



**KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA**

Erika Klimavičiūtė

**TARPUSAVIO SINCHRONIZACIJOS
SISTEMOS MATEMATINIO MODELIO
SUDARYMAS IR TYRIMAS**

Magistro darbas

**Vadovas
prof. dr. J.Rimas**

KAUNAS, 2006



KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

TVIRTINU
Katedros vedėjas
prof. dr. J.Rimas

2006-06-06

TARPUSAVIO SINCHRONIZACIJOS
SISTEMOS MATEMATINIO MODELIO
SUDARYMAS IR TYRIMAS

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

Kalbos konsultantas
dr. J. Džežulskienė
2006-05-30

Recenzentas
dr. V.Vaitkus
2006-06-01

Vadovas
prof. dr. J. Rimas
2006-06-03

Atliko
FMMM-4 gr. stud.
E. Klimavičiūtė
2006-05-25

KAUNAS, 2006

KVALIFIKCINĖ KOMISIJA

Pirmininkas: Leonas Saulis, profesorius (VGTU)

Sekretorius: Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)

Nariai: Algimantas Jonas Aksomaitis, profesorius (KTU)

Vytautas Janilionis, docentas (KTU)

Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU)

Rimantas Rudzkis, profesorius (MII)

Zenonas Navickas, profesorius (KTU)

Arūnas Barauskas, UAB „Elsis“ generalinio direktoriaus pavaduotojas

Klimavičiūtė E. development and analysis of the mutual synchronization system: Master's work in applied mathematics / supervisor prof. dr. J. Rimas; Department of Applied mathematics, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2006. – 60p.

SUMMARY

There are numerous methodologies available in solving the problem in synchronizing timing oscillators of the communication networks: pleziosynchronization, forced synchronization or mutual synchronization. In the presented work the mutual synchronization system composed of four oscillators is analyzed. The mathematical model of the synchronization system is matrix differential equation with delayed argument. Applying the method of “steps” and Laplace transform we find the solution of the matrix differential equation and the step responses matrix of the synchronization system. Exact analytical and graphical expressions of transition functions and exact expressions of the phase differences between signals of oscillators of this synchronization system are obtained.

TURINYS

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS	6
ĮVADAS.....	7
1 BENDROJI DALIS	8
1.1 RYŠIO TINKLO SINCHRONIZACIJA	8
1.2 APIBENDRINTOS FUNKCIJOS	9
1.2.1 APIBENDRINTOS FUNKCIJOS SĄVOKA	9
1.2.2 VEIKSMAI SU APIBENDRITOMIS FUNKCIJOMIS	10
1.2.3 VIENETINĖ HEVISAIDO IR DIRAKO DELTA FUNKCIJOS	11
1.3 LAPLASO TRANSFORMACIJA.....	13
1.3.1 PIRMAVAIZDŽIO IR VAIZDO SĄVOKOS	13
1.3.2 LAPLASO TRANSFORMACIJOS SAVYBĖS	15
2 TIRIAMOJI DALIS.....	17
2.1 SINCHRONIZACIJOS SISTEMOS MATEMATINIO MODELIO SUDARYMAS	18
2.2 MATRICINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTIES SPRENDIMAS.....	20
2.3 MATRICOS B , PAKELTOS K -UOJU LAIPSNIU, RADIMAS	26
2.3.1 MATRICOS B TIKRINĖS REIKŠMĖS IR ŽORDANO FORMA	26
2.3.2 MATRICOS B TIKRINIAI VEKTORIAI IR TRANSFORMUOJANČIOJI MATRICA ..	27
2.3.3 MATRICOS B^k TIKSLI ANALIZINĖ IŠRAIŠKA.....	30
2.4 SINCHRONIZACIJOS SISTEMOS PEREINAMŪJŲ PROCESŲ TYRIMAS	31
2.4.1 SISTEMOS PEREINAMOSIOS FUNKCIJOS	31
2.4.2 PEREINAMŪJŲ FUNKCIJŲ RIBINIŲ REIKŠMIŲ SKAIČIAVIMAS	32
2.4.3 PEREINAMŪJŲ FUNKCIJŲ TYRIMAS.....	34
2.5 SISTEMOS GENERATORIŲ VIRPESIŲ FAZIŲ SKIRTUMAI	37
2.5.1 GENERATORIŲ VIRPESIŲ FAZIŲ SKIRTUMŲ ANALIZINIŲ IŠRAIŠKŲ IŠVEDIMAS	37
2.5.2 GENERATORIŲ VIRPESIŲ FAZIŲ SKIRTUMŲ RIBINIŲ REIKŠMIŲ SKAIČIAVIMAS	39
2.5.3 GENERATORIŲ VIRPESIŲ FAZIŲ SKIRTUMŲ TYRIMAS	45
3 PROGRAMINĖ REALIZACIJA	47
IŠVADOS	48
LITERATŪRA	49
1 PRIEDAS. $Z(p)$ RADIMAS	50
2 PRIEDAS. PIRMAVAIZDŽIŲ IŠRAIŠKOS	53
3 PRIEDAS. RIBOS $\lim_{p \rightarrow 0} p(Z_i(p))$ SKAIČIAVIMAS	54
4 PRIEDAS. PEREINAMŪJŲ FUNKCIJŲ $h_{ij}(t)$ GRAFIKAI IR PROGRAMOS TEKSTAS .	56
5 PRIEDAS. GENERATORIŲ VIRPESIŲ FAZIŲ SKIRTUMŲ $x_i(t) - x_j(t)$ GRAFIKAI IR PROGRAMOS TEKSTAS.....	58

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

1.1.1 pav. Ryšio tinklo sinchronizacijos metodai	8
1.2.3.1 pav. Hevisaido vienetinė funkcija	11
1.2.3.2 pav. Funkcijos $\delta_h(t)$ grafikas	12
1.3.1.1 pav. Vėluojanti vienetinė funkcija.....	14
1.3.1.2 pav. Vėluojanti funkcija.....	14
2.1 pav. Sinchronizacijos sistemos schema	17
2.1.1 pav. Sinchronizacijos sistemos struktūrinė schema.....	18
2.4.3.1 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{ij}(t)$ grafikai.....	35
2.5.3.1 pav. Generatorių virpesių fazių skirtumų $x_i(t) - x_j(t)$ grafikai	46
4.1 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{ij}(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 3$	57
4.2 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{ij}(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 0.25$	57
5.1 pav. Generatorių virpesių fazių skirtumų $x_i(t) - x_j(t)$ grafikai	60

IVADAS

Darbe nagrinėjama ryšio tinklo sinchronizacijos sistema, sudaryta iš keturių tarpusavyje sinchronizuotų generatorių.

Darbo tikslas – pagal duotą sinchronizacijos sistemą sudaryti matematinį modelį, rasti sistemos pereinamųjų funkcijų analizes išraiškas ir ištirti pereinamuosius procesus.

Nagrinėjamai sistemai sudarytas matematinis modelis – matricinė diferencialinė lygtis su vėluojančiu parametru. Ši lygtis sprendžiama „žingsnių“ metodu. Tam tikslui intervalą $0 \leq t < +\infty$ dalijame į τ ilgio dalinius intervalus. Kiekviename intervale $k\tau \leq t < (k+1)\tau$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) lygtis sprendžiama atskirai, kaip paprasta matricinė diferencialinė lygtis be vėluojančio argumento. Sprendinys, gautas k – tajame intervale, yra pradinė sąlyga (t.y. pradinė funkcija) sprendžiant lygtį $(k+1)$ – jame intervale ($k = 0, 1, 2, \dots$). Ieškodami sprendinio kiekviename intervale, naudojame Laplaso transformaciją. Remdamiesi surastu sprendiniu, gauname sinchronizacijos sistemos pereinamųjų funkcijų ir generatorių virpesių fazių skirtumų tikslias analizes išraiškas. Ši sistema sprendžiama naudojant Laplaso transformaciją.

Naudodajant surastus sprendinius, gaunamos sinchronizacijos sistemos pereinamųjų funkcijų bei generatorių virpesių fazių skirtumų analizes išraiškos.

1 BENDROJI DALIS

1.1 RYŠIO TINKLO SINCHRONIZACIJA

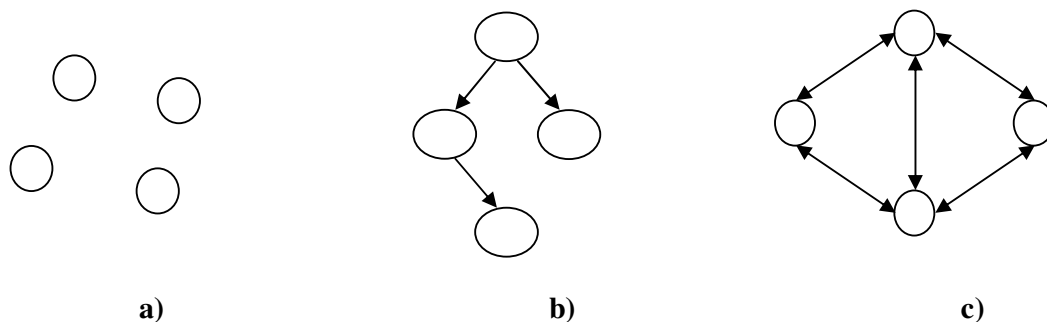
Darbe yra nagrinėjama skaitmeninio ryšio tinklo sinchronizacijos sistema. Sinchronizacija – tai kelių vienodų arba atitinkamų procesų suderinimas, kad jie vyktų vienu metu arba jų vyksmo periodai skirtųsi tam tikru laiko intervalu.

Skaitmeninių ryšio tinklų perdavimo stotys yra sujungtos ryšio linijomis. Perduodamos informacijos greitis priklauso nuo perduodančios stoties taktinio generatoriaus dažnio. Kai dviejų sujungtų stočių generatorių dažniai skiriasi, gali būti prarandama arba dubliuojama perduodama informacija. Tokiems nuostoliams išvengti sinchronizuojami ryšio tinklo taktiniai generatoriai. Ryšio tinklo taktinių generatorių sinchronizavimui plačiausiai naudojami metodai:

✓ Pleziosinchronizacija (2.1 pav. a)). Tai pats paprasčiausias metodas, kai naudojami stabilūs vienas su kitu nesusiję taktiniai generatoriai. Ateinančių į komutacijos mazgą signalų taktiniai dažniai skiriasi nuo komutacijos mazge esančio taktinio generatoriaus dažnio, todėl naudojant šį metodą ryšio tinkle gali būti perduodamos informacijos nuostoliai .

✓ Priverstinė sinchronizacija (2.1 pav. b)). Šis metodas remiasi vieno pagrindinio generatoriaus naudojimu.

✓ Tarpusavio sinchronizacija (2.1 pav. c)). Tai dvipusė tarpusavyje sujungtų taktinių generatorių sinchronizacija. Kiekvienas iš sujungtų generatorių turi įtakos kitų generatorių dažniam.



1.1.1 pav. Ryšio tinklo sinchronizacijos metodai

1.2 APIBENDRINTOS FUNKCIJOS

1.2.1 APIBENDRINTOS FUNKCIJOS SĄVOKA

Apibendrintos funkcijos taikomos sprendžiant matematinės fizikos, kvantinės mechanikos bei elektrotechnikos uždavinius, kuriems išspręsti reikalingos trūkiosios funkcijos, nusakančios taškines mases, taškinius laukų šaltinius, momentinius impulsus ir pan.

Norint apibrėžti apibendrintąsias funkcijas, pirmiausia reikia susipažinti su pagrindinės ir finičiosios funkcijų bei tiesinio tolydaus funkcionalo sąvokomis.

Pagrindine funkcija vadinama be galo daug kartų diferencijuojama realaus kintamojo x funkcija $\varphi(x)$, kurios reikšmė lygi nuliui tam tikro baigtinio intervalo $K \subset \mathbb{R}$ išorėje. Baigtinis intervalas K vadinamas šios funkcijos atrama. Intervalai K kiekvienai pagrindinei funkcijai gali būti skirtingi [1].

Kai $\varphi(x) \in D$, tai pagrindinė funkcija $\varphi(x)$ vadinama finičiaja (čia D – be galo daug kartų diferencijuojamų funkcijų $\varphi(x)$, turinčių apribotas atramas K , erdvė).

Tegu U ir V yra tiesinės erdvės. Atvaizdis $f : U \rightarrow V$ vadinamas tiesiniu operatoriumi, jei atitinka lygybę:

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2), \forall x_1, x_2 \in U, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Tiesinis operatorius $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, priskiriantis tik skaitines reikšmes, vadinamas tiesiniu funkcionalu. Tiesinis funkcionalas f yra tolydus taške $\varphi \in U$, jei bet kuriai sekai $(\varphi_n) \in U$, konverguojančiai į φ , galioja sąlyga:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\varphi_n) = f(\varphi).$$

Tiesinis funkcionalas yra tolydus erdvėje U , jei jis tolydus kiekviename taške $\varphi \in U$.

Apibendrintąja funkcija vadinamas bet koks tiesinis tolydus funkcionalas f , kurio apibrėžimo sritis finičių funkcijų erdvė D . Apibendrintoji funkcija užrašoma taip:

$$f(\varphi) = (f, \varphi), \quad \varphi \in D.$$

Funkcionalas f , žymintis apibendrintąją funkciją, pasižymi tokiomis savybėmis:

1. tiesiškumo:

$$(f, \alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2) = \alpha (f, \varphi_1) + \beta (f, \varphi_2) = \alpha f(\varphi_1) + \beta f(\varphi_2), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \varphi_1, \varphi_2 \in D;$$

2. tolydumo:

$$\text{Jei } \varphi_n \rightarrow \varphi, \text{ kai } \varphi \in D, \text{ tai } \lim_{n \rightarrow \infty} (f, \varphi_n) = (f, \varphi).$$

Apibendrintoji funkcija vadinama reguliariaja, jei ji atitinka lygybę:

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in D.$$

Kai ši lygybė negalioja, funkcija f vadinama singuliarąja. Viena iš paprasčiausių ir svarbiausių apibendrintų funkcijų yra Dirako delta funkcija δ . Ji yra apibrėžiama formule:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \varphi \in D.$$

Apibendrintosios funkcijos f atrama vadinama visų atvirųjų aibių, kuriose funkcija f lygi nuliui, sąjungos papildinys. Apibendrintosios funkcijos f atramą žymėsime simboliu $\text{supp } f$.

Iš apibrėžimo išplaukia šios išvados:

1. bet kurioje srityje, kuri nesikerta su atrama $\text{supp } f$, apibendrintoji funkcija f lygi nuliui, t.y.:

$$\langle f, \varphi \rangle = 0, \quad \varphi \in D, \quad \text{supp } f \cap \text{supp } \varphi = \emptyset,$$

2. apibendrintosios funkcijos atrama yra aibė tų ir tik tų taškų, kurių jokioje aplinkoje apibendrintoji funkcija f nėra lygi nuliui.

Pavyzdžiui, Delta funkcijos δ atrama yra taškas 0.

1.2.2 VEIKSMAI SU APIBENDRITOMIS FUNKCIJOMIS

1. Dvi apibendrintosios funkcijos f_1 ir f_2 vadinamos lygiomis, jei jų funkcionalai sutampa su kiekviena pagrindinės funkcijos reikšme, t.y.

$$(f_1 = f_2) \Leftrightarrow (f_1, \varphi) = (f_2, \varphi), \quad \forall \varphi \in D.$$

2. $(\alpha(x)f, \varphi) = (f, \alpha(x)\varphi)$, $\forall \varphi \in D$; jei $\alpha(x) = \alpha = \text{const}$, tai $(\alpha f, \varphi) = \alpha(f, \varphi)$

$\forall \varphi \in D$.

3. Apibrėšime apibendrintosios funkcijos išvestinę. Tegu f diferencijuojama funkcija. Tada $\forall \varphi \in D$ galioja:

$$(f'(x), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = f(x)\varphi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx.$$

Kadangi pirmasis narys, esantis dešinėje lygybės pusėje, visoms finičiosioms funkcijoms $\varphi \in D$ lygus nuliui, tai

$$(f'(x), \varphi(x)) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -(f(x), \varphi'(x)).$$

Pažymėkime:

$$(f', \varphi) = (f'(x), \varphi(x)),$$

$$-(f, \varphi') = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx.$$

Tada apibendrintosios funkcijos išvestinė užrašoma taip:

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi'), \quad \forall \varphi \in D.$$

Analogiškai gauname k-osios eilės apibendrintosios funkcijos išvestinę:

$$(f^{(k)}, \varphi) = (-1)^k (f, \varphi^{(k)}), \quad \forall \varphi \in D, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Apibendrintąją išvestinę žymėsime simboliu D , kad atskirtume nuo klasikinės išvestinės.

k-tosios eilės apibendrintosios funkcijos išvestinę užrašysime taip:

$$(D^k f, \varphi) = (-1)^k (f, \varphi^{(k)}), \quad \forall \varphi \in D, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

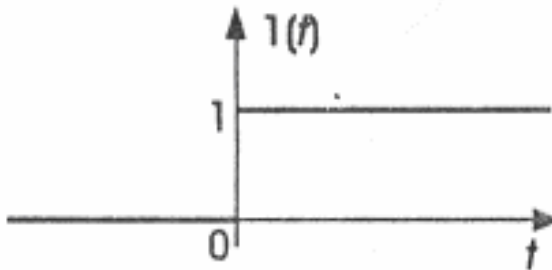
Iš pastarosios lygybės mes matome, kad apibendrintoji funkcija turi bet kurios eilės apibendrintąją išvestinę.

1.2.3 VIENETINĖ HEVISAIDO IR DIRAKO DELTA FUNKCIJOS

Funkciją

$$f(t) = 1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

vadiname Hevisaido vienetine funkcija (1.2.3.1 pav.) [5].



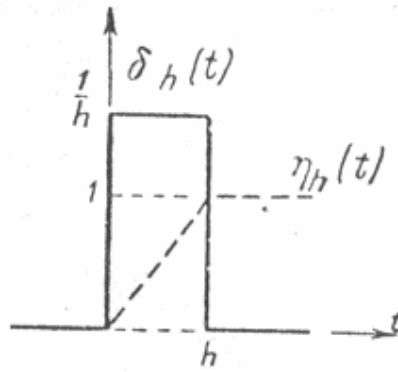
1.2.3.1 pav. Hevisaido vienetinė funkcija

Dirako delta funkcijos taikomos uždaviniuose, kuriuose susiduriame su dydžiais, apibūdinančiais momentinius postūmius.

Panagrinėkime funkciją $\delta_h(t)$:

$$\delta_h = \begin{cases} 0, & t < 0, t > h, \\ \frac{1}{h}, & 0 < t < h, \end{cases}$$

kuriuos grafikas pavaizduotas 1.2.3.2 paveiksle.



1.2.3.2 pav. Funkcijos $\delta_h(t)$ grafikas

Ši funkcija atkarpoje $(0, h)$ turi pastovią reikšmę $\frac{1}{h}$, o impulso plotas yra lygus vienetui [2], t.y.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_h(t) dt = \int_0^h \frac{1}{h} dt = 1. \quad (1.2.3.1)$$

Tarkim, kad $h \rightarrow 0$. Akivaizdu, kad funkcijų $\delta_h(t)$ šeima diverguoja. Įveskime funkciją $\delta(t)$, kuri yra funkcijų $\delta_h(t)$ šeimos riba:

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta_h(t).$$

Šią funkciją vadinsime nulinės eilės impulsine funkcija. $\delta(t)$ lygi nuliui visuose taškuose, išskyrus tašką $t = 0$, kuriame $\delta(t) = \infty$. Be to,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

δ -funkcijos vaizdas gali būti gaunamas iš funkcijos $\delta_h(t) = \frac{1}{h} [1(t) - 1(t-h)]$ vaizdo. Pritaikius vėlavimo teoremą turime:

$$\delta_h(t) \div \frac{1 - e^{-ph}}{ph}.$$

Perėję prie ribos, kai $h \rightarrow 0$, gauname

$$\delta(t) \div \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-ph}}{ph} = 1. \quad (1.2.3.2)$$

δ -funkcijai galioja pagrindinės Laplaso transformacijos savybės. Pavyzdžiui, vėlavimo teorema:

$$\delta(t - \tau) \div e^{-p\tau},$$

vaizdų sandaugos teorema:

$$1 \cdot F(p) \div \int_0^t f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = f(t).$$

Fizikine prasme delta funkcija gali būti suprantama kaip vienetinio krūvio, esančio koordinatų pradžioje, tankis. Jei krūvio dydis m , tai jo tankis $\rho(x) = m\delta(x)$.

