KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

Ieva Lengvinaitė

PARETO ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ EKSTREMUMŲ TYRIMAI

Magistro darbas

Vadovas
prof. A. Aksomaitis

KAUNAS, 2006

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

TVIRTINU
Katedros vedėjas
prof. dr. J.Rimas

2006 06 06

PARETO ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ EKSTREMUMŲ TYRIMAI

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

Kalbos konsultantas
dr. J. Džežulskienė
2006 05 30

Vadovas
prof. A. Aksomaitis
2006 06 03

Recenzentas
prof. L. Saulis
2006 06 01

Atliko
FMMM 4 gr. stud.
I. Lengvinaitė
2006 05 25

KAUNAS, 2006

KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

Pirmininkas: Leonas Saulis, profesorius (VGTU)

Sekretorius: Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)

Nariai: Jonas Algimantas Aksomaitis, profesorius (KTU)

Vytautas Janilionis, docentas (KTU)

Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU)

Rimantas Rudzkis, habil. dr., banko „NORD/LB“ vyriausiasis analitikas

Zenonas Navickas, profesorius (KTU)

Arūnas Barauskas, dr., UAB „Elsis“ generalinio direktoriaus pavaduotojas

Lengvinaitė I., Extremes analysis of Pareto random values: Master‘s work in applied mathematics / supervisor prof. A. Aksomaitis; Department of Applied mathematics, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2006. – 67 p.

SUMMARY

Herein work is researching extremes asymptotic of Pareto random values. Here is analyzing geometrically maximum (minimum) stability tasks, also asymptotically tasks, when succession value is geometrical and geometrically stability of lower extremes.

Aim of this work is to check if Pareto distribution values are stable maximum and minimum distributions and to continue researches in the area of lower extremes structures.

It was proved that maximum (minimum) distribution (when $\alpha = 1$) is geometrically stable maximum (minimum) distribution, while others – asymptotically *k*-stable. When $\alpha \neq 1$, maximum (minimum) distribution is asymptotically stable, only maximum distribution is also Pareto distribution, but with the displacement, while other - asymptotically *k*-stable.

TURINYS

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

ĮVADAS

Šiame magistro darbe yra tiriama Pareto atsitiktinių dydžių ektremumų asimptotika. Sprendžiama geometrinio maksimumo (minimumo) stabilumo uždaviniai, taip pat asimptotiniai uždaviniai, kai imties didumas yra geometrinis, bei apatinių ekstremumų geometrinis stabilumas.

Pareto skirstinys sutinkamas įvairiose realiose situacijose. Šis skirstinys yra gerai žinomas, ypač ekonomikoje. Keletas Pareto skirstinio taikymo pavyzdžių ([4], [9]):

- draudimo išmokos;
- lankymai tam tikrame internetiniame puslapyje;
- interneto pranešimų srauto, kuris naudoja TCP protokolą, rinkmenos dydžio išsibrastymas;
- naftos, esančios laukuose, atsargų vertė;
- nelaimių, įvykusių per audrą, potvynius ir pan. mąstai.

Yra nemažai literatūros, kuriose nagrinėjami geometriškai maksimumo (minimumo) stabilieji dydžiai. Monografijoje ([4]) ypač akcentuojama Pareto dydžių stabilumo reikšmė finansų rinkų modeliavime.

Turime $\left(X_1, X_2, ..., X_N\right)$ paprastąją atsitiktinę imtį iš generalinės aibės su Pareto skirstinio funkcija $F(x) = 1 - \dfrac{1}{x^\alpha}, \quad x \geq 1, \ \alpha > 0$. Atsitiktinis dydis $N = N(p)$ yra nepriklausomas nuo visų X_k, $k \geq 1$ ir geometriškai pasiskirstęs. Pareto skirstinys ypatingas tuo, kad jo vidurkis egzistuoja, kai $\alpha > 1$ ir $EX = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}$, o dispersija egzistuoja, kai $\alpha > 2$ ir $DX = \dfrac{\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$. Straipsnyje ([1]) tiriami geometriškai stabilieji maksimumo skirstiniai, kai imama paprastoji atsitiktinė imtis iš generalinės aibės, kuri yra pasiskirsčiusi pagal logistinį dėsnį. Yra įrodoma, jog logistiniai dydžių skirstiniai yra stabilieji maksimumo skirstiniai.

Magistro darbe ieškoma atsakymo į klausimus:

- ✓ ar Pareto skirstiniai yra geometriškai maksimumo ir minimumo stabilieji skirstiniai?
- ✓ jeigu jie nėra stabilieji, ar bus asimptotiškai stabilūs?
- ✓ asimptotiško stabilumo atveju įvertinti konvergavimo greitį.
- ✓ ar geometriškai stabilūs apatiniai *k*-tieji ekstremumai?
- ✓ atlikti perkėlimo teoremos analizę Pareto atsitiktinių dydžių atveju (atskleisti jos trūkumus).

Taigi, tiriamojoje dalyje ieškoma Pareto dydžių maksimumo ir minimumo ribinių skirstinių. Randamos normalizavimo konstantos. Naudojant gautus rezultatus, ekstremumams taikoma perkėlimo teorema. Toliau ieškoma tokių normavimo konstantų, su kuriomis Pareto dydžių skirstiniai yra geometriškai stabilūs minimumo skirstiniai arba asimptotiškai *k*-stabilūs.

Šiame darbe įrodžiau, jog maksimumo (minimumo) skirstinys (kai $\alpha = 1$) yra geometriškai stabilus maksimumo (minimumo) skirstinys, o kiti – asimptotiškai *k*-stabilūs. Kai $\alpha \neq 1$, maksimumo (minimumo) skirstinys nėra geometriškai stabilus maksimumo (minimumo) skirstinys, bet maksimumo (minimumo) skirtinys yra asimptotiškai stabilus, tik maksimumo ribinys skirstinys yra taip pat Pareto, tačiau su poslinkiu, o kiti – asimptotiškai k-stabilūs.

Šia tematika skaityti pranešimai konferencijose:

„Matematika ir matematikos dėstymas – 2005“ konferencijoje skaitytas pranešimas tema:

„Pareto atsitiktinių dydžių maksimumų tyrimai“

8-osios Lietuvos jaunųjų mokslininkų konferencijoje „Lietuva be mokslo – Lietuva be ateities“ (2005 metai), pranešimo tema:

„Pareto atsitiktinių dydžių minimumų tyrimai“

VI taikomosios matematikos studentų konferencija (2006 metais), pranešimo tema:

„Geometriškai stabiliųjų skirstinių tyrimai“

Visi pranešimai publikuoti. Jų kopijos pateiktos darbo pabaigoje.

1. TEORINĖ DALIS

1.1 APIBRĖŽIMAI

Tarkime, kad $(X_1, X_2, ..., X_N)$ yra paprastoji atsitiktinė imtis iš generalinės aibės su F skirstinio funkcija. Atsitiktinis dydis $N = N(p)$ yra nepriklausomas nuo visų $X_k,\ k \geq 1$ ir geometriškai pasiskirstęs:

$$P(N = m) = p(1-p)^{m-1}, \quad m \geq 1,\ 0 < p < 1. \qquad \textbf{(1.1)}$$

Apibrėžiame struktūras:

$$Z_N = \max(X_1, ..., X_N), \qquad \textbf{(1.2)}$$

$$W_N = \min(X_1, ..., X_N). \qquad \textbf{(1.3)}$$

1.1 Apibrėžimas ([3])**.** Dydį X_j vadiname geometriškai maksimaliai stabiliuoju, jeigu egzistuoja tokios normalizavimo konstantos $a(p)$ ir $b(p)$, su kuriomis

$$P\big(\max\big(X_1(p), ..., X_N(p)\big) < x\big) = F(x), \qquad \textbf{(1.4)}$$

čia $X_j(p) = \dfrac{X_j - a(p)}{b(p)}, \quad j = \overline{1, N}$.

Jeigu (1.4) pakeisime asimptotiniu sąryšiu, kai $p \to 0$, tai sakysime, kad X_j yra asimptotiškai geometriškai maksimaliai stabilusis dydis.

1.2 Apibrėžimas ([3])**.** Dydį X_j vadiname geometriškai minimaliai stabiliuoju, jeigu egzistuoja tokios normalizavimo konstantos $c(p) \in R$ ir $d(p) > 0$, su kuriomis

$$P\big(\min\big(X_1(p), ..., X_N(p)\big) < x\big) = F(x), \qquad \textbf{(1.5)}$$

čia $X_j(p) = \dfrac{X_j - c(p)}{d(p)}, \quad j = \overline{1.N}$.

