KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

Jovita Petrovienė

NETIESISKAI NORMALIZUOTŲ MINIMUMŲ ASIMPTOTINIAI TYRIMAI

Magistro darbas

Vadovas

prof. dr. A. Aksomaitis

KAUNAS, 2009

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

TVIRTINU
Katedros vedėjas
doc. dr. N. Listopadskis
2009 06 05

NETIESIŠKAI NORMALIZUOTŲ MINIMUMŲ ASIMPTOTINIAI TYRIMAI

Matematikos magistro baigiamasis darbas

Vadovas
prof. dr. A. Aksomaitis

2009 06 02

Recenzentas
doc.dr. K. Padvelskis (VDU)
2009 06 03

Atliko
FMMM-7 gr. stud.
J. Petrovienė
2009 05 25

KAUNAS, 2009

KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

Pirmininkas: Leonas Saulis, profesorius (VGTU).

Sekretorius: Eimutis Valakevičius, docentas (KTU).

Nariai: Algimantas Jonas Aksomaitis, profesorius (KTU),
Arūnas Barauskas, dr., Vice-prezidentas projektams (UAB „Baltic Amadeus“),
Vytautas Janilionis, docentas (KTU),
Zenonas Navickas, profesorius (KTU),
Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU),
Rimantas Rudzkis, valdybos pirmininko patarėjas („DnB NORD” bankas).

Petrovienė J. Asymptotic analysis of non-linearly normalized minima: Master‘s work in applied mathematics / supervisor prof. dr. A. Aksomaitis; Department of Applied mathematics, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2009. – 44 p.

SUMMARY

This paper is the asymptotic analysis of stochastic minima. Current extremum theory is oriented towards maxima structures; therefore this paper investigates such minimum pattern, where minima asymptosy is different from the maximum limit theorems (particularly regarding the normalization).

Suppose that $X_1, X_2, \ldots, X_n$ is a simple random sample with distribution function F from the general set. This case where the distribution function $F(x) = 1 - \frac{1}{\ln x}$, $x \geq e$ is considered. This distribution function is changing slowly when $x \to +\infty$; and linear normalization doesn't give non-degenerate limit distributions.

Proofs of minima limit theorems are provided for cases, when linear normalization does not give non-degenerate limit distributions. In this cases, non-linear minima normalization is used. For a specific distribution, non-linear normalization functions are calculated, which are then used to get classic limit distributions for minima (3 distributions).

Objectives:

- Examine the necessity of non-linear normalization;
- Analyze the possibilities for non-linear normalization in minimum pattern.

Tasks:

- Choose non-linear normalization function for a specific distribution;
- Get classic limit distributions, where minima are normalized non-linearly;
- Investigate the rate of convergence within the limit theorems;
- Perform computer-based analysis of approximation errors.

TURINYS

LENTELIŲ SĄRAŠAS

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

ĮVADAS

Atsitiktinių dydžių ekstremumų (maksimumų ir minimumų) ribinės teoremos svarbios tiek teorine, tiek praktine prasme [1]. Jos leidžia sudėtingą ekstremumų skirstinį aproksimuoti paprastais ribiniais skirstiniais, o tai žymiai palengvina skaičiavimus.

Šiame darbe atliekami stochastinių minimumų asimptotiniai tyrimai. Esama ekstremumų teorija yra daugiau orientuota maksimumų struktūroms, todėl nagrinėju minimumų schemą, kurioje minimumų asimptotika skiriasi nuo maksimumų ribinių teoremų (ypatingai normalizavimo prasme).

Tarkime, kad $X_1, X_2, \ldots, X_n$ yra paprastoji atsitiktinė imtis iš generalinės aibės su skirstinio funkcija *F*. Nagrinėju atvejį, kai skirstinio funkcija $F(x) = 1 - \dfrac{1}{\ln x}$, $x \geq e$. Tai lėtai kintanti, kai $x \to +\infty$, skirstinio funkcija, o tiesinis normalizavimas neduoda neišsigimusių ribinių skirstinių. J. Galambošo monografijoje [1] yra pateiktas pavyzdys su šia skirstinio funkcija, tačiau ten tiriama maksimumų struktūra.

Įrodomos minimumų ribinės teoremos tuo atveju, kai tiesinis normalizavimas neduoda neišsigimusių ribinių skirstinių. Tokiais atvejais naudoju netiesinį minimumų normalizavimą. Konkretaus skirstinio atveju randamos netiesinės normalizavimo funkcijos, kurių pagalba yra gaunami minimumų klasikiniai ribiniai skirstiniai (3 skirstiniai). Netiesinio normalizavimo atvejai nagrinėjami [5] darbe.

Darbo tikslai:

- ištirti netiesinio normalizavimo reikalingumą;
- išanalizuoti netiesinio normalizavimo galimybes minimumų schemoje.

Darbo uždaviniai:

- parinkti netiesinio normalizavimo funkciją konkretaus skirstinio atveju;
- gauti ribinius klasikinius skirstinius, kai minimumai normalizuojami netiesiškai;
- įvertinti konvergavimo greitį ribinėse teoremose;
- atlikti aproksimavimo paklaidų kompiuterinę analizę.

Šiame darbe didžiąją dalį skiriu netiesiškai normuotų minimumų asimptotiniams tyrimams.

1. BENDROJI DALIS

1.1. RIBINĖS MINIMUMŲ TEOREMOS

Tarkime, kad $X_1, X_2, \ldots, X_n$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, su

$$F(x) = P(X_j < x), \; j = \overline{1,n}. \tag{1.1}$$

Pažymėkime

$$W_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n). \tag{1.2}$$

Tuomet [1]

$$L_n(x) = P(W_n < x) = 1 - (1 - F(x))^n. \tag{1.3}$$

Pateiksime sąlygas, kurios yra būtinos funkcijai *F(x)*, kad egzistuotų konstantos $c_n, d_n > 0$, su kuriomis

$$\lim_{n\to\infty} L_n(xd_n + c_n) = L(x) \tag{1.4}$$

visuose *L(x)* tolydumo taškuose; čia *L(x)* yra neišsigimusi skirstinio funkcija. Iš šių formulių gauname sąryšį:

$$\lim_{n\to\infty} (1 - F(xd_n + c_n))^n = 1 - L(x) \tag{1.5}$$

Viršutinis ribinis skirstinio funkcijos *F(x)* taškas yra

$$\omega(F) = \sup\{x : 1 - F(x) > 0\}, \tag{1.6}$$

o apatinis yra

$$\alpha(F) = \inf\{x : F(x) > 0\}. \tag{1.7}$$

Akivaizdu, kad $\omega(F)$ ir $\alpha(F)$ yra baigtinis arba $\omega(F) = +\infty$ ir $\alpha(F) = -\infty$.

Yra trys tiesiškai normuotų stochastinių minimumų teoremos. Pateiksiu jas tiesiškai normuotai struktūrai $\frac{W_n - c_n}{d_n}$, $c_n \in \Re$, $d_n \in \Re_+$ ([1]).

1.1 teorema Tarkime, kad $\alpha(F) = -\infty$, ir jeigu egzistuoja tokia konstanta $\gamma > 0$, kai su visais $x > 0$ galioja sąryšis

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{F(tx)}{F(t)} = x^{-\gamma}. \tag{1.8}$$

tuomet egzistuoja tokia konstanta $d_n > 0$, su kuria

$$\lim_{n\to\infty} P\{W_n < d_n x\} = L_{1,\gamma}(x), \tag{1.9}$$

kai

$$L_{1,\gamma}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(-x)^\gamma}, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}. \tag{1.10}$$

Normavimo konstanta d_n gali būti parinkta tokiu būdu:

$$d_n = \sup\left\{x : F(x) \le \frac{1}{n}\right\}.$$

1.2 teorema Tarkime, kad $\alpha(F)$ yra baigtinis. Pažymėkime pasiskirstymo funkciją

$$F^*(x) = F\left(\alpha(F) - \frac{1}{x}\right), \; x < 0. \tag{1.11}$$

Jeigu egzistuoja tokia konstanta $\gamma > 0$, kad su visais $x > 0$ galioja sąryšis

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{F^*(tx)}{F^*(t)} = x^{-\gamma}, \tag{1.12}$$

tuomet egzistuoja tokios konstantos $c_n, d_n > 0$, su kuriomis

$$\lim_{n\to\infty} P\{W_n < d_n x + c_n\} = L_{2,\gamma}(x), \tag{1.13}$$

čia

$$L_{2,\gamma}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^{\gamma}}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}. \tag{1.14}$$

Normavimo konstantos c_n, d_n gali būti parinktos tokiu būdu:

$c_n = \alpha(F)$,

o

$d_n = \sup\left\{x : F(x) \le \frac{1}{n}\right\} - \alpha(F)$.

1.3 teorema Tarkime, kad

$$\int_{\alpha(F)}^{a} F(y)dy < \infty, \tag{1.15}$$

kai a baigtinis. Pažymėkime funkciją

$$r(t) = \frac{1}{F(t)} \int_{\alpha(F)}^{t} F(y)dy, \; t > \alpha(F). \tag{1.16}$$

Jeigu

$$\lim_{t\to\alpha(F)} \frac{F(t + xr(t))}{F(t)} = e^{x}, \; x \in R, \tag{1.17}$$

tuomet egzistuoja tokios konstantos $c_n, d_n > 0$, su kuriomis

$$P\left(\frac{W_n - c_n}{d_n} < x\right) \to L_3(x); \tag{1.18}$$

čia

$$L_3(x) = 1 - e^{-e^{x}}, \; -\infty < x < \infty. \tag{1.19}$$

Normavimo konstantos c_n, d_n gali būti parinktos tokiu būdu:

$c_n = \sup\left\{x : F(x) \le \frac{1}{n}\right\}$,

o

$d_n = r(c_n)$.

Galimi tik šie trys tiesiškai normuotų minimumų neišsigimę ribiniai skirstiniai.

Teoremų formuluotės ir įrodymai pateikti [1].

1.2. NETIESINIS NORMALIZAVIMAS

Jeigu yra netenkinamos pateiktos ribinių teoremų sąlygos, tai galime taikyti netiesinį normalizavimą, kuris duotų ribinį neišsigimusį skirstinį.

Žinome, kad

$$P(W_n < G_n(x)) = 1 - \left(1 - F(G_n(x))\right)^n \tag{1.20}$$

Čia funkcija $G_n(x)$ teigiama, monotoniškai didėjanti ir tolydi, o $\{X_j, j \ge 1\}$ nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai su skirstinio funkcija F. Pažymėkime netiesiškai normalizuotus minimumus

$$\widetilde{W}_n = G_n^{-1}(W_n) \tag{1.21}$$

ir

$$u_n(x) = nF(G_n(x)). \quad \textbf{(1.22)}$$

Tada sąlyga, kad $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$ yra būtina ir pakankama, kad

$$\lim_{n\to\infty} P\left(G_n^{-1}(W_n) < x\right) = 1 - e^{-u(x)}. \quad \textbf{(1.23)}$$

Šis teiginys lengvai išplaukia iš sąryšio:

$$P\left(G_n^{-1}(W_n) < x\right) = 1 - \left(1 - \frac{nF\left(G_n(x)\right)}{n}\right)^n. \quad \textbf{(1.24)}$$

Konvergavimo greičio įverčiui gauti prireiks dviejų lemų:

Lema 1. Su bet kuriuo teigiamu $t \le \frac{1}{2}$ yra teisinga nelygybė:

$$e^{-nt} - (1-t)^n \left(e^{2nt^2} - 1\right) < (1-t)^n \le e^{-nt}. \quad \textbf{(1.25)}$$

Lema 2. Su visais t, kai galioja sąlyga $\frac{1}{3}|t| \le q < 1$ yra teisinga nelygybė

$$\left|e^t - 1\right| \le |t| + \frac{t^2}{2}\frac{1}{1-q}, \quad \textbf{(1.26)}$$

o su sąlyga $\frac{1}{2}|t| \le q < 1$ – nelygybė

$$\left|e^t - 1\right| \le \frac{|t|}{1-q}. \quad \textbf{(1.27)}$$

Lemų formuluotės ir įrodymai pateikti [3].