1.3 LAPLASO TRANSFORMACIJA

1.3.1 PIRMAVAIZDŽIO IR VAIZDO SĄVOKOS

Realaus kintamojo t kompleksinę funkciją $f(t)$ vadiname pirmavaizdžiu, kai

1. funkcija $f(t)$ intervale $0 \leq t < \infty$ yra tolydi arba turi tiksliai pirmojo tipo trūkio taškus, kurių skaičius bet kuriame baigtiniame intervale yra baigtinis;
2. $f(t) = 0$, kai $t < 0$;
3. didėjant t , funkcijos $f(t)$ modulis didėja ne greičiau, kaip eksponentinė funkcija, t.y. egzistuoja tokie skaičiai $M > 0$ ir $\sigma > 0$, su kuriais

$$|f(t)| \leq Me^{\sigma t}, \tag{1.3.1.1}$$

kai $t < 0$.

Tikslus apatinis visų skaičių σ , kuriems teisinga (1.3.1.1) nelygybė, rėžis σ_0 vadinamas funkcijos $f(t)$ didėjimo rodikliu.

Pirmąją ir trečiąją pirmavaizdį apibrėžiančias sąlygas tenkina dauguma praktikoje pasitaikančių funkcijų. Antroji sąlyga taip pat nėra varžanti. Sprendžiant fizikinius uždavinius, paprastai, domimės funkcijos reikšmėmis, įgyjamomis tiksliai nuo pradinio laiko momento, kuri nepažeisdami bendrumo, galime laikyti lygiu nuliui [5].

Paprasčiausias pirmavaizdis yra vienetinė Hevisaido funkcija. Ji tenkina visas pirmavaizdį apibrėžiančias sąlygas, be to, turi didėjimo rodiklį $\sigma_0 = 0$. Kiekvieną pirmavaizdį, naudojant vienetinę funkciją, galima parašyti taip:

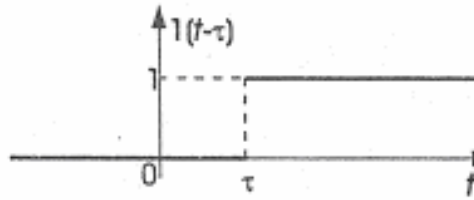
$$f(t)1(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Bet kokia funkcija $f(t)$, tenkinanti pirmąją ir trečiąją pirmavaizdžio sąlygas, padauginta iš vienetinės funkcijos, tampa pirmavaizdžiu.

Funkcija

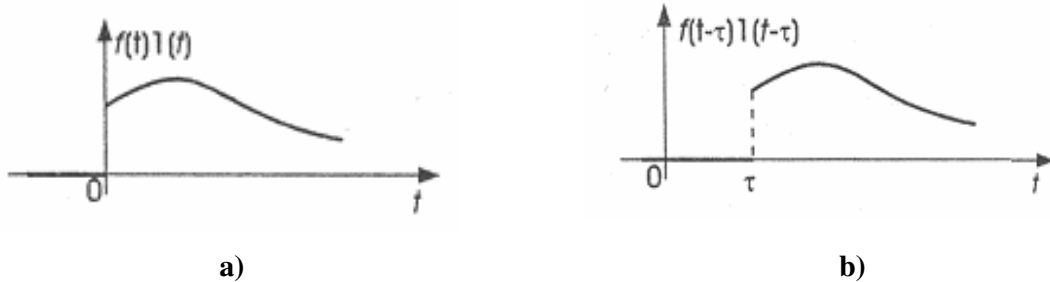
$$1(t-\tau) = \begin{cases} 1, & t \geq \tau, \\ 0, & t < \tau \end{cases}$$

vadiname vėluojančiąja vienetine funkcija (1.3.1.1 pav.).



1.3.1.1 pav. Vėluojanti vienetinė funkcija

Funkciją $f(t-\tau)1(t-\tau)$ vadiname vėluojančiąja funkcija. Vėluojančios funkcijos grafikas gaunamas iš funkcijos $f(t)1(t)$ grafiko, pastūmus jį į dešinę atstumu τ (1.3.1.2 pav.).



1.3.1.2 pav. Vėluojanti funkcija

Dirako delta funkcija $\delta(t)$ gali būti išreiškiama vienetinės funkcijos $1(t)$ išvestine.

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}1(t),$$

Pirmavaizdžio $f(t)$ vaizdu vadiname kompleksinio kintamojo $\rho = \sigma + i\omega$ funkciją $F(p)$, apibrėžiamą netiesioginiu integralu

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (1.3.1.2)$$

(1.3.1.2) integralas vadinamas funkcijos $f(t)$ Laplaso transformacija (kartais Laplaso integralu). Veiksmas, kuriuo randamas pirmavaizdžio $f(t)$ vaizdas $F(p)$, taip pat vadinamas Laplaso transformacija.

Vaizdo $F(p)$ ir pirmavaizdžio $f(t)$ atitikį žymėsime vienu šių simbolių:

$$F(p) = L\{f(t)\}, \quad F(p) \div f(t), \quad f(t) \div F(p).$$

Pirmavaizdžio $f(t)$ vaizdas $F(p)$ yra apibrėžtos ne visoje kompleksinėje plokštumoje p .

Vaizdo egzistavimo teorema. Kiekvienas pirmavaizdis $f(t)$ turi vaizdą $F(p)$, apibrėžtą pusplokštumėje $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, čia σ_0 - funkcijos $f(t)$ didėjimo rodiklis (1.3.1.3 pav.)

1.3.2 LAPLASO TRANSFORMACIJOS SAVYBĖS

Pateiksime svarbiausias Laplaso transformacijos savybes [5].

1. **Tiesiškumo savybė.** Jei pirmavaizdžių $f_1(t)$ ir $f_2(t)$ vaizdai yra atitinkamai $F_1(p)$ ir $F_2(p)$, t.y. $f_1(t) \div F_1(p)$, $f_2(t) \div F_2(p)$ ir C_1, C_2 - kompleksiniai skaičiai, tai

$$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \div C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p) \quad (1.3.2.1)$$

(tiesinį pirmavaizdžių darinį atitinka jų vaizdų toks pat tiesinis darinys).

Laplaso transformacijos tiesiškumo savybė gali būti apibendrinta, imant bet kurių baigtinį dėmenų skaičių. Jeigu $f_k(t) \div F_k(p)$, $k = \overline{1, n}$ ir $C_k \in \mathbb{C}$, tai

$$\sum_{k=1}^n C_k f_k(t) \div \sum_{k=1}^n C_k F_k(p). \quad (1.3.2.2)$$

2. **Panašumo teorema.** Jeigu $f(t) \div F(p)$ ir $\lambda > 0$, tai

$$f(\lambda t) \div \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right). \quad (1.3.2.3)$$

3. **Postūmio teorema.** Jeigu α yra bet koks kompleksinis skaičius ir $F(p) \div f(t)$, tai

$$F(p - \alpha) \div e^{\alpha t} f(t). \quad (1.3.2.4)$$

4. **Vėlavimo teorema.** Jeigu $\tau > 0$ ir $f(t) \div F(p)$, tai

$$f(t - \tau) \div e^{-p\tau} F(p). \quad (1.3.2.5)$$

Pirmavaizdžio vėlavimas laiku τ atitinka vaizdo dauginimą iš $e^{-p\tau}$.

5. **Pirmavaizdžio diferencijavimo teorema.** Jeigu $f(t)$ yra tolydi, dalimis diferencijuojama funkcija, kai $t > 0$, be to, $f(t)$ ir $f'(t)$ yra pirmavaizdžiai ir $f(t) \div F(p)$, tai

$$f'(t) \div pF(p) - f(0); \quad (1.3.2.6)$$

čia $f(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$ - pradinė pirmavaizdžio reikšmė.

6. **Vaizdo diferencijavimo teorema.** Jeigu $F(p) \div f(t)$, tai

$$F'(p) \div -tf(t). \quad (1.3.2.7)$$

Vaizdo diferencijavimas atitinka pirmavaizdžio dauginimą iš $(-t)$.

7. **Pradinės reikšmės teorema.** Jeigu $f(t)$ ir $f'(t)$ yra pirmavaizdžiai ir $f(t) \div F(p)$, tai

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t) = f(0). \quad (1.3.2.8)$$

8. Ribinės reikšmės teorema. Jeigu $f(t) \div F(p)$ ir $f'(t)$ yra pirmavaizdis ir egzistuoja riba

$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$, tai:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p). \quad (1.3.2.9)$$

Funkciją

$$f(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (1.3.2.10)$$

vadiname dviejų funkcijų $f_1(\tau)$ ir $f_2(\tau)$ sąsūka ir žymime $f_1(\tau) * f_2(\tau)$. Sąsūkos operacija yra komutatyvi.

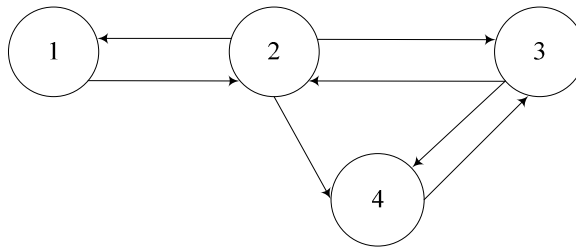
9. Vaizdų sandaugos teorema. Jeigu $F_1(p) \div f_1(t)$ ir $F_2(p) \div f_2(t)$, tai

$$F_1(p)F_2(p) \div \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau. \quad (1.3.2.11)$$

2 TIRIAMOJI DALIS

Ryšio tinklui sinchronizuoti gali būti panaudota tarpusavio sinchronizacijos sistema. Tokioje sistemoje kiekvieno taktinio generatoriaus dažnis yra valdomas, naudojant automatinę fazinę dažnio derinimo sistemą. Valdymo signalas proporcingas generatorių virpesių fazių skirtumams. Nusistovėjusiame režime visų taktinių generatorių dažniai yra vienodi ir lygūs tam tikram vidutiniam dažniui. Vidutinis dažnis priklauso nuo atstumų tarp atskirų generatorių, sujungtų į tinklą ir nuo savųjų dažnių (t.y. dažnių, kuriais dirba generatoriai, kai nėra valdymo).

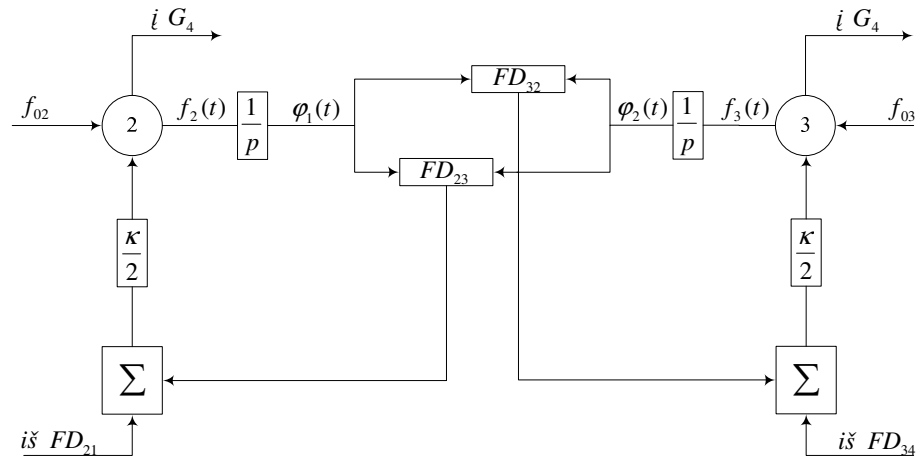
Nagrinėsime sinchronizacijos sistemą, sudarytą iš keturių tarpusavyje sujungtų generatorių. 2.1 paveiksle pateikta šios sistemos struktūrinė schema, vaizduojanti taktinius generatorius (skrituliukai) ir ryšio linijas, kuriomis perduodami sinchronizacijos signalai (orientuotos tiesės atkarpos).



2.1 pav. Sinchronizacijos sistemos schema

Sudarysime sinchronizacijos sistemos matematinį modelį – matricinę diferencialinę lygtį su vėluojančiu argumentu. Šios lygties sprendinio analizinę išraišką rasime taikydami „žingsnių“ metodą ir Laplaso transformaciją. Remdamiesi surastu sprendiniu, gausime sinchronizacijos sistemos pereinamųjų funkcijų ir generatorių virpesių fazių skirtumų tikslias analizes išraiškas, ištirsime sistemos pereinamuosius procesus ir jų darbą nusistovėjusiame režime.

2.1 SINCHRONIZACIJOS SISTEMOS MATEMATINIO MODELIO SUDARYMAS



2.1.1 pav. Sinchronizacijos sistemos struktūrinė schema

Sinchronizacijos struktūrinė schema pateikta 2.1.1 paveiksle. Schemoje pažymėta: G_i , ($i = \overline{1,4}$) – i – tasis valdomas taktinis generatorius. FD_{ij} – ij – osios linijos fazinis detektorius (ij – toji linija – tai ryšio linija, kuria signalas perduodamas iš j – tojo generatoriaus į i – tajį generatorių), τ_{ij} – signalo vėlinimas ij – tojoje linijoje, f_{0i} – savasis i – tojo generatoriaus dažnis, $f_i(t)$ – i – tojo generatoriaus dažnis, $\varphi_i(t)$ – i – tojo generatoriaus virpesio fazė, κ – stiprinimo koeficientas.

Visi sistemos generatoriai yra valdomi. Jų dažniai derinami, naudojant automatines fazines dažnio derinimo sistemas. Remdamiesi struktūrine schema, sudarysime sinchronizacijos sistemos matematinį modelį. Nagrinsime atvejį, kai vėlinimai yra vienodi.

Užrašome i – tojo generatoriaus valdymo lygtį:

$$f_i(t) = f_{0i} + \Delta f_i(t), \quad i = \overline{1,4}; \quad (2.1.1)$$

čia

$$\Delta f_1(t) = \kappa(\varphi_2(t - \tau) - \varphi_1(t)),$$

$$\Delta f_2(t) = \frac{\kappa}{2}(\varphi_1(t - \tau) - \varphi_2(t)) + \frac{\kappa}{2}(\varphi_3(t - \tau) - \varphi_2(t)),$$

$$\Delta f_3(t) = \frac{\kappa}{2}(\varphi_2(t - \tau) - \varphi_3(t)) + \frac{\kappa}{2}(\varphi_4(t - \tau) - \varphi_3(t)),$$

$$\Delta f_4(t) = \frac{\kappa}{2}(\varphi_2(t - \tau) - \varphi_4(t)) + \frac{\kappa}{2}(\varphi_3(t - \tau) - \varphi_4(t)).$$

Generatoriaus virpesio fazė ir dažnis yra susieti lygybe: $\varphi_i'(t) = f_i(t)$, $i = \overline{1,4}$. Įvertinę i – tojo generatoriaus virpesio fazės ir dažnio sąryšį iš (2.1.1) lygybės, gauname diferencialinių lygčių sistemą:

$$\varphi_i'(t) = f_{0i} + \Delta f_i(t), \quad i = \overline{1,4}. \quad (2.1.2)$$

Šią sistemą galima užrašyti naudojant apibendrinto diferencijavimo operatorių D . Padauginkime (2.1.2) lygybės abi puses iš vienetinės Hevisaido funkcijos $1(t)$ ir pažymėkime $x_i(t) = \varphi_i(t)1(t)$, $i = \overline{1,4}$. Raskime šios funkcijos apibendrintą išvestinę $Dx_i(t)$:

$$Dx_i(t) = D[\varphi_i(t)1(t)] = \varphi_i'(t)1(t) + \varphi_i(t)\delta(t) = \varphi_i'(t)1(t) + \varphi_i(0)\delta(t);$$

čia $\varphi_i(0) = \varphi_{0i}$ – i – tojo generatoriaus virpesio pradinė fazė, $\delta(t)$ – delta funkcija.

Gauname:

$$Dx_i(t) - \varphi_i(0)\delta(t) = \varphi_i'(t)1(t). \quad (2.1.3)$$

Padauginę (2.1.2) lygybės abi puses iš vienetinės Hevisaido funkcijos ir panaudoję (2.1.3), turime

$$Dx_i(t) - \varphi_i(0)\delta(t) = f_{0i}(t)1(t) + \Delta f_i(t)1(t), \quad i = \overline{1,4}.$$

Atlikę pertvarkymus, gauname lygčių sistemą:

$$\begin{cases} Dx_1(t) = \kappa(x_2(t-\tau) - x_1(t)) + z_1(t), \\ Dx_2(t) = \frac{\kappa}{2}(x_1(t-\tau) + x_3(t-\tau)) - \kappa x_2(t) + z_2(t), \\ Dx_3(t) = \frac{\kappa}{2}(x_2(t-\tau) + x_4(t-\tau)) - \kappa x_3(t) + z_3(t), \\ Dx_4(t) = \frac{\kappa}{3}(x_2(t-\tau) + x_3(t-\tau)) - \kappa x_4(t) + z_4(t); \end{cases} \quad (2.1.4)$$

čia

$$z_1(t) = f_{01}(t)1(t) + \varphi_1(0)\delta(t) + \kappa\varphi_2(t-\tau)(1(t) - 1(t-\tau)),$$

$$z_2(t) = f_{02}(t)1(t) + \varphi_2(0)\delta(t) + \frac{\kappa}{2}\varphi_1(t-\tau)(1(t) - 1(t-\tau)) + \frac{\kappa}{2}\varphi_3(t-\tau)(1(t) - 1(t-\tau)),$$

$$z_3(t) = f_{03}(t)1(t) + \varphi_3(0)\delta(t) + \frac{\kappa}{2}\varphi_2(t-\tau)(1(t) - 1(t-\tau)) + \frac{\kappa}{2}\varphi_4(t-\tau)(1(t) - 1(t-\tau)),$$

$$z_4(t) = f_{04}(t)1(t) + \varphi_4(0)\delta(t) + \frac{\kappa}{2}\varphi_2(t-\tau)(1(t) - 1(t-\tau)) + \frac{\kappa}{3}\varphi_3(t-\tau)(1(t) - 1(t-\tau)).$$

(2.1.4) diferencialinių lygčių su vėluojančiu argumentu sistema yra nagrinėjamos sinchronizacijos sistemos matematinis modelis.

2.2 MATRICINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTIES SPRENDIMAS

Diferencialinių lygčių su vėluojančiu argumentu sistemą, naudodami matricas, užrašome taip:

$$Dx(t) = B_1x(t) + B_2x(t - \tau) + z(t); \quad (2.2.1)$$

čia D – apibendrinto diferencijavimo operatorius, B_1, B_2 – skaitinės matricos, κ – koeficientas,

E – ketvirtos eilės vienetinė matrica, τ – pastovus vėlinimas, $B_1 = -\kappa E$, $B_2 = \frac{\kappa}{2} B$,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ (matrica } B \text{ nusako sistemos vidinių ryšių struktūrą), } x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \text{ – ieškoma}$$

$$\text{vektorinė funkcija, } z(t) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} \text{ – laisvasis narys.}$$

Ieškome (2.2.1) diferencialinės lygties sprendinio. Tam tikslui intervalą $0 \leq t < +\infty$ dalijame į τ ilgio dalinius intervalus. Tegu $x(t)$ yra (2.1.2.1) diferencialinės lygties sprendinys, kurį k – ajame daliniame intervale pažymėkime simboliu $x_k(t)$:

$$x(t) = x_k(t), \quad k\tau \leq t < (k+1)\tau, \quad k = -1, 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.2)$$

Diferencialinės lygties (2.2.1) sprendinio ieškosime „žingsnių“ metodu, t.y. kiekviename intervale $k\tau \leq t < (k+1)\tau$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) (2.2.1) lygtį spręsimė atskirai, kaip paprastą matricinę diferencialinę lygtį be vėluojančio argumento. Sprendinys, gautas k – ajame intervale, yra pradinė sąlyga (pradinė funkcija) sprendžiant lygtį $(k+1)$ – jame intervale ($k = 0, 1, 2, \dots$). Ieškodami sprendinio kiekviename intervale, naudosisime Laplaso transformaciją.