Jeigu (1.5) pakeisime asimptotiniu sąryšiu, kai $p \to 0$, tai sakysime, kad X_j yra asimptotiškai geometriškai minimaliai stabilusis dydis.

Žinoma ([7]), kad (1.4) yra ekvivalentus sąryšiui:

$$g_N\big(F(xb(p) + a(p))\big) = F(x), \qquad \textbf{(1.6)}$$

o (1.5) sąryšiui:

$$g_N\big(1 - F(xd(p) + c(p))\big) = 1 - F(x), \qquad \textbf{(1.7)}$$

čia $g_N(z) = Mz^N$ – tikimybes generuojančioji funkcija.

1.3 Apibrėžimas ([7]). *F(x)* vadinama maksimaliai stabili, jei

$$g_N(F(x)) = F(b(p)x + a(p)), \quad \textbf{(1.8)}$$

ir minimaliai stabili, jei

$$g_N(1 - F(b(p)x + a(p))) = 1 - F(x), \quad \textbf{(1.9)}$$

visiems $x \in \boldsymbol{R}$ ir tam tikriems $a(p) \in \boldsymbol{R}$, $b(p) > 0$.

Sudarykime variacinę eilutę:

$$X_1^{(N)} \le X_2^{(N)} \le \ldots \le X_N^{(N)}.$$

Jeigu *k* – fiksuotas, tai $X_k^{(N)}$ vadiname *k*-ąją pozicine statistika.

1.4 Apibrėžimas ([4]). Skirstinį $F(x)$vadinsime asimptotiškai *k*-stabiliu, jei

$$\lim_{p \to 0} P\left(X_k^{(N)} < d(p)x + c(p)\right) = F^k(x), \quad \textbf{(1.10)}$$

čia $c(p) \in R$, $d(p) > 0$.

1.2 MAKSIMUMŲ IR MINIMUMŲ RIBINĖS TEOREMOS

Pateiksime ekstremumų klasikinės schemos ribines teoremas ([2]).

Sakykime, { X_j, $j \ge 1$ } – nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių a.d. seka. Tarkime,

$$F(x) = P(X_j < x), \quad \forall j \ge 1.$$

Pažymėkime

$$Z_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n). \quad \textbf{(1.11)}$$

Tarkime, kad egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantų sekos $\{a_n,\ n \ge 1\}$ ir $\{b_n,\ n \ge 1\}$, kad

$$\lim_{n \to \infty} P(Z_n < a_n + b_n x) = H(x) \quad \textbf{(1.12)}$$

kiekviename funkcijos *H(x)* tolydumo taške (čia *H(x)* – neišsigimusi skirstinio funkcija). Tokį konvergavimą vadinsime silpnuoju pasiskirstymo funkcijų arba a.d. konvergavimu.

Sakysime, kad skirstinys *F* priklauso ribinio skirstinio *H* traukos sričiai (žymėsime $F \in D(H)$), jei egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantų sekos, kad tenkinama lygybė (1.12). ([2])

Pažymėkime

$$\begin{aligned} \alpha(F) &= \inf\{x: \quad F(x) > 0\}, \\ \omega(F) &= \sup\{x: \quad F(x) < 1\}. \end{aligned} \quad \textbf{(1.13)}$$

Suformuluosime sąlygas, kurias turi tenkinti skirstinys *F*, kad jis priklausytų kurio nors neišsigimusio skirstinio traukos sričiai. Taip pat pateiksime konstantų parinkimo būdą. ([2])

1.1 teorema. Tarkime, $\omega(F)=\infty,$ ir egzistuoja tokia teigiama konstanta α , kad

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1-F(tx)}{1-F(t)}=x^{-\alpha} \quad \textbf{(1.14)}$$

visiems $x>0$. Tuomet $F\in D(H_{1,\alpha})$. Čia

$$H_{1,\alpha}(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \exp(-x^{-\alpha}), & x>0.\end{cases} \quad \textbf{(1.15)}$$

Normavimo konstantas b_n galima parinkti tokiu būdu:

$$b_n=\inf\{x:\ \ 1-F(x)\le 1/n\},$$

$$a_n=0.$$

1.2 teorema. Tarkime, $\omega(F)<\infty,$ o pasiskirstymo funkcija

$$F^*(x)=F(\omega(F)-1/x) \quad \textbf{(1.16)}$$

tenkina sąlygą (1.11). Tuomet $F\in D(H_{2,\alpha})$. Čia

$$H_{2,\alpha}(x)=\begin{cases}\exp(-(-x)^{\alpha}), & x<0,\\ 1, & x\ge 0.\end{cases} \quad \textbf{(1.17)}$$

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$a_n=\omega(F),$$

$$b_n=\omega(F)-\inf\{x:\ \ 1-F(x)\le 1/n\}.$$

1.3 teorema. Tarkime, su bet kokia baigtine konstanta *a* integralas

$$\int_a^{\omega(F)}(1-F(y))dy \quad \textbf{(1.18)}$$

yra baigtinis. Intervale $(\alpha(F),\omega(F))$ apibrėžkime funkciją

$$R(t)=\frac{1}{1-F(t)}\int_a^{\omega(F)}(1-F(y))dy. \quad \textbf{(1.19)}$$

Jei visiems realiems *x*

$$\lim_{t\to\omega(F)}\frac{1-F(t+xR(t))}{1-F(t)}=e^{-x}, \quad \textbf{(1.20)}$$

tai $F \in D(H_{3,0})$. Čia

$$H_{3,0}(x) = \exp(-e^{-x}), \quad x \in \Re. \tag{1.21}$$

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$a_n = \inf\{x: \ 1 - F(x) \le 1/n\},$$
$$b_n = R(a_n).$$

Pastaba. Šiose teoremose pateiktas centravimo ir normavimo konstantų α_n ir b_n parinkimo būdas nėra vienintelis. Mes net negalime teigti, kad tai yra pats paprasčiausias konstantų parinkimo būdas ir kad taip parinktos konstantos yra geriausios, tačiau jis yra geras tuo, kad paprastas ir konstruktyvus.

1.4 teorema. Klasikinėje maksimumų schemoje egzistuoja tik trys $(H_{1,\alpha}, H_{2,\alpha}, H_{3,0})$ neišsigimusio ribinio skirstinio tipai.

1.1 – 1.4 teoremų įrodymas pateiktas ([2]).

Pažymėkime

$$W_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n). \tag{1.22}$$

Tarkime, kad egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantų sekos $\{c_n, \ n \ge 1\}$ ir $\{d_n > 0, \ \ n \ge 1\}$, su kuriomis

$$\lim_{n \to \infty} P\left(W_n < c_n + d_n x\right) = L(x) \tag{1.23}$$

kiekviename funkcijos $L(x)$ tolydumo taške (čia $L(x)$ – neišsigimusi skirstinio funkcija). Sakysime, kad skirstinys F priklauso neišsigimusio ribinio skirstinio L traukos sričiai (žymėsime $F \in D(L)$), jei tenkinama (1.23) lygybė.

Suformuluosime sąlygas, kad skirstinio funkcija F priklausytų ribinio skirstinio L traukos sričiai.

1.5 teorema. Tegu $\alpha(F) = -\infty$, ir tegu egzistuoja tokia konstanta $\gamma > 0$, kad su visais $x > 0$ teisinga lygybė

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{F(tx)}{F(t)} = x^{-\gamma}. \tag{1.24}$$

Tada $F \in D(L_{1,\gamma})$, čia

$$L_{1,\gamma}(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-(-x)^{-\gamma}), & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases} \quad \textbf{(1.25)}$$

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$c_n = 0,$$
$$d_n = \sup\{x : F(x) \le 1/n\}.$$

1.6 teorema. Tegu $-\infty < \alpha(F)$. Jei funkcija $F^*(x) = F(\alpha(F) - 1/x)$ $(x < 0)$ tenkina (1.24) sąlygą, tai $F \in D(L_{2,\gamma})$, čia

$$L_{2,\gamma}(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-x^{\gamma}), & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad \textbf{(1.26)}$$

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu :

$$c_n = \alpha(F),$$
$$d_n = \sup\{x : F(x) \le 1/n\} - \alpha(F).$$

1.7 teorema. Tegu

$$\int_{\alpha(F)}^{a} F(y)dy < \infty \quad \textbf{(1.27)}$$

su bet kokia baigtine konstanta *a*. Apibrėžkime funkciją

$$r(t) = \frac{1}{F(t)} \int_{\alpha(F)}^{t} F(y)dy, \; t > \alpha(F). \quad \textbf{(1.28)}$$

Jei su visais *x* egzistuoja riba

$$\lim_{t \to \alpha(F)} \frac{F(t + xr(t))}{F(t)} = e^x, \quad \textbf{(1.29)}$$

tai $F \in D(L_{3,\gamma})$, čia

$$L_{3,0}(x) = 1 - \exp(-e^x) \quad (-\infty < x < \infty). \quad \textbf{(1.30)}$$

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu

$$c_n = \sup\{x : F(x) \le 1/n\},$$
$$d_n = r(c_n).$$

1.8 teorema. Klasikinėje minimumų schemoje egzistuoja tik trys $(L_{1,\alpha}, L_{2,\alpha}, L_{3,0})$ neišsigimusio ribinio skirstinio tipai.

1.5 – 1.8 teoremų įrodymas pateiktas ([2]) darbe.

1.3 PERKĖLIMO TEOREMOS

Sakykime, kad egzistuoja tokios konstantos $\{ a_n, \ n \geq 1 \}$ ir $\{ b_n > 0, \ n \geq 1 \}$, su kurionis

$$\lim_{n\to\infty} P\left(Z_n < a_n + b_n x\right) = H(x), \tag{1.31}$$

čia *H(x)* – neišsigimusi skirstinio funkcija.

Tarkime, kad $\{N_n\}$ - a.d., nepriklausantys nuo $\{X_j\}$ ir tenkinantis sąlygą

$$P\left(\frac{N_n}{n} < x\right) \underset{n\to\infty}{\to} A(z). \tag{1.32}$$

1.9 teorema (perkėlimo teorema maksimumams). Jei teisinga (1.31) ir (1.32), tai

$$P\left(Z_{N_n} < a_n + b_n x\right) \underset{n\to\infty}{\to} \Psi(x), \tag{1.33}$$

čia ribinė skirstinio funkcija

$$\Psi(x) = \int_0^\infty H^z(x) dA(z). \tag{1.34}$$

Teoremos įrodymas pateiktas ([8]).

Sakykime, kad egzistuoja tokios konstantos $\{c_n, \ n \geq 1\}$ ir $\{d_n > 0, \ n \geq 0\}$, kad

$$\lim_{n\to\infty} P\left(W_n < c_n + d_n x\right) = L(x); \tag{1.35}$$

čia *L(x)* – neišsigimusi skirstinio funkcija.

Tarkime, kad $\{N_n\}$ - a.d., nepriklausantys nuo $\{X_j\}$ ir tenkinantis sąlygą (1.32).

1.10 teorema (perkėlimo teorema minimumams). Jei teisinga (1.35) ir (1.32), tai

$$P\left(W_{N_n} < c_n + d_n x\right) \underset{n\to\infty}{\to} \psi(x), \tag{1.36}$$

čia skirstinio funkcija

$$\psi(x) = 1 - \int_0^\infty (1 - L(x))^z \, dA(z). \tag{1.37}$$

Teoremos įrodymas pateiktas ([8]) .

2. TIRIAMOJI DALIS

2.1 MAKSIMUMO TYRIMAI

Sakykime, kad $(X_1, X_2,..., X_N)$ yra paprastoji atsitiktinė imtis iš generalinės aibės su Pareto skirstinio funkcija

$$F(x) = 1 - \frac{1}{x^{\alpha}}, \quad x \geq 1,\ \alpha > 0. \qquad \textbf{(2.1)}$$

Atsitiktinis dydis $N = N(p)$ yra nepriklausomas nuo visų X_j, $j \geq 1$ ir geometriškai pasiskirstęs:

$$P(N = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k \geq 1,\ 0 < p < 1. \qquad \textbf{(2.2)}$$

Apibrėžiame struktūrą:

$$Z_N = \max(X_1,..., X_N), \qquad \textbf{(2.3)}$$

Nagrinėsime tiesiškai normuotos struktūros Z_N skirstinio geometrinį stabilumą.

2.1 Teorema: Tarkime, kad dydžiai X_k, $k \geq 1$ yra Pareto skirstinio, o N – geometrinis su parametru *p*. Tada, kai $\alpha = 1$,

$$P\left(\frac{Z_N - \frac{p-1}{p}}{\frac{1}{p}} < x\right) = 1 - \frac{1}{x}, \quad x \geq 1, \qquad \textbf{(2.4)}$$

kai $\alpha \neq 1$,

$$\lim_{p \to 0} P\left(p^{\frac{1}{\alpha}} Z_N < x\right) = 1 - \frac{1}{1 + x^{\alpha}}, \quad x \geq 0. \qquad \textbf{(2.5)}$$

Įrodymas.

Imdami $a(p) = \frac{p-1}{p}$ ir $b(p) = \frac{1}{p}$ bei pasinaudoję lygybe (1.6), gauname:

$$P\left(\frac{Z_N - \frac{p-1}{p}}{\frac{1}{p}} < x\right) = P(pZ_N + 1 - p < x) = P\left(Z_N < \frac{x}{p} + \frac{p-1}{p}\right) = g_N\left(F\left(\frac{x + p - 1}{p}\right)\right) =$$

$$= g_N\left(\frac{x-1}{x+p-1}\right).$$

Kadangi

$$g_N(z) = \frac{pz}{1 - (1-p)z}, \quad |z| \leq 1, \qquad \textbf{(2.6)}$$

tai

$$P(pZ_N + 1 - p < x) = \frac{p\,\dfrac{x-1}{x+p-1}}{1-(1-p)\dfrac{x-1}{x+p-1}}. \tag{2.7}$$

Atlikę elementarius veiksmus, iš (2.7) gauname teoremos pirmąjį teiginį (2.4).

Parinkę normavimo konstantas $a(p) = 0$ ir $b(p) = p^{-\frac{1}{\alpha}}$, gauname:

$$P\left(p^{\frac{1}{\alpha}} Z_N < x\right) = P\left(Z_N < xp^{-\frac{1}{\alpha}}\right).$$

Pasinaudoję (1.6), gauname:

$$P\left(Z_N < xp^{-\frac{1}{\alpha}}\right) = \frac{pF\left(xp^{-\frac{1}{\alpha}}\right)}{1-(1-p)F\left(xp^{-\frac{1}{\alpha}}\right)} = \frac{p\left(1-\dfrac{1}{x^{\alpha}p^{-1}}\right)}{1-(1-p)\left(1-\dfrac{1}{x^{\alpha}p^{-1}}\right)} =$$

$$= \frac{p\left(x^{\alpha}p^{-1}-1\right)}{x^{\alpha}p^{-1}-(1-p)\left(x^{\alpha}p^{-1}-1\right)}.$$

Iš čia

$$P\left(Z_N < xp^{-\frac{1}{\alpha}}\right) = \frac{x^{\alpha}-p}{x^{\alpha}+1-p}, \quad x \geq p^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{2.8}$$

Iš (2.8), skaičiuodami ribą, gauname teoremos antros dalies teiginį (2.5):

$$\lim_{p\to 0} P\left(p^{\frac{1}{\alpha}} Z_N < x\right) = \frac{x^{\alpha}}{x^{\alpha}+1} = 1 - \frac{1}{x^{\alpha}+1}, \quad x \geq 0.$$

▲

Rasime Pareto ($\alpha = 1$ atveju) normuoto maksimumo Z_N ribinį skirstinį. Kadangi $\omega(F) = +\infty$, tai galima taikyti 1.1 arba 1.3 teoremas. Tikriname 1.1 teoremos sąlygą.

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{1-F(tx)}{1-F(t)} = \lim_{t\to-\infty} \frac{1-1+\dfrac{1}{tx}}{1-1+\dfrac{1}{t}} = \lim_{t\to-\infty} \frac{\dfrac{1}{tx}}{\dfrac{1}{t}} = \lim_{t\to-\infty}\left(\frac{t}{tx}\right) = \frac{1}{x} = x^{-1}. \tag{2.9}$$

Kadangi tenkinama sąlyga (1.14), tai $F \in D\left(H_{1,\gamma}\right)$,

čia

$$H_{1,1}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right), & x > 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Centravimo ir normavimo konstantas parenkame tokiu būdu: $a_n = 0$, o iš sąlygų $b_n = \inf\left\{ x : 1 - F(x) \le \frac{1}{n} \right\}$ gauname, kad $b_n = n$.

Perkėlimo teoremos maksimumams analizė. Pareto skirstinio atveju ($\alpha = 1$), imdami normalizavimo konstantas $a_n = 0$, $b_n = n$ gauname:

$$P\left(\frac{Z_n}{n} < x \right) \Rightarrow H(x) = e^{-x^{-1}}, \quad x > 0 \ . \qquad \textbf{(2.11)}$$

Be to, geometrinio skirstinio parametro p priklausomybę nuo n apibrėšime šitokiu būdu: $p = p_n = \frac{1}{n}$, $n \ge 1$.

Tada

$$P\left(\frac{N}{n} < x \right) \to A(x) = 1 - e^{-x}, \quad x \ge 0 \, . \qquad \textbf{(2.12)}$$

Iš (2.11), (2.12) ir perkėlimo teoremos (1.9) išplaukia, kad

$$P\left(\frac{Z_N}{n} < x \right) \Rightarrow \Psi(x); \qquad \textbf{(2.13)}$$

čia ribinė skirstinio funkcija:

$$\Psi(x) = \int_0^\infty H^z(x)\, dA(z) = 1 - \frac{1}{1+x}, \quad x \ge 0 \, . \qquad \textbf{(2.14)}$$

Tai ribinis perkėlimo teoremos teiginys ($n \to \infty$).

Skaičiuojant tiesiogiai, gauname:

$$P(pZ_N < x) = g_N\left(F\left(xp^{-1}\right)\right) = 1 - \frac{1}{1+x-p} \Rightarrow 1 - \frac{1}{1+x}, \qquad \textbf{(2.15)}$$

kai $p = p_n \to 0$ (nebūtinai $p_n = \frac{1}{n}$). Tai tiesioginio būdo pranašumas. Geometrinio maksimaliai stabilumo (pirmoji įrodytos teoremos dalis (2.4), $\alpha = 1$) pranašumas prieš perkėlimo teoremą dar ryškesnis.

Toliau nagrinėjame atvejį, kai $\alpha \ne 1$. Kadangi $\omega(F) = +\infty$, tai galima taikyti 1.1 arba 1.3 teoremas. Tikriname 1.1 teoremos sąlygą.

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = \lim_{t \to -\infty} \frac{1 - 1 + \frac{1}{(tx)^\alpha}}{1 - 1 + \frac{1}{t^\alpha}} = \lim_{t \to -\infty} \frac{\frac{1}{(tx)^\alpha}}{\frac{1}{t^\alpha}} = x^{-\alpha} \, . \qquad \textbf{(2.16)}$$

Kadangi tenkinama sąlyga (1.24), tai $F \in D\left(H_{1,\gamma}\right)$,

čia

$$H_{1,\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \exp\left(-x^{-\alpha}\right), & x > 0. \end{cases} \qquad \textbf{(2.17)}$$

Centravimo ir normavimo konstantas parenkame tokiu būdu: $a_n = 0$, o iš sąlygų $b_n = \inf\left\{x : 1 - F(x) \le \frac{1}{n}\right\}$ gauname, kad $b_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$.

Perkėlimo teoremos maksimumams analizė. Pareto skirstinio atveju ($\alpha \ne 1$), imdami normalizavimo konstantas $a_n = 0$, $b_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$ gauname:

$$P\left(\frac{Z_n}{n^{\frac{1}{\alpha}}} < x\right) \Rightarrow H(x) = e^{-x^{-\alpha}}, \quad x > 0 \ . \qquad \textbf{(2.18)}$$

Be to, geometrinio skirstinio parametro p priklausomybę nuo n apibrėžkime šitokiu būdu: $p = p_n = \frac{1}{n}$, $n \ge 1$.

Tada

$$P\left(\frac{N}{n} < x\right) \to A(x) = 1 - e^{-x}, \quad x \ge 0. \qquad \textbf{(2.19)}$$

Iš (2.18), (2.19) ir perkėlimo teoremos išplaukia, kad

$$P\left(\frac{Z_N}{n^{\frac{1}{\alpha}}} < x\right) \Rightarrow \Psi(x); \qquad \textbf{(2.20)}$$

čia ribinė skirstinio funkcija:

$$\Psi(x) = \int_0^\infty H^z(x)\, dA(z) = \frac{1}{1 + x^{-\alpha}} = 1 - \frac{1}{1 + x^{\alpha}}, \quad x \ge 0. \qquad \textbf{(2.21)}$$

Tai ribinis perkėlimo teoremos teiginys ($n \to \infty$).

Skaičiuodami tiesiogiai (2.5), gavome tą patį rezultatą kaip ir perkėlimo teoremos analizėje, tik tiesioginio būdo pranašumas tai, kad šiuo atveju užtenka imti $p \to 0$, o perkėlimo teoremoje būtina imti $p = \frac{1}{n}$.

2.2 MINIMUMO TYRIMAI

Apibrėžiame struktūrą:

$$W_N = \min(X_1,...,X_N), \tag{2.22}$$

Nagrinėsime tiesiškai normuotos struktūros W_N skirstinio geometrinį stabilumą.

2.2 Teorema. Tarkime, kad dydžiai X_k, $k \geq 1$ yra Pareto skirstinio, o N – geometrinis su parametru p. Tada, kai $\alpha = 1$,

$$P\left(\frac{W_N - 1 + p}{p} < x\right) = 1 - \frac{1}{x}, \quad x \geq 1. \tag{2.23}$$

Kai $\alpha \neq 1$,

$$\lim_{p \to 0} P\left(\frac{W_N - 1}{\frac{p}{\alpha}} < x\right) = 1 - \frac{1}{1+x}, \quad x \geq 0. \tag{2.24}$$

Įrodymas.

Imdami $c(p) = 1 - p$ ir $d(p) = p$ bei pasinaudoję lygybe (1.7), gauname:

$$P\left(\frac{W_N - 1 + p}{p} < x\right) = P(W_N < xp + 1 - p) = g_N(1 - F(xp + 1 - p)) = g_N\left(\frac{1}{xp + 1 - p}\right).$$

Kadangi žinome (2.6) išraišką, tai

$$P\left(\frac{W_N - 1 + p}{p} < x\right) = \frac{p\frac{1}{xp+1-p}}{1-(1-p)\frac{1}{xp+1-p}}. \tag{2.25}$$

Atlikę elementariausius veiksmus, iš (2.25) gauname teoremos pirmos dalies (2.23) įrodymą.

Parinkę normavimo konstantas $c(p) = 1$ ir $d(p) = \frac{p}{\alpha}$ bei pasinaudoję lygybe (1.7), gauname:

$$P\left(\frac{W_N - 1}{\frac{p}{\alpha}} < x\right) = P\left(W_N < \frac{xp}{\alpha} + 1\right).$$

Pasinaudoję (2.6), gauname:

$$P\left(W_N < \frac{xp}{\alpha} + 1\right) = 1 - \frac{p}{\left(\frac{xp}{\alpha} + 1\right)^{\alpha} - 1 + p},$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots = 1+\alpha x + O(x^2),\ \text{kai}\ x \to 0 \qquad \mathbf{(2.26)}$$

Turėdami (2.26) lygybę, gauname:

$$P\left(W_N < \frac{xp}{\alpha}+1\right) = 1 - \frac{p}{1+\alpha\frac{xp}{\alpha}+O(x^2p^2)-1+p},\ p \to 0$$

$$P\left(W_N < \frac{xp}{\alpha}+1\right) = 1 - \frac{p}{p\left(1+x+\frac{O(x^2p^2)}{p}\right)} \underset{p\to 0}{\to} 1-\frac{1}{1+x}.$$

Taigi, gauname antros teoremos dalies (2.24) įrodymą .

$$P\left(W_N < \frac{xp}{\alpha}+1\right) = 1-\frac{1}{1+x}, \quad x \ge 0. \qquad \blacktriangle$$

Rasime Pareto dydžių minimumo W_N ribinį skirstinį. Kadangi $\alpha(F)=1$, tai galima taikyti 1.6 teoremą. Pažymime pasiskirstymo funkciją

$$F^*(x) = F\left(\alpha(F)-\frac{1}{x}\right) = 1-\frac{x}{x-1} = \frac{1}{1-x}. \qquad \mathbf{(2.27)}$$

Tikriname ar funkcija tenkina sąlygą (1.24)

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{F^*(tx)}{F^*(t)} = \lim_{t\to-\infty}\frac{\frac{1}{1-tx}}{\frac{1}{1-t}} = \lim_{t\to-\infty}\frac{1-t}{1-tx} = x^{-1}. \qquad \mathbf{(2.28)}$$

Kadangi teoremos sąlyga (1.24) tenkinama, tai $F \in D(L_{2,1})$,

čia

$$L_{2,1}(x) = \begin{cases} 1-e^{-x^1}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}. \qquad \mathbf{(2.29)}$$

Centravimo ir normavimo konstantas parenkame tokiu būdu: iš $c_n = \alpha(F)$, $d_n = \sup\left\{x : F(x) \le \frac{1}{n}\right\} - \alpha(F)$ sąlygų gauname, kad $c_n = 1$, $d_n = \frac{1}{n}$.

Perkėlimo teoremos minimumams analizė. Žinodami, kad $c_n = 1$, $d_n = p$, $p = \frac{1}{n}$, gauname:

$$P((W_n-1)\cdot n < x) \Rightarrow L(x) = 1-e^{-x^{-1}}; \quad A(x) = 1-e^{-x}. \qquad \mathbf{(2.30)}$$

Tada

$$P\left(\left(W_n - 1\right) \cdot n < x\right) \Rightarrow \Psi\left(x\right) = 1 - \int_0^{\infty} \left(1 - L\left(x\right)\right)^z \; dA\left(z\right) = 1 - \frac{1}{1 + x}. \qquad \textbf{(2.31)}$$

Perkėlimo teoremoje būtina imti $p = \frac{1}{n}$, kai tuo tarpu skaičiuojant tiesioginiu būdu (2.23) užtenka imti $p \to 0$. Tuo tiesioginis būdas pranašesnis. Be to perkėlimo teoremos analizėje gaunamas Pareto skirstinys, tačiau su poslinkiu, o tiesiogiai skaičiuojant – Pareto skirstinys, kai $\alpha = 1$.

Toliau nagrinėsime, kai $\alpha \neq 1$. Kadangi $\alpha(F) = 1$, tai galima taikyti 1.6 teoremą. Pažymime pasiskirstymo funkciją

$$F^*\left(x\right) = F\left(\alpha\left(F\right) - \frac{1}{x^{\alpha}}\right) = 1 - \frac{x^{\alpha}}{x^{\alpha} - 1} = \frac{1}{1 - x^{\alpha}}. \qquad \textbf{(2.32)}$$

Tikriname ar funkcija tenkina 1.6 teoremos sąlygą (1.24)

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{F^*\left(tx\right)}{F^*\left(t\right)} = \lim_{t \to -\infty} \frac{\dfrac{1}{1 - \left(tx\right)^{\alpha}}}{\dfrac{1}{1 - t^{\alpha}}} = \lim_{t \to -\infty} \frac{1 - t^{\alpha}}{1 - \left(tx\right)^{\alpha}} = x^{-\alpha}. \qquad \textbf{(2.33)}$$

Kadangi teoremos sąlyga (1.24) tenkinama, tai $F \in D\left(L_{2,1}\right)$,

čia

$$L_{2,\alpha}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^{\alpha}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}. \qquad \textbf{(2.34)}$$

Centravimo ir normavimo konstantas parenkame tokiu būdu: iš $c_n = \alpha(F)$, $d_n = \sup\left\{x : F(x) \leq \frac{1}{n}\right\} - \alpha(F)$ sąlygų gauname, kad $c_n = 1$, $d_n = n^{-\frac{1}{\alpha}}$.

Perkėlimo teoremos minimumams analizė. Žinodami, kad $c_n = 1$, $d_n = n^{-\frac{1}{\alpha}}$, $p = \frac{1}{n}$, gauname:

$$P\left(\left(W_n - 1\right) \cdot n^{\frac{1}{\alpha}} < x\right) \Rightarrow L\left(x\right) = 1 - e^{-x^{-1}}; \quad A\left(x\right) = 1 - e^{-x}. \qquad \textbf{(2.35)}$$

Tada

$$P\left(\left(W_n - 1\right) \cdot n^{\frac{1}{\alpha}} < x\right) \Rightarrow \Psi\left(x\right) = \int_0^{\infty} \left(1 - L\left(x\right)\right)^z \; dA\left(z\right) = 1 - \frac{1}{1 + x^{\alpha}}. \qquad \textbf{(2.36)}$$

Perkėlimo teoremos analizėje būtina imti $p = \frac{1}{n}$, kai tuo tarpu skaičiuojant tiesioginiu būdu (2.24) užtenka imti $p \to 0$. Tuo tiesioginis būdas pranašesnis. Tiek perkėlimo teoremos analizėje, tiek tiesioginiu būdu gaunamas Pareto skirstinys su poslinkiu, tik tiesiogiai skaičiuojant – Pareto skirstinys kai $\alpha = 1$.

Kai $\alpha = 1$, Pareto atsitiktiniai dydžiai yra geometriškai maksimaliai stabilūs ir gauname, kad taip pat ir minimaliai stabilūs. Vadinasi, turi galioti lygybės (1.8) ir (1.9). Iš (2.4) žinome, kad $a(p) = \frac{p-1}{p}$, $b(p) = \frac{1}{p}$. O iš (2.23) žinome, kad $c(p) = 1 - p$, $d(p) = p$.

Pasinaudodami (1.8) lygybe, gaunami sąryšiai tarp normavimo ir centravimo konstantų:

$$d(p) = \frac{1}{b(p)} \Leftrightarrow b(p) = \frac{1}{d(p)}. \qquad \textbf{(2.37)}$$

$$c(p) = -a(p) \cdot \frac{1}{b(p)} \Leftrightarrow a(p) = -c(p) \cdot b(p). \qquad \textbf{(2.38)}$$

Turėdami lygybę (1.9) bei konstantas $c(p) = 1 - p$, $d(p) = p$, gauname:

$$g_N(1 - F(d(p)x - c(p))) = \frac{p \cdot \frac{1}{xp + 1 - p}}{1 - (1-p) \cdot \frac{1}{xp + 1 - p}} = \frac{p}{xp + 1 - p} \cdot \frac{xp + 1 - p}{xp} = \frac{1}{x} = 1 - F(x).$$

$$g_N(F(x)) = \frac{p \cdot \frac{x-1}{x}}{1 - (1-p) \cdot \frac{x-1}{x}} = \frac{p(x-1)}{x} \cdot \frac{x}{xp + 1 - p} = \frac{p(x-1)}{xp + 1 - p}.$$

$$F(d(p)x - c(p)) = \frac{xp + 1 - p - 1}{xp + 1 - p} = \frac{p(x-1)}{xp + 1 - p}.$$

Vadinasi

$$g_N(F(x)) = F(d(p)x - c(p)).$$

Galima teigti, kad jei atsitiktiniai dydžiai yra minimaliai stabilūs, tai jie yra ir maksimaliai stabilūs, žinoma jei jie susiję sąryšiais (1.8) ir (1.9).

2.3 ATSITIKTINIO SKAIČIAUS PARETO DYDŽIŲ APATINIŲ EKSTREMUMŲ SKIRSTINIAI

Turime paprastąją atsitiktinę imtį $(X_1, X_2, ..., X_N)$ iš generalinės aibės su Pareto skirstinio funkcija (2.1).

Sudarome variacinę eilutę:

$$X_1^{(N)} \le X_2^{(N)} \le ... \le X_N^{(N)}. \qquad \textbf{(2.39)}$$

Atsitiktinis dydis $N = N(p)$ yra nepriklausomas nuo visų X_k, $k \geq 1$ ir geometriškai pasiskirstęs:

$$P(N = m) = p(1-p)^{m-1}, \quad m \geq 1.. \qquad \textbf{(2.40)}$$

Parametras *p* gali būti apibūdinamas dvejopai:

- $0 < p < 1$ - konstanta;
- $p = p_n \to 0,$ kai $n \to \infty$ (nebūtinai $p_n = \frac{1}{n}$).

Apatinį *k*-ąjį ekstremumą apibrėžiame

$$X_k^{(N)} = \begin{cases} X_k^{(j)}, N = j, j = k, k+1,..., \\ X_j^{(j)}, N = j, j = 1, 2, ..., k-1. \end{cases} \qquad \textbf{(2.41)}$$

Pasinaudojus pilnosios tikimybės formule, gauta išraiška, apatinio ekstremumo pasiskirstymo funkcijai rasti:

$$\begin{aligned} P\left(X_k^{(N)} < x\right) &= \sum_{j=1}^{\infty} P\left(X_{\min(j,k)}^{(j)} < x\right) P(N = j) = \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} P\left(X_j^{(j)} < x\right) P(N = j) + \sum_{j=k}^{\infty} P\left(X_k^{(j)} < x\right) P(N = j) \end{aligned} \qquad \textbf{(2.42)}$$

Yra žinoma ([2]), kad *k*-tosios pozicinės statistikos skirstinio funkcija,

$$P\left(X_k^{(j)} < x\right) = \frac{j!}{(k-1)!(j-k)!} \int_0^{F(x)} v^{k-1}(1-v)^{j-k}\, dv. \qquad \textbf{(2.43)}$$

2.3 Teorema. Tarkime, kad dydžiai X_j, $j \geq 1$ yra Pareto skirstinio (2.1) (kai $\alpha = 1$), o N – geometrinis su parametru *p*. Tada

$$P\left(\frac{X_1^{(N)} - 1 + p}{p} < x\right) = 1 - \frac{1}{x} = F(x), \qquad \textbf{(2.44)}$$

$$\lim_{p \to 0} P\left(\frac{X_2^{(N)} - 1 + p}{p} < x\right) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = F^2(x), \qquad \textbf{(2.45)}$$

$$\lim_{p \to 0} P\left(\frac{X_3^{(N)} - 1 + p}{p} < x\right) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 = F^3(x). \qquad \textbf{(2.46)}$$

Įrodymas.

Visų pirma nagrinėsime pirmojo apatinio ekstremumo (minimumo) atvejį. Ieškosime šio ekstremumo pasiskirstymo funkcijos išraiškos.

$$P\left(\frac{X_1^{(N)} - 1 + p}{p} < x\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P\left(X_1^{(j)} < xp + 1 - p\right) \cdot P(N = j).$$

$$F\left(xp+1-p\right)=1-\frac{1}{xp+1-p}=\frac{xp-p}{xp+1-p}. \qquad \textbf{(2.47)}$$

Pasinaudosime (2.43) formule.

$$P\left(\frac{X_1^{(j)}-1+p}{p}<x\right)=\frac{j!}{0!\left(j-1\right)!}\int_0^{F(xp+1-p)} t^0\cdot\left(1-t\right)^{j-1}dt=j\int_0^{\frac{xp-p}{xp+1-p}}\left(1-t\right)^{j-1}dt=$$

$$=-j\int_0^{\frac{xp-p}{xp+1-p}}\left(1-t\right)^{j-1}d\left(1-t\right)=-\left(1-t\right)^j\Bigg|_0^{\frac{xp-p}{xp+1-p}}=-\left(1-\frac{xp-p}{xp+1-p}\right)^j+1^j=$$

$$=1-\left(\frac{xp+1-p-xp+p}{xp+1-p}\right)^j=1-\left(\frac{1}{xp+1-p}\right)^j.$$

$$P\left(\frac{X_1^{(N)}-1+p}{p}<x\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{1}{xp+1-p}\right)^j\right)\cdot P\left(N=j\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}P\left(N=j\right)-\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{xp+1-p}\right)^j p\left(1-p\right)^{j-1}$$

Kadangi $\frac{1}{xp+1-p}<1$ ($x>1$), tai

$$P\left(\frac{X_1^{(N)}-1+p}{p}<x\right)=1-\frac{p}{1-p}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1-p}{xp+1-p}\right)^j=1-\frac{p}{1-p}\cdot\frac{1-p}{xp+1-p}\cdot\frac{xp+1-p}{xp}=1-\frac{1}{x}.$$

Gavome teoremos pirmos dalies (2.44) įrodymą

$$P\left(\frac{X_1^{(N)}-1+p}{p}<x\right)=1-\frac{1}{x}=F\left(x\right).$$

Vadinasi, normuoto pirmojo apatinio ekstremumo (minimumo) skirstinys yra Pareto. Pareto skirstinys (kai $k=1$) yra geometriškai stabilus minimumo skirstinys. Sutampa su teoremos (2.2) teiginiu (2.23).

Įrodyta teoremos pirmoji dalis.

Tirsime antrąjį apatinį ekstremumą.

$$P\left(\frac{X_2^{(N)}-1+p}{p}<x\right)=P\left(X_1^{(1)}<xp+1-p\right)\cdot P\left(N=1\right)+\sum_{j=2}^{\infty}P\left(X_2^{(j)}<xp+1-p\right)\cdot P\left(N=j\right).$$

Žinome, kad

$$P\left(X_j^{(j)}<xp+1-p\right)=F^j\left(xp+1-p\right), \qquad \textbf{(2.48)}$$

$$P(N=1)=p\,. \qquad \textbf{(2.49)}$$

Pasinaudojus (2.47), (2.48) ir (2.49), gauname:

$$P\left(X_1^{(1)}<xp+1-p\right)\cdot P(N=1)=\left(1-\frac{1}{xp+1-p}\right)p=\frac{p^2(x-1)}{xp+1-p}$$

O iš (2.43), išplaukia, kad

$$P\left(X_2^{(j)}<xp+1-p\right)=\frac{j!}{1!(j-2)!}\int_0^{\frac{xp-p}{xp+1-p}}t\cdot(1-t)^{j-2}\,dt\,.$$

Integralą $I_1=\int_0^{\frac{xp-p}{xp+1-p}}t\cdot(1-t)^{j-2}\,dt$ integruosime dalimis:

$$I_1=-\frac{t(1-t)^{j-1}}{j-1}\Bigg|_0^{\frac{xp-p}{xp+1-p}}+\frac{1}{j-1}\int_0^{\frac{xp-p}{xp+1-p}}(1-t)^{j-1}\,dt=\frac{-\frac{xp-p}{xp+1-p}\left(1-\frac{xp-p}{xp+1-p}\right)^{j-1}}{j-1}+$$

$$+\frac{1}{j-1}\int_0^{\frac{xp-p}{xp+1-p}}(1-t)^{j-1}\,dt=\frac{1}{j-1}\left(-\frac{xp-p}{xp+1-p}\cdot\left(\frac{1}{xp+1-p}\right)^{j-1}-\frac{(1-t)^j}{j}\Bigg|_0^{\frac{xp-p}{xp+1-p}}\right)=$$

$$=\frac{1}{j-1}\left(-\frac{xp-p}{xp+1-p}\cdot\left(\frac{1}{xp+1-p}\right)^{j-1}-\frac{1}{j}\left(1-\frac{xp-p}{xp+1-p}\right)^j+\frac{1}{j}\right)=$$

$$=\frac{-\frac{xp-p}{xp+1-p}\cdot\left(\frac{1}{xp+1-p}\right)^{j-1}-\left(\frac{1}{xp+1-p}\right)^j+1}{j(j-1)}=\frac{1-\frac{(xp-p)j}{xp+1-p}\cdot\frac{xp+1-p}{(xp+1-p)^j}-\left(\frac{1}{xp+1-p}\right)^j}{j(j-1)}=$$

$$=\frac{1-(xp-p)j\cdot\frac{1}{(xp+1-p)^j}-\left(\frac{1}{xp+1-p}\right)^j}{j(j-1)}\,.$$

Tokiu būdu

$$P\left(X_2^{(j)}<xp+1-p\right)=\frac{j!}{(j-2)!}\,\frac{1-(xp-p)j\cdot\frac{1}{(xp+1-p)^j}-\left(\frac{1}{xp+1-p}\right)^j}{j(j-1)}=$$

$$=1-(xp-p)j\cdot\frac{1}{(xp+1-p)^j}-\left(\frac{1}{xp+1-p}\right)^j.$$

Dabar

$$P\left(X_2^{(N)} < xp+1-p\right) = \frac{p^2(x-1)}{xp+1-p} + \sum_{j=2}^{\infty}\left(1-(xp-p)j\cdot\frac{1}{(xp+1-p)^j} - \left(\frac{1}{xp+1-p}\right)^j\right)\cdot$$

$$\cdot\, p(1-p)^{j-1} = \frac{p^2(x-1)}{xp+1-p} + D$$

Toliau

$$D = \frac{p}{1-p}\sum_{j=2}^{\infty}\left((1-p)^j - \left(\frac{1-p}{xp+1-p}\right)^j (xpj-pj+1)\right) = \frac{p}{1-p}\left(\sum_{j=2}^{\infty}(1-p)^j - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{1-p}{xp+1-p}\right)^j (xpj-pj+1)\right) = \frac{p}{1-p}\sum_{j=2}^{\infty}(1-p)^j - \frac{p(xp-p)}{1-p}\sum_{j=2}^{\infty} j\left(\frac{1-p}{xp+1-p}\right)^j -$$

$$= -\frac{p}{1-p}\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{1-p}{xp+1-p}\right)^j = A_1 + A_2 + A_3$$

Ieškodami pirmosios eilutės sumą, gauname

$$A_1 = \frac{p}{1-p}\sum_{j=2}^{\infty}(1-p)^j = p\sum_{j=1}^{\infty}(1-p)^j = 1-p\,. \tag{2.50}$$

Išvesime formulę, norint rasti eilutės $\sum_{j=2}^{\infty} ja^j$ sumą.

$$\sum_{j=2}^{\infty} ja^j = a\sum_{j=2}^{\infty} ja^{j-1} = a\frac{d}{da}\left(\frac{a^2}{1-a}\right) = a\frac{2a(1-a)+a^2}{(1-a)^2} = a\frac{2a-2a^2+a^2}{(1-a)^2} = \frac{2a^2-a^3}{(1-a)^2}\,. \tag{2.51}$$

Pasinaudosime (2.51) formule ir apskaičiuosime antrosios eilutės sumą.

$$A_2 = -\frac{p(xp-p)}{1-p}\sum_{j=2}^{\infty} j\left(\frac{1-p}{xp+1-p}\right)^j = -\frac{p(xp-p)}{1-p}\cdot\frac{2\dfrac{(1-p)^2}{(xp+1-p)^2} - \dfrac{(1-p)^3}{(xp+1-p)^3}}{\left(1-\dfrac{1-p}{xp+1-p}\right)^2} =$$

$$= -\frac{p(xp-p)}{1-p}\cdot\frac{\dfrac{2\cdot(1-p)^2(xp+1-p)-(1-p)^3}{(xp+1-p)^3}}{\left(\dfrac{xp}{xp+1-p}\right)^2} = -\frac{p(xp-p)(1-p)(2(xp+1-p)-(1-p))}{(xp+1-p)\cdot(xp)^2} =$$

$$= -\frac{(x-1)}{x^2}\cdot\frac{(1-p)(2xp+2-2p-1+p)}{(xp+1-p)} = -\frac{(x-1)}{x^2}\cdot\frac{(1-p)(2xp+1-p)}{(xp+1-p)}\,.$$

Taigi

$$A_2 = -\frac{(x-1)}{x^2}\cdot\frac{(1-p)(2xp+1-p)}{(xp+1-p)}\,. \tag{2.52}$$

Dabar skaičiuojame trečiosios eilutės sumą.

$$A_3 = -\frac{p}{1-p}\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{1-p}{xp+1-p}\right)^j = -\frac{p}{xp+1-p}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1-p}{xp+1-p}\right)^j =$$

$$= -\frac{p}{xp+1-p}\cdot\frac{\frac{1-p}{xp+1-p}}{1-\frac{1-p}{xp+1-p}} = -\frac{p}{xp+1-p}\cdot\frac{1-p}{xp} = -\frac{1-p}{x(xp+1-p)}.$$

Taigi

$$A_3 = -\frac{1-p}{x(xp+1-p)}. \qquad \textbf{(2.53)}$$

Turėdami rezultatus (2.50), (2.52) ir (2.53) bei atlikę elementariausius veiksmus, gauname:

$$P\left(X_2^{(N)} < xp+1-p\right) = \frac{p^2(x-1)}{xp+1-p} + 1 - p - \frac{(x-1)(1-p)(2xp+1-p)}{x^2(xp+1-p)} - \frac{1-p}{x(x-+1-p)} =$$

$$= \frac{x^2p^2(x-1) + x^2(xp+1-p) - x^2p(xp+1-p) - (x-1)(1-p)(2xp+1-p) - x(1-p)}{x^2(xp+1-p)} =$$

$$= \frac{x^2p(xp-p-xp-1+p) + x^3p + x^2 - x^2p - (x-xp-1+p)(2xp+1-p) - x + xp}{x^2(xp+1-p)} =$$

$$= \frac{-2x^2p + x^3p + x^2 - x + xp + 2x^2p^2 + xp - xp^2 + 2xp + 1 - p - 2xp^2 - p + p^2 - x + xp}{x^2(xp+1-p)} =$$

$$= \frac{-4x^2p + x^3p + x^2 - 2x + 5xp + 2x^2p^2 - 3xp^2 + 1 - 2p + p^2}{x^2(xp+1-p)}.$$

Taigi

$$P\left(X_2^{(N)} < xp+1-p\right) = \frac{-4x^2p + x^3p + x^2 - 2x + 5xp + 2x^2p^2 - 3xp^2 + 1 - 2p + p^2}{x^2(xp+1-p)}. \qquad \textbf{(2.54)}$$

Skaičiuodami ribą, kai $p \to 0$, lygybei (2.54), gauname teoremos antros dalies (2.45) įrodymą:

$$\lim_{p\to 0} P\left(X_2^{(N)} < xp+1-p\right) = \frac{(x-1)^2}{x^2} = F^2(x).$$

Vadinasi, Pareto skirstinys (kai $k = 2$) yra geometriškai asimptotiškai stabilus.

Įrodyta antroji teoremos dalis.

Tirsime trečiąjį apatinį ekstremumą.

$$P\left(X_3^{(N)} < xp+1-p\right) = P\left(X_1^{(1)} < xp+1-p\right)\cdot P(N=1) + P\left(X_2^{(2)} < xp+1-p\right)\cdot P(N=2) +$$

$$+ \sum_{j=3}^{\infty} P\left(X_3^{(j)} < xp+1-p\right)\cdot P(N=j).$$

Turime

$$P\left(X_2^{(2)} < xp+1-p\right)\cdot P(N=2) = F^2(xp+1-p)p(1-p) = \frac{(xp-p)^2}{(xp+1-p)^2}\,p(1-p) =$$

$$= \frac{p^3(x-1)^2(1-p)}{(xp+1-p)^2}.$$

Pasinaudosime (2.43).

$$P\left(X_3^{(j)} < xp+1-p\right) = \frac{j!}{2!(j-3)!}\int_0^{\frac{xp-p}{xp+1-p}} t^2\cdot(1-t)^{j-3}\,dt = \frac{j(j-1)(j-2)}{2}\int_0^{\frac{xp-p}{xp+1-p}} t^2\cdot(1-t)^{j-3}\,dt.$$

Integralą $I_2 = \int_0^{\frac{xp-p}{xp+1-p}} t^2\cdot(1-t)^{j-3}\,dt$ integruosime dalimis:

$$I_2 = -\frac{(1-t)^{j-2}}{j-2}\Bigg|_0^{\frac{xp-p}{xp+1-p}} + \frac{2}{j-2}\int_0^{\frac{xp-p}{xp+1-p}} t(1-t)^{j-2}\,dt = \frac{\frac{(xp-p)^2}{(xp+1-p)^2}\left(1-\frac{xp-p}{xp+1-p}\right)^{j-2}}{j-2} +$$

$$+\frac{2}{j-2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{xp+1-p}\right)^j(xpj-pj+1)}{j(j-1)}\right).$$

Tokiu būdu

$$P\left(X_3^{(j)} < xp+1-p\right) = \frac{j(j-1)(j-2)}{2}\left(\frac{\frac{(xp-p)^2}{(xp+1-p)^2}\left(1-\frac{xp-p}{xp+1-p}\right)^{j-2}}{j-2} +\right.$$

$$\left.+\frac{2}{j-2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{xp+1-p}\right)^j(xpj-pj+1)}{j(j-1)}\right)\right) = -\frac{j(j-1)}{2}\cdot\frac{(xp-p)^2}{(xp+1-p)^j} +$$

$$+1-\left(\frac{1}{xp+1-p}\right)^j(xpj-pj+1).$$

Dabar

$$P\left(X_3^{(j)} < xp+1-p\right) = \frac{p^2(x-1)}{xp+1-p} + \frac{p^3(x-1)^2(1-p)}{(xp+1-p)^2} - \sum_{j=3}^{\infty}\frac{j(j-1)(xp-p)^2}{2(xp+1-p)^j}\cdot p(1-p)^{j-1} +$$

$$+\sum_{j=3}^{\infty} p(1-p)^{j-1} - \sum_{j=3}^{\infty} j(xp-p)\left(\frac{1}{xp+1-p}\right)^{j} p(1-p)^{j-1} - \sum_{j=3}^{\infty}\left(\frac{1}{xp+1-p}\right)^{j} p(1-p)^{j-1} =$$

$$= \frac{p^2(x-1)}{xp+1-p} + \frac{p^3(x-1)^2(1-p)}{(xp+1-p)^2} + B_1 + B_2 + B_3 + B_4 .$$

Skaičiuojame B_i, $i = 1, 2, 3, 4$.

$$B_1 = -\frac{p(xp-p)^2(1-p)}{2(xp+1-p)^2} \sum_{j=3}^{\infty} j(j-1)\left(\frac{1-p}{xp+1-p}\right)^{j-2} .$$

Išvesime formulę, kurios dėka bus galima rasti eilutės $\sum_{j=3}^{\infty} j(j-1)a^{j-2}$ sumą.

$$\sum_{j=3}^{\infty} j(j-1)a^{j-2} = \left(\sum_{j=3}^{\infty} a^j\right)'' = \left(\frac{a^3}{1-a}\right)'' = \left(\frac{3a^2(1-a)+a^3}{(1-a)^2}\right)' = \left(\frac{3a^2}{1-a} + \frac{a^3}{(1-a)^2}\right)' =$$

$$= \frac{6a(1-a)+3a^2}{(1-a)^2} + \frac{3a^2(1-a)^2 + 2(1-a)a^3}{(1-a)^4} = \frac{6a}{1-a} + \frac{3a^2}{(1-a)^2} + \frac{3a^2}{(1-a)^2} + \frac{2a^3}{(1-a)^3} =$$

$$= \frac{6a}{1-a} + \frac{6a^2}{(1-a)^2} + \frac{2a^3}{(1-a)^3} = \frac{6a(1-a)^2 + 6a^2(1-a) + 2a^3}{(1-a)^3} = \frac{6a - 6a^2 + 2a^3}{(1-a)^3} . \qquad \textbf{(2.55)}$$

Pritaikę (2.55) formulę, gauname:

$$B_1 = -\frac{p^3(x-1)^2(1-p)}{2(xp+1-p)^2} \cdot \frac{6\frac{1-p}{xp+1-p} - 6\frac{(1-p)^2}{(xp+1-p)^2} + 2\frac{(1-p)^3}{(xp+1-p)^3}}{\left(1-\frac{1-p}{xp+1-p}\right)^3} =$$

$$= -\frac{p^3(x-1)^2(1-p)}{2(xp+1-p)^2} \cdot \frac{\frac{6(1-p)(xp+1-p)^2 - 6(1-p)^2(xp+1-p) + 2(1-p)^3}{(xp+1-p)^3}}{\left(\frac{xp}{xp+1-p}\right)^3} =$$

$$= -\frac{(x-1)^2(1-p)}{(xp+1-p)^2} \cdot \frac{\frac{(1-p)\left(3(xp+1-p)^2 - 3(1-p)(xp+1-p) + (1-p)^2\right)}{(xp+1-p)^3}}{x^3} =$$

$$= \frac{(x^2-2x+1)(1-2p+p^2)\left(3(xp+1-p)^2 - 3xp - 3 + 3p + 3xp^2 + 3p - 3p^2 + 1 - 2p + p^2\right)}{x^3(xp+1-p)^2} =$$

$$= \frac{\left(-3x^2p^2 - 3xp + 3xp^2 - 1 + 2p - p^2\right)\cdot(p-1)^2\cdot(x-1)^2}{x^3\cdot(xp+1-p)^2}$$

Taigi

$$B_1 = \frac{\left(-3x^2p^2 - 3xp + 3xp^2 - 1 + 2p - p^2\right)\cdot(p-1)^2\cdot(x-1)^2}{x^3\cdot(xp+1-p)^2} \quad \textbf{(2.56)}$$

Skaičiuojame B_2.

$$B_2 = \sum_{j=3}^{\infty} p(1-p)^{j-1} = \frac{p}{1-p}\sum_{j=3}^{\infty}(1-p)^j = \frac{p}{1-p}\cdot\frac{(1-p)^3}{1-1+p} = (1-p)^2. \quad \textbf{(2.57)}$$

Skaičiuojame B_3.

$$B_3 = -\sum_{j=3}^{\infty} j(xp-p)\left(\frac{1}{xp+1-p}\right)^j p(1-p)^{j-1} = -\frac{p(xp-p)}{1-p}\sum_{j=3}^{\infty} j\left(\frac{1-p}{xp+1-p}\right)^j.$$

Išvesime formulę, surasti eilutės $\sum_{j=3}^{\infty} ja^j$ sumai.

$$\sum_{j=3}^{\infty} ja^j = a\sum_{j=3}^{\infty} ja^{j-1} = a\frac{d}{da}\left(\sum_{j=3}^{\infty} a^j\right) = a\frac{d}{da}\left(\frac{a^3}{1-a}\right) = a\frac{3a^2(1-a)+a^3}{(1-a)^2} = \frac{3a^3-2a^4}{(1-a)^2}. \quad \textbf{(2.58)}$$

Pritaikę (2.58) formulę, skaičiuojame:

$$B_3 = -\frac{p^2(x-1)}{1-p}\cdot\frac{3\left(\frac{1-p}{xp+1-p}\right)^3 - 2\left(\frac{1-p}{xp+1-p}\right)^4}{\left(1-\frac{1-p}{xp+1-p}\right)^2} = -\frac{(x-1)(1-p)^2(3xp+1-p)}{x^2(xp+1-p)^2} =$$

$$= -\frac{(x-1)\left(3xp+1-p-6xp^2-6p+6p^2+4p-4p^2+3xp^3+3p^2-3p^3-2p^2+2p^3\right)}{x^2(xp+1-p)^2} =$$

$$= \frac{6xp - x - 3x^2p + 6x^2p^2 - 9xp^2 + xp^3 + 1 - 3p + 3p^2 - p^3}{x^2(xp+1-p)^2}$$

Taigi

$$B_3 = \frac{6xp - x - 3x^2p + 6x^2p^2 - 9xp^2 + xp^3 + 1 - 3p + 3p^2 - p^3}{x^2(xp+1-p)^2}. \quad \textbf{(2.59)}$$

Rasime B_4.

$$B_4 = -\sum_{j=3}^{\infty}\left(\frac{1}{xp+1-p}\right)^j p(1-p)^{j-1} = -\frac{p}{1-p}\sum_{j=3}^{\infty}\left(\frac{1-p}{xp+1-p}\right)^j = -\frac{p}{1-p}\cdot\frac{\frac{(1-p)^3}{(xp+1-p)^3}}{1-\frac{1-p}{xp+1-p}} =$$

$$= -\frac{p}{1-p}\cdot\frac{(1-p)^3}{xp(xp+1-p)^2} = -\frac{(1-p)^2}{x(xp+1-p)^2}.$$

Taigi

$$B_4 = -\frac{(1-p)^2}{x(xp+1-p)^2}. \qquad \textbf{(2.60)}$$

Turėdami rezultatus (2.56), (2.57), (2.59) ir (2.60), ieškome normuoto apatinio ekstremumo pasiskirstymo funkcijos išraiškos.

$$P\left(X_3^{(j)} < xp+1-p\right) = \frac{p^2(x-1)}{xp+1-p} + \frac{p^3(x-1)^2(1-p)}{(xp+1-p)^2} + \frac{\left(-3x^2p^2 - 3xp + 3xp^2 - 1 + 2p - p^2\right)\cdot}{x^3\cdot(xp+1-p)^2}$$

$$\frac{\cdot(p-1)^2\cdot(x-1)^2}{} + (1-p)^2 + \frac{6xp - x - 3x^2p + 6x^2p^2 - 9xp^2 + xp^3 + 1 - 3p + 3p^2 - p^3}{x^2(xp+1-p)^2} -$$

$$-\frac{(1-p)^2}{x(xp+1-p)^2} = \frac{-1+4p-3x^2+18x^2p-10x^3p-6p^2-10x^2p^4-18p^3x+5xp^4+29x^2p^3+}{x^3\cdot}$$

$$\frac{+x^3+3x-23x^3p^3+26x^3p^2-8x^4p^2-3x^4p^4+9x^3p^4+x^5p^2+2x^4p+8x^4p^3-37x^2p^2+}{\cdot(xp+1-p)^2}$$

$$\frac{24xp^2-p^4+4p^3-14xp}{}. \qquad \textbf{(2.61)}$$

Skaičiuodami ribą, kai $p \to 0$, lygybei (2.61), gauname teoremos trečios dalies (2.46) įrodymą

$$\lim_{p\to 0} P\left(X_3^{(j)} < xp+1-p\right) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^3 = F^3(x).$$

Taigi, Pareto skirstinys (kai $k=3$) yra geometriškai asimptotiškai stabilus.

Teorema įrodyta.

2.4 Teorema. Tarkime, kad dydžiai X_j, $j \ge 1$ yra Pareto skirstinio (2.1) (kai $\alpha \ne 1$), o N – geometrinis su parametru *p*. Tada

$$\lim_{p\to 0} P\left(\frac{X_1^{(N)}-1}{\frac{p}{\alpha}} < x\right) = 1 - \frac{1}{1+x}, \quad x \ge 0, \qquad \textbf{(2.62)}$$

$$\lim_{p\to 0} P\left(\frac{X_2^{(N)}-1}{\frac{p}{\alpha}} < x\right) = \frac{x^2}{(x+1)^2}, \quad x \ge 0, \qquad \textbf{(2.63)}$$

$$\lim_{p\to 0} P\left(\frac{X_3^{(N)}-1}{\frac{p}{\alpha}} < x\right) = \frac{x^3}{(1+x)^3}, \quad x \ge 0. \qquad \textbf{(2.64)}$$

Įrodymas.

Visų pirma nagrinėsime pirmojo apatinio ekstremumo (minimumo) atvejį. Ieškosime šio ekstremumