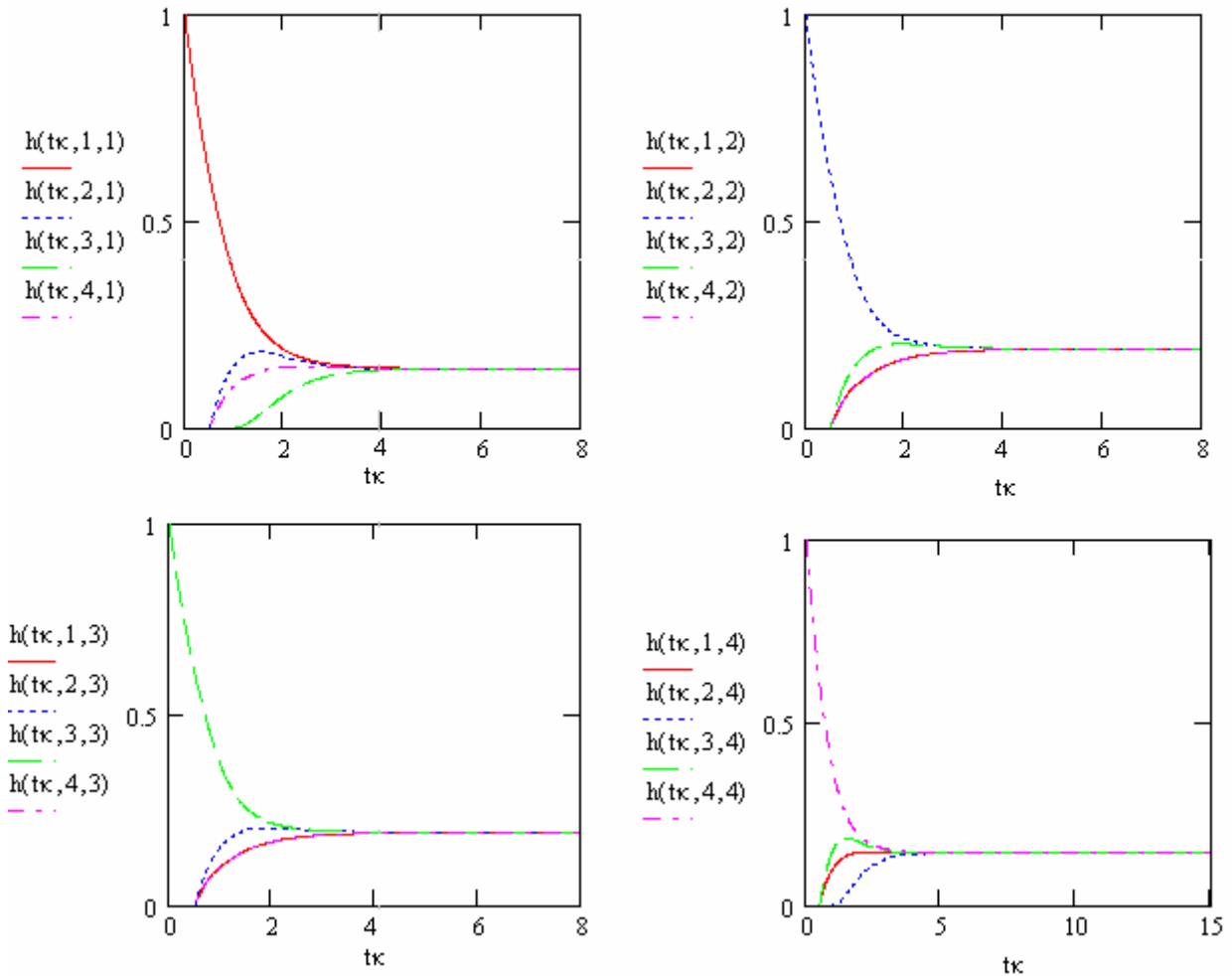
$$S_{41}(\kappa t) := \sum_{k=0}^0 \left[\frac{-3\phi_{24} + 2\phi_{123}}{6} \cdot \frac{1}{3^k} \left[1 - \sum_{v=0}^k \left[\frac{(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)^v}{v!} \cdot e^{-(\kappa t - k \cdot \kappa \tau)} \right] \cdot P(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) \right] \right]$$

$$x_{43}(\kappa t) := S_1(\kappa t) + S_2(\kappa t) + S_3(\kappa t) - S_3(\kappa t - \kappa \tau) \cdot P(\kappa t - \kappa \tau) - S_4(\kappa t - \kappa \tau) \cdot P(\kappa t - \kappa \tau) +$$

$$+ S_{11}(\kappa t) + S_{21}(\kappa t) + S_{31}(\kappa t) - S_{31}(\kappa t - \kappa \tau) \cdot P(\kappa t - \kappa \tau) - S_{41}(\kappa t - \kappa \tau) \cdot P(\kappa t - \kappa \tau)$$

3 Priedas. PEREINAMŲJŲ FUNKCIJŲ GRAFIKAI

Pereinamųjų funkcijų grafikai prie skirtingų $\kappa\tau$ reikšmių.

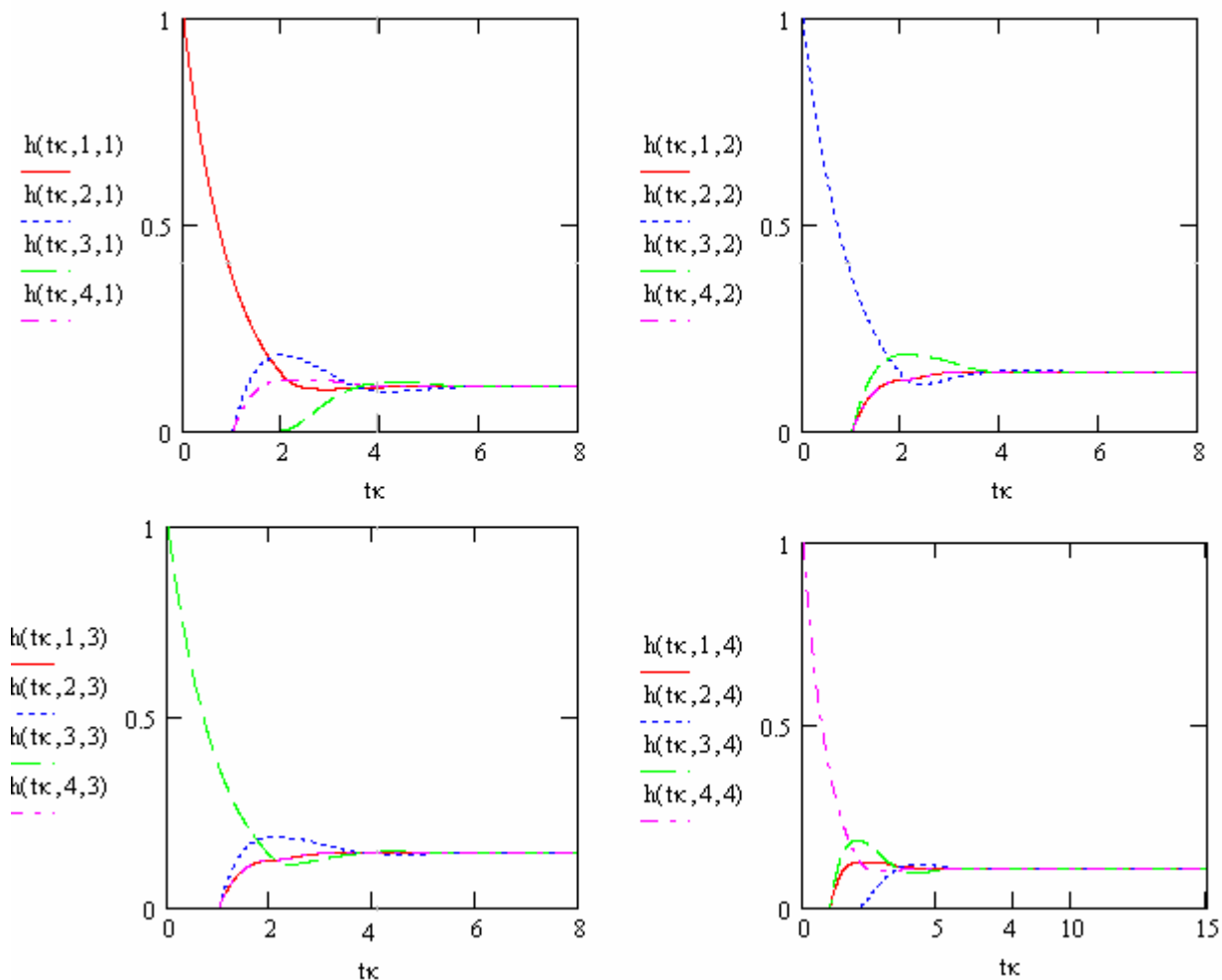


1. pav. Pereinamųjų funkcijų grafikai, kai $\kappa\tau = 0.5$

Ribinės reikšmės, kai $\kappa\tau = 0.5$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_{i1}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} h_{i4}(t) = \frac{3}{14(0.5 + 1)} = 0.143,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_{i2}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} h_{i3}(t) = \frac{2}{7(0.5 + 1)} = 0.19, \quad i = \overline{1, 4}.$$



2 pav. Pereinamųjų funkcijų grafikai, kai $\kappa\tau = 1$

Ribinės reikšmės, kai $\kappa\tau = 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_{i1}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} h_{i4}(t) = \frac{3}{14(1+1)} = 0.107,$$

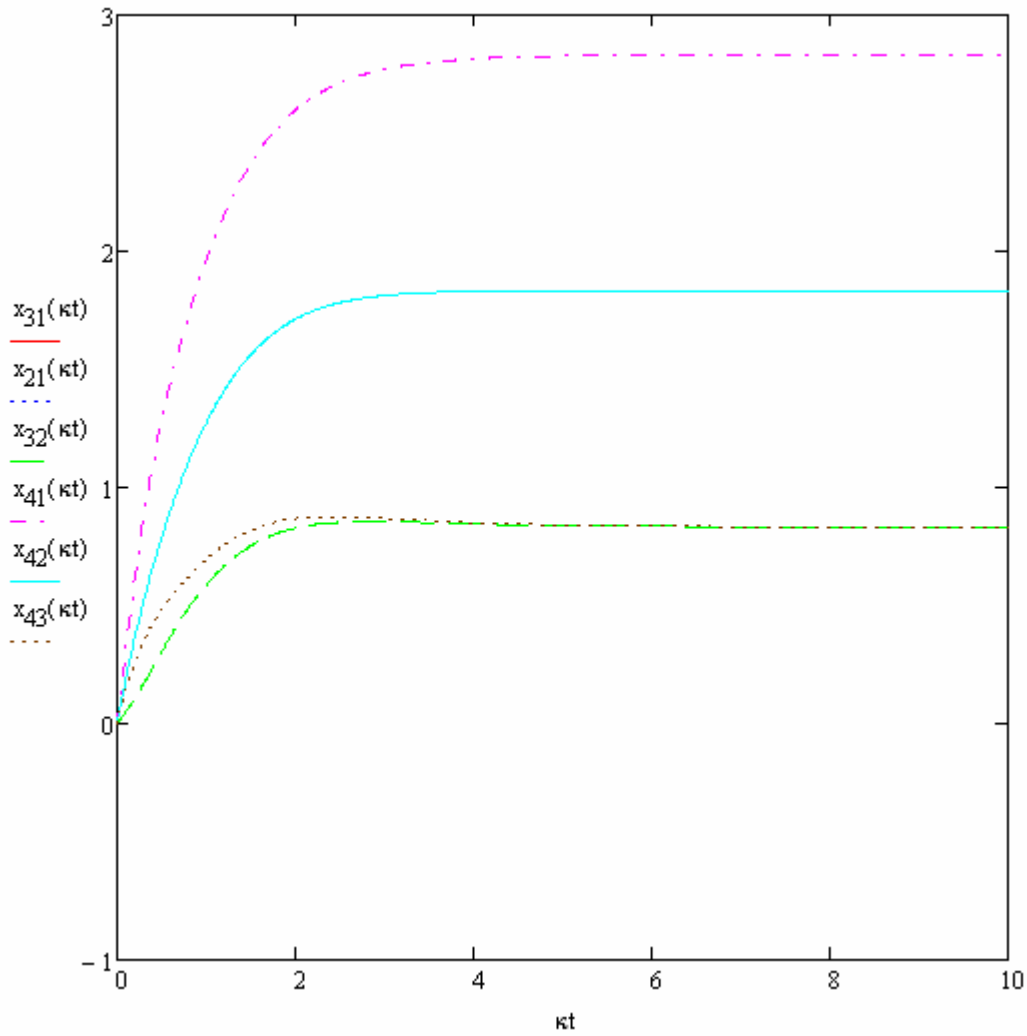
$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_{i2}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} h_{i3}(t) = \frac{2}{7(1+1)} = 0.143, \quad i = \overline{1,4}.$$

4 Priedas. FAZIŲ SKIRTUMŲ $X_j(T) - X_i(T)$ GRAFIKAI

Skaičiuota, 3. a pav., kai $\frac{f_{01}}{\kappa} = 1999$, $\frac{f_{02}}{\kappa} = 2000$, $\frac{f_{03}}{\kappa} = 2001$, $\frac{f_{04}}{\kappa} = 2002$,

$\kappa\tau = 0.5$, $\varphi_{01} = 0.5$, $i = \overline{1,4}$.

3. b pav., kai $\frac{f_{01}}{\kappa} = 1999$, $\frac{f_{02}}{\kappa} = 2000$, $\frac{f_{03}}{\kappa} = 2001$, $\frac{f_{04}}{\kappa} = 2002$, $\varphi_{01} = 0.8$, $\kappa\tau = 1$, $i = \overline{1,4}$.



a)

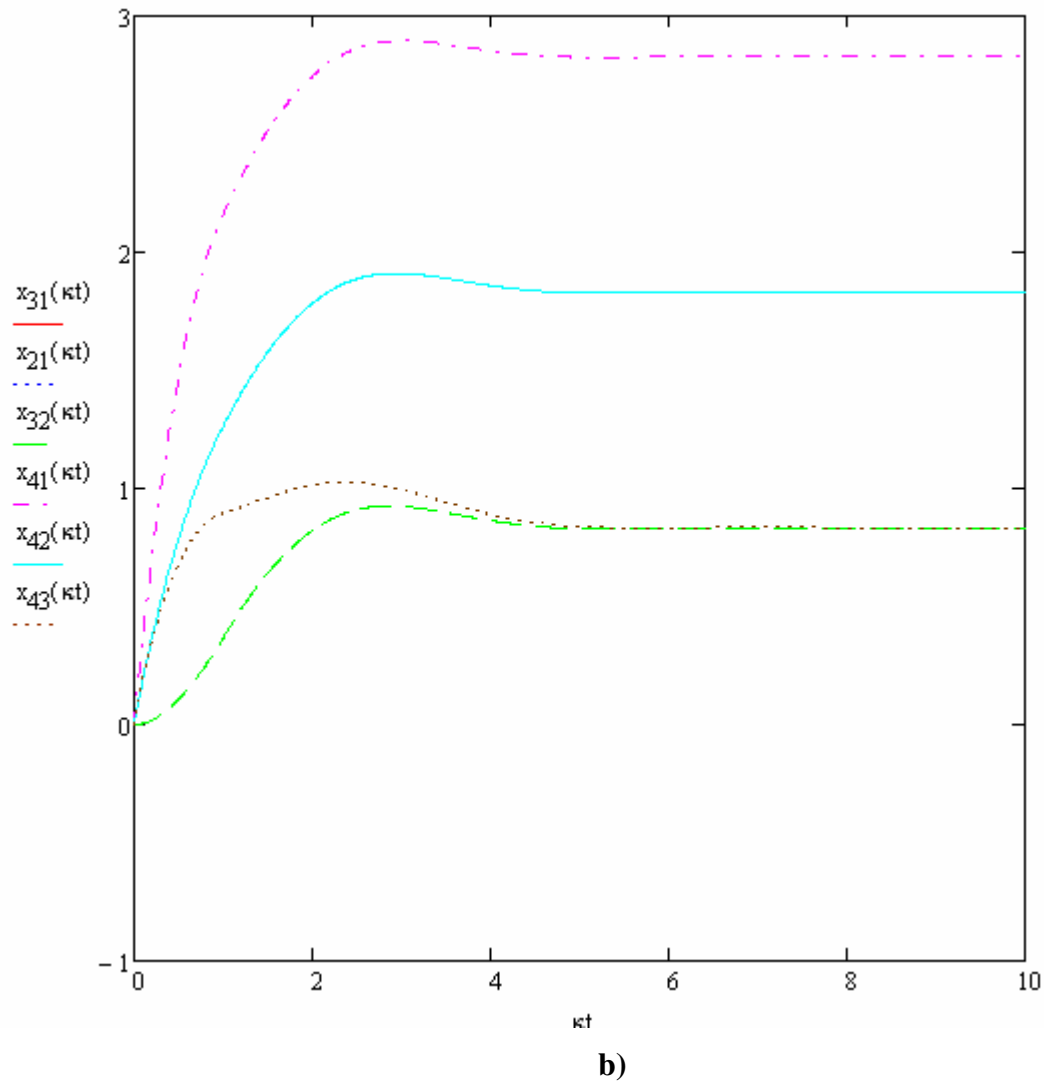
Generatorių virpesių fazių ribinės reikšmės, kai $\frac{f_{01}}{\kappa} = 1999$, $\frac{f_{02}}{\kappa} = 2000$, $\frac{f_{03}}{\kappa} = 2001$, $\frac{f_{04}}{\kappa} = 2002$,

$\kappa\tau = 0.5$, $\varphi_{0i} = 0.5$, $i = \overline{1,4}$.

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_2(p) - X_1(p)) = 0.833, \quad \lim_{p \rightarrow 0} p(X_3 - X_1) = 1.833,$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_3(p) - X_2(p)) = 0.833, \quad \lim_{p \rightarrow 0} p(X_4(p) - X_1(p)) = 2.833,$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_4(p) - X_2(p)) = 1.833, \quad \lim_{p \rightarrow 0} p(X_4(p) - X_3(p)) = 0.833.$$



3 pav. Fazių skirtumų grafikai

Generatorių virpesių fazių ribinės reikšmės, kai $\frac{f_{01}}{\kappa} = 1999$, $\frac{f_{02}}{\kappa} = 2000$, $\frac{f_{03}}{\kappa} = 2001$, $\frac{f_{04}}{\kappa} = 2002$,

$$\varphi_{0i} = 0.8, \quad \kappa\tau = 1, \quad i = \overline{1,4}.$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_2(p) - X_1(p)) = 0.830, \quad \lim_{p \rightarrow 0} p(X_3 - X_1) = 1.832,$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_3(p) - X_2(p)) = 0.830, \quad \lim_{p \rightarrow 0} p(X_4(p) - X_1(p)) = 2.833,$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_4(p) - X_2(p)) = 1.832, \quad \lim_{p \rightarrow 0} p(X_4(p) - X_3(p)) = 0.830.$$