Pradžioje sprendžiame (2.2.1) diferencialinę lygtį intervale $[0, \tau)$:

$$[0, \tau): \quad Dx(t) = B_1x(t) + B_2x(t - \tau) + z(t).$$

Kadangi sprendinys $x(t)$ intervale $[0, \tau)$ pažymėtas $x_0(t)$, o intervale $[-\tau, 0)$ – $x_{-1}(t)$, tai (2.2.1) diferencialinę lygtį perrašome taip:

$$Dx_0(t) = B_1x_0(t) + B_2x_{-1}(t - \tau) + z(t). \quad (2.2.3)$$

Įvertinę, kad $x_{-1}(t) = 0$, $-\tau \leq t < 0$ ir $x_{-1}(t - \tau) = 0$ $0 \leq t < \tau$ ($-\tau \leq t - \tau < 0$), (2.2.3) lygtis įgauna pavidalą:

$$Dx_0(t) = B_1x_0(t) + z(t). \quad (2.2.4)$$

Šią lygtį sprendžiame operaciniu metodu (naudodami Laplaso transformaciją):

$$\begin{aligned}
pX_0(p) &= B_1X_0(p) + Z(p), \\
pX_0(p) - B_1X_0(p) &= Z(p), \\
(pE - B_1)X_0(p) &= Z(p), \\
X_0(p) &= (pE - B_1)^{-1}Z(p), \\
(pE - B_1) &= pE + \kappa E = (p + \kappa)E, \\
X_0(p) &= \frac{Z(p)}{p + \kappa} = L\{z(t)\}L\{e^{-\kappa t}\} \div \left[\int_0^t z(\tau)e^{-\kappa(t-\tau)}d\tau \right] 1(t) = x_0(t).
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Pastebėsime, kad

$$\begin{aligned}
x_0(t) &= x(t), \quad 0 \leq t < \tau, \\
x_0(t) &= x_{-1}(t), \quad -\tau \leq t < 0.
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Toliau spęšime (2.2.1) lygtį intervale $[\tau, 2\tau)$:

$$[\tau, 2\tau): \quad Dx(t) = B_1x(t) + B_2x(t - \tau) + z(t).$$

Įvertinus (2.2.2) pažymėjimus, (2.2.1) diferencialinę lygtį užrašome taip:

$$Dx_1(t) = B_1x_1(t) + B_2x_0(t - \tau) + z(t). \tag{2.2.7}$$

Kadangi sprendinys $x(t)$ intervale $[\tau, 2\tau)$ pažymėtas $x_{-1}(t)$, o intervale $[0, \tau) - x_0(t)$, tai (2.2.7) lygtis yra matricinė diferencialinė lygtis be vėluojančio argumento. Užrašome ją atitinkančią operatorinę lygtį ir operatorinį sprendinį:

$$\begin{aligned}
pX_1(p) &= B_1X_1(p) + B_2X_0(p)e^{-p\tau} + Z(p), \\
X_1(p) &= (pE - B_1)^{-1}B_2X_0(p)e^{-p\tau} + (pI - B_1)^{-1}Z(p), \\
X_1(p) &= \frac{B_2X_0(p)}{p + \kappa}e^{-p\tau} + \frac{Z(p)}{p + \kappa}.
\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

(2.2.8) išraišką perrašome įvertinę, kad $X_0(p) = \frac{Z(p)}{p + \kappa}$:

$$X_1(p) = \frac{B_2X_0(p)}{p + \kappa}e^{-p\tau} + X_0(p).$$

Panaudoję Laplaso transformacijos simbolį L , turime:

$$X_1(p) = B_2L\{x_0(t)\}L\{e^{-\kappa t}\}e^{-p\tau} + X_0(p) = B_2 \left[\int_0^t x_0(\theta) \cdot e^{-\kappa(t-\theta)}d\theta \right] e^{-p\tau} + X_0(p).$$

Taikydami vaizdų sandaugos teoremą, gauname:

$$X_1(p) \div B_2 \left[\int_0^{t-\tau} x_0(\theta)e^{-\kappa(t-\theta-\tau)}d\theta \right] 1(t-\tau) + x_0(t) = x_1(t) = \begin{cases} x_0(t), & t < \tau, \\ \neq x_0(t), & t \geq \tau. \end{cases} \tag{2.2.9}$$

Gautas sprendinys atitinka sąlygas:

$$x_1(t) = \begin{cases} x(t), & \tau \leq t < 2\tau, \\ \neq x(t), & t \geq 2\tau, \end{cases} \quad (2.2.10)$$

$$x_1(t) = \begin{cases} x(t), & t < 2\tau, \\ \neq x(t), & t \geq 2\tau. \end{cases} \quad (2.2.11)$$

Toliau (2.2.1) diferencialinę lygtį sprendžiame intervale $[2\tau, 3\tau)$.

$$[2\tau, 3\tau): \quad Dx(t) = B_1x(t) + B_2x(t - \tau) + z(t).$$

Įvertinus (2.2.2) pažymėjimus šią lygtį perrašome taip:

$$Dx_2(t) = B_1x_2(t) + B_2x_1(t - \tau) + z(t). \quad (2.2.12)$$

Kadangi $x_1(t)$ ($t < \tau$) yra žinoma funkcija (žr. (2.2.9)), tai (2.2.12) lygtis yra matricinė diferencialinė lygtis be vėluojančio argumento. Užrašome ją atitinkančią operatorinę lygtį ir operatorinį sprendinį:

$$\begin{aligned} pX_2(p) &= B_1X_2(p) + B_2X_1(p)e^{-p\tau} + Z(p), \\ X_2(p) &= \frac{B_2X_1(p)}{p + \kappa}e^{-p\tau} + \frac{Z(p)}{p + \kappa}. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Įrašę (2.2.8) išraišką į (2.2.9), gauname:

$$\begin{aligned} X_2(p) &= \frac{B_2}{p + \kappa} \left[\frac{B_2X_0(p)}{p + \kappa}e^{-p\tau} + X_0(p) \right] e^{-p\tau} + \frac{Z(p)}{p + \kappa} = \\ &= B_2^2 \frac{X_0(p)}{(p + \kappa)^2} e^{-2p\tau} + \frac{B_2X_0(p)}{p + \kappa} e^{-p\tau} + \frac{Z(p)}{p + \kappa}, \\ X_2(p) &= B_2^2 \frac{X_0(p)}{(p + \kappa)^2} e^{-2p\tau} + X_1(p). \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Pasinaudoję Laplaso transformacijos savybėmis, randame:

$$\begin{aligned} X_2(p) &= B_2^2 \cdot L\{x_0(t)\} \cdot L\{te^{-\kappa t}\} e^{-2p\tau} + X_1(p) = \\ &= B_2^2 L\left\{ \int_0^t x_0(\theta)(t - \theta) \cdot e^{-\kappa(t-\theta)} d\theta \right\} e^{-2p\tau} + X_1(p). \end{aligned}$$

Tada

$$\begin{aligned} X_2(p) &\div B_2^2 \left[\int_0^{t-2\tau} x_0(\theta)(t - \theta - 2\tau) e^{-\kappa(t-\theta-2\tau)} d\theta \right] 1(t - 2\tau) + x_1(t) = \\ &= x_2(t) = \begin{cases} x_1(t), & t < 2\tau, \\ \neq x_1(t), & t \geq 2\tau. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Pastebėsime, kad gautas sprendinys atitinka sąlygas

$$x_2(t) = \begin{cases} x(t), & 2\tau \leq t \leq 3\tau, \\ \neq x(t), & t > 3\tau, \end{cases} \quad (2.2.16)$$

$$x_2(t) = \begin{cases} x(t), & t < 3\tau, \\ \neq x(t), & t \geq 3\tau. \end{cases} \quad (2.2.17)$$

Toliau tęsdami tą pačią procedūrą k kartų, gautume tokius rezultatus:

$$x_k(t) = \begin{cases} x_{k-1}(t), & t < k\tau, \\ \neq x_{k-1}(t), & t \geq k\tau, \end{cases} \quad (2.2.18)$$

$$x_k(t) = \begin{cases} x(t), & k\tau \leq t < (k+1)\tau, \\ \neq x(t), & t \geq (k+1)\tau, \end{cases} \quad (2.2.19)$$

$$x_k(t) = \begin{cases} x(t), & t < (k+1)\tau, \\ \neq x(t), & t \geq (k+1)\tau. \end{cases} \quad (2.2.20)$$

Rasime sprendinio $x(t)$ analizinę išraišką. Pažymėkime:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(t) &= x_0(t) - x_{-1}(t) = x_0(t), \\ \varepsilon_1(t) &= x_1(t) - x_0(t), \\ \varepsilon_2(t) &= x_2(t) - x_1(t), \\ &\dots\dots\dots \\ \varepsilon_k(t) &= x_k(t) - x_{k-1}(t), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

$$\begin{aligned} \Theta_L(t) &= \sum_{k=0}^L \varepsilon_k(t) = \varepsilon_0(t) + \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t) + \dots + \varepsilon_L(t) = \\ &= x_0(t) + [x_1(t) - x_0(t)] + [x_2(t) - x_1(t)] + \dots + [x_L(t) - x_{L-1}(t)] = \\ &= x_L(t) = \begin{cases} x(t), & t < (L+1)\tau, \\ \neq x(t), & t \geq (L+1)\tau, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

t.y.

$$\Theta_L(t) = \begin{cases} x(t), & t < (L+1)\tau, \\ \neq (t), & t \geq (L+1)\tau. \end{cases} \quad (2.2.23)$$

Panaudoję šiuos pažymėjimus, sprendinį $x(t)$ užrašome taip:

$$x(t) = \Theta_L(t) = \sum_{k=0}^L \varepsilon_k(t), \quad 0 \leq t < (L+1)\tau. \quad (2.1.2.24)$$

Šios lygybės dešiniajai pusei pritaikę Laplaso transformaciją, gauname:

$$x(t) \div \sum_{k=0}^L \int_0^{\infty} \varepsilon_k(x) e^{-px} dx, \quad 0 \leq t < (L+1)\tau. \quad (2.2.25)$$

Rasime funkcijos $\varepsilon_k(t)$ Laplaso transformaciją:

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_k(x) e^{-px} dx. \quad (2.2.26)$$

Tam tikslui sudarome vektoriaus $\varepsilon_k(t)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) atžvilgiu diferencialinę lygtį. Kadangi

$$\varepsilon_k(t) = x_k(t) - x_{k-1}(t)$$

ir

$$Dx_k(t) = B_1 x_k(t) + B_2 x_{k-1}(t - \tau) + z(t),$$

$$Dx_{k-1}(t) = B_1 x_{k-1}(t) + B_2 x_{k-2}(t - \tau) + z(t),$$

tai atėmę paskutinę lygtį iš prieš paskutinės, gauname:

$$D\varepsilon_k(t) = B_1 \varepsilon_k(t) + B_2 \varepsilon_{k-1}(t - \tau). \quad (2.2.27)$$

Ieškome operatorinės lygties, atitinkančios (2.1.2.27) diferencialinę lygtį. Tam tikslui, abiem lygties pusėms taikome Laplaso transformaciją (prieš tai pirmąjį dešinėsios pusės narį perkėlę į kairę pusę):

$$\int_0^{\infty} [D\varepsilon_k(t) - B_1 \varepsilon_k(t)] e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} B_2 \varepsilon_{k-1}(t - \tau) e^{-pt} dt.$$

Tvarkydami toliau, gauname:

$$pL\{\varepsilon_k(t)\} - B_1 L\{\varepsilon_k(t)\} = B_2 \int_0^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t - \tau) e^{-pt} dt. \quad (2.2.28)$$

Pertvarkome dešinės pusės integralą:

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau} \varepsilon_{k-1}(t - \tau) e^{-pt} dt &= \left\{ \begin{array}{ll} t - \tau = \theta & dt = d\theta \\ t = 0 & \theta = -\tau \\ t = \infty & \theta = \infty \end{array} \right\} = \int_{-\tau}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(\theta) e^{-p(\tau + \theta)} d\theta = \\ &= e^{-p\tau} \int_{-\tau}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(\theta) e^{-p\theta} d\theta = e^{-p\tau} \int_{-\tau}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t) e^{-pt} dt. \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

Pasinaudodami (2.2.26) ir (2.2.29) išraiškėmis, (2.2.28) išraišką perrašome taip:

$$(pE - B_1) \cdot \int_0^{\infty} \varepsilon_k(t) e^{-pt} dt = B_2 e^{-p\tau} \int_{-\tau}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t) e^{-pt} dt.$$

Pažymėkime: $A = pE - B_1 = (p + \kappa)E$. Tada

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_k(t) e^{-pt} dt = A^{-1} \cdot B_1 \cdot e^{-p\tau} \int_{-\tau}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t) e^{-pt} dt. \quad (2.2.30)$$

Įvertiname funkcijos $\varepsilon_k(t)$ savybes:

$$\begin{aligned} \varepsilon_k(t) &= 0, \quad t < k\tau, \\ \varepsilon_{k-1}(t) &= 0, \quad t < (k-1)\tau. \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

Pažymėję $M = A^{-1} \cdot B_1 \cdot e^{-p\tau}$, gauname rekurentinę formulę:

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_k(t) e^{-pt} dt = M \int_{-\tau}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t) e^{-pt} dt. \quad (2.2.32)$$

Įvertinus funkcijos $\varepsilon_k(t)$ savybes (žr. 2.2.31), galime užrašyti: $\varepsilon_{k-1}(t) = 0$ su visais $t < 0$ ir $k = 1, 2, 3, \dots$

Žinome, kad $\varepsilon_0(t) = x_0(t)$. Taikant šiai lygybei Laplaso transformaciją, gauname:

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_0(t) e^{-pt} dt = X_0(p).$$

Skirtingiems $k = 1, 2, 3, \dots$ iš (2.1.2.32) randame:

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_1(t) e^{-pt} dt = M \int_0^{\infty} \varepsilon_0(t) e^{-pt} dt = M X_0(p),$$

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_2(t) e^{-pt} dt = M \int_0^{\infty} \varepsilon_1(t) e^{-pt} dt = M^2 X_0(p),$$

..... (2.2.33)

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_k(t) e^{-pt} dt = M^k X_0(p); \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Iš (2.2.25) išraiškos ir įvertinę (2.2.33), randame:

$$x(t) \div \sum_{k=0}^L M^k X_0(p), \quad 0 \leq t < (L+1)\tau$$

arba, įvertinę pažymėjimą $M = A^{-1} \cdot B_1 \cdot e^{-p\tau}$, turėsime:

$$x(t) \div \sum_{k=0}^L (A^{-1} B_1 e^{-p\tau})^k X_0(p), \quad 0 \leq t < (L+1)\tau. \quad (2.2.34)$$

Kadangi

$$X_0(p) = A^{-1} Z(p), \quad A^{-1} = \left(\frac{1}{p + \kappa} \right) E,$$

tai

$$x(t) \div \sum_{k=0}^L \frac{1}{(p + \kappa)^{k+1}} \left(\frac{\kappa}{2} \right)^k B^k e^{-pk\tau} Z(p), \quad 0 \leq t < (L+1)\tau. \quad (2.2.35)$$

Remdamiesi gautu sprendiniu, tirsime pereinamuosius procesus, kai vėlinimai visose ryšio linijose yra vienodi.

2.3 MATRICOS B, PAKELTOS K-UOJU LAIPSNIU, RADIMAS

2.2 skyrelyje radome matricinės diferencialinės lygties sprendinį (žr. (2.2.35)). Sincronizacijos sistemos pereinamųjų procesų tyrimui, rasime matricos B^k ir vektoriaus $Z(p)$ (įeinančių į sprendinį) elementų tikslias analizes išraiškas.

2.2 skyrelio (2.2.35) sprendinio išraiškoje yra ketvirtos eilės matrica B , pakelta k – tuoju laipsniu ($k = 0,1,2,\dots$). Ją rasime remdamiesi formule [4]:

$$B^k = TJ^kT^{-1};$$

čia J – matricos B Žordano forma, T – matrica, transformuojanti matricą B į Žordano formą, T^{-1} – T atvirkštinė matrica.

Pirmiausiai randame matricos B tikrines reikšmes. Turėdami jas užrašysime matricos B Žordano formą.

2.3.1 MATRICOS B TIKRINĖS REIKŠMĖS IR ŽORDANO FORMA

Matricos B tikrines reikšmes randame išsprendę charakteristinę lygtį $\det(B - \lambda E) = 0$.

$$\text{Matrica } B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Remdamiesi ja, užrašome:}$$

$$\Delta = \det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2.3.1.1)$$

Determinantą skleidžiame pirmojo stulpelio elementais:

$$\begin{aligned} \Delta &= -\lambda \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41} = -\lambda \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \\ &= -\lambda \cdot (-\lambda^3 + 1 + 2\lambda) - (2\lambda^2 - 2) = \lambda^4 - 4\lambda^2 - \lambda + 2. \end{aligned}$$

Užrašome charakteristinę lygtį:

$$\Delta = \lambda^4 - 4\lambda^2 - \lambda + 2 = 0.$$

Randame šios lygties šaknis:

$$\lambda^2(\lambda - 2)(\lambda + 2) - (\lambda - 2) = 0;$$

$$(\lambda - 2)(\lambda^2(\lambda + 2) - 1) = 0;$$

$$\begin{aligned}
\lambda - 2 &= 0; & \lambda^2(\lambda + 2) - 1 &= 0; \\
\lambda_1 &= 2. & \lambda^3 + 2\lambda - 1 &= 0; \\
& & \lambda^3 + 1 + 2\lambda - 2 &= 0; \\
& & (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1) + 2(\lambda - 1)(\lambda + 1) &= 0; \\
& & (\lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda - 1) &= 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda + 1 &= 0; & \lambda^2 + \lambda - 1 &= 0; \\
\lambda_2 &= -1. & D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) &= 5; \\
& & \lambda_3 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}; & \lambda_4 = \frac{-\sqrt{5} - 1}{2}.
\end{aligned}$$

Gautos charakteristinės lygties šaknys yra matricos B tikrinės reikšmės. Paprastumo dėlei pažymėkime:

$$\lambda_3 = a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}; \quad \lambda_4 = b = \frac{-\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Visos tikrinės reikšmės yra paprastosios, todėl matricos B Žordano forma yra diagonalioji matrica:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}. \quad (2.3.1.2)$$

2.3.2 MATRICOS B TIKRINIAI VEKTORIAI IR TRANSFORMUOJANČIOJI MATRICA

Kadangi visos matricos B tikrinės reikšmės yra skirtingos, tai transformuojančios matricos T stulpelius sudaro matricos B tikriniai vektoriai: $T = (T_1, T_2, T_3, T_4)$. Rasime matricos B tikrinius vektorius T_k ($k = \overline{1,4}$), remdamiesi lygybėmis:

$$BT_k = \lambda_k T_k, \quad k = \overline{1,4}. \quad (2.3.2.1)$$

Tikrinį vektorių T_k , atitinkantį tikrinę reikšmę λ_k , pažymėsime

$$T_k = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(k)} \\ \alpha_2^{(k)} \\ \alpha_3^{(k)} \\ \alpha_4^{(k)} \end{pmatrix}.$$

(2.3.2.1) perrašome:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1^{(k)} \\ \alpha_2^{(k)} \\ \alpha_3^{(k)} \\ \alpha_4^{(k)} \end{pmatrix} = \lambda_k \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1^{(k)} \\ \alpha_2^{(k)} \\ \alpha_3^{(k)} \\ \alpha_4^{(k)} \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1,4}. \quad (2.3.2.2)$$

Remdamiesi lygybe

$$BT_1 = \lambda_1 T_1, \quad (2.3.2.3)$$

rasime tikrinį vektorių

$$T_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ \alpha_2^{(1)} \\ \alpha_3^{(1)} \\ \alpha_4^{(1)} \end{pmatrix},$$

atitinkantį tikrinę reikšmę $\lambda_1 = 2$. Paprastumo dėlei tikrinio vektoriaus elementų viršutinį indeksą praleisime. Atlikę (2.3.2.3) lygybėje pertvarkymus, gauname:

$$(B - 2E)T_1 = 0; \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.3.2.4)$$

Gauname lygčių sistemą:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 = 2\alpha_2, \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 2\alpha_2, \\ -2\alpha_3 + \alpha_4 = -\alpha_2, \\ \alpha_3 - 2\alpha_4 = -\alpha_2. \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2, \\ \alpha_2 = \alpha_3, \\ \alpha_3 = \alpha_2, \\ \alpha_4 = \alpha_2. \end{cases}$$

Gauname tikrinį vektorių

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \alpha_2.$$

Parinkę $\alpha_2 = 1$, gauname tikrinį vektorių

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ atitinkantį tikrinę reikšmę } \lambda_1 = 2.$$

Tokiu pat būdu randame tikrinius vektorius

$$T_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} -2a \\ a-1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T_4 = \begin{pmatrix} -2b \\ b-1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

atitinkančius tikrines reikšmes $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\lambda_4 = b = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$.

Skaičiavimo rezultatus tikriname remdamiesi (2.3.2.1) išraiška.

Užrašome matricą T ir jos atvirkštinę matricą T^{-1} :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2a & -2b \\ 1 & 1 & a-1 & b-1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3.2.5)$$

$$T^{-1} = \frac{1}{\det T} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{43} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix}.$$

Apskaičiuojame matricos T determinantą (jį skleidžiame pirmo stulpelio elementais):

$$\begin{aligned} \det T &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2a & -2b \\ 1 & 1 & a-1 & b-1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{31} + 1 \cdot A_{41} = \\ &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a-1 & b-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2a & -2b \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2a & -2b \\ 1 & a-1 & b-1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \\ &+ 1 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2a & -2b \\ 1 & a-1 & b-1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(b-a) - 6(a-b) + 4(b-a) - 2(a-b) = 15(b-a) \end{aligned}$$

Randame adjunktus:

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a-1 & b-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(b-a); & A_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a-1 & b-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \\ A_{13} &= (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & b-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3(2-b); & A_{14} &= (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & a-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3(2-a); \end{aligned}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2a & -2b \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6(b-a);$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2a & -2b \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2b \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3(1+2b);$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2a \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3(1+2a);$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2a & -2b \\ 1 & a-1 & b-1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4(b-a);$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2a & -2b \\ 1 & a-1 & b-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5(b-a);$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2b \\ 1 & 1 & b-1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3(1+2b);$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2a \\ 1 & 1 & a-1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3(1+2b);$$

$$A_{41} = (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2a & -2b \\ 1 & a-1 & b-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(b-a);$$

$$A_{42} = (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2a & -2b \\ 1 & a-1 & b-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5(b-a);$$

$$A_{43} = (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2b \\ 1 & 1 & b-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(b-2);$$

$$A_{44} = (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2a \\ 1 & 1 & a-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(2-a).$$

Remdamiesi gautomis išraiškomis, užrašome matricą T^{-1} :

$$\begin{aligned} T^{-1} &= \frac{1}{15(b-a)} \begin{pmatrix} 3(b-a) & 6(b-a) & 4(b-a) & 2(b-a) \\ 0 & 0 & 5(b-a) & -5(b-a) \\ 3(2-b) & -3(1+2b) & 3(1+2b) & -3(2-b) \\ -3(2-a) & 3(1+2a) & -3(1+2a) & 3(2-a) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 3b & -3 & 3 & -3b \\ 3a & -3 & 3 & -3a \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.2.6)$$

Skaičiavimo rezultatus tikriname: $T^{-1}T = E$.

2.3.3 MATRICOS B^k TIKSLI ANALIZINĖ IŠRAIŠKA

Matricos B^k ieškome remdamiesi formule

$$B^k = T \cdot J^k \cdot T^{-1} \quad (2.3.3.1)$$

Taip pat bus reikalingos matricų T, T^{-1} ir J išraiškos. Užrašome J^k :

$$J^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^k \end{pmatrix}.$$

Įstatę J, T ir T^{-1} išraiškas į (2.3.3.1), gauname:

$$B^k = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2a & -2b \\ 1 & 1 & a-1 & b-1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 3b & -3 & 3 & -3b \\ 3a & -3 & 3 & -3a \end{pmatrix}.$$

Atlikę pertvarkymus, randame:

$$B^k = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^k - 6ba^{k+1} - 6ab^{k+1} & 6 \cdot 2^k + 6a^{k+1} + 6b^{k+1} \\ 3 \cdot 2^k + 3a^{k+1} + 3b^{k+1} & 6 \cdot 2^k - 3(a-1)a^k - 3(b-1)b^k \\ 3 \cdot 2^k + 3ba^k + 3ab^k & 6 \cdot 2^k - 3a^k - 3b^k \\ 3 \cdot 2^k + 3ba^k + 3ab^k & 6 \cdot 2^k - 3a^k - 3b^{k+1} \\ 4 \cdot 2^k - 10(-1)^k - 6a^{k+1} - 6b^{k+1} & 2 \cdot 2^k + 10(-1)^k + 6ba^{k+1} + 6ab^{k+1} \\ 4 \cdot 2^k + 5(-1)^k + 3(a-1)a^k + 3(b-1)b^k & 2 \cdot 2^k - 5(-1)^k - 3a^{k+1} - 3b^{k+1} \\ 4 \cdot 2^k + 5(-1)^k + 3a^k + 3b^k & 2 \cdot 2^k - 5(-1)^k - 3ba^k - 3ab^k \\ 4 \cdot 2^k - 10(-1)^k + 3a^k + 3b^k & 2 \cdot 2^k + 10(-1)^k - 3ba^k - 3ab^k \end{pmatrix}.$$

2.4 SINCHRONIZACIJOS SISTEMOS PEREINAMŪJŲ PROCESŲ TYRIMAS

2.4.1 SISTEMOS PEREINAMOSIOS FUNKCIJOS

Sinchronizacijos sistemos pereinamuosius procesus tirsime, remdamiesi jos pereinamosiomis funkcijomis. Sistemos i – tojo generatoriaus virpesio fazės reakciją į j – tojo generatoriaus virpesio fazės vienetinį šuolį vadinsime pereinamąja funkcija $h_{ij}(t)$, ($i, j = \overline{1,4}$). Matricą $h(t) = (h_{ij}(t))$ vadinsime sinchronizacijos sistemos pereinamųjų funkcijų matrica.

Rasime sinchronizacijos sistemos pereinamąsias funkcijas ir jų ribines reikšmes.

Pereinamųjų funkcijų matricos elementus rasime remdamiesi matricine diferencialine lygtimi

$$Dx(t) = B_1 x(t) + B_2 x(t - \tau) + z(t) \quad (2.4.1.1)$$

ir jos sprendiniu

$$x(t) \doteq \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{2} \right)^k \frac{e^{-pk\tau}}{(p + \kappa)^{k+1}} B^k Z(p), \quad 0 \leq t < (L+1)\tau. \quad (2.4.1.2)$$

Iš struktūrinės schemos (žr. 2.1.1 pav.) matome, kad j – tojo generatoriaus virpesio fazės vienetinį šuolį galima pakeisti delta funkcija $\delta(t)$, veikiančia to generatoriaus dažnį. Kai vienetinis fazės šuolis veikia j – tojo generatoriaus virpesio fazę, tai (2.4.1.1) lygties laisvasis narys $z(t)$ įgauna pokyti:

$$\Delta z(t) = \delta(t)I^{(j)}; \quad (2.4.1.3)$$

čia $I^{(j)}$ – matrica stulpelis, kurio j – tasis elementas lygus 1, o likusieji – nuliui.

Pažymėkime pereinamųjų funkcijų matricos j – tąjį stulpelį simboliu

$$h_j(t) = (h_{1j}, h_{2j}, h_{3j}, h_{4j})^T, \quad j = \overline{1,4}; \quad (2.4.1.4)$$

čia $h_j(t)$ – sistemos generatorių virpesių fazių reakcijų į j – tojo generatoriaus fazės vienetinį šuolį, vektorius.

Remdamiesi (2.4.1.1) ir (2.4.1.3) išraiškėmis, užrašome matricinę diferencialinę lygtį vektoriaus $h_j(t)$ atžvilgiu:

$$Dh_j(t) = B_1 h_j(t) + B_2 h_j(t - \tau) + \delta(t)I^{(j)}. \quad (2.4.1.5)$$

Randame šios lygties sprendinį remdamiesi (2.4.1.2) sprendiniu ir operatorine lygybe $\delta(t) \div 1$:

$$h_j(t) \div \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \frac{e^{-pk\tau}}{(p + \kappa)^{k+1}} B^k I^{(j)}, \quad 0 \leq t < (L+1)\tau, \quad j = \overline{1,4}. \quad (2.4.1.6)$$

Įvertinę tai, kad fiksuoto indekso j reikšmės yra 1,2,3,4 gauname:

$$h(t) \div H(p) = \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \frac{e^{-pk\tau}}{(p + \kappa)^{k+1}} B^k; \quad (2.4.1.7)$$

čia $H(p)$ – pereinamųjų funkcijų matricos $h(t)$ vaizdas, t.y. $H(p) = (H_{ij}(p)) \div h(t) = (h_{ij}(t))$.

(2.4.1.7) išraiškai taikome atvirkštinę Laplaso transformaciją ir gauname pereinamųjų funkcijų matricos skaičiavimo formulę:

$$h(t) = \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \frac{(t - k\tau)^k}{k!} e^{-\kappa(t - k\tau)} B^k 1(t - k\tau), \quad 0 \leq t < (L+1)\tau. \quad (2.4.1.8)$$

Pereinamųjų funkcijų tikslias analizes išraiškas rasime į (2.4.1.8) formulę įstatę matricos B k – tąjį laipsnį (žr. 2.3.3 skyrelyje).

2.4.2 PEREINAMŪJŲ FUNKCIJŲ RIBINIŲ REIKŠMIŲ SKAIČIAVIMAS

Remdamiesi (2.4.1.7) formule, matricos B^k (žr. 2.3.3 skyrelyje) analize išraiška ir ribinių reikšmių teorema, rasime pereinamųjų funkcijų ribines reikšmes. Pereinamųjų funkcijų $h_{ij}(t)$ ribines reikšmes, kai $t \rightarrow \infty$, pažymėsime taip:

$$h_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} h_{ij}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pH_{ij}(p); \quad (2.4.2.1)$$

čia h_{ij} ; i – tojo generatoriaus virpesio fazės reakcijos i j – tojo generatoriaus virpesio fazės vienetinį šuolį ribinė reikšmė, o

$$H_{ij}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \frac{e^{-pk\tau}}{(p+\kappa)^{k+1}} \{B^k\}_{ij}.$$

Ieškome pereinamosios funkcijos $h_{11}(t)$ ribinės reikšmės:

$$h_{11} = h_{11}(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pH_{11}(p); \quad (2.4.2.2)$$

čia

$$\begin{aligned} H_{11}(p) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \frac{e^{-pk\tau}}{(p+\kappa)^{k+1}} \{B^k\}_{11} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \frac{e^{-pk\tau}}{(p+\kappa)^{k+1}} \cdot \frac{1}{15} \cdot (3 \cdot 2^k - 6 \cdot ba^{k+1} - 6ab^{k+1}) = \\ &= \frac{1}{5(p+\kappa)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2\kappa e^{-p\tau}}{2(p+\kappa)}\right)^k - \frac{2ba}{5(p+\kappa)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\kappa e^{-p\tau} \cdot a}{2(p+\kappa)}\right)^k - \frac{2ba}{5(p+\kappa)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\kappa e^{-p\tau} \cdot b}{2(p+\kappa)}\right)^k = \\ &= \frac{1}{5(p+\kappa)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\kappa e^{-p\tau}}{p+\kappa}} + \frac{2}{5(p+\kappa)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\kappa e^{-p\tau} \cdot a}{2(p+\kappa)}} + \frac{2}{5(p+\kappa)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\kappa e^{-p\tau} \cdot b}{2(p+\kappa)}} = \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{p+\kappa - \kappa e^{-p\tau}} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2(p+\kappa) - a\kappa e^{-p\tau}} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2(p+\kappa) - b\kappa e^{-p\tau}}. \end{aligned}$$

$H_{11}(p)$ išraišką įstatę į (2.4.2.2), randame:

$$\begin{aligned} h_{11}(\infty) &= \lim_{p \rightarrow 0} pH_{11}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{p+\kappa - \kappa e^{-p\tau}} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2(p+\kappa) - a\kappa e^{-p\tau}} + \right. \\ &+ \left. \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2(p+\kappa) - b\kappa e^{-p\tau}} \right) = \frac{1}{5} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{p+\kappa - \kappa e^{-p\tau}} + \frac{4}{5} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{2(p+\kappa) - a\kappa e^{-p\tau}} + \\ &+ \frac{4}{5} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{2(p+\kappa) - b\kappa e^{-p\tau}} = \frac{1}{5} R_1 + \frac{4}{5} R_2 + \frac{4}{5} R_3; \end{aligned} \quad (2.4.2.3)$$

čia

$$R_1 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{p+\kappa - \kappa e^{-p\tau}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \kappa e^{-p\tau} \cdot \tau} = \frac{1}{1 + \kappa\tau},$$

$$R_2 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{2(p+\kappa) - a\kappa e^{-p\tau}} = \frac{4}{5} \frac{0}{2(\kappa+0) - a\kappa} = 0,$$

$$R_3 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{2(p+\kappa) - b\kappa e^{-p\tau}} = \frac{4}{5} \frac{0}{2(\kappa+0) - b\kappa} = 0.$$

R_1 išraišką radome pritaikę Lopitalio taisyklę. Išraiškas R_1, R_2, R_3 įstatę į (2.4.2.3), gauname:

$$h_{11}(\infty) = \frac{1}{5} R_1 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1 + \kappa\tau}.$$

Analogiškai randamos ir kitų pereinamųjų funkcijų ribinės reikšmės. Sinchronizacijos sistemos visų pereinamųjų funkcijų nusistovėjusias reikšmes galima užrašyti taip:

$$h_{ij}(\infty) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1 + \kappa\tau} \quad i = \overline{1,4}; \quad j = 1,$$

$$h_{ij}(\infty) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1 + \kappa\tau} \quad i = \overline{1,4}; \quad j = 2,$$

$$h_{ij}(\infty) = \frac{4}{15} \cdot \frac{1}{1 + \kappa\tau} \quad i = \overline{1,4}; \quad j = 3,$$

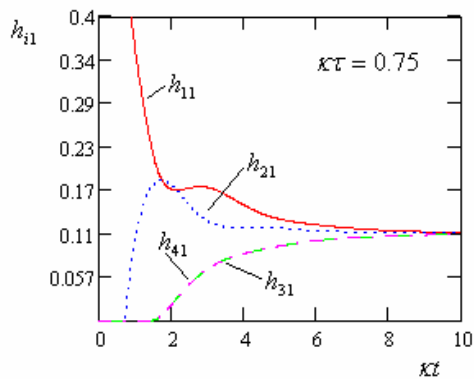
$$h_{ij}(\infty) = \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{1 + \kappa\tau} \quad i = \overline{1,4}; \quad j = 4.$$

Užrašome pereinamųjų funkcijų ribinių reikšmių matricą:

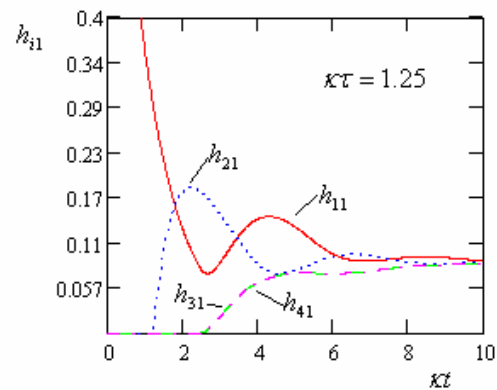
$$h(\infty) = (h_{ij}(\infty)) = \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{1 + \kappa\tau} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}. \quad (2.4.2.4)$$

2.4.3 PEREINAMŪJŲ FUNKCIJŲ TYRIMAS

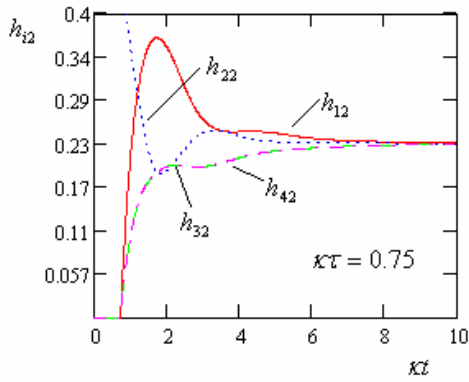
Remiantis gautomis sistemos pereinamųjų funkcijų (2.4.1.8) išraiškomis ir jų (2.4.2.4) ribinėmis reikšmėmis, išstirsime sinchronizacijos sistemos pereinamuosius procesus.



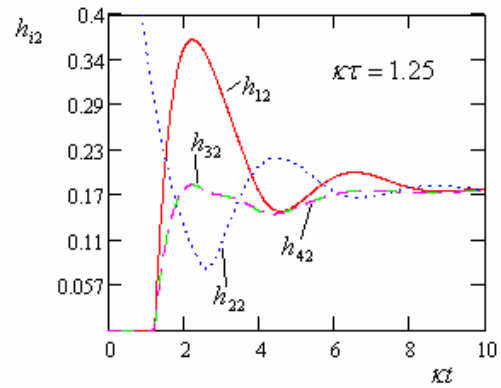
a)



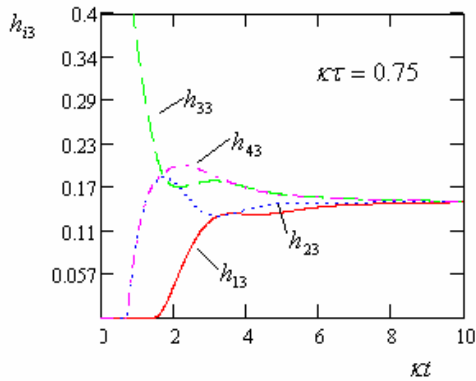
b)



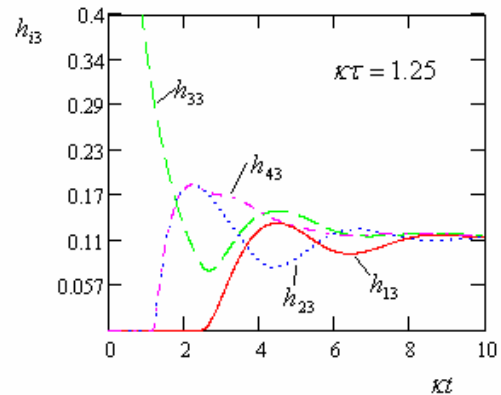
c)



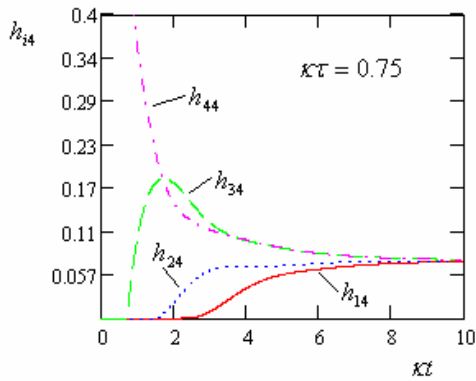
d)



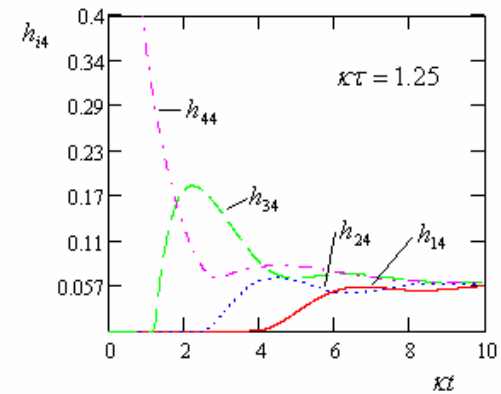
e)



f)



g)



h)

2.4.3.1 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{ij}(t)$ grafikai

Pereinamųjų funkcijų $h_{ij}(t)$ grafikai pateikti 2.4.3.1 paveiksle, taip pat 4 priede. Analizuojant pereinamųjų funkcijų grafikus galime padaryti šias išvadas:

1. Pereinamojo proceso trukmė ir pobūdis priklauso nuo sandaugos $\kappa\tau$ (čia κ - stiprinimo koeficientas, τ - signalo vėlinimas).

2. Pereinamojo proceso trukmė didėja, didėjant $\kappa\tau$. Pereinamasis procesas įgyja virpamojo proceso požymių, kai $\kappa\tau > 0.75$.
3. Kai vėlinimo τ ir koeficiento κ sandauga daug mažesnė už vienetą ($\kappa\tau < 0.01$), pereinamosios funkcijos praktiškai nepriklauso nuo vėlinimo dydžio. Tuo atveju galime nagrinėti supaprastintą sistemos matematinį modelį – matricinę diferencialinę lygtį be vėluojančio argumento.

2.5 SISTEMOS GENERATORIŲ VIRPESIŲ FAZIŲ SKIRTUMAI

Tirsime generatorių virpesių fazių skirtumų pereinamuosius procesus ir apskaičiuosime sinchronizacijos sistemos generatorių virpesio fazių skirtumų ribines reikšmes.

2.5.1 GENERATORIŲ VIRPESIŲ FAZIŲ SKIRTUMŲ ANALIZINIŲ IŠRAIŠKŲ IŠVEDIMAS

Ištirsime generatorių virpesių fazių skirtumų $x_i(t) - x_j(t)$, $i, j = \overline{1,4}$, $i > j$, priklausomybę nuo laiko. Remdamiesi (2.2.1) diferencialinės lygties sprendiniu

$$x(t) \div \sum_{k=0}^L (A^{-1} B_1 e^{-p\tau})^k X_0(p), \quad 0 \leq t < (L+1)\tau$$

rasime $x_i(t)$ $i = \overline{1,4}$. (2.5.1.1) išraišką galime užrašyti taip (žr. (2.2.34)):

$$\begin{aligned} x(t) \div \sum_{k=0}^L (A^{-1} B_1 e^{-p\tau})^k X_0(p) &= \sum_{k=0}^L (A^{-1})^k B_1^k e^{-pk\tau} A^{-1} Z(p) = \\ \sum_{k=0}^L \frac{1}{(p+\kappa)^{k+1}} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k e^{-pk\tau} B^k Z(p) &= \frac{1}{(p+\kappa)} Z(p) + \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \frac{e^{-pk\tau}}{(p+\kappa)^k} B^k Z(p). \end{aligned} \quad (2.5.1.1)$$

čia

$$\begin{aligned} B^k Z(p) &= \begin{pmatrix} B_{11}^k & B_{12}^k & B_{13}^k & B_{14}^k \\ B_{21}^k & B_{22}^k & B_{23}^k & B_{24}^k \\ B_{31}^k & B_{32}^k & B_{33}^k & B_{34}^k \\ B_{41}^k & B_{42}^k & B_{43}^k & B_{44}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1(p) \\ Z_2(p) \\ Z_3(p) \\ Z_4(p) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} Z_1(p)(B^k)_{11} + Z_2(p)(B^k)_{12} + Z_3(p)(B^k)_{13} + Z_4(p)(B^k)_{14} \\ Z_1(p)(B^k)_{21} + Z_2(p)(B^k)_{22} + Z_3(p)(B^k)_{23} + Z_4(p)(B^k)_{24} \\ Z_1(p)(B^k)_{31} + Z_2(p)(B^k)_{32} + Z_3(p)(B^k)_{33} + Z_4(p)(B^k)_{34} \\ Z_1(p)(B^k)_{41} + Z_2(p)(B^k)_{42} + Z_3(p)(B^k)_{43} + Z_4(p)(B^k)_{44} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remdamiesi (2.5.1.1) ieškome skirtumo $X_2(p) - X_1(p)$:

$$\begin{aligned} X_2(p) - X_1(p) &= \left(\frac{Z_1(p)}{(p+\kappa)} - \frac{Z_2(p)}{(p+\kappa)} \right) + \\ &+ \sum_{k=0}^L \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \frac{e^{-pk\tau}}{(p+\kappa)^k} \left((B^k Z(p))_2 - (B^k Z(p))_1 \right). \end{aligned} \quad (2.5.1.2)$$

čia

$$\begin{aligned} (B^k Z(p))_2 - (B^k Z(p))_1 &= Z_1(p) \left((B^k)_{21} - (B^k)_{11} \right) + Z_2(p) \left((B^k)_{22} - (B^k)_{12} \right) + \\ &+ Z_3(p) \left((B^k)_{23} - (B^k)_{13} \right) + Z_4(p) \left((B^k)_{24} - (B^k)_{14} \right), \end{aligned}$$

išraiškos $Z_l(p)$, $l = \overline{1,4}$ pateiktos 1 priede.

Istatę šią išraišką į (2.5.1.2) turime:

$$\begin{aligned} X_2(p) - X_1(p) &= \left(\frac{Z_1(p)}{(p+\kappa)} - \frac{Z_2(p)}{(p+\kappa)} \right) + \sum_{k=1}^L \left(\left(\frac{\kappa}{2} \right)^k \frac{\kappa^k Z_1(p) e^{-pk\tau}}{(p+\kappa)^{k+1}} \right. \\ &\cdot \left((B^k)_{21} - (B^k)_{11} \right) + \frac{\kappa^k Z_2(p) e^{-pk\tau}}{(p+\kappa)^{k+1}} \cdot \left((B^k)_{22} - (B^k)_{12} \right) + \frac{\kappa^k Z_3(p) e^{-pk\tau}}{(p+\kappa)^{k+1}} \\ &\left. \left((B^k)_{23} - (B^k)_{13} \right) + \frac{\kappa^k Z_4(p) e^{-pk\tau}}{(p+\kappa)^{k+1}} \cdot \left((B^k)_{24} - (B^k)_{14} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.5.1.3)$$

Išraišką (2.5.1.3) perrašome:

$$\begin{aligned} X_2(p) - X_1(p) &= L(A_{21}(\kappa)) + \sum_{k=1}^L \frac{1}{2^k} \left(\left((B^k)_{21} - (B^k)_{11} \right) L(a_1(\kappa, k)) + \right. \\ &+ \left((B^k)_{22} - (B^k)_{12} \right) L(a_2(\kappa, k)) + \left((B^k)_{23} - (B^k)_{13} \right) L(a_3(\kappa, k)) + \\ &\left. + \left((B^k)_{24} - (B^k)_{14} \right) L(a_4(\kappa, k)) \right) \end{aligned} \quad (2.5.1.4)$$

Pažymėkime:

$$\begin{aligned} S_0^{(k)}(p) &= \frac{\kappa^{k-1}}{(p+\kappa)^k} & S_0^{(k)}(\kappa) &= \frac{(\kappa)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\kappa} \\ S_1^{(k)}(p) &= \frac{\kappa^k}{p(p+\kappa)^k} & S_1^{(k)}(\kappa) &= 1 - \sum_{v=0}^{k-1} \frac{(\kappa)^v}{v!} e^{-\kappa} \\ S_2^{(k)}(p) &= \frac{\kappa^{k+1}}{p^2(p+\kappa)^k} & S_2^{(k)}(\kappa) &= \kappa - k + \sum_{v=0}^{k-1} \sum_{r=0}^v \frac{(\kappa)^r}{r!} e^{-\kappa} \end{aligned} \quad (2.1.4.2.1.7)$$

Ieškome išraiškų $L(A_{21}(\kappa))$, $L(a_1(\kappa, k))$, $L(a_2(\kappa, k))$, $L(a_3(\kappa, k))$, $L(a_4(\kappa, k))$.

$$\begin{aligned} L(A_{21}(\kappa)) &= (\varphi_{02} - \varphi_{01}) S_0^{(1)}(\kappa) + \left(\left(\frac{f_{02}}{\kappa} - \frac{f_{13}}{2\kappa} \kappa\tau + \frac{\varphi_{13}}{2} \right) - \left(\frac{f_{01}}{\kappa} - \frac{f_{02}}{\kappa} \kappa\tau + \varphi_{02} \right) \right) S_1^{(1)}(\kappa) + \\ &+ \left(\frac{f_{13}}{2\kappa} - \frac{f_{02}}{\kappa} \right) S_2^{(1)}(\kappa) - \left(\frac{f_{13}}{2\kappa} - \frac{f_{02}}{\kappa} \right) S_2^{(1)}(\kappa - \kappa\tau) \mathbb{I}(\kappa - \kappa\tau) - \left(\frac{\varphi_{13}}{2} - \varphi_{02} \right) S_1^{(1)}(\kappa - \kappa\tau) \mathbb{I}(\kappa - \kappa\tau) \\ L(a_1(\kappa, l)) &= \varphi_{01} S_0^{(l+1)}(\kappa - l\kappa\tau) \mathbb{I}(\kappa - l\kappa\tau) + \left(\frac{f_{01}}{\kappa} - \frac{f_{02}}{\kappa} \kappa\tau + \varphi_{02} \right) S_1^{(l+1)}(\kappa - l\kappa\tau) \mathbb{I}(\kappa - l\kappa\tau) + \\ &+ \frac{f_{02}}{\kappa} S_2^{(l+1)}(\kappa - l\kappa\tau) \mathbb{I}(\kappa - \kappa\tau) - \frac{f_{02}}{\kappa} S_2^{(l+1)}(\kappa - (l+1)\kappa\tau) \mathbb{I}(\kappa - (l+1)\kappa\tau) - \\ &- \varphi_{02} S_1^{(l+1)}(\kappa - (l+1)\kappa\tau) \mathbb{I}(\kappa - (l+1)\kappa\tau); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(a_2(\kappa, l)) &= \varphi_{02} S_0^{(l+1)}(\kappa - l\kappa\tau)l(\kappa - l\kappa\tau) + \left(\frac{f_{02}}{\kappa} - \frac{f_{13}}{\kappa} \kappa\tau + \frac{\varphi_{13}}{2} \right) S_1^{(l+1)}(\kappa - l\kappa\tau)l(\kappa - l\kappa\tau) + \\
&+ \frac{f_{13}}{2\kappa} S_2^{(l+1)}(\kappa - l\kappa\tau)l(\kappa - \kappa\tau) - \frac{f_{13}}{\kappa} S_2^{(l+1)}(\kappa - (l+1)\kappa\tau)l(\kappa - (l+1)\kappa\tau) - \\
&- \frac{\varphi_{13}}{2} S_1^{(l+1)}(\kappa - (l+1)\kappa\tau)l(\kappa - (l+1)\kappa\tau);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(a_3(\kappa, l)) &= \varphi_{03} S_0^{(l+1)}(\kappa - l\kappa\tau)l(\kappa - l\kappa\tau) + \left(\frac{f_{03}}{\kappa} - \frac{f_{24}}{2\kappa} \kappa\tau + \frac{\varphi_{24}}{2} \right) S_1^{(l+1)}(\kappa - l\kappa\tau)l(\kappa - l\kappa\tau) + \\
&+ \frac{f_{24}}{2\kappa} S_2^{(l+1)}(\kappa - l\kappa\tau)l(\kappa - \kappa\tau) - \frac{f_{24}}{2\kappa} S_2^{(l+1)}(\kappa - (l+1)\kappa\tau)l(\kappa - (l+1)\kappa\tau) - \\
&- \frac{\varphi_{24}}{2} S_1^{(l+1)}(\kappa - (l+1)\kappa\tau)l(\kappa - (l+1)\kappa\tau);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(a_4(\kappa, l)) &= \varphi_{04} S_0^{(l+1)}(\kappa - l\kappa\tau)l(\kappa - l\kappa\tau) + \left(\frac{f_{04}}{\kappa} - \frac{f_{23}}{2\kappa} \kappa\tau + \frac{\varphi_{23}}{2} \right) S_1^{(l+1)}(\kappa - l\kappa\tau)l(\kappa - l\kappa\tau) + \\
&+ \frac{f_{23}}{2\kappa} S_2^{(l+1)}(\kappa - l\kappa\tau)l(\kappa - \kappa\tau) - \frac{f_{23}}{2\kappa} S_2^{(l+1)}(\kappa - (l+1)\kappa\tau)l(\kappa - (l+1)\kappa\tau) - \\
&- \frac{\varphi_{23}}{2} S_1^{(l+1)}(\kappa - (l+1)\kappa\tau)l(\kappa - (l+1)\kappa\tau);
\end{aligned}$$

čia

$$\begin{aligned}
f_{13} &= f_{01} + f_{03}; & \varphi_{13} &= \varphi_{01} + \varphi_{03}; \\
f_{24} &= f_{02} + f_{04}; & \varphi_{24} &= \varphi_{02} + \varphi_{04}; \\
f_{23} &= f_{02} + f_{03} & \varphi_{23} &= \varphi_{02} + \varphi_{03}
\end{aligned}$$

Gautas išraiškas įstatę į (2.5.1.4), gauname generatorių virpesių fazių skirtumo $x_2(t) - x_1(t)$ analizinę išraišką.

Analogiškai randame skirtumus $x_3(t) - x_1(t)$, $x_3(t) - x_2(t)$, $x_4(t) - x_1(t)$, $x_4(t) - x_2(t)$, $x_4(t) - x_3(t)$.

2.5.2 GENERATORIŲ VIRPESIŲ FAZIŲ SKIRTUMŲ RIBINIŲ REIKŠMIŲ SKAIČIAVIMAS

Rasime generatorių virpesių fazių skirtumų

$$x_2(t) - x_1(t), \quad x_3(t) - x_1(t), \quad x_4(t) - x_1(t), \quad x_3(t) - x_2(t), \quad x_4(t) - x_2(t), \quad x_4(t) - x_3(t)$$

ribines reikšmes. Panaudoję ribinės reikšmės teoremą, rašome:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_i(t) - x_j(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} p(X_i(p) - X_j(p)), \quad i = \overline{2,4}, \quad j = \overline{1,3}. \quad (2.5.2.1)$$

Užrašome diferencialinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} Dx_1(t) = \kappa x_2(t - \tau) - \kappa x_1(t) + z_1(t), \\ Dx_2(t) = \frac{\kappa}{2} x_1(t - \tau) - \kappa x_2(t) + \frac{\kappa}{2} x_3(t - \tau) + z_2(t), \\ Dx_3(t) = \frac{\kappa}{2} x_2(t - \tau) - \kappa x_3(t) + \frac{\kappa}{2} x_4(t - \tau) + z_3(t), \\ Dx_4(t) = \frac{\kappa}{2} x_2(t - \tau) + \frac{\kappa}{2} x_3(t - \tau) - \kappa x_4(t) + z_4(t). \end{cases}$$

Šią sistemą keičiame operatorinių lygčių sistema:

$$\begin{cases} (p + \kappa) \cdot X_1(p) - \kappa \cdot X_2(p)e^{-p\tau} = Z_1(p), \\ -\frac{\kappa}{2} \cdot X_1(p)e^{-p\tau} + (p + \kappa) \cdot X_2(p)e^{-p\tau} - \frac{\kappa}{2} \cdot X_3(p)e^{-p\tau} = Z_2(p), \\ -\frac{\kappa}{2} \cdot X_2(p)e^{-p\tau} + (p + \kappa) \cdot X_3(p) - \frac{\kappa}{2} \cdot X_4(p)e^{-p\tau} = Z_3(p), \\ -\frac{\kappa}{2} \cdot X_2(p)e^{-p\tau} - \frac{\kappa}{2} \cdot X_3(p)e^{-p\tau} + (p + \kappa) \cdot X_4(p)e^{-p\tau} = Z_4(p). \end{cases}$$

Gautąją lygčių sistemą užrašome matriciniu pavidalu:

$$\begin{pmatrix} (p + \kappa) & -\kappa e^{-p\tau} & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} & (p + \kappa) & -\frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} & 0 \\ 0 & -\frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} & (p + \kappa) & -\frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} \\ 0 & -\frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} & (p + \kappa) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(p) \\ X_2(p) \\ X_3(p) \\ X_4(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1(p) \\ Z_2(p) \\ Z_3(p) \\ Z_4(p) \end{pmatrix}. \quad (2.5.2.2)$$

(2.5.2.2) lygčių sistemą sprendžiame Kramerio metodu:

$$X_i(p) = \frac{\Delta(i)}{\Delta}; \quad (2.5.2.3)$$

čia

$$\Delta = \begin{vmatrix} (p + \kappa) & -\kappa e^{-p\tau} & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} & (p + \kappa) & -\frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} & 0 \\ 0 & -\frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} & (p + \kappa) & -\frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} \\ 0 & -\frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} & (p + \kappa) \end{vmatrix},$$

$\Delta(i)$ - determinantas gautas iš Δ , pakeitus i – tąjį stulpelį laisvųjų narių stulpeliu.

Apskaičiuosime skirtumą $x_2(t) - x_1(t)$. Randame $X_1(p)$ ir $X_2(p)$.

$$X_1(p) = \begin{vmatrix} Z_1(p) & -\kappa e^{-p\tau} & 0 & 0 \\ Z_2(p) & (p + \kappa) & -\frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} & 0 \\ Z_3(p) & -\frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} & (p + \kappa) & -\frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} \\ Z_4(p) & -\frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} & (p + \kappa) \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\Delta}$$

Determinantą skleidžiame pirmo stulpelio adjunktais:

$$\begin{aligned}
 X_1(p) &= (-1)^{1+1} \frac{Z_1(p)}{\Delta} \begin{vmatrix} (p+\kappa) & -\frac{\kappa}{2}e^{-p\tau} & 0 \\ -\frac{\kappa}{2}e^{-p\tau} & (p+\kappa) & -\frac{\kappa}{2}e^{-p\tau} \\ -\frac{\kappa}{2}e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{2}e^{-p\tau} & (p+\kappa) \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \frac{Z_2(p)}{\Delta} \\
 &\cdot \begin{vmatrix} -\kappa e^{-p\tau} & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa}{2}e^{-p\tau} & (p+\kappa) & -\frac{\kappa}{2}e^{-p\tau} \\ -\frac{\kappa}{2}e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{2}e^{-p\tau} & (p+\kappa) \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \frac{Z_3(p)}{\Delta} \begin{vmatrix} -\kappa e^{-p\tau} & 0 & 0 \\ (p+\kappa) & -\frac{\kappa}{2}e^{-p\tau} & 0 \\ -\frac{\kappa}{2}e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{2}e^{-p\tau} & (p+\kappa) \end{vmatrix} + \\
 &+ (-1)^{4+1} \frac{Z_4(p)}{\Delta} \begin{vmatrix} -\kappa e^{-p\tau} & 0 & 0 \\ (p+\kappa) & -\frac{\kappa}{2}e^{-p\tau} & 0 \\ -\frac{\kappa}{2}e^{-p\tau} & (p+\kappa) & (p+\kappa) \end{vmatrix} = \\
 &= \frac{Z_1(p)}{\Delta} \left((p+\kappa)^3 - \frac{\kappa^3}{8}e^{-3p\tau} - \frac{\kappa^2}{2}e^{-2p\tau}(p+\kappa) \right) + \frac{Z_2(p)}{\Delta} \left((p+\kappa)^2 \kappa e^{-p\tau} - \frac{\kappa^3}{4}e^{-3p\tau} \right) + \\
 &+ \frac{Z_3(p)}{\Delta} \left((p+\kappa) \frac{\kappa^2}{2}e^{-2p\tau} \right) + \frac{Z_4(p)}{\Delta} \left(\frac{\kappa^3}{4}e^{-3p\tau} \right).
 \end{aligned}$$

Analogiškai randame $X_2(p)$:

$$\begin{aligned}
 X_2(p) &= \begin{vmatrix} (p+\kappa) & Z_1(p) & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa}{2}e^{-p\tau} & Z_2(p) & -\frac{\kappa}{2}e^{-p\tau} & 0 \\ 0 & Z_3(p) & (p+\kappa) & -\frac{\kappa}{2}e^{-p\tau} \\ 0 & Z_4(p) & -\frac{\kappa}{2}e^{-p\tau} & (p+\kappa) \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\Delta} = \\
 &= \frac{Z_1(p)}{\Delta} \left((p+\kappa)^2 \frac{\kappa}{2}e^{-p\tau} - \frac{\kappa^3}{8}e^{-3p\tau} \right) + \frac{Z_2(p)}{\Delta} \left((p+\kappa)^3 - (p+\kappa) \frac{\kappa^2}{4}e^{-2p\tau} \right) + \\
 &+ \frac{Z_3(p)}{\Delta} \left((p+\kappa)^2 \frac{\kappa}{2}e^{-p\tau} \right) + \frac{Z_4(p)}{\Delta} \left((p+\kappa) \frac{\kappa^2}{4}e^{-2p\tau} \right).
 \end{aligned}$$

Užrašome skirtumą $X_2(p) - X_1(p)$:

$$X_2(p) - X_1(p) = \left((p+\kappa)^2 \frac{\kappa}{2}e^{-p\tau} - \frac{\kappa^3}{8}e^{-3p\tau} - (p+\kappa)^3 + \frac{\kappa^3}{8}e^{-3p\tau} + \frac{\kappa^2}{2}e^{-2p\tau}(p+\kappa) \right).$$

$$\begin{aligned} & \cdot \frac{Z_1(p)}{\Delta} + \frac{Z_2(p)}{\Delta} \left((p+\kappa)^3 - (p+\kappa) \frac{\kappa^2}{4} e^{-2p\tau} - (p+\kappa)^2 \kappa e^{-p\tau} + \frac{\kappa^3}{4} e^{-3p\tau} \right) + \\ & + \frac{Z_3(p)}{\Delta} \left((p+\kappa)^2 \frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} - (p+\kappa) \frac{\kappa^2}{2} e^{-2p\tau} \right) + \frac{Z_4(p)}{\Delta} \left((p+\kappa) \frac{\kappa^2}{4} e^{-2p\tau} - \frac{\kappa^3}{4} e^{-3p\tau} \right). \end{aligned}$$

Tada skirtumą $\lim_{t \rightarrow 0} (x_2(t) - x_1(t))$ galime užrašyti taip:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} (x_2(t) - x_1(t)) &= \lim_{p \rightarrow 0} (p(X_2(p) - X_1(p))) = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^2 Z_1(p)}{\Delta} \cdot \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p+\kappa)^2 \frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} - \frac{\kappa^3}{8} e^{-3p\tau} - (p+\kappa)^3 + \frac{\kappa^3}{8} e^{-3p\tau} + \frac{\kappa^2}{2} e^{-2p\tau} (p+\kappa)}{p} + \\ &+ \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^2 Z_2(p)}{\Delta} \cdot \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p+\kappa)^3 - (p+\kappa) \frac{\kappa^2}{4} e^{-2p\tau} - (p+\kappa)^2 \kappa e^{-p\tau} + \frac{\kappa^3}{4} e^{-3p\tau}}{p} + \\ &+ \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^2 Z_3(p)}{\Delta} \cdot \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p+\kappa)^2 \frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} - (p+\kappa) \frac{\kappa^2}{2} e^{-2p\tau}}{p} + \\ &+ \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^2 Z_4(p)}{\Delta} \cdot \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p+\kappa) \frac{\kappa^2}{4} e^{-2p\tau} - \frac{\kappa^3}{4} e^{-3p\tau}}{p} = A_1 L_1 + A_2 L_2 + A_3 L_3 + A_4 L_4. \end{aligned}$$

Pažymėkime

$$A_i = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^2 Z_i(p)}{\Delta}.$$

Gauname neapibrėžtumą $\left(\frac{0}{0} \right)$, todėl taikome Liopitalio taisyklę:

$$A_i = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^2 Z_i(p)}{\Delta} = \frac{\lim_{p \rightarrow 0} (p^2 Z_i(p))'_p}{\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_p}$$

Pažymėkime $L = \lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_p$ ir ją apskaičiuokime:

$$L = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d}{dp} (\Delta) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d}{dp} \begin{vmatrix} (p+\kappa) & -\kappa e^{-p\tau} & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} & (p+\kappa) & -\frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} & 0 \\ 0 & -\frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} & (p+\kappa) & -\frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} \\ 0 & -\frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} & -\frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} & (p+\kappa) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 1 & -\kappa & 0 & 0 \\ \frac{\kappa\tau}{2} & \kappa & -\frac{\kappa}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\kappa}{2} & \kappa & -\frac{\kappa}{2} \\ 0 & -\frac{\kappa}{2} & -\frac{\kappa}{2} & \kappa \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \kappa & \kappa\tau & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa}{2} & 1 & -\frac{\kappa}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\kappa\tau}{2} & \kappa & -\frac{\kappa}{2} \\ 0 & \frac{\kappa\tau}{2} & -\frac{\kappa}{2} & \kappa \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \kappa & -\kappa & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa}{2} & \kappa & \frac{\kappa\tau}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\kappa}{2} & 1 & -\frac{\kappa}{2} \\ 0 & -\frac{\kappa}{2} & \frac{\kappa\tau}{2} & \kappa \end{vmatrix} + \\
&+ \begin{vmatrix} \kappa & -\kappa & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa}{2} & \kappa & -\frac{\kappa}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\kappa}{2} & \kappa & \frac{\kappa\tau}{2} \\ 0 & -\frac{\kappa}{2} & -\frac{\kappa}{2} & 1 \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

$$L = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4; \quad (2.5.2.4)$$

čia

$$\Delta_1 = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \kappa & -\frac{\kappa}{2} & 0 \\ -\frac{\kappa}{2} & \kappa & -\frac{\kappa}{2} \\ -\frac{\kappa}{2} & -\frac{\kappa}{2} & \kappa \end{vmatrix} + \frac{\kappa\tau}{2} (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} \kappa & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa}{2} & \kappa & -\frac{\kappa}{2} \\ -\frac{\kappa}{2} & -\frac{\kappa}{2} & \kappa \end{vmatrix} = \frac{3}{8} \kappa^3 (1 + \kappa\tau),$$

$$\Delta_2 = (-1)^{1+1} \cdot \kappa \begin{vmatrix} 1 & -\frac{\kappa}{2} & 0 \\ \frac{\kappa\tau}{2} & \kappa & -\frac{\kappa}{2} \\ \frac{\kappa\tau}{2} & -\frac{\kappa}{2} & \kappa \end{vmatrix} - \frac{\kappa}{2} (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} \kappa\tau & 0 & 0 \\ \frac{\kappa\tau}{2} & \kappa & -\frac{\kappa}{2} \\ \frac{\kappa\tau}{2} & -\frac{\kappa}{2} & \kappa \end{vmatrix} = \frac{3}{4} \kappa^3 (1 + \kappa\tau),$$

$$\Delta_3 = (-1)^{1+1} \cdot \kappa \begin{vmatrix} \kappa & \frac{\kappa\tau}{2} & 0 \\ -\frac{\kappa}{2} & 1 & -\frac{\kappa}{2} \\ -\frac{\kappa}{2} & \frac{\kappa\tau}{2} & \kappa \end{vmatrix} - \frac{\kappa}{2} (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -\kappa & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa}{2} & \kappa & -\frac{\kappa}{2} \\ -\frac{\kappa}{2} & \frac{\kappa\tau}{2} & \kappa \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \kappa^3 (1 + \kappa\tau),$$

$$\Delta_4 = (-1)^{1+1} \cdot \kappa \begin{vmatrix} \kappa & -\frac{\kappa}{2} & 0 \\ -\frac{\kappa}{2} & \kappa & \frac{\kappa\tau}{2} \\ -\frac{\kappa}{2} & -\frac{\kappa}{2} & 1 \end{vmatrix} - \frac{\kappa}{2} (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -\kappa & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa}{2} & \kappa & \frac{\kappa\tau}{2} \\ -\frac{\kappa}{2} & \frac{\kappa\tau}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \kappa^3 (1 + \kappa\tau).$$

Šias išraiškas įstatę į (2.5.2.4), gauname:

$$L = \frac{15}{8} \kappa^3 (1 + \kappa\tau). \quad (2.5.2.5)$$

Pažymėkime:

$$Z'_i = \lim_{p \rightarrow 0} p(Z_i(p)); \quad i = \overline{1,4}. \quad (2.5.2.6)$$

Apskaičiuojant (2.5.2.6) ribą (skaičiavimai pateikiami 3 priede), gauname:

$$Z'_1(p) = f_{01} \quad Z'_2(p) = f_{02} \quad Z'_3 = f_{03}, \quad Z'_4 = f_{04}.$$

Ieškome ribų L_i , $i = \overline{1,4}$:

$$L_1 = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p + \kappa)^2 \frac{\kappa}{2} e^{-p\tau} - (p + \kappa)^3 + \frac{\kappa^2}{2} e^{-2p\tau} (p + \kappa)}{p}$$

Pritaikę Liopitalio taisyklę ir perėję prie ribos, gauname:

$$L_1 = \frac{-\kappa^3 \tau}{2} + \kappa^2 - \kappa^3 \tau + \frac{\kappa^2}{2} - 3\kappa^2 = -\frac{3}{2} \kappa^2 (1 + \kappa \tau).$$

Analogiškai gauname:

$$L_2 = \frac{3}{4} \kappa^2 + \frac{3\kappa^3 \tau}{4} = \frac{3}{4} \kappa^2 (1 + \kappa \tau);$$

$$L_3 = \kappa^2 - \frac{\kappa^3 \tau}{2} + \kappa^3 \tau - \frac{\kappa^2}{2} = \frac{1}{2} \kappa^2 (1 + \kappa \tau);$$

$$L_4 = -\frac{\kappa^3 \tau}{2} + \frac{3}{4} \kappa^3 \tau + \frac{\kappa^2}{4} = \frac{1}{4} \kappa^2 (1 + \kappa \tau).$$

Įvertinę visus skaičiavimus randame

$$\lim_{t \rightarrow 0} (x_2(t) - x_1(t)) = \frac{2}{5} \frac{f_{02} - f_{01}}{\kappa} + \frac{4}{15} \frac{f_{03} - f_{01}}{\kappa} + \frac{2}{15} \frac{f_{04} - f_{01}}{\kappa}. \quad (2.5.2.7)$$

Analogiškai randamos skirtumų

$$x_2(t) - x_1(t), \quad x_3(t) - x_1(t), \quad x_4(t) - x_1(t), \quad x_3(t) - x_2(t), \quad x_4(t) - x_2(t), \quad x_4(t) - x_3(t)$$

ribinės reikšmės:

$$\lim_{t \rightarrow 0} (x_3(t) - x_1(t)) = \frac{f_{03} - f_{01}}{\kappa}, \quad (2.5.2.8)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (x_4(t) - x_1(t)) = \frac{27}{40} \frac{f_{04} - f_{01}}{\kappa} + \frac{5}{40} \frac{f_{03} - f_{01}}{\kappa} + \frac{3}{40} \frac{f_{03} - f_{02}}{\kappa}, \quad (2.5.2.9)$$

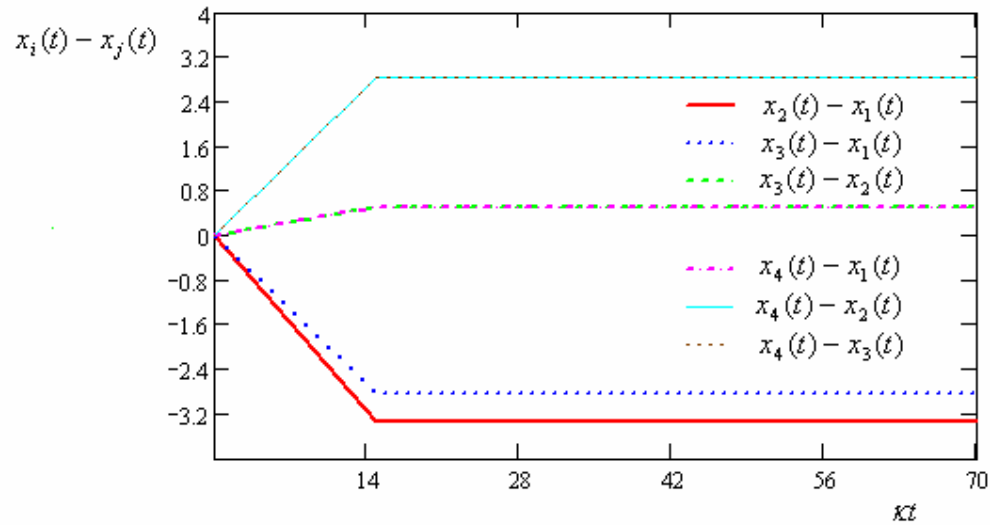
$$\lim_{t \rightarrow 0} (x_3(t) - x_2(t)) = \frac{27}{40} \frac{f_{03} - f_{02}}{\kappa} + \frac{5}{40} \frac{f_{03} - f_{01}}{\kappa} + \frac{3}{40} \frac{f_{04} - f_{01}}{\kappa}, \quad (2.5.2.10)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (x_4(t) - x_2(t)) = \frac{3}{4} \frac{f_{04} - f_{02}}{\kappa}, \quad (2.5.2.11)$$

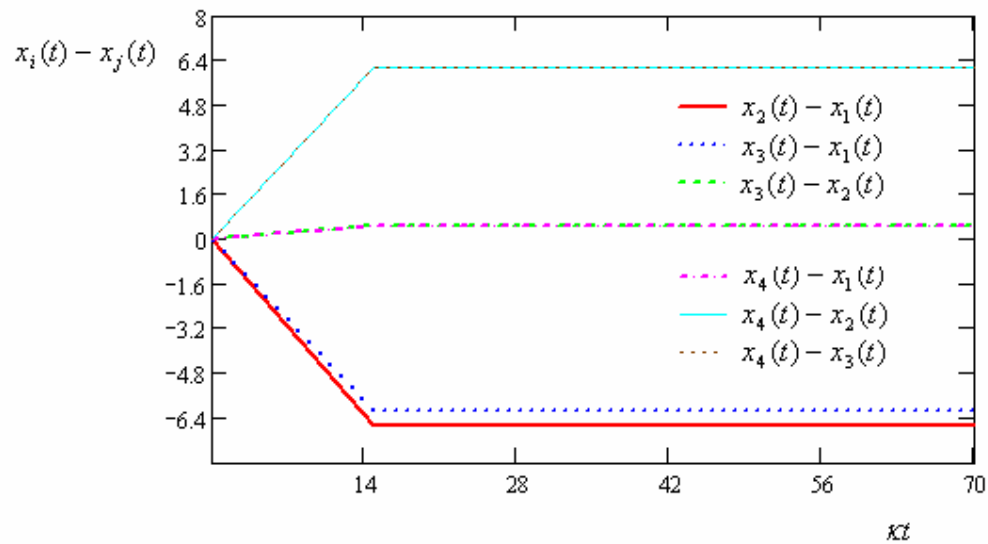
$$\lim_{t \rightarrow 0} (x_4(t) - x_3(t)) = \frac{27}{40} \frac{f_{04} - f_{03}}{\kappa} + \frac{5}{40} \frac{f_{01} - f_{03}}{\kappa} + \frac{3}{40} \frac{f_{01} - f_{02}}{\kappa}. \quad (2.5.2.12)$$

2.5.3 GENERATORIŲ VIRPESIŲ FAZIŲ SKIRTUMŲ TYRIMAS

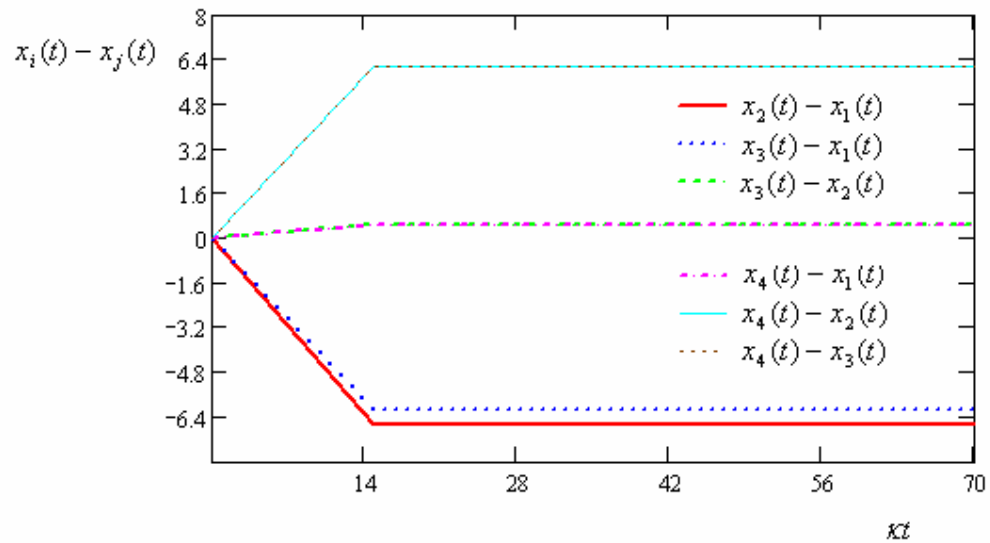
Generatorių virpesių fazių skirtumus pavaizduosime grafiškai ir rezultatus palyginsime su gautomis ribinėmis reikšmėmis.



a) $\kappa\tau = 1.75, \quad f_{01} = 2005, \quad f_{03} = 2000, \quad \varphi_{01} = 0.5, \quad \varphi_{03} = 0.5,$
 $f_{02} = 2000, \quad f_{04} = 2005, \quad \varphi_{02} = 0.5, \quad \varphi_{04} = 0.5$



b) $\kappa\tau = 1.75, \quad f_{01} = 2010, \quad f_{03} = 2000, \quad \varphi_{01} = 0.5, \quad \varphi_{03} = 0.5,$
 $f_{02} = 2000, \quad f_{04} = 2010, \quad \varphi_{02} = 0.5, \quad \varphi_{04} = 0.5$



c) $\kappa\tau = 3, \quad f_{01} = 2005, \quad f_{03} = 2000, \quad \varphi_{01} = 0.5, \quad \varphi_{03} = 0.5,$
 $f_{02} = 2000, \quad f_{04} = 2005, \quad \varphi_{02} = 0.5, \quad \varphi_{04} = 0.5$

2.5.3.1 pav. Generatorių virpesių fazių skirtumų $x_i(t) - x_j(t)$ grafikai

Generatorių virpesių fazių skirtumai pavaizduoti 2.5.3.1 pav. ir 5 priede. Analizuojant grafikus buvo pastebėta, kad generatorių virpesių fazių skirtumai nepriklauso nuo generatorių virpesių fazių pradiniu laiko momentu, o priklauso nuo generatorių savųjų dažnių f_{0i} ir vėlinimo τ .

3 PROGRAMINĖ REALIZACIJA

Skaičiavimai atlikti naudojantis „Mathcad Professional 13“ paketu. Šis paketas orientuotas į mokslinius - techninius skaičiavimus ir patogus tuo, kad čia matematinės išraiškos rašomos jų įprastame pavidale ir juo galima atlikti ne tik skaitmeninius, bet ir simbolinius skaičiavimus.

IŠVADOS

✓ Pereinamojo proceso trukmė sistemoje priklauso nuo sandaugos $\kappa\tau$. Kai $\kappa\tau$ didėja, pereinamojo proceso trukmė turi tendenciją didėti. Pereinamasis procesas įgyja virpamuoją proceso požymių, kai $\kappa\tau > 0,75$.

✓ Kai vėlinimo τ ir koeficiento κ sandauga daug mažesnė už vienetą ($\kappa\tau > 0,01$), pereinamosios funkcijos praktiškai nepriklauso nuo vėlinimo dydžio. Tuo atveju galima nagrinėti supaprastintą sistemos matematinį modelį – matricinę diferencialinę lygtį be vėluojančio argumento.

✓ Generatorių virpesių fazių skirtumai nepriklauso nuo generatorių virpesių fazių pradiniu laiko momentu, o priklauso nuo generatorių savųjų dažnių ir vėlinimo.

LITERATŪRA

1. Ambrazevičius A., Domarkas A. Matematinės fizikos lygtys. Vilnius: Aldorija, 1999, 2d. – 388 p.
2. Krivickas R., Jočys A. Grandinių teorijos pagrindai. Vilnius: Mokslas, 1980, 294 p.
3. Kvedaras B., Matricų teorija. Kaunas: VDU, 1999, 362 p.
4. Kvedaras B., Matricų teorija. Vilnius: 2000, 2d., 390 p.
5. Rimas J. Operacinis skaičiavimas. Kaunas, 1999, 51 p.

1 PRIEDAS. $Z(p)$ RADIMAS

Remdamiesi išraiškėmis

$$f_i(t) = f_{0i} + \Delta f_i(t), \quad i = \overline{1,4},$$

$$\varphi_i'(t) = f_i(t) \quad i = \overline{1,4},$$

užrašome diferencialinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) = f_{01}(t) + \kappa\varphi_2(t-\tau) - \kappa\varphi_1(t), \\ \varphi_2'(t) = f_{02}(t) + \frac{\kappa}{2}(\varphi_1(t-\tau) + \varphi_3(t-\tau)) - \kappa\varphi_2(t), \\ \varphi_3'(t) = f_{03}(t) + \frac{\kappa}{2}(\varphi_2(t-\tau) + \varphi_4(t-\tau)) - \kappa\varphi_3(t), \\ \varphi_4'(t) = f_{04}(t) + \frac{\kappa}{2}(\varphi_2(t-\tau) + \varphi_3(t-\tau)) - \kappa\varphi_4(t). \end{cases}$$

Padauginę sistemos lygčių abi puses iš vienietinės Hevisaido funkcijos, gauname:

$$\begin{cases} \varphi_1'(t)l(t) = f_{01}(t)l(t) + \kappa\varphi_2(t-\tau)l(t) - \kappa\varphi_1(t)l(t), \\ \varphi_2'(t)l(t) = f_{02}(t)l(t) + \frac{\kappa}{2}(\varphi_1(t-\tau)l(t) + \varphi_3(t-\tau)l(t)) - \kappa\varphi_2(t)l(t), \\ \varphi_3'(t)l(t) = f_{03}(t)l(t) + \frac{\kappa}{2}(\varphi_2(t-\tau)l(t) + \varphi_4(t-\tau)l(t)) - \kappa\varphi_3(t)l(t), \\ \varphi_4'(t)l(t) = f_{04}(t)l(t) + \frac{\kappa}{2}(\varphi_2(t-\tau)l(t) + \varphi_3(t-\tau)l(t)) - \kappa\varphi_4(t)l(t). \end{cases}$$

Šios sistemos narius su vėlinimais pertvarkome taip:

$$\varphi_1(t-\tau)l(t) = \varphi_1(t-\tau)l(t-\tau) + \varphi_1(t-\tau)(l(t) - l(t-\tau)),$$

$$\varphi_2(t-\tau)l(t) = \varphi_2(t-\tau)l(t-\tau) + \varphi_2(t-\tau)(l(t) - l(t-\tau)),$$

$$\varphi_3(t-\tau)l(t) = \varphi_3(t-\tau)l(t-\tau) + \varphi_3(t-\tau)(l(t) - l(t-\tau)),$$

$$\varphi_4(t-\tau)l(t) = \varphi_4(t-\tau)l(t-\tau) + \varphi_4(t-\tau)(l(t) - l(t-\tau)).$$

Pažymėkime $x_i(t) = \varphi_i(t)l(t)$, $x_i(t-\tau) = \varphi_i(t-\tau)l(t-\tau)$, $i = \overline{1,4}$. Tada

$$Dx_i(t) = D[\varphi_i(t)l(t)] = \varphi_i'(t)l(t) + \varphi_i(t)\delta(t) = \varphi_i'(t)l(t) + \varphi_i(0)\delta(t)$$

$$Dx_i(t) - \varphi_i(0)\delta(t) = \varphi_i'(t)l(t);$$

čia D -apibendrinto diferencijavimo operatorius, taikomas apibendrintoms funkcijoms. Pasinaudojome lygybe $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$.

Lygčių sistemą pertvarkome

$$\left\{ \begin{array}{l} Dx_1(t) - \varphi_1(0)\delta(t) = f_{01}(t)l(t) + \kappa x_2(t-\tau) + \kappa\varphi_2(t-\tau)(l(t) - 1(t-\tau)) - \kappa x_1(t), \\ Dx_2(t) - \varphi_2(0)\delta(t) = f_{02}(t)l(t) + \frac{\kappa}{2}(x_1(t-\tau) + x_3(t-\tau)) + \frac{\kappa}{2}(\varphi_1(t-\tau) + \varphi_3(t-\tau)) \cdot \\ \quad \cdot (l(t) - 1(t-\tau)) - \kappa x_2(t), \\ Dx_3(t) - \varphi_3(0)\delta(t) = f_{03}(t)l(t) + \frac{\kappa}{2}(x_2(t-\tau) + x_4(t-\tau)) + \frac{\kappa}{2}(\varphi_2(t-\tau) + \varphi_4(t-\tau)) \cdot \\ \quad \cdot (l(t) - 1(t-\tau)) - \kappa x_3(t), \\ Dx_4(t) - \varphi_4(0)\delta(t) = f_{04}(t)l(t) + \frac{\kappa}{2}(x_2(t-\tau) + x_3(t-\tau)) + \frac{\kappa}{2}(\varphi_2(t-\tau) + \varphi_3(t-\tau)) \cdot \\ \quad \cdot (l(t) - 1(t-\tau)) - \kappa x_4(t); \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Dx_1(t) = \kappa x_2(t-\tau) - \kappa x_1(t) + z_1(t), \\ Dx_2(t) = \frac{\kappa}{2}(x_1(t-\tau) + x_3(t-\tau)) - \kappa x_2(t) + z_2(t), \\ Dx_3(t) = \frac{\kappa}{2}(x_2(t-\tau) + x_4(t-\tau)) - \kappa x_3(t) + z_3(t), \\ Dx_4(t) = \frac{\kappa}{3}(x_2(t-\tau) + x_3(t-\tau)) - \kappa x_4(t) + z_4(t); \end{array} \right. \quad (1)$$

čia

$$z_1(t) = f_{01}(t)l(t) + \varphi_1(0)\delta(t) + \kappa\varphi_2(t-\tau)(l(t) - 1(t-\tau)),$$

$$z_2(t) = f_{02}(t)l(t) + \varphi_2(0)\delta(t) + \frac{\kappa}{2}\varphi_1(t-\tau)(l(t) - 1(t-\tau)) + \frac{\kappa}{2}\varphi_3(t-\tau)(l(t) - 1(t-\tau)),$$

$$z_3(t) = f_{03}(t)l(t) + \varphi_3(0)\delta(t) + \frac{\kappa}{2}\varphi_2(t-\tau)(l(t) - 1(t-\tau)) + \frac{\kappa}{2}\varphi_4(t-\tau)(l(t) - 1(t-\tau)),$$

$$z_4(t) = f_{04}(t)l(t) + \varphi_4(0)\delta(t) + \frac{\kappa}{2}\varphi_2(t-\tau)(l(t) - 1(t-\tau)) + \frac{\kappa}{2}\varphi_3(t-\tau)(l(t) - 1(t-\tau)).$$

Gautą (1) lygčių sistemą panaudojus matricas, perrašome taip:

$$Dx(t) = B_1x(t) + B_2x(t-\tau) + z(t);$$

čia $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))^T$ - ieškomų funkcijų vektorius, $z(t) = (z_1(t), z_2(t), z_3(t), z_4(t))^T$ - laisvųjų narių vektorius (čia T žymi transformavimo operatorių).

Užrašome matricinės lygties sprendinį (žr. 2.2. skyr.):

$$x(t) \div \sum_{k=0}^L \frac{1}{(p + \kappa)^{k+1}} \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k B^k e^{-pk\tau} Z(p), \quad 0 \leq t < (L+1)\tau;$$

čia $Z(p) \div z(t)$.

Pasinaudoję turimomis $z_i(t)$ $i = \overline{1,4}$ išraiškėmis ir atitiktėmis

$$l(t) \div \frac{1}{p}, \quad \delta(t) \div 1, \quad \varphi_i(t-\tau)(l(t) - 1(t-\tau)) \div \frac{\varphi_{0i}}{p} + \frac{f_{0i}}{p^2} - \frac{f_{0i}\tau}{p} - \frac{\varphi_{0i}}{p} e^{-p\tau} - \frac{f_{0i}}{p^2} e^{-p\tau} \quad (i = \overline{1,4})$$

randame vektoriaus $Z(p) = (Z_1(p), Z_2(p), Z_3(p), Z_4(p))^T$ dedamąsias:

$$Z_1(p) = \frac{f_{01}}{p} + \varphi_{01} + \kappa \left(\frac{\varphi_{02}}{p} + \frac{f_{02}}{p^2} - \frac{f_{02}\tau}{p} - \frac{\varphi_{02}}{p} e^{-p\tau} - \frac{f_{02}}{p^2} e^{-p\tau} \right),$$

$$Z_2(p) = \frac{f_{02}}{p} + \varphi_{02} + \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\varphi_{01} + \varphi_{03}}{p} + \frac{f_{01} + f_{03}}{p^2} - \frac{(f_{01} + f_{03})\tau}{p} - \frac{\varphi_{01} + \varphi_{03}}{p} e^{-p\tau} - \frac{f_{01} + f_{03}}{p^2} e^{-p\tau} \right),$$

$$Z_3(p) = \frac{f_{03}}{p} + \varphi_{03} + \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\varphi_{02} + \varphi_{04}}{p} + \frac{f_{02} + f_{04}}{p^2} - \frac{(f_{02} + f_{04})\tau}{p} - \frac{\varphi_{02} + \varphi_{04}}{p} e^{-p\tau} - \frac{f_{02} + f_{04}}{p^2} e^{-p\tau} \right),$$

$$Z_4(p) = \frac{f_{04}}{p} + \varphi_{04} + \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\varphi_{02} + \varphi_{03}}{p} + \frac{f_{02} + f_{03}}{p^2} - \frac{(f_{02} + f_{03})\tau}{p} - \frac{\varphi_{02} + \varphi_{03}}{p} e^{-p\tau} - \frac{f_{02} + f_{03}}{p^2} e^{-p\tau} \right).$$

Rastas vektoriaus $Z(p)$ dedamąsias taikysime generatorių virpesių fazių skirtumų išraiškose.

2 PRIEDAS. PIRMAVAIZDŽIŲ IŠRAIŠKOS

Rasime vaizdų:

$$\frac{e^{-pk\tau}}{(p+\kappa)^{k+1}}, \quad \frac{e^{-pk\tau}}{p(p+\kappa)^{k+1}}, \quad \frac{e^{-pk\tau}}{p^2(p+\kappa)^{k+1}}$$

pirmavaizdžius. Pasinaudoję operatorinėmis lygybėmis

$$\frac{1}{(p+\kappa)^{k+1}} \div \frac{t^k}{k!} e^{-\kappa t},$$

$$\frac{1}{p(p+\kappa)^{k+1}} \div \frac{1}{\kappa^{k+1}} \left(1 - \sum_{l=0}^k \frac{(\kappa t)^l e^{-\kappa t}}{l!} \right),$$

$$\frac{1}{p^2(p+\kappa)^{k+1}} \div \frac{1}{\kappa^{k+2}} \left(\kappa t - (k+1) + \sum_{l=0}^k \sum_{r=0}^l \frac{(\kappa t)^r e^{-\kappa t}}{r!} \right).$$

ir pritaikę vėlavimo teoremą, gauname:

$$\frac{e^{-pk\tau}}{(p+\kappa)^{k+1}} \div \frac{(t-\kappa\tau)^k}{k!} e^{-\kappa(t-\kappa\tau)} \cdot 1(t-\kappa\tau),$$

$$\frac{e^{-pk\tau}}{p(p+\kappa)^{k+1}} \div \frac{1}{\kappa^{k+1}} \left(1 - \sum_{l=0}^k \frac{(\kappa t - k\kappa\tau)^l e^{-(\kappa t - k\kappa\tau)}}{l!} \right) \cdot 1(t-k\tau),$$

$$\frac{e^{-pk\tau}}{p^2(p+\kappa)^{k+1}} \div \frac{1}{\kappa^{k+2}} \left((\kappa t - k\kappa\tau) - (k+1) + \sum_{l=0}^k \sum_{s=0}^l \frac{(\kappa t - k\kappa\tau)^s e^{-(\kappa t - k\kappa\tau)}}{s!} \right) \cdot 1(t-k\tau).$$

Šias pirmavaizdžių išraiškas taikome ieškodami generatorių virpesių fazių skirtumus.

3 PRIEDAS. RIBOS $\lim_{p \rightarrow 0} p(Z_i(p))$ SKAIČIAVIMAS

Pažymėkime

$$Z'_i = \lim_{p \rightarrow 0} p(Z_i(p)); \quad i = \overline{1,4}.$$

Skaičiuosime

$$Z'_1 = \lim_{p \rightarrow 0} p(Z_1(p));$$

čia

$$\begin{aligned} Z_1(p) &= \frac{f_{01}}{p} + \varphi_{01} + \kappa \left(\frac{\varphi_{02}}{p} + \frac{f_{02}}{p^2} - \frac{f_{02}\tau}{p} - \frac{\varphi_{02}}{p} e^{-p\tau} - \frac{f_{02}}{p^2} e^{-p\tau} \right), \\ Z'_1 &= \lim_{p \rightarrow 0} \left[f_{01} + p\varphi_{01} + \kappa \left(\varphi_{02} + \frac{f_{02}}{p} - f_{02}\tau - \varphi_{02}e^{-p\tau} - \frac{f_{02}}{p} e^{-p\tau} \right) \right] = \\ &= f_{01} + \kappa\varphi_{02} - \kappa f_{02} - \kappa\varphi_{02} + \kappa \lim_{p \rightarrow 0} \frac{f_{02} + f_{04} - f_{02} \cdot e^{-p\tau} - f_{04} \cdot e^{-p\tau}}{p} = \\ &= f_{01} - \frac{\kappa\tau}{2} f_{02} - \frac{\kappa\tau}{2} f_{04} + \frac{\kappa}{2} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{-p\tau})f_{02}}{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f_{01} - \kappa f_{02} + \kappa \lim_{p \rightarrow 0} \frac{f_{02} \tau e^{-p\tau}}{1} \\ &= f_{01} - \kappa f_{02} + \kappa f_{02} = f_{01}. \end{aligned}$$

Toliau skaičiuosime

$$Z'_2 = \lim_{p \rightarrow 0} p(Z_2(p));$$

čia

$$\begin{aligned} Z_2(p) &= \frac{f_{02}}{p} + \varphi_{02} + \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\varphi_{01} + \varphi_{03}}{p} + \frac{f_{01} + f_{03}}{p^2} - \frac{(f_{01} + f_{03})\tau}{p} - \frac{\varphi_{01} + \varphi_{03}}{p} e^{-p\tau} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{f_{01} + f_{03}}{p^2} e^{-p\tau} \right), \\ Z'_2 &= \lim_{p \rightarrow 0} p \left[\frac{f_{02}}{p} + \varphi_{02} + \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\varphi_{01} + \varphi_{03}}{p} + \frac{f_{01} + f_{03}}{p^2} - \frac{(f_{01} + f_{03})\tau}{p} - \frac{\varphi_{01} + \varphi_{03}}{p} e^{-p\tau} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{f_{01} + f_{03}}{p^2} e^{-p\tau} \right) \right] = f_{02} - \frac{\kappa\tau}{2} (f_{01} + f_{03}) + \frac{\kappa}{2} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(f_{01} + f_{03})(1 - e^{-p\tau})}{p} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f_{02} - \frac{\kappa\tau}{2} (f_{01} + f_{03}) + \frac{\kappa}{2} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(f_{01} + f_{03})\tau e^{-p\tau}}{1} = f_{02}. \end{aligned}$$

Analogiškai randame Z'_3 ir Z'_4 :

$$Z'_3 = \lim_{p \rightarrow 0} p(Z_3(p)),$$

$$Z_3(p) = \frac{f_{03}}{p} + \varphi_{03} + \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\varphi_{02} + \varphi_{04}}{p} + \frac{f_{02} + f_{04}}{p^2} - \frac{(f_{02} + f_{04})\tau}{p} - \frac{\varphi_{02} + \varphi_{04}}{p} e^{-p\tau} - \frac{f_{02} + f_{04}}{p^2} e^{-p\tau} \right),$$

$$Z'_3 = \lim_{p \rightarrow 0} p \left[\frac{f_{03}}{p} + \varphi_{03} + \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\varphi_{02} + \varphi_{04}}{p} + \frac{f_{02} + f_{04}}{p^2} - \frac{(f_{02} + f_{04})\tau}{p} - \frac{\varphi_{02} + \varphi_{04}}{p} e^{-p\tau} - \frac{f_{02} + f_{04}}{p^2} e^{-p\tau} \right) \right] = f_{03} - \frac{\kappa\tau}{2}(f_{02} + f_{04}) + \frac{\kappa}{2} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(f_{02} + f_{04})(1 - e^{-p\tau})}{p} = f_{03}.$$

$$Z_4 = \lim_{p \rightarrow 0} p(Z_4(p)),$$

$$Z_4(p) = \frac{f_{04}}{p} + \varphi_{04} + \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\varphi_{02} + \varphi_{03}}{p} + \frac{f_{02} + f_{03}}{p^2} - \frac{(f_{02} + f_{03})\tau}{p} - \frac{\varphi_{02} + \varphi_{03}}{p} e^{-p\tau} - \frac{f_{02} + f_{03}}{p^2} e^{-p\tau} \right).$$

$$Z'_4 = \lim_{p \rightarrow 0} p \left[\frac{f_{04}}{p} + \varphi_{04} + \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\varphi_{02} + \varphi_{03}}{p} + \frac{f_{02} + f_{03}}{p^2} - \frac{(f_{02} + f_{03})\tau}{p} - \frac{\varphi_{02} + \varphi_{03}}{p} e^{-p\tau} - \frac{f_{02} + f_{03}}{p^2} e^{-p\tau} \right) \right] = f_{04} - \frac{\kappa\tau}{2}(f_{02} + f_{03}) + \frac{\kappa}{2} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(f_{02} + f_{03})(1 - e^{-p\tau})}{p} = f_{04}.$$

Z'_i $i = \overline{1,4}$ reikšmės naudojamos skaičiuojant generatorių virpesių fazių skirtumų ribines reikšmes (2.4.2.2 skyrelyje).

4 PRIEDAS. PEREINAMŪJŲ FUNKCIJŲ $h_{ij}(t)$ GRAFIKAI IR PROGRAMOS TEKSTAS

Matrica B^k :

$$a := \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad b := \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$$

$$B(k) := \frac{1}{15} \cdot \begin{bmatrix} 3 \cdot 2^k - 6 \cdot b \cdot a^{k+1} - 6 \cdot a \cdot b^{k+1} & 6 \cdot 2^k + 6 \cdot a^{k+1} + 6 \cdot b^{k+1} & 4 \cdot 2^k - 10 \cdot (-1)^k - 6 \cdot a^{k+1} - 6 \cdot b^{k+1} & 2 \cdot 2^k + 10 \cdot (-1)^k + 6 \cdot b \cdot a^{k+1} + 6 \cdot a \cdot b^{k+1} \\ 3 \cdot 2^k + 3 \cdot a^{k+1} + 3 \cdot b^{k+1} & 6 \cdot 2^k - 3 \cdot (a-1) \cdot a^k - 3 \cdot (b-1) \cdot b^k & 4 \cdot 2^k + 5 \cdot (-1)^k + 3 \cdot (a-1) \cdot a^k + 3 \cdot (b-1) \cdot b^k & 2 \cdot 2^k - 5 \cdot (-1)^k - 3 \cdot a^{k+1} - 3 \cdot b^{k+1} \\ 3 \cdot 2^k + 3 \cdot b \cdot a^k + 3 \cdot a \cdot b^k & 6 \cdot 2^k - 3 \cdot a^k - 3 \cdot b^k & 4 \cdot 2^k + 5 \cdot (-1)^k + 3 \cdot a^k + 3 \cdot b^k & 2 \cdot 2^k - 5 \cdot (-1)^k - 3 \cdot b \cdot a^k - 3 \cdot a \cdot b^k \\ 3 \cdot 2^k + 3 \cdot b \cdot a^k + 3 \cdot a \cdot b^k & 6 \cdot 2^k - 3 \cdot a^k - 3 \cdot b^k & 4 \cdot 2^k - 10 \cdot (-1)^k + 3 \cdot a^k + 3 \cdot b^k & 2 \cdot 2^k + 10 \cdot (-1)^k - 3 \cdot b \cdot a^k - 3 \cdot a \cdot b^k \end{bmatrix}$$

Nurodome intervala: $N := 20$

Velinimas: $\kappa\tau := 1.25$

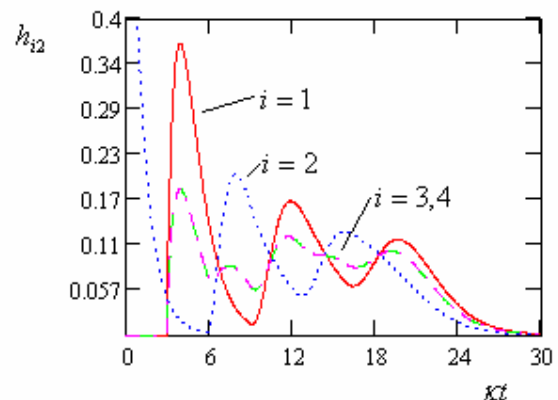
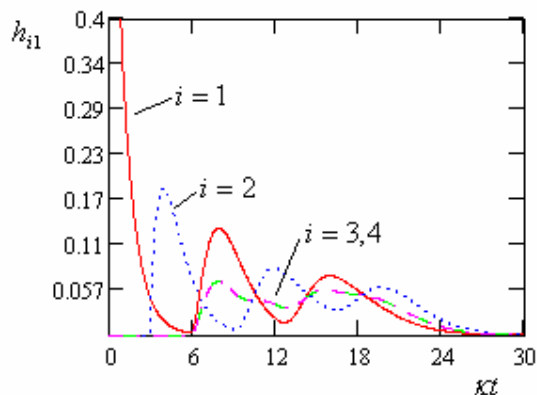
$$L := \text{floor}\left(\frac{N}{\kappa\tau}\right) - 1$$

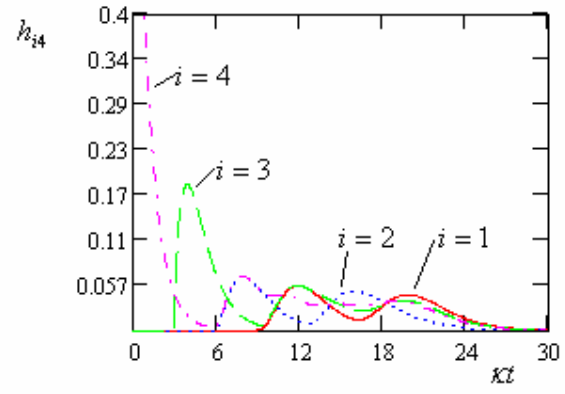
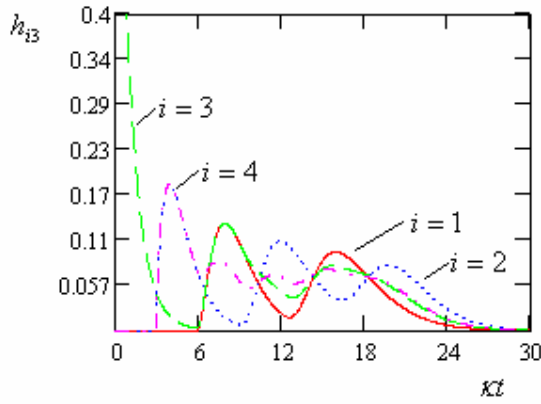
$$\kappa t := 0.01 \dots (L+1) \cdot \kappa\tau$$

Vienetine Hevisaido f-ja: $T(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$

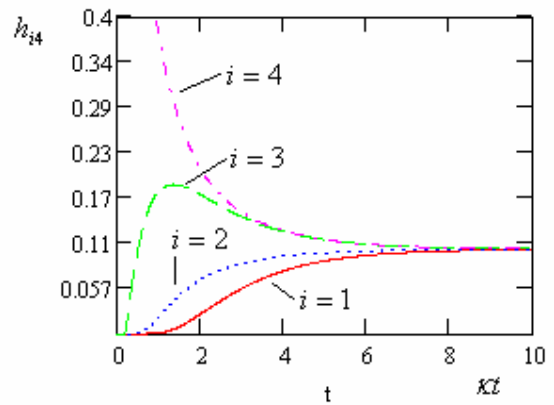
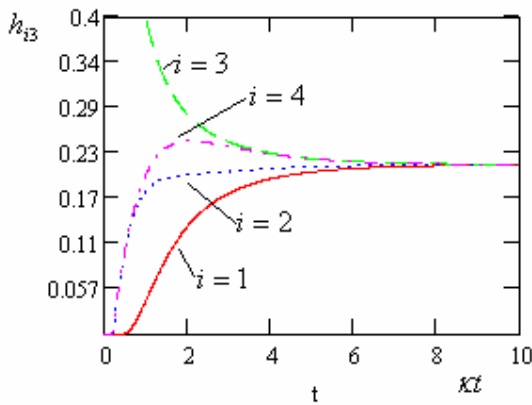
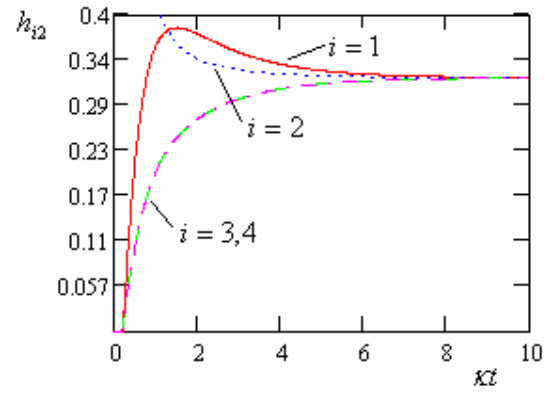
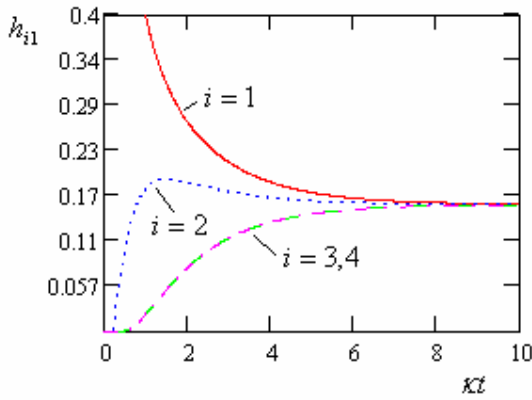
$$S(\kappa t, \kappa\tau, k) := \begin{cases} s \leftarrow 1 \\ \text{for } i \in 1 \dots k \\ s \leftarrow s \cdot \frac{\kappa t - k \cdot \kappa\tau}{i} \\ s \end{cases}$$

$$h(\kappa t) := \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot e^{-(\kappa t - \kappa\tau \cdot 0)} \cdot \frac{(\kappa t - \kappa\tau \cdot 0)^0}{0!} \cdot B(0) \cdot T(\kappa t - \kappa\tau \cdot 0) + \left[\sum_{k=1}^L \left[\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot S(\kappa t, \kappa\tau, k) \cdot e^{-(\kappa t - \kappa\tau \cdot k)} \cdot B(k) \cdot T(\kappa t - \kappa\tau \cdot k) \right] \right]$$





4.1 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{ij}(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 3$



4.2 pav. Pereinamųjų funkcijų $h_{ij}(t)$ grafikai, kai $\kappa\tau = 0.25$

5 PRIEDAS. GENERATORIŲ VIRPESIŲ FAZIŲ SKIRTUMŲ $x_i(t) - x_j(t)$ GRAFIKAI IR PROGRAMOS TEKSTAS

ORIGIN := 1

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad V(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

N := 80

$\kappa\tau := 3$

$$L := \left\lceil \frac{N}{\kappa\tau} \right\rceil - 1 \quad \kappa\tau := 0, 1, 5 \dots (L + 1) \cdot \kappa\tau \quad c := \text{floor}(L)$$

f01 := 2005 f02 := 2000 f03 := 2000 f04 := 2005

φ01 := 0.5 φ02 := 0.5 φ03 := 0.5 φ04 := 0.5

f14 := f01 + f04 φ14 := φ01 + φ04

f24 := f02 + f04 φ24 := φ02 + φ04

f13 := f01 + f03 φ23 := φ02 + φ03

f23 := f02 + f03 φ13 := φ01 + φ03

f043 := f04 - f03 φ043 := φ04 - φ03

f12 := f01 + f02

$$S0(\kappa t, k) := \frac{\kappa t^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\kappa t} \quad S1(\kappa t, k) := 1 - \sum_{v=0}^{k-1} \left(\frac{\kappa t^v}{v!} \cdot e^{-\kappa t} \right) \quad S2(\kappa t, k) := \kappa t - k + \sum_{v=0}^{k-1} \sum_{r=0}^v \left(\frac{\kappa t^r}{r!} \cdot e^{-\kappa t} \right)$$

$$A21(\kappa t) = (\phi02 - \phi01) S0(\kappa t, 1) + \left[\left(f02 - f13 \left(\frac{\kappa t}{2} \right) + \frac{\phi13}{2} \right) - (f01 - f02 \kappa t + \phi02) \right] S1(\kappa t, 1) + \left(\frac{f13}{2} - f02 \right) S2(\kappa t, 1) - \left(\frac{f13}{2} - f02 \right) S2(\kappa t - \kappa\tau, 1) \cdot V(\kappa t - \kappa\tau) - \left(\frac{\phi13}{2} - \phi02 \right) S1(\kappa t - \kappa\tau, 1) \cdot V(\kappa t - \kappa\tau)$$

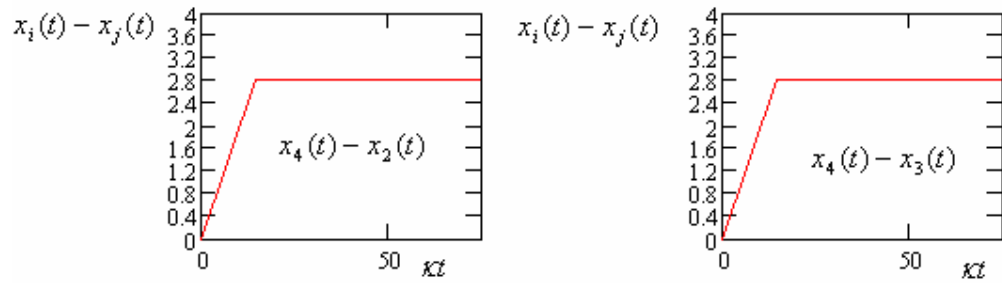
$$A31(\kappa t) = (\phi03 - \phi01) S0(\kappa t, 1) + \left[\left(f03 - \frac{f24}{2} \kappa t + \phi24 \right) - (f01 - f02 \kappa t + \phi02) \right] S1(\kappa t, 1) + \left(\frac{f24}{2} - f02 \right) S2(\kappa t, 1) - \left(\frac{f24}{2} - f02 \right) S2(\kappa t - \kappa\tau, 1) \cdot V(\kappa t - \kappa\tau) - \left(\frac{\phi24}{2} - \phi02 \right) S1(\kappa t - \kappa\tau, 1) \cdot V(\kappa t - \kappa\tau)$$

$$A41(\kappa t) = (\phi04 - \phi01) S0(\kappa t, 1) + \left[\left(f04 - \frac{f23}{2} \kappa t + \phi23 \right) - (f01 - f02 \kappa t + \phi02) \right] S1(\kappa t, 1) + \left(\frac{f23}{2} - f02 \right) S2(\kappa t, 1) - \left(\frac{f23}{2} - f02 \right) S2(\kappa t - \kappa\tau, 1) \cdot V(\kappa t - \kappa\tau) - \left(\frac{\phi23}{2} - \phi02 \right) S1(\kappa t - \kappa\tau, 1) \cdot V(\kappa t - \kappa\tau)$$

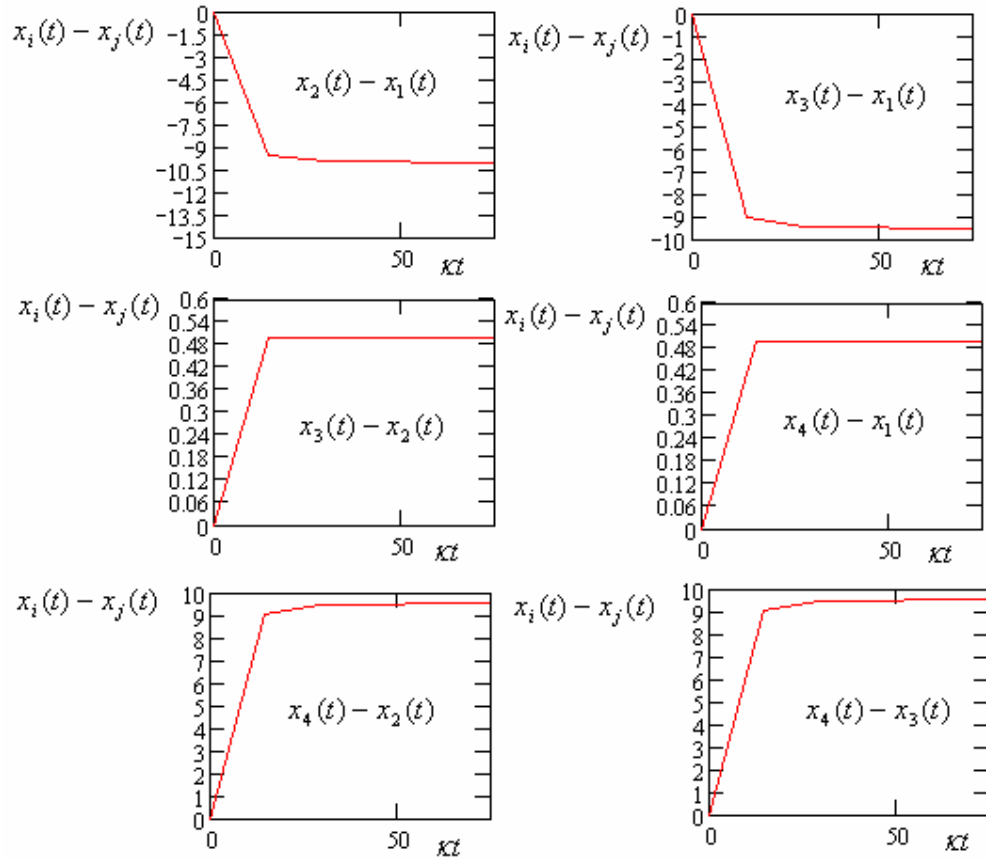
$$A32(\kappa t) = (\phi03 - \phi02) S0(\kappa t, 1) + \left[\left(f03 - \frac{f24}{2} \kappa t + \phi24 \right) - \left(f02 - \frac{f13}{2} \kappa t + \frac{\phi13}{2} \right) \right] S1(\kappa t, 1) + \left(\frac{f24}{2} - \frac{f13}{2} \right) S2(\kappa t, 1) - \left(\frac{f24}{2} - \frac{f13}{2} \right) S2(\kappa t - \kappa\tau, 1) \cdot V(\kappa t - \kappa\tau) - \left(\frac{\phi24}{2} - \frac{\phi13}{2} \right) S1(\kappa t - \kappa\tau, 1) \cdot V(\kappa t - \kappa\tau)$$

$$A42(\kappa t) = (\phi04 - \phi02) S0(\kappa t, 1) + \left[\left(f04 - \frac{f23}{2} \kappa t + \frac{\phi23}{2} \right) - \left(f02 - \frac{f13}{2} \kappa t + \frac{\phi13}{2} \right) \right] S1(\kappa t, 1) + \left(\frac{f23}{2} - \frac{f13}{2} \right) S2(\kappa t, 1) - \left(\frac{f23}{2} - \frac{f13}{2} \right) S2(\kappa t - \kappa\tau, 1) \cdot V(\kappa t - \kappa\tau) - \left(\frac{\phi23}{2} - \frac{\phi13}{2} \right) S1(\kappa t - \kappa\tau, 1) \cdot V(\kappa t - \kappa\tau)$$

$$A43(\kappa t) = (\phi04 - \phi03) S0(\kappa t, 1) + \left[\left(f04 - \frac{f23}{2} \kappa t + \frac{\phi23}{2} \right) - \left(f03 - \frac{f24}{2} \kappa t + \phi24 \right) \right] S1(\kappa t, 1) + \left(\frac{f23}{2} - \frac{f24}{2} \right) S2(\kappa t, 1) - \left(\frac{f23}{2} - \frac{f24}{2} \right) S2(\kappa t - \kappa\tau, 1) \cdot V(\kappa t - \kappa\tau) - \left(\frac{\phi23}{2} - \frac{\phi24}{2} \right) S1(\kappa t - \kappa\tau, 1) \cdot V(\kappa t - \kappa\tau)$$



a) $\kappa\tau = 1.5, \quad f_{01} = 2005, \quad f_{03} = 2000, \quad \varphi_{01} = 0.5, \quad \varphi_{03} = 0.5,$
 $f_{02} = 2000, \quad f_{04} = 2005, \quad \varphi_{02} = 0.5, \quad \varphi_{04} = 0.5$



b) $\kappa\tau = 3, \quad f_{01} = 2015, \quad f_{03} = 2000, \quad \varphi_{01} = 0.5, \quad \varphi_{03} = 0.5,$
 $f_{02} = 2000, \quad f_{04} = 2015, \quad \varphi_{02} = 0.5, \quad \varphi_{04} = 0.5$

5.1 pav. Generatorių virpesių fazių skirtumų $x_i(t) - x_j(t)$ grafikai