1.3. PERKĖLIMO TEOREMA ESANT TIESINIAM NORMALIZAVIMUI

Tarkime $\{N_n, n \ge 1\}$ yra sveiki ir teigiami atsitiktiniai dydžiai, nepriklausantieji nuo $\{X_j, j \ge 1\}$. Pažymėkime $W_{N_n} = \min(X_1, X_2, \ldots, X_{N_n})$ ir $Z_{N_n} = \max(X_1, X_2, \ldots, X_{N_n})$.

Pastebėsime paprastą sąryšį tarp Z_{N_n} (maksimumams) ir W_{N_n} (minimumams):

$$\min(X_1, X_2, \ldots, X_{N_n}) = -\max\left(-X_1, -X_2, \ldots, -X_{N_n}\right). \quad \textbf{(1.28)}$$

Todėl teorija minimumams W_{N_n} yra panaši maksimumų Z_{N_n} teorijai, o ribinių teoremų atveju skiriasi normalizavimas.

1.4 teorema. **(Perkėlimo teorema)** Tarkime egzistuoja tiesinio normalizavimo konstantos $c_n, d_n > 0$ ir neišsigimusi skirstinio funkcija L, su kuriomis

$$\lim_{n\to\infty} P\left(W_n < xd_n + c_n\right) = L(x), \quad \textbf{(1.29)}$$

ir

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{N_n}{n} < x\right) = A(x). \qquad \textbf{(1.30)}$$

Tuomet

$$\lim_{n\to\infty} P\left(W_{N_n} < xd_n + c_n\right) = \Psi(x); \qquad \textbf{(1.31)}$$

čia skirstinio funkcija

$$\Psi(x) = 1 - \int_0^\infty \left(1 - L(x)\right)^z dA(z). \qquad \textbf{(1.32)}$$

Teoremos formuluotė ir įrodymas pateikti [2].

Pastebėsime, kad su skirstinio funkcija *L(x)* yra galimi tik trys atvejai [1]:

$$L_{1,\gamma}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(-x)^\gamma}, & x < 0, \\ 1, & x \ge 0. \end{cases}$$

$$L_{2,\gamma}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^\gamma}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

$$L_3(x) = 1 - e^{-e^x}, \quad x \in \Re;$$

čia γ – teigiamas parametras.

1.4. KONVERGAVIMO GREITIS ESANT TIESINIAM NORMALIZAVIMUI

Svarbu ištirti absoliučiąją paklaidą

$$\Delta_n(x) = \left|P\left(W_n < xd_n + c_n\right) - \Psi(x)\right|. \qquad \textbf{(1.33)}$$

Pažymime

$$u_n(x) = nF(xd_n + c_n) \qquad \textbf{(1.34)}$$

ir su tais *x*, su kuriais *L(x)<1*,

$$\rho_n(x) = u_n(x) + \ln(1 - L(x)). \qquad \textbf{(1.35)}$$

1.5 teorema. Tarkime egzistuoja tokios normalizavimo konstantos $c_n, d_n > 0$, su kuriomis $\frac{u_n(x)}{n} \le \frac{1}{2}$.

Tada

$$\Delta_n(x) \le \left(1 - L(x)\right)\left(R_{1,n}(x) + R_{2,n}(x) + R_{1,n}(x) \cdot R_{2,n}(x)\right); \qquad \textbf{(1.36)}$$

čia

$$R_{1,n}(x) = 2\left(\frac{u_n^2(x)}{n} + \frac{u_n^4(x)}{n^2} \cdot \frac{1}{1-q}\right); \qquad \textbf{(1.37)}$$

$$R_{2,n}(x) = \left|\rho_n(x)\right| + \frac{1}{2}\rho_n^2(x) \cdot \frac{1}{1-s}. \qquad \textbf{(1.38)}$$

Apribojimai: $\frac{2}{3}\frac{u_n^2(x)}{n} \le q < 1$, $\frac{1}{3}|\rho_n(x)| \le s < 1$ ir $0 < q, s < 1$.

Teoremos formuluotė ir įrodymas pateikti [3].

Pateiksiu paprastesnę teoremą, kuri leidžia $R_{1,n}(x)$ ir $R_{2,n}(x)$ narius skaičiuoti tik iki *1/n* eilės.

1.6 teorema. Tarkime egzistuoja tokios normalizavimo konstantos $c_n, d_n > 0$, su kuriomis $\frac{u_n(x)}{n} \le \frac{1}{2}$.

Tada

$$\Delta_n(x) \le (1 - L(x))(R_{1,n}(x) + R_{2,n}(x) + R_{1,n}(x) \cdot R_{2,n}(x)); \quad \textbf{(1.39)}$$

čia

$$R_{1,n}(x) = \frac{2u_n^2(x)}{n} \cdot \frac{1}{1-q}; \quad \textbf{(1.40)}$$

$$R_{2,n}(x) = |\rho_n(x)| \cdot \frac{1}{1-s}; \quad \textbf{(1.41)}$$

$u_n(x) = nF(xd_n + c_n)$;

$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$;

$\rho_n(x) = u_n(x) - u(x)$.

Apribojimai: $\frac{u_n^2(x)}{n} \le q < 1$, $\frac{1}{2}|\rho_n(x)| \le s < 1$ ir $0 < q, s < 1$.

Teoremos formuluotė ir įrodymas pateikti [3].

1.7 teorema. Tarkime yra tenkinamos sąlygos $\lim_{n\to\infty} P(W_n < xd_n + c_n) = L(x)$, $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{N_n}{n} < x\right) = A(x)$ bei $A(+0) = 0$. Tuomet su sąlyga, kad $\frac{u_n(x)}{n} \le \frac{1}{2}$ yra teisingas įvertis:

$$\Delta_{N_n}(x) \le \Delta_n(x)\int_0^\infty z(\delta_n(x)(1 - L(x)))^{z-1} dA_n(nz) + \left|\int_0^\infty (A_n(nz) - A(z))d(1 - L(x))^z\right|; \quad \textbf{(1.42)}$$

čia $\Delta_n(x) \le (1 - L(x))(R_{1,n}(x) + R_{2,n}(x) + R_{1,n}(x) \cdot R_{2,n}(x))$, **(1.43)**

$$R_{1,n}(x) = 2\left(\frac{u_n^2(x)}{n} + \frac{u_n^4(x)}{n^2} \cdot \frac{1}{1-q}\right), \quad \textbf{(1.44)}$$

$$R_{2,n}(x) = |\rho_n(x)| + \frac{1}{2}\rho_n^2(x) \cdot \frac{1}{1-s}, \quad \textbf{(1.45)}$$

$$\delta_n(x) = \max\left(1, e^{-\rho_n(x)}\right). \quad \textbf{(1.46)}$$

Teoremos formuluotė ir įrodymas pateikti [3].

Pastebėsime, jog ši teorema tinka ir netiesiškai normuotiems minimumas.

1.5. KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTIS PERKĖLIMO TEOREMOJE

Pateikiame konvergavimo greičio įvertį perkėlimo teoremoje (1.4 teorema).

1.8 teorema Tarkime yra tenkinamos sąlygos $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$, $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{N_n}{n} \le x\right) = \lim_{n\to\infty} A_n(nx) = A(x)$ bei $A(+0) = 0$. Kai $\frac{u_n(x)}{n} \le \frac{1}{2}$ yra teisingas įvertis:

$$\Delta_n(x) = \left| P\left(\tilde{W}_{N_n} \le x\right) - \Psi(x) \right| \le$$
$$\le \left(\frac{u_n^2(x)}{n} + |\rho_n(x)| \right) \int_0^\infty z\delta_n^z(x)dA(nz) + u(x)\int_0^\infty \left|\left(A_n(nz) - A(z)\right)\right| e^{-zu(x)}dz\,; \qquad \mathbf{(1.47)}$$

čia

$$\Psi(x) = 1 - \int_0^\infty (1 - L(x))^z\, dA(z)\,, \qquad \mathbf{(1.48)}$$

$$\rho_n(x) = u_n(x) - u(x)\,; \qquad \mathbf{(1.49)}$$

$$\delta_n(x) = \max\left(\left(1 - F\left(xd_n + c_n\right)\right)^n, e^{-u(x)}\right). \qquad \mathbf{(1.50)}$$

Teoremos formuluotė ir įrodymas pateikti [4].

2. TIRIAMOJI DALIS

2.1. PERKĖLIMO TEOREMA MINIMUMAMS NETIESINIO NORMALIZAVIMO ATVEJU

Tarkime $\{X_j, j \geq 1\}$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai su skirstinio funkcija $F(x)$. Pažymime

$$W_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

Perkėlimo teorema

Tarkime, kad $G_n(x)$ yra tolydi ir didėjanti funkcija, su kuria

$$\lim_{n\to\infty} P\left(W_n \leq G_n(x)\right) = L(x) = 1 - e^{-u(x)}.$$

Jeigu

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{N_n}{n} \leq x\right) = A(x),$$

tuomet

$$\lim_{n\to\infty} P\left(W_{N_n} \leq G_n(x)\right) = \Psi(x);$$

čia skirstinio funkcija

$$\Psi(x) = 1 - \int_0^\infty \left(1 - L(x)\right)^z dA(z) = 1 - \int_0^\infty e^{-zu(x)} dA(z),$$

o *L(x)* neišsigimusi funkcija.

$\triangleright$*Įrodymas:*

Kadangi N_n yra nepriklausomi nuo $X_j, j \geq 1$, tai

$$P\left(W_{N_n} < G_n(x)\right) = P\left(G_n^{-1}(W_{N_n}) < x\right) = \sum_{j\geq 1} P\left(W_j < G_n(x)\right) P\left(N_n = j\right) =$$

$$= \sum_{j\geq 1} \left(1 - \left(1 - F\left(G_n(x)\right)\right)^n\right) P\left(N_n = j\right).$$

Tuomet

$$\lim_{n\to\infty} P\left(W_{N_n} < G_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(G_n^{-1}(W_{N_n}) < x\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \sum_{j\geq 1}\left(1 - F\left(G_n(x)\right)\right)\right)^{\frac{j}{n}} P\left(N_n = j\right) =$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \left(1 - F\left(G_n(x)\right)\right)^z dP\left(\frac{N_n}{n} < z\right).$$

Kadangi $P\left(W_n < G_n(x)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L(x)$ ir $P\left(\frac{N_n}{n} < x\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A(x)$ gauname, kad

$$\lim_{n\to\infty} P\left(W_{N_n} < G_n(x)\right) = 1 - \int_0^{\infty} \left(1 - L(x)\right)^z dA(z) = \Psi(x).$$

Teorema įrodyta. $\triangleleft$

2.2. NETIESINIO NORMALIZAVIMO PRITAIKYMAS

Tarkime, kad $X_1, X_2, \ldots, X_n$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai su skirstinio funkcija $F(x) = P\left(X_j < x\right)$, $j = \overline{1,n}$. Mūsų tyrimo objektas yra struktūros W_n ir W_{N_n}, kai skirstinio funkcija yra sunkios „uodegos" funkcija: $F(x) = 1 - \frac{1}{\ln x}$, $x \ge e$.

Tuomet patikriname ar tenkinamos ribinės teoremos, kai normalizavimas yra tiesinis:

1.1 teorema: Turime, kad $\alpha(F) \ne -\infty$, kadangi $\alpha(F) = e$. Teoremos sąlyga neišpildyta.

1.2 teorema: $F^*(x) = F\left(\alpha(F) - \frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{\ln\left(e - \frac{1}{x}\right)}$ ir $\lim_{t\to-\infty} \frac{F^*(tx)}{F^*(t)} \ne x^{-\gamma}$. Taigi neišpildoma

1.2 teoremos sąlyga.

1.3 teorema: $\int_e^{\infty} F(y)dy = \int_e^{\infty} (1 - \frac{1}{\ln y})dy = \infty$. Taigi netenkinama ir 1.3 teoremos sąlyga.

Kadangi netenkinamos ribinės minimumų teoremų sąlygos, kai normalizavimas yra tiesinis, tai bandysime taikyti netiesinį normalizavimą [5].

Tarkime, kad $G_n(x)$ – teigiama tolydi ir didėjanti funkcija. Tada

$$P\left(G_n^{-1}(W_n) < x\right) = P\left(W_n < G_n(x)\right) = 1 - \left(1 - F(G_n(x))\right)^n =$$

$$= 1 - \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\ln G_n(x)}\right)\right)^n = 1 - \frac{1}{\ln^n G_n(x)}.$$

Įrodysime šią teoremą.

2.1 teorema Tarkime, kad $F(x) = 1 - \frac{1}{\ln x}$, $x \ge e$,

1. Jeigu $G_n(x) = e^{1 + \frac{(-x)^{\gamma}}{n}}$, tai

$$\lim_{n\to\infty} P\left(W_n < G_n(x)\right) = 1 - e^{-(-x)^{-\gamma}}, \ x < 0.$$

2. Jeigu $G_n(x) = e^{1+\frac{x^{\gamma}}{n}}$, tai

$\lim\limits_{n\to\infty} P\left(W_n < G_n(x)\right) = 1 - e^{-x^{\gamma}}$, $x \ge 0$;

3. Jeigu $G_n(x) = e^{1+\frac{e^{x}}{n}}$, tai

$\lim\limits_{n\to\infty} P\left(W_n < G_n(x)\right) = 1 - e^{-e^{x}}$, $x \in \Re$;

$\triangleright$*Įrodymas:*

1. $$P\left(G_n^{-1}(W_n) < x\right) = P\left(n(\ln W_n - 1) < (-x)^{\gamma}\right) = P\left(\ln W_n - 1 < \frac{(-x)^{\gamma}}{n}\right) = P\left(\ln W_n < 1 + \frac{(-x)^{\gamma}}{n}\right) =$$

$$= P\left(W_n < G_n(x)\right) = P\left(W_n < e^{1+\frac{(-x)^{-\gamma}}{n}}\right) = 1 - \left(1 - F\left(e^{1+\frac{(-x)^{-\gamma}}{n}}\right)\right)^n = 1 - \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\ln\left(e^{1+\frac{(-x)^{-\gamma}}{n}}\right)}\right)\right)^n =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{\ln\left(e^{1+\frac{(-x)^{-\gamma}}{n}}\right)}\right)^n = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{(-x)^{-\gamma}}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \frac{1}{e^{(-x)^{-\gamma}}} \to 1 - e^{-(-x)^{-\gamma}} = L(x)$$

Gauname: jeigu $G_n(x) = e^{1+\frac{(-x)^{\gamma}}{n}}$, tai

$P\left(G_n^{-1}(W_n) < x\right) \to L_{1,\gamma}(x) = 1 - e^{-(-x)^{-\gamma}}$ (Freše).

2. $$P\left(G_n^{-1}(W_n) < x\right) = P\left(n(\ln W_n - 1) < x^{\gamma}\right) = P\left(\ln W_n - 1 < \frac{x^{\gamma}}{n}\right) = P\left(\ln W_n < 1 + \frac{x^{\gamma}}{n}\right) =$$

$$= P\left(W_n < G_n(x)\right) = P\left(W_n < e^{1+\frac{x^{\gamma}}{n}}\right) = 1 - \left(1 - F\left(e^{1+\frac{x^{\gamma}}{n}}\right)\right)^n = 1 - \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\ln\left(e^{1+\frac{x^{\gamma}}{n}}\right)}\right)\right)^n =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{\ln\left(e^{1+\frac{x^{\gamma}}{n}}\right)}\right)^n = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{x^{\gamma}}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \frac{1}{e^{x^{\gamma}}} \to 1 - e^{-x^{\gamma}} = L(x)$$

Gauname: jeigu $G_n(x) = e^{1+\frac{x^{\gamma}}{n}}$, tai

$P\left(G_n^{-1}(W_n) < x\right) \to 1 - e^{-x^{\gamma}}$ (Veibulo).

3. $P\left(G_n^{-1}(W_n) < x\right) = P\left(n(\ln W_n - 1) < e^x\right) = P\left(\ln W_n - 1 < \frac{e^x}{n}\right) = P\left(\ln W_n < 1 + \frac{e^x}{n}\right) =$

$$= P\left(W_n < G_n(x)\right) = P\left(W_n < e^{1+\frac{e^x}{n}}\right) = 1 - \left(1 - F\left(e^{1+\frac{e^x}{n}}\right)\right)^n = 1 - \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\ln\left(e^{1+\frac{e^x}{n}}\right)}\right)\right)^n =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{\ln\left(e^{1+\frac{e^x}{n}}\right)}\right)^n = 1 - \frac{1}{\left(1+\frac{e^x}{n}\right)^n} \underset{n\to\infty}{\to} 1 - \frac{1}{e^{e^x}} \to 1 - e^{-e^x} = L(x)$$

Gauname: jeigu $G_n(x) = e^{1+\frac{e^x}{n}}$, tai

$P\left(G_n^{-1}(W_n) < x\right) \to L_3(x) = 1 - e^{-e^x}$ (Gumbelio).

Teorema įrodyta. $\triangleleft$

Taigi gavome tokias normalizavimo ir ribines funkcijas:

2.1 lentelė

Normalizavimo ir ribinės funkcijos

$G_n(x) = e^{1+\frac{(-x)^{-\gamma}}{n}}$	$L(x) = 1 - e^{-(-x)^{\gamma}}$	$L_{1,\gamma}(x)$ Gumbelio
$G_n(x) = e^{1+\frac{x^{\gamma}}{n}}$	$L(x) = 1 - e^{-x^{\gamma}}$	$L_{2,\gamma}(x)$ Veibulo
$G_n(x) = e^{1+\frac{e^x}{n}}$	$L(x) = 1 - e^{-e^x}$	$L_3(x)$ Freše

Visas šias tris teoremos dalis galime pateikti glaustai.

2.2 teorema Jeigu $G_n(x) = e^{1+\frac{u(x)}{n}}$, tai

$$P\left(G_n^{-1}(W_n) < x\right) = P\left(W_n < G_n(x)\right) = P\left(W_n \le e^{1+\frac{u(x)}{n}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} L(x) = 1 - e^{-u(x)},$$

kai $u(x)=\begin{cases}(-x)^{-\gamma}, & x<0,\ \gamma>0\\ x^{\gamma}, & x\geq 0,\ \gamma>0\\ e^{x}, & x\in\Re\end{cases}.$

$\triangleright$*Įrodymas:*

Kadangi $G_n(x)=e^{1+\frac{u(x)}{n}}$, tuomet

$$\tilde{u}_n(x)=nF\big(G_n(x)\big)=n\left(1-\frac{1}{\ln G_n(x)}\right)=n\left(1-\frac{1}{1+\frac{u(x)}{n}}\right)=\frac{u(x)}{1+\frac{u(x)}{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}u(x).$$

Patikriname tiesiogiai:

$$P\big(W_n\leq G_n(x)\big)=1-\left(1-\left(1-\frac{1}{\ln G_n(x)}\right)\right)^n=1-\left(\frac{1}{1+\frac{u(x)}{n}}\right)^n\to L(x)=1-e^{-u(x)}.$$

Teorema įrodyta. $\triangleleft$

2.3. APROKSIMAVIMO PAKLAIDOS

Skirstinio funkcija F vadinama N-minstabiliąja, jeigu egzistuoja $G_n(x)>0$, $P\big(W_{N_n}\leq G_n(x)\big)=F(x)$.

Jeigu atsitiktinis dydis N yra geometrinis, $P\big(N=k\big)=p\big(1-p\big)^{k-1}$, $k\geq 1$, tai N-minstabilumas vadinamas geometriniu minstabilumu.

$$P\big(W_{N_n}\leq G_n(x)\big)=\sum_{k=1}^{\infty}\big(1-\big(1-F\big(G_n(x)\big)\big)\big)^k p_n\big(1-p_n\big)^{k-1}=1-\frac{p_n\big(1-F\big(G_n(x)\big)\big)}{1-\big(1-p_n\big)\big(1-F\big(G_n(x)\big)\big)}.$$

Kadangi $G_n(x)=e^{1+\frac{u(x)}{n}}$, imame $u(x)=\begin{cases}(-x)^{-\gamma}, & x<0,\ \gamma>0\\ x^{\gamma}, & x\geq 0,\ \gamma>0\\ e^{x}, & x\in\Re\end{cases}.$

$$u_n(x)=nF\big(G_n(x)\big)=n\left(1-\frac{1}{\ln G_n(x)}\right)=n\left(1-\frac{1}{1+\frac{u(x)}{n}}\right)=\frac{u(x)}{1+\frac{u(x)}{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}u(x).$$

Sąlyga $u_n(x)\to u(x)$, kai $n\to\infty$, yra būtina ir pakankama, kad

$P\big(W_n\leq G_n(x)\big)\to L(x)=1-e^{-u(x)}$.

$F\big(G_n(x)\big)=\frac{u_n(x)}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$;

$$P\left(W_{N_n} \le G_n(x)\right) = 1 - \frac{p_n\left(1 - \frac{u_n(x)}{n}\right)}{1 - (1 - p_n)\left(1 - \frac{u_n(x)}{n}\right)} = \left[p_n = \frac{1}{n} \right] = 1 - \frac{p_n\left(1 - \frac{u_n(x)}{n}\right)}{p_n\left(1 - \frac{u_n(x)}{n} + u_n(x)\right)} =$$

$$= 1 - \frac{1 - \frac{u_n(x)}{n}}{1 - \frac{u_n(x)}{n} + u_n(x)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 - \frac{1}{1 + u(x)} = \Psi(x)\,.$$

Aproksimavimo paklaidos:

$$1 - \frac{1 - \frac{u_n(x)}{n}}{1 - \frac{u_n(x)}{n} + u_n(x)} - \left(1 - \frac{1}{1 + u(x)}\right) = \frac{1}{1 + u(x)} - \frac{1 - \frac{u_n(x)}{n}}{1 - \frac{u_n(x)}{n} + u_n(x)} =$$

$$= \frac{1 - \frac{u_n(x)}{n} + u_n(x) - 1 + \frac{u_n(x)}{n} - u(x) + \frac{u_n(x)}{n} u(x)}{(1 + u(x))\left(1 - \frac{u_n(x)}{n} + u_n(x)\right)} = \frac{u_n(x) - u(x) + \frac{u_n(x)}{n} u(x)}{(1 + u(x))\left(1 - \frac{u_n(x)}{n} + u_n(x)\right)} =$$

$$= \frac{1}{1 + u(x)} \cdot \frac{u_n(x) - u(x) + \frac{u_n(x)}{n} u(x)}{1 - \frac{u_n(x)}{n} + u_n(x)} = \left[\begin{array}{c} \text{\textit{Įsistatau}} \\ u_n(x) = \dfrac{u(x)}{1 + \frac{u(x)}{n}} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{1 + u(x)} \cdot \frac{\frac{u(x)}{1 + \frac{u(x)}{n}} - u(x) + \frac{u(x)}{n + u(x)} u(x)}{1 - \frac{u(x)}{n + u(x)} + \frac{u(x)}{1 + \frac{u(x)}{n}}} = \frac{1}{1 + u(x)} \cdot \frac{\frac{nu(x)}{n + u(x)} - u(x) + \frac{u^2(x)}{n + u(x)}}{1 - \frac{u(x)}{n + u(x)} + \frac{nu(x)}{n + u(x)}} =$$

$$= \frac{1}{1 + u(x)} \cdot \frac{nu(x) - nu(x) - u^2(x) + u^2(x)}{n + nu(x)} = \frac{1}{1 + u(x)} \cdot 0 = 0$$

Gavome netikėtą rezultaką, kad aproksimavimo paklaidos yra lygios nuliui, todėl nebereikia taikyti 1.8 teoremos ir nereikia skaičiuoti konvergavimo greičio įverčio.

Kai N_n yra geometrinis, t.y. , $P(N_n = k) = p_n (1 - p_n)^{k-1}$, $k \ge 1$ ir , $p_n = \frac{1}{n}$, įrodoma [3], kad $A(x) = 1 - e^{-x}$, $x \ge 0$ ir $\Psi(x) = 1 - \frac{1}{1 + u(x)}$.

Kadangi perkėlimo teorema yra ribinė teorema ($n \to \infty$), tai tektų pasinaudoti, pavyzdiniu [4] darbu ir įvertinti konvergavimo greitį, tačiau netiesinio normalizavimo atveju, kai $G_n(x) = e^{1 + \frac{u(x)}{n}}$, įrodome tokį teiginį.

Teiginys. Jeigu $F(x)=1-\dfrac{1}{\ln x}$, $x \ge e$ ir N_n yra geometrinis atsitiktinis dydis su parametru $p_n=\dfrac{1}{n}$, tai

$$P\left(W_{N_n} \le G_n(x)\right)=1-\frac{1}{1+u(x)}=\Psi(x).$$

$\triangleright$ *Pagrindimas:*

Žinoma [7], kad

$$P\left(W_{N_n} \le x\right)=1-g_{N_n}\left(1-F(x)\right);$$

čia $g_{N_n}(z)$ yra N_n skirstinį generuojančioji funkcija:

$$g_{N_n}(z)=Ez^{N_n}.$$

Geometrinio skirstinio atveju

$$g_{N_n}(z)=\frac{p_n z}{1-\left(1-p_n\right)z}.$$

Tokiu būdu

$$P\left(W_{N_n} \le G_n(x)\right)=1-\frac{p_n\left(1-F\left(G_n(x)\right)\right)}{1-\left(1-p_n\right)\left(1-F\left(G_n(x)\right)\right)}=1-\frac{p_n}{p_n+\dfrac{u(x)}{n}}.$$

Imdami kaip ir perkėlimo teoremoje $p_n=\dfrac{1}{n}$, gauname:

$$P\left(W_{N_n} \le G_n(x)\right)=1-\frac{1}{1+u(x)}.$$

Teiginys pagrįstas $\triangleleft$

Pastaba. Kai $P\left(W_{N_n} \le G_n(x)\right)=F(x)$, skirstinio funkcija F vadinama geometriškai minstabiliąja.

Iš šio teiginio išplaukia, kad šiuo atveju ribinė perkėlimo teorema nereikalinga, nes yra geometrinis minstabilumas. Stabilumas šitokia prasme:

$$P\left(W_{N_n} \le G_n(x)\right)=1-\frac{1}{1+u(x)}.$$

Kai $P\left(W_{N_n} \le G_n(x)\right)=S(x) \ne F(x)$, skirstinio funkciją F vadiname “pusiau stabiliąja”.

2.4. KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTIS PERKĖLIMO TEOREMOJE

2.3 teorema Tarkime, kad $F(x) = 1 - \frac{1}{\ln x}$, $x \geq e$ ir normalizavimo funkcija $G_n(x) = e^{1+\frac{u(x)}{n}}$.

Tuomet

$$\lim_{n\to\infty} P\left(W_n \leq G_n(x)\right) = L(x) = 1 - e^{-u(x)}$$

ir

$$\Delta_n(x) = \left|P\left(W_n \leq G_n(x)\right) - L(x)\right| \leq \frac{e^{-u(x)} \cdot u^2(x)}{2n}, \ \frac{u(x)}{n} \leq 1;$$

čia $u(x) = \lim_{n\to\infty} nF\left(G_n(x)\right)$.

$\triangleright$*Įrodymas:*

$$P\left(W_n \leq G_n(x)\right) = 1 - \left(1 - F\left(G_n(x)\right)\right)^n = 1 - \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\ln G_n(x)}\right)\right)^n =$$

$$= 1 - \frac{1}{\left(\ln G_n(x)\right)^n} = 1 - \frac{1}{\left(\ln e^{1+\frac{u(x)}{n}}\right)^n} = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{u(x)}{n}\right)^n}.$$

Iš čia gauname, kad

$$\lim_{n\to\infty} P\left(W_n \leq G_n(x)\right) = 1 - e^{-u(x)}.$$

$$\Delta_n(x) = \left|P\left(W_n \leq G_n(x)\right) - L(x)\right| = \left|1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{u(x)}{n}\right)} - \left(1 - e^{-u(x)}\right)\right| = \left|e^{-u(x)} - \left(1 + \frac{u(x)}{n}\right)^{-n}\right|.$$

Užrašome

$$\left(1 + \frac{u(x)}{n}\right)^{-n} = e^{-n\ln\left(1+\frac{u(x)}{n}\right)}, \text{ kai } \frac{u(x)}{n} < 1$$

ir $\ln\left(1 + \frac{u(x)}{n}\right)$ skleidžiame Makloreno eilute, gauname:

$$\ln\left(1 + \frac{u(x)}{n}\right) = u(x) - \frac{u^2(x)}{4} + \frac{u^3(x)}{9} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{u^n(x)}{n^{n+1}}$$

$$\Delta_n(x) = \left|e^{-u(x)} - e^{-n\ln\left(1+\frac{u(x)}{n}\right)}\right| \leq \frac{e^{-u(x)} \cdot u^2(x)}{2n}, \ \frac{u(x)}{n} \leq 1.$$

Teorema įrodyta. $\triangleleft$

Iš gauto įverčio išraiškos matome, kad konvergavimo greičio įverčio eilė n atžvilgiu yra lygi *1/n*.

Pastaba: $\sup_x \Delta_n(x) = \Delta_n \le \frac{1}{8n\sqrt{e}}$. Tolygusis įvertis gaunamas skaičiuojant $e^{-u(x)}u^2(x)$ išvestinę ir pasinaudojant funkcijų *u(x)* monotoniškumu. Gauname, kad įverčio dešiniosios pusės ekstremumas (maksimumas) yra, kai $u(x) = \frac{1}{2}$.

Kadangi $L(x) = 1 - e^{-u(x)}$, tuomet imdami $u(x) = \begin{cases} (-x)^{-\gamma}, & x < 0,\ \gamma > 0 \\ x^{\gamma}, & x \ge 0,\ \gamma > 0 \\ e^{x}, & x \in \Re \end{cases}$

gauname visas tris klasikines (esant tiesinio normalizavimo atveju, kai $G_n(x) = xd_n + c_n$) minimumų ribines skirstinio funkcijas:

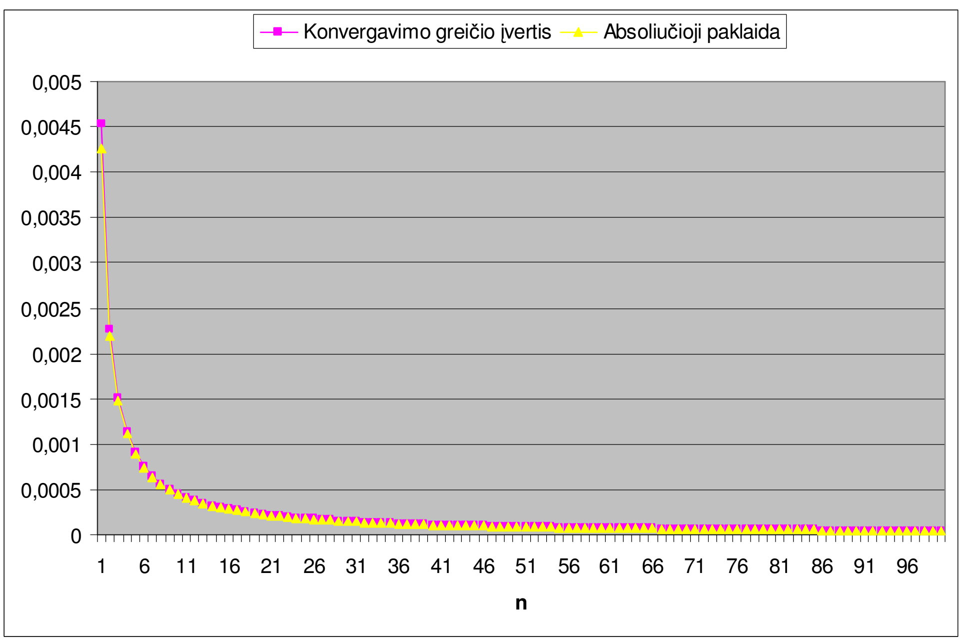
$L_{1,\gamma}(x) = 1 - e^{-(-x)^{-\gamma}}$, $L_{2,\gamma}(x) = 1 - e^{-x^{\gamma}}$ ir $L_3(x) = 1 - e^{-e^{x}}$, čia γ – teigiamas parametras.

Gauname tokius konvergavimo greičio įverčius imdami skirtingas *u(x)* reikšmes:

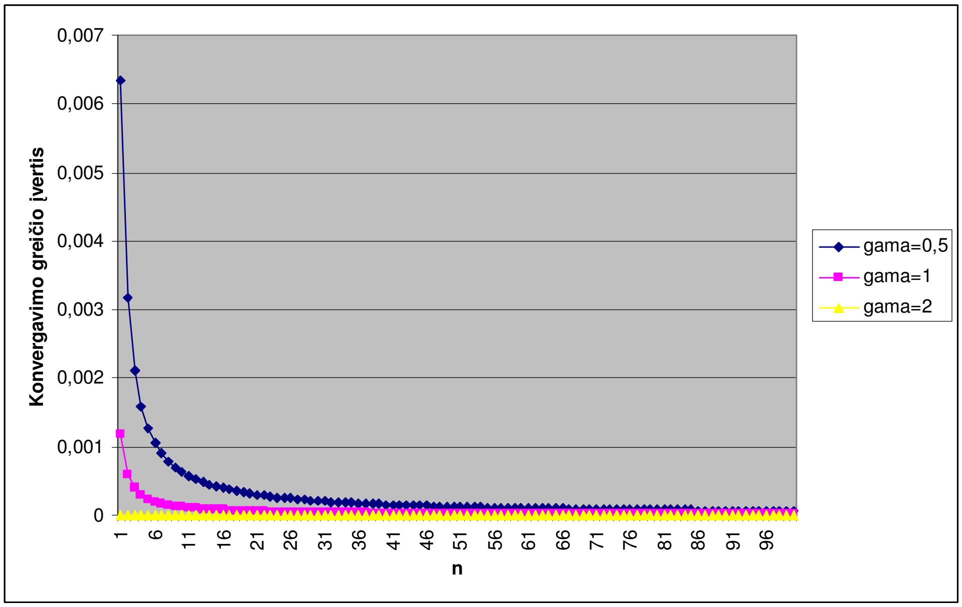
1. Kai $u(x) = (-x)^{-\gamma},\ x < 0,\ \gamma > 0$:

$$\Delta_n(x) \le \frac{e^{-u(x)} \cdot u^2(x)}{2n} \le \frac{e^{-(-x)^{-\gamma}} \cdot (-x)^{-2\gamma}}{2n},\ \text{kai}\ \frac{(-x)^{-\gamma}}{n} \le 1.$$

Tiksli absoliučioji paklaida: $\Delta_n(x) = \left| e^{-u(x)} - \left(1 + \frac{u(x)}{n}\right)^{-n} \right| = \left| e^{-(-x)^{-\gamma}} - \left(1 + \frac{(-x)^{-\gamma}}{n}\right)^{-n} \right|$.



2.1 pav. Konvergavimo greičio įverčio ir absoliučios paklaidos grafikas, kai fiksuojame $x=-10$**,** $\gamma = 1$**, o** n**-kintantis**

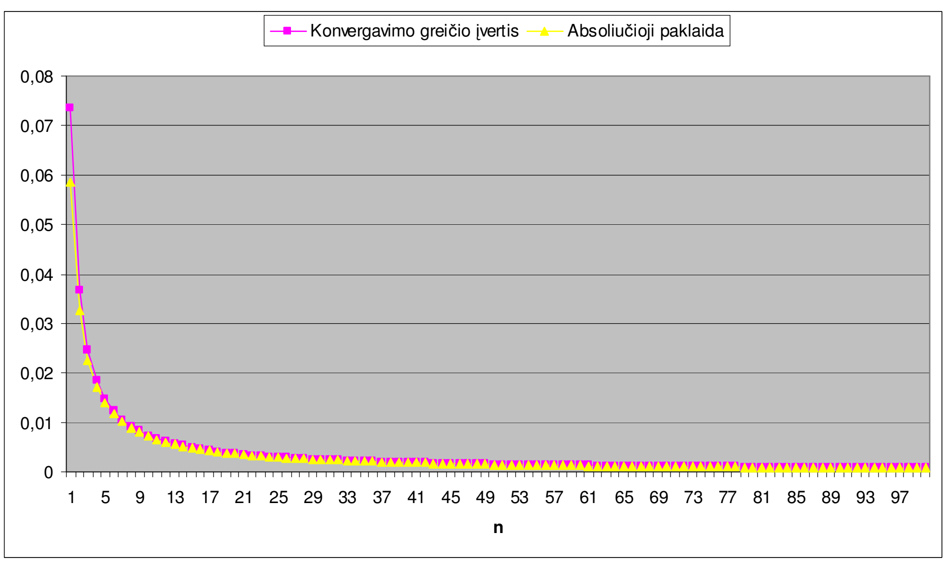


2.2 pav. Konvergavimo greičio priklausomybės nuo γ grafikas, kai fiksuojame x=*-70*, o n-kintantis

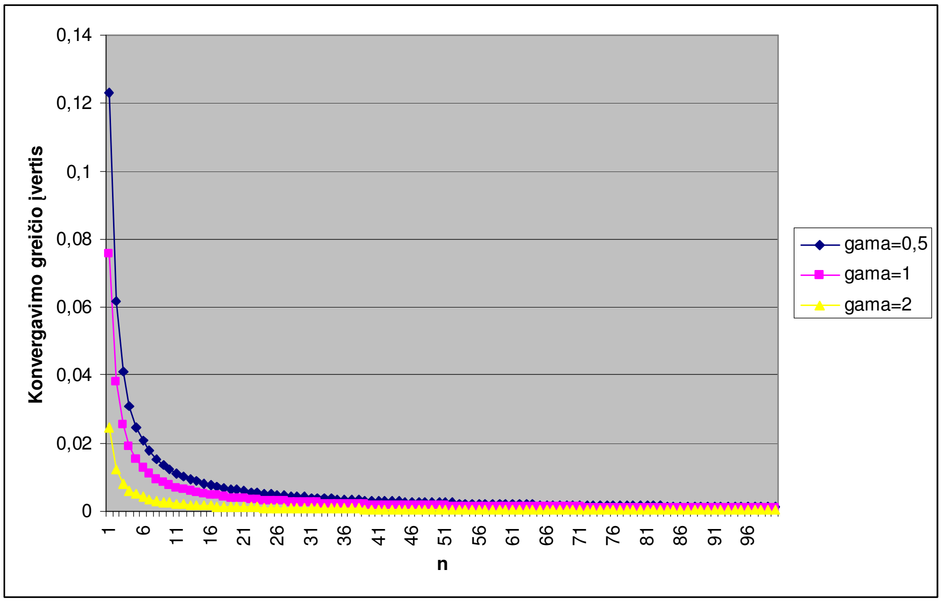
2. Kai $u(x) = x^{\gamma}, \quad x \geq 0, \quad \gamma > 0$:

$$\Delta_n(x) \leq \frac{e^{-u(x)} \cdot u^2(x)}{2n} \leq \frac{e^{-x^{\gamma}} \cdot x^{2\gamma}}{2n}, \text{ kai } \frac{x^{\gamma}}{n} \leq 1.$$

Tiksli absoliučioji paklaida: $\Delta_n(x) = \left| e^{-u(x)} - \left(1 + \frac{u(x)}{n}\right)^{-n} \right| = \left| e^{-x^{\gamma}} - \left(1 + \frac{x^{\gamma}}{n}\right)^{-n} \right|$.



2.3 pav. Konvergavimo greičio įverčio ir absoliučios paklaidos grafikas, kai fiksuojame x=*0.7*, $\gamma = 2$, o n-kintantis

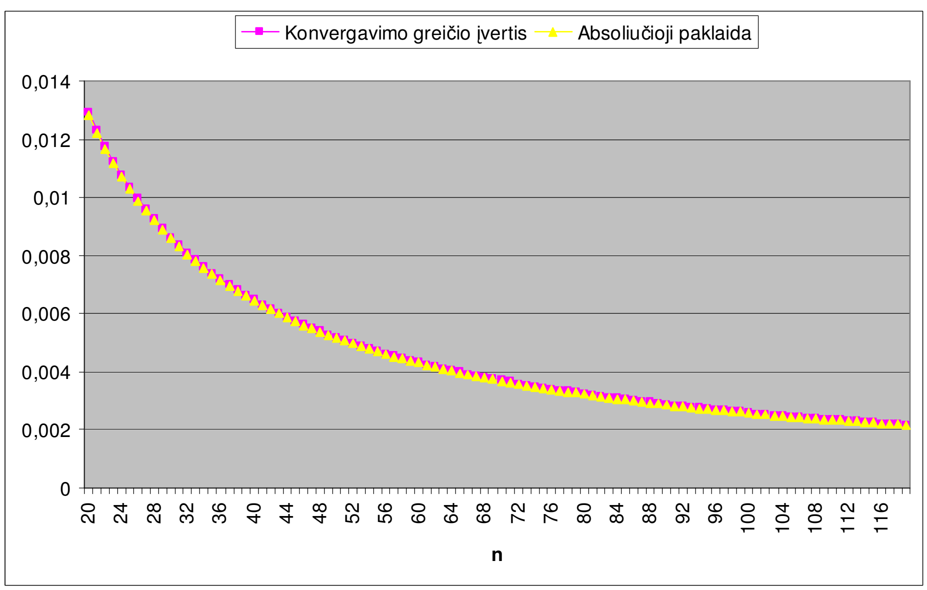


2.4 pav. Konvergavimo greičio įverčio priklausomybės nuo γ grafikas, kai fiksuojame x=*0.5*, **o** n-**kintantis**

3. Kai $u(x) = e^x$, $x \in \Re$:

$$\Delta_n(x) \le \frac{e^{-u(x)} \cdot u^2(x)}{2n} \le \frac{e^{-e^x} \cdot e^{2x}}{2n}, \text{ kai } \frac{e^x}{n} \le 1.$$

Tiksli absoliučioji paklaida: $\Delta_n(x) = \left| e^{-u(x)} - \left(1 + \frac{u(x)}{n}\right)^{-n} \right| = \left| e^{-e^x} - \left(1 + \frac{e^x}{n}\right)^{-n} \right|$.



2.5 pav. Konvergavimo greičio įverčio ir absoliučios paklaidos grafikas, kai fiksuojame x=*0.9*, **o** n-**kintantis**

2.5. KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTIS J. GALAMBOŠO TEOREMOJE

Galambošo konvergavimo greičio įverčius skaičiuosime su kiekvienu gautuoju $G_n(x)$, naudojant 1.6 teoremą.

1. Kai $G_n(x) = e^{1+\frac{(-x)^{-\gamma}}{n}}$:

$$u_n(x) = nF\left(e^{1+\frac{(-x)^{-\gamma}}{n}}\right) = n\left(1 - \frac{1}{\ln e^{1+\frac{(-x)^{-\gamma}}{n}}}\right) = n\left(1 - \frac{n}{n+(-x)^{-\gamma}}\right) = \frac{n(-x)^{-\gamma}}{n+(-x)^{-\gamma}},\ x<0;$$

$$\rho_n(x) = \frac{n(-x)^{-\gamma}}{n+(-x)^{-\gamma}} - (-x)^{-\gamma} = -\frac{(-x)^{-2\gamma}}{n+(-x)^{-\gamma}};$$

Su apribojimais: $\frac{(-x)^{-\gamma}}{n+(-x)^{-\gamma}} \le \frac{1}{2}$, $\frac{n(-x)^{-2\gamma}}{\left(n+(-x)^{-\gamma}\right)^2} \le q < 1$, $\frac{1}{2}\frac{(-x)^{-2\gamma}}{n+(-x)^{-\gamma}} \le s < 1$ ir $0 < q, s < 1$.

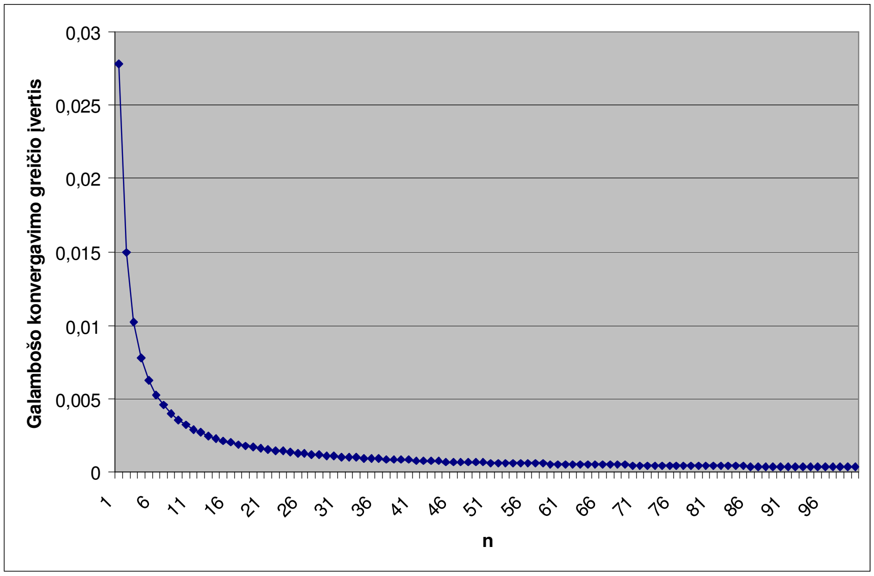
$$R_{1,n}(x) = 2\cdot\left(\frac{n(-x)^{-\gamma}}{n+(-x)^{-\gamma}}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-q} = \frac{2n(-x)^{-2\gamma}}{\left(n+(-x)^{-\gamma}\right)^2}\cdot\frac{1}{1-q};$$

$$R_{2,n}(x) = \left|-\frac{(-x)^{-2\gamma}}{n+(-x)^{-\gamma}}\right|\cdot\frac{1}{1-s} = \frac{(-x)^{-2\gamma}}{n+(-x)^{-\gamma}}\cdot\frac{1}{1-s};$$

$$\Delta_n(x) \le \left(1-1+e^{-(-x)^{-\gamma}}\right)\left(\frac{2n(-x)^{-2\gamma}}{\left(n+(-x)^{-\gamma}\right)^2}\cdot\frac{1}{1-q} + \frac{(-x)^{-2\gamma}}{n+(-x)^{-\gamma}}\cdot\frac{1}{1-s} + \frac{2n(-x)^{-2\gamma}}{\left(n+(-x)^{-\gamma}\right)^2}\cdot\frac{1}{1-q}\cdot\frac{(-x)^{-2\gamma}}{n+(-x)^{-\gamma}}\cdot\frac{1}{1-s}\right) =$$

$$\le e^{-(-x)^{-\gamma}}\left(\frac{2n(-x)^{-2\gamma}}{\left(n+(-x)^{-\gamma}\right)^2}\cdot\frac{1}{1-q} + \frac{(-x)^{-2\gamma}}{n+(-x)^{-\gamma}}\cdot\frac{1}{1-s} + \frac{2n(-x)^{-4\gamma}}{\left(n+(-x)^{-\gamma}\right)^3}\cdot\frac{1}{1-q}\cdot\frac{1}{1-s}\right).$$

Iš gauto įverčio išraiškos matome, kad konvergavimo greičio įverčio eilė n atžvilgiu yra lygi *1/n*.



2.6 pav. Galambošo konvergavimo greičio įverčio grafikas, kai fiksuojame x=-10, $\gamma = 1$, o n-kintantis

2. Kai $G_n(x) = e^{1+\frac{x^\gamma}{n}}$:

$$u_n(x) = nF\left(e^{1+\frac{x^\gamma}{n}}\right) = n\left(1 - \frac{1}{\ln e^{1+\frac{x^\gamma}{n}}}\right) = n\left(1 - \frac{1}{1+\dfrac{x^\gamma}{n}}\right) = n\left(1 - \frac{n}{n+x^\gamma}\right) = \frac{nx^\gamma}{n+x^\gamma},\ x \geq 0;$$

$$\rho_n(x) = \frac{nx^\gamma}{n+x^\gamma} - x^\gamma = -\frac{x^{2\gamma}}{n+x^\gamma};$$

Su apribojimais: $\frac{x^\gamma}{n+x^\gamma} \leq \frac{1}{2}$, $\frac{nx^{2\gamma}}{(n+x^\gamma)^2} \leq q < 1$, $\frac{1}{2}\frac{x^{2\gamma}}{n+x^\gamma} \leq s < 1$ ir $0 < q, s < 1$.

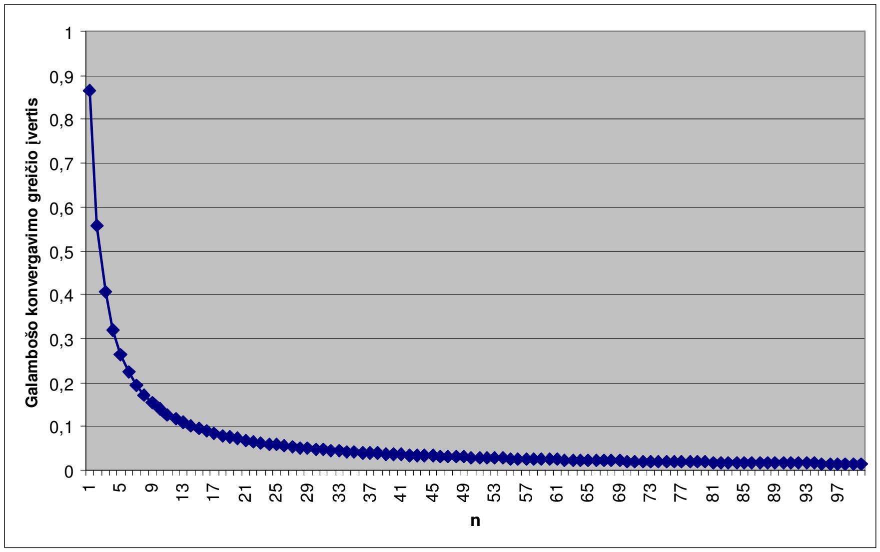
$$R_{1,n}(x) = 2 \cdot \left(\frac{nx^\gamma}{n+x^\gamma}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{2nx^{2\gamma}}{(n+x^\gamma)^2} \cdot \frac{1}{1-q};$$

$$R_{2,n}(x) = \left|-\frac{x^{2\gamma}}{n+x^\gamma}\right| \cdot \frac{1}{1-s} = \frac{x^{2\gamma}}{n+x^\gamma} \cdot \frac{1}{1-s};$$

$$\Delta_n(x) \leq \left(1 - 1 + e^{-x^\gamma}\right)\left(\frac{2nx^{2\gamma}}{(n+x^\gamma)^2} \cdot \frac{1}{1-q} + \frac{x^{2\gamma}}{n+x^\gamma} \cdot \frac{1}{1-s} + \frac{2nx^{2\gamma}}{(n+x^\gamma)^2} \cdot \frac{1}{1-q} \cdot \frac{x^{2\gamma}}{n+x^\gamma} \cdot \frac{1}{1-s}\right) \leq$$

$$\leq e^{-x^\gamma}\left(\frac{2nx^{2\gamma}}{(n+x^\gamma)^2} \cdot \frac{1}{1-q} + \frac{x^{2\gamma}}{n+x^\gamma} \cdot \frac{1}{1-s} + \frac{2nx^{4\gamma}}{(n+x^\gamma)^3} \cdot \frac{1}{1-q} \cdot \frac{1}{1-s}\right).$$

Iš gauto įverčio išraiškos matome, kad konvergavimo greičio įverčio eilė n atžvilgiu yra lygi $1/n$.



2.7 pav. Galambošo konvergavimo greičio įverčio grafikas, kai fiksuojame x=*0.7*, $\gamma = 2$, **o** n**-kintantis**

3. Kai $G_n(x) = e^{1+\frac{e^x}{n}}$:

$$u_n(x) = nF\left(e^{1+\frac{e^x}{n}}\right) = n\left(1 - \frac{1}{\ln e^{1+\frac{e^x}{n}}}\right) = n\left(1 - \frac{1}{1+\frac{e^x}{n}}\right) = n\left(1 - \frac{n}{n+e^x}\right) = \frac{ne^x}{n+e^x},\ x \in \Re;$$

$$\rho_n(x) = \frac{ne^x}{n+e^x} - e^x = -\frac{e^{2x}}{n+e^x};$$

Su apribojimais: $\frac{e^x}{n+e^x} \le \frac{1}{2}$, $\frac{ne^{2x}}{\left(n+e^x\right)^2} \le q < 1$, $\frac{1}{2}\frac{e^{2x}}{n+e^x} \le s < 1$ ir $0 < q, s < 1$.

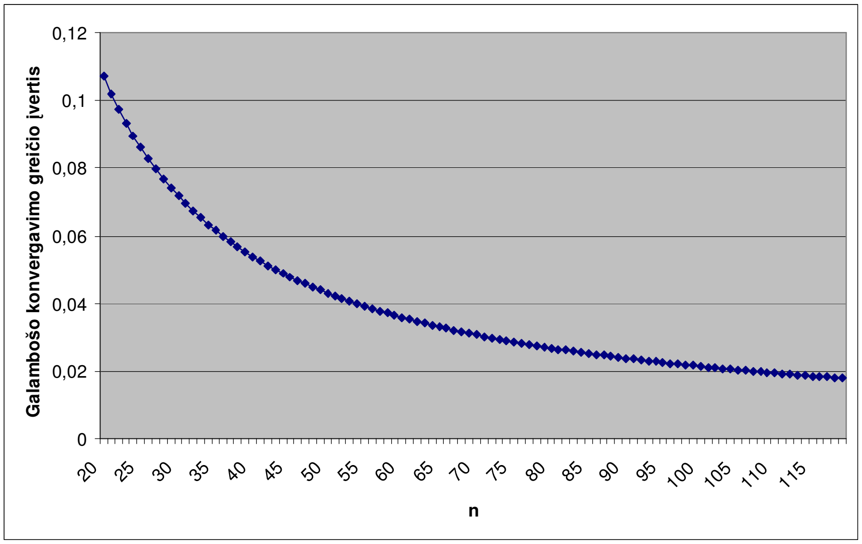
$$R_{1,n}(x) = 2\cdot\left(\frac{ne^x}{n+e^x}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{2ne^{2x}}{\left(n+e^x\right)^2} \cdot \frac{1}{1-q};$$

$$R_{2,n}(x) = \left|-\frac{e^{2x}}{n+e^x}\right| \cdot \frac{1}{1-s} = \frac{e^{2x}}{n+e^x} \cdot \frac{1}{1-s};$$

$$\Delta_n(x) \le \left(1 - 1 + e^{-e^x}\right)\left(\frac{2ne^{2x}}{\left(n+e^x\right)^2} \cdot \frac{1}{1-q} + \frac{e^{2x}}{n+e^x} \cdot \frac{1}{1-s} + \frac{2ne^{2x}}{\left(n+e^x\right)^2} \cdot \frac{1}{1-q} \cdot \frac{e^{2x}}{n+e^x} \cdot \frac{1}{1-s}\right) \le$$

$$\le e^{-e^x}\left(\frac{2ne^{2x}}{\left(n+e^x\right)^2} \cdot \frac{1}{1-q} + \frac{e^{2x}}{n+e^x} \cdot \frac{1}{1-s} + \frac{2ne^{4x}}{\left(n+e^x\right)^3} \cdot \frac{1}{1-q} \cdot \frac{1}{1-s}\right).$$

Iš gauto įverčio išraiškos matome, kad konvergavimo greičio įverčio eilė n atžvilgiu yra lygi *1/n*.



2.8 pav. Galambošo konvergavimo greičio įverčio grafikas, kai fiksuojame *x=0.9*, o *n*-kintantis

2.6. METODŲ PALYGINIMAS

Programinis ir vaizdinis realizavimas bei skaičiavimai atlikti lyginant paklaidų įverčius:

- Konvergavimo greičio įvertis (Galambošo):

$$\Delta_n(x) \le e^{-u(x)}\left(\frac{2n\cdot u^2(x)}{(n+u(x))^2}\cdot\frac{1}{1-q}+\frac{u^2(x)}{n+u(x)}\cdot\frac{1}{1-s}+\frac{2n\cdot u^4(x)}{(n+u(x))^3}\cdot\frac{1}{1-q}\cdot\frac{1}{1-s}\right);$$

kai $\frac{u(x)}{n+u(x)} \le \frac{1}{2}$, $\frac{n\cdot u^2(x)}{(n+u(x))^2} \le q < 1$, $\frac{1}{2}\frac{u^2(x)}{n+u(x)} \le s < 1$ ir $0 < q, s < 1$.

- Konvergavimo greičio įvertis:

$$\Delta_n(x) = \left|P(W_n \le G_n(x)) - L(x)\right| \le \frac{e^{-u(x)}\cdot u^2(x)}{2n},\ \text{kai}\ \frac{u(x)}{n} \le 1;$$

- Tiksliosios absoliučiosios paklaidos įvertis:

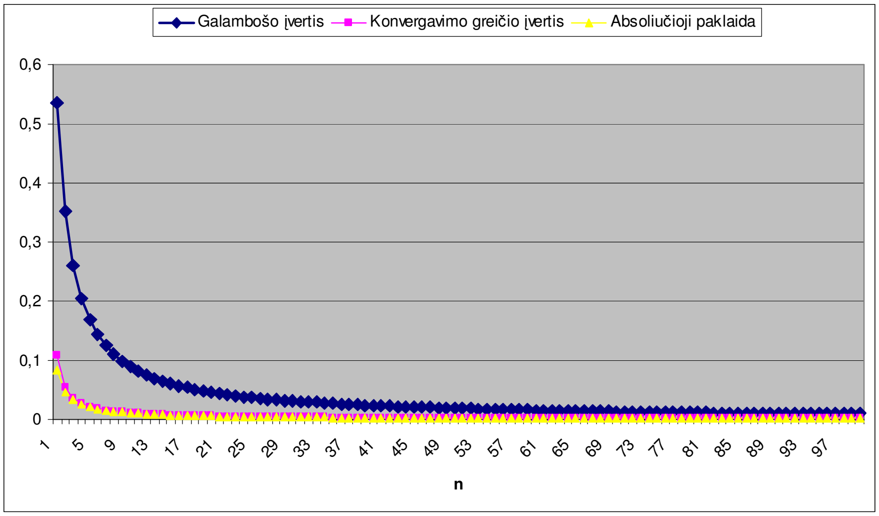
$$\Delta_n(x) = \left|P(W_n \le G_n(x)) - L(x)\right| = \left|e^{-u(x)} - \left(1+\frac{u(x)}{n}\right)^{-n}\right|,\ \text{kai}\ \frac{u(x)}{n} \le 1;$$

čia $L(x) = 1 - e^{-u(x)}$, o $u(x) = \begin{cases} (-x)^{-\gamma}, & x<0,\ \gamma>0 \\ x^{\gamma}, & x \ge 0,\ \gamma > 0 \\ e^x, & x \in \Re \end{cases}$.

Analizuojami kitimai, kai *n*-fiksuotas, o *x*-kintantis arba *x*-fiksuotas, o *n*-kintantis.

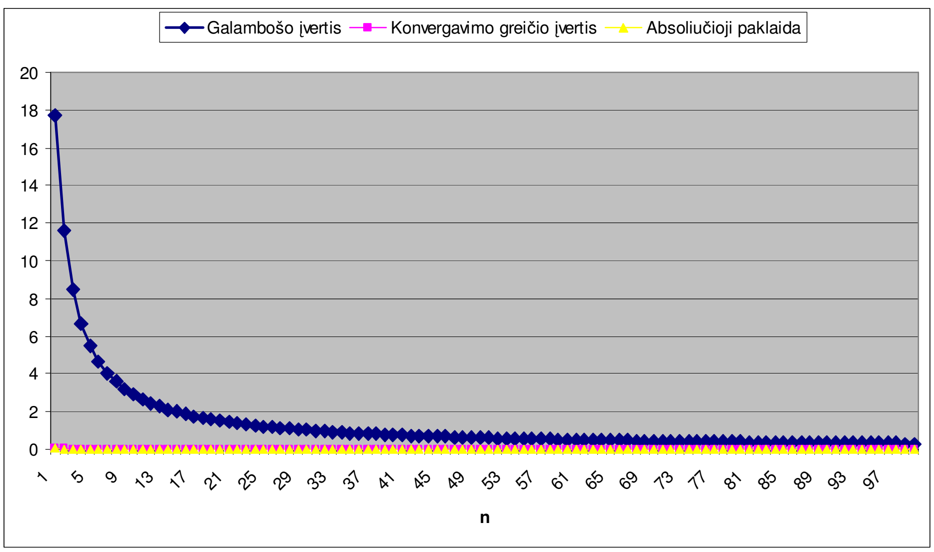
Konvergavimo greitis *n* atžvilgiu, kai $n \to \infty$ su skirtingais *u(x)* yra vienodi. Lyginti *x* atžvilgiu nėra tikslinga, nes vienos *x* reikšmės yra teigiamos, o kitos neigiamos, t.y. kitimo intervalas svyruoja nuo $-\infty$ iki $+\infty$.

Didėjant *n* reikšmėm ($n \to \infty$), paklaidos artėja į nulį.

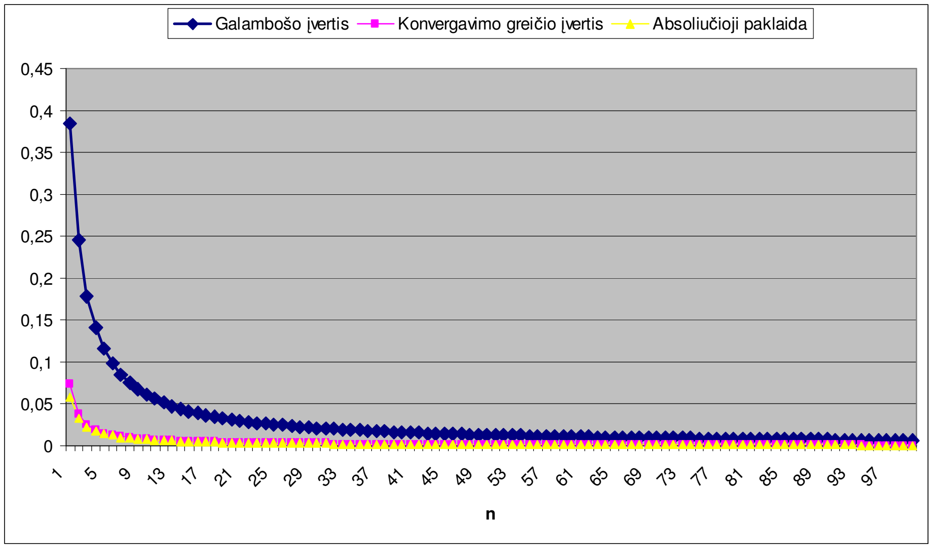


2.9 pav. Įverčių grafikas, kai fiksuojame $x=0.8$, $\gamma = 2$, $s=0.2$, $q=0.2$, **o** n**-kintantis, kai** $u(x) = x^{\gamma}$

Pasirinkus didesnes s ir q reikšmes gauname didesnes paklaidų reikšmes, taigi prie mažesnių s ir q reikšmių mažesnės ir paklaidos (žr. 2.10 ir 2.11 grafikus), todėl patariama rinktis mažesnius parametrus.

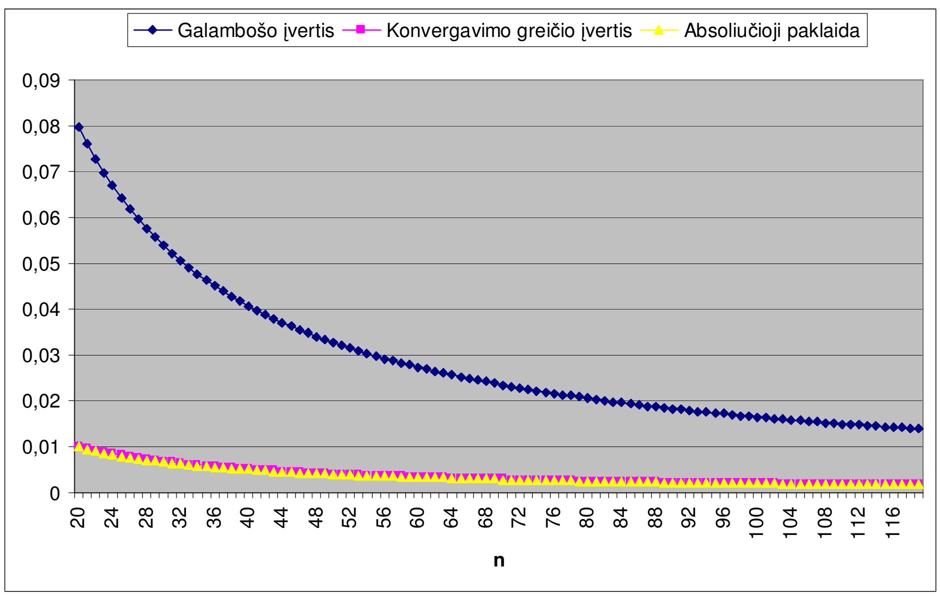


2.10 pav. Įverčių grafikas, kai fiksuojame $x=0.7$, $\gamma = 2$, $s=0.9$, $q=0.9$, **o** n**-kintantis, kai** $u(x) = x^{\gamma}$



2.11 pav. Įverčių grafikas, kai fiksuojame $x=0.7$, $\gamma = 2$, $s=0.2$, $q=0.2$, **o** n**-kintantis, kai** $u(x) = x^{\gamma}$

Konvergavimo greičio ir tiksliosios absoliučiosios paklaidos įverčiai greičiau artėja į nulį, lyginant su Galambošo konvergavimo greičio įverčio reikšme (žr. 2.12 grafiką).



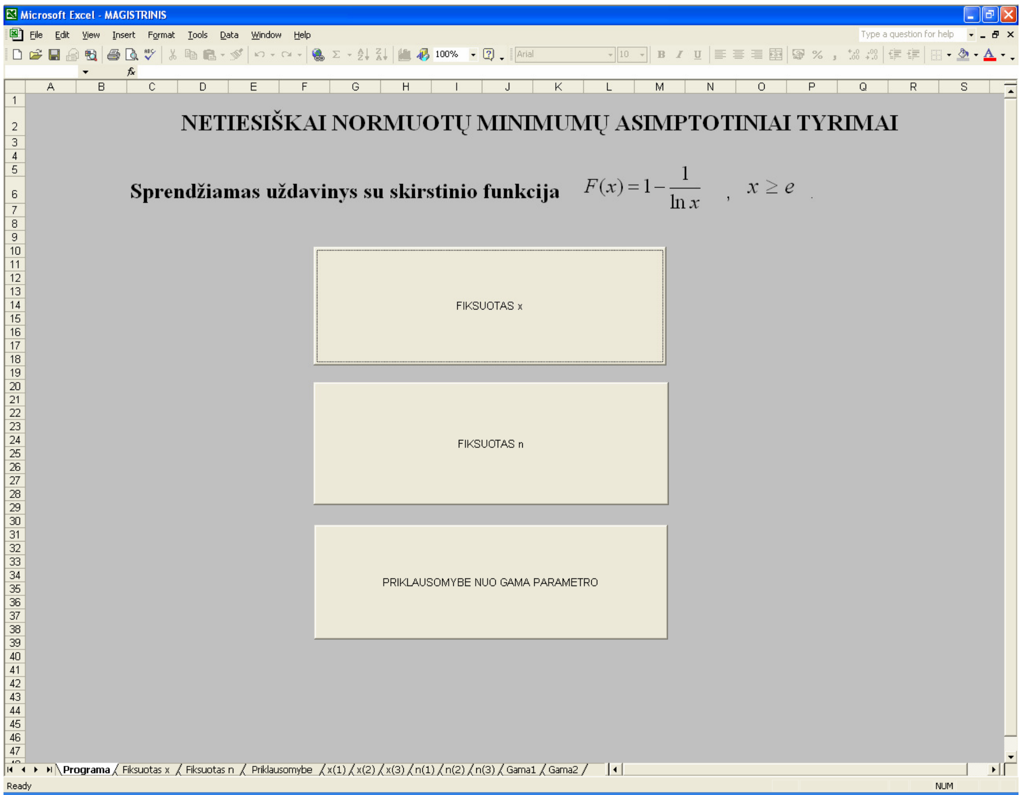
2.12 pav. Įverčių grafikas, kai fiksuojame $x=0{,}1$, $\gamma = 1$, $s=0.2$, $q=0.3$, **o** n**-kintantis, kai** $u(x) = e^{x}$

3. PROGRAMINĖ REALIZACIJA IR INSTRUKCIJA VARTOTOJUI

Programa parašyta *Microsoft Excel Visual Basic* programavimo kalba. Pasirinkta ši programavimo kalba, nes ji patogi uždavinių sprendimui, grafiniam vaizdavimui ir vartotojo sąsajos kūrimui. Vartotojui keičiant x ar n parametrų reikšmes galima lengvai įvertinti priklausomybę stebint grafiko kitimą.

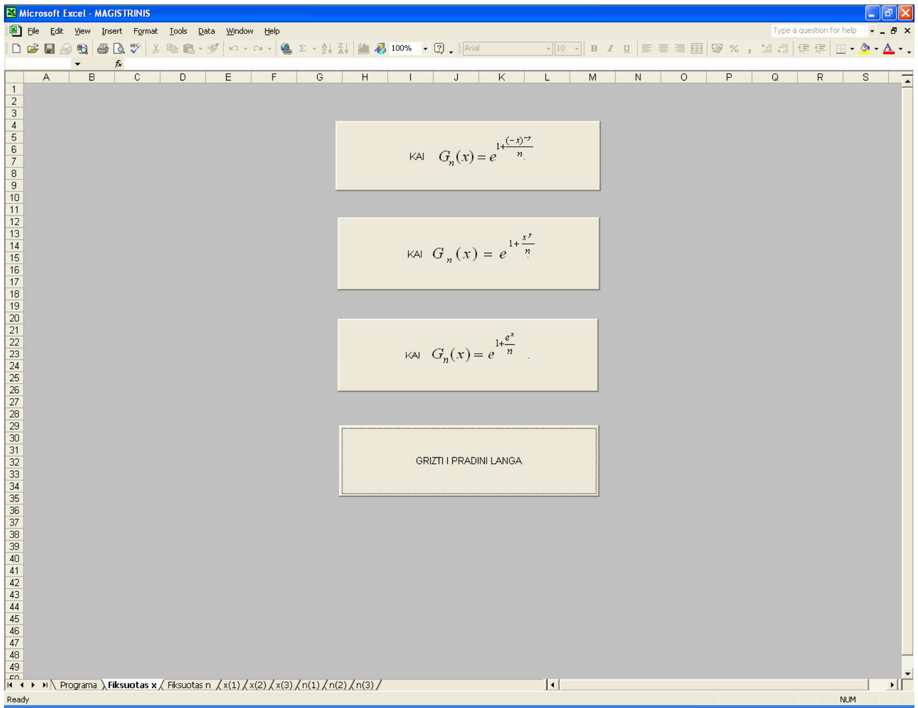
Programa yra saugoma byloje "*MAGISTRINIS.xls*". Programos tekstas pateiktas 4 priede.

Atidarius šią bylą, matome langą su galimais pasirinkimo variantais "*FIKSUOTAS x*", "*FIKSUOTAS n*" arba "*PRIKLAUSOMYBĖ NUO GAMA PARAMETRO*" (žr. 3.1 paveikslą).



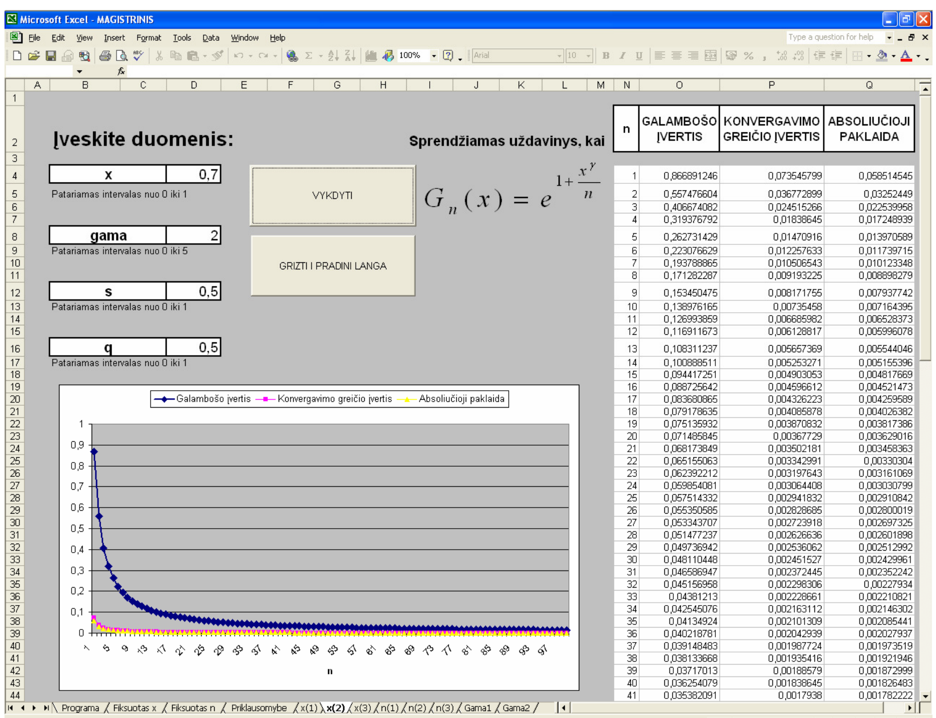
3.1 pav. Pagrindinis programos langas

Pasirinkus vieną iš galimų variantų, pavyzdžiui "*FIKSUOTAS x*", atsiveria langas su trimis pasirinkimo variantais (žr. 3.2 paveikslą). Antrojo pasirinkimo meniu langas atrodo analogiškai.



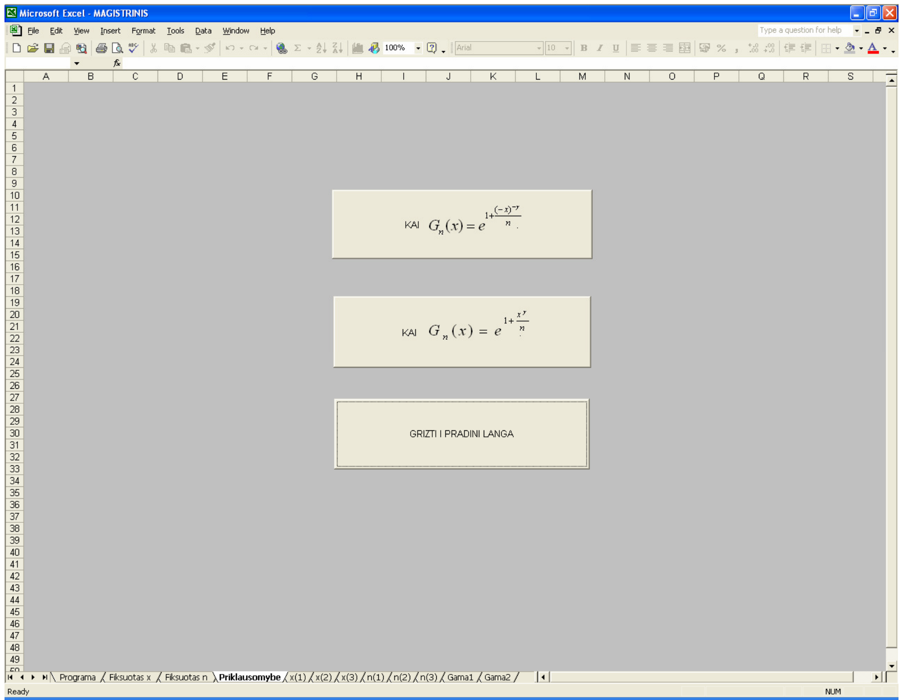
3.2 pav. Uždavinių meniu langas, kai fiksuotas x

Galima pasirinki vieną iš duotų normalizavimo funkcijų $G_n(x)$ arba sugrįžti į pradinį langą. Tuomet pasirinkus, pavyzdžiui, antrąjį variantą atsiveria uždavinio sprendimo langas (žr. 3.3 paveikslą). Visi kiti uždavinių pasirinkimo variantai atveria praktiškai analogiškus langus.



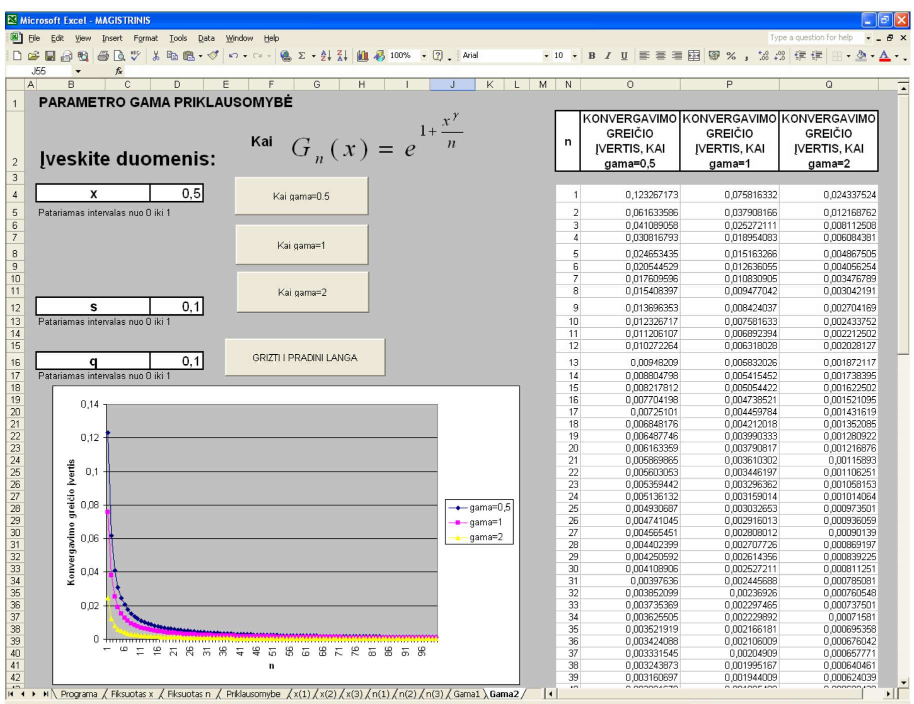
3.3 pav. Uždavinio sprendimo langas

Pasirinkus mygtuką "*PRIKLAUSOMYBĖ NUO GAMA PARAMETRO*" atsiveria langas su galimomis funkcijų pasirinkimo mygtukais, kurios turi gama (γ) parametrą (žr. 3.4 paveikslą):



3.4 pav. Uždavinių meniu langas, kai nustatoma priklausomybė nuo γ parametro

Pasirinkus variantą, kai funkcija $G_n(x) = e^{1+\frac{x^{\gamma}}{n}}$, atsiveria langas, kuriame matoma priklausomybė nuo γ parametro (žr. 3.5 paveikslą):



3.5 pav. Uždavinio sprendimo langas

Reikalavimai visiems duomenims yra bendri: visi laukeliai turi būti užpildyti ir duomenys turi atitikti apribojimus. Visiems parametrams patariamas intervalas, nes kitaip bus netenkinamos apribojimų sąlygos.

Įvedus duomenis reikia spragtelėti ant mygtuko "*VYKDYTI*" ir tuomet yra aktyvuojamas skaičiavimų procesas. Jeigu bent vienas laukas yra užpildytas neteisingai, tuomet pasirodo pranešimo langas, kad neteisingai įvesti duomenys (žr. 3.6 paveikslą).

3.6 pav. Pranešimas apie neteisingai įvestus duomenis

Jeigu duomenys įvesti teisingai, tuomet vykdomas skaičiavimas ir nubrėžiamas grafikas. Jeigu įvesti neteisingi duomenys, tuomet išjungus pranešimą (žr. 3.6 paveikslą) galima įvesti duomenis pagal patariamą intervalą arba paspausti mygtuką "*GRĮŽTI Į PRADINĮ LANGĄ*", kad sugrįžtume prie pradinio pasirinkimo.

DISKUSIJA

Pavyzdžiui imkime kitokį netiesinį normalizavimą:

1) tarkime $G_n(x) = e^{e^{\frac{u(x)}{n}}}$, tuomet

$$P\left(W_n \le G_n(x)\right) = 1 - \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\ln e^{e^{\frac{u(x)}{n}}}}\right)\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{e^{\frac{u(x)}{n}}}\right)^n = 1 - e^{-u(x)}.$$

2) tarkime $G_n(x) = e^{\ln^{\frac{1}{n}} x}$, tuomet

$$P\left(W_n \le G_n(x)\right) = 1 - \left(1 - F\left(G_n(x)\right)\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{\ln e^{\ln^{\frac{1}{n}} x}}\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{\ln^{\frac{1}{n}} x}\right)^n = 1 - \frac{1}{\ln x},$$

Gavome stabilų minimumą, nes $P\left(W_n \le G_n(x)\right) = F(x) = 1 - \dfrac{1}{\ln x}$.

3) tarkime norime gauti skirstinio funkciją *S(x)*:

imkime $G_n(x) = F^{-1}\left(1 - S^{\frac{1}{n}}(x)\right)$, čia F – tolydžioji funkcija.

Tada $P\left(W_n \le G_n(x)\right) = 1 - \left(1 - F^n\left(F^{-1}\left(1 - S^{\frac{1}{n}}(x)\right)\right)\right) = 1 - \left(1 - \left(1 - \left(1 - S^{\frac{1}{n}}(x)\right)\right)^n\right) =$

$$= 1 - \left(1 - \left(S^{\frac{1}{n}}(x)\right)^n\right) = 1 - \left(1 - S(x)\right) = S(x).$$

Tokiu būdu netiesiniu normalizavimu galime gauti bet kurią ribinę skirstinio funkciją.

IŠVADOS

- Tiesinis normalizavimas konkrečios skirstinio funkcijos $F(x) = 1 - \frac{1}{\ln x}, \quad x \geq e$ minimumams neduoda ribinių neišsigimusių skirstinių;
- Egzistuoja toks netiesinis normalizavimas, kad gauname visus tris ribinius neišsigimusius skirstinius, kaip ir klasikiniu atveju;
- Visais tirtais atvejais konvergavimo greičių įverčiai *n* atžvilgiu yra *1/n* eilės;
- Perkėlimo teoremoje esanti ribinė funkcija $\Psi(x)$ yra geometriškai minstabili;
- Esant pateiktam netiesiniam normalizavimui šiuo konkrečiu atveju perkėlimo teorema yra neinformatyvi.

REKOMENDACIJOS

Šiame magistriniame darbe netiesinis normalizavimas buvo taikytas konkrečiai skirstinio funkcijai. Siūlyčiau pratęsti tolimesnius netiesiškai normalizuotų minimumų asimptotinius tyrimus su kitomis skirtinio funkcijomis.

PADĖKOS

Nuoširdžiai dėkoju prof. dr. A. Aksomaičiui už magistrinio darbo pataisymus, gerus patarimus, ir puikias idėjas.

LITERATŪRA

1. Галамбош Я., *Асимптотическая теория зкстремальных поредковых статистик* – М. Наука, 1984, 303 с.
2. Г. Б. Гнеденко, Д. Б. Гнеденко, *О распределениях Лапласа т логистическом как предельных в теории веороятностей*, Сердика, 8, 1984.
3. А. Аксомайтис, *Неравномерная оценка скорости сходимости в мах-схеме независимых случайных величин, диссертация*, Каунас, 1987, 92 с.
4. A. Aksomaitis, *Rate of convergence in the transfer theorem for min-scheme*. Lietuvos matematikos rinkinys LMD darbai, 48/49 tomas, 2008, 372-375 p.
5. Pancheva E. *Limit theorems for extreme order statistics under non-linear normalization*. Lecture Notes Math., 1985, B.1155, 284-309.
6. Kubilius J., *Tikimybių teorija ir matematinė statistika*. – V. Mokslas, 1980, 400 p.
7. Aksomaitis A., *Tikimybių teorija ir statistika* – K. Technologija, 2000, 340 p.
8. Stuart Coles, *An introduction to statistical modeling of extreme values*, 2001, 208 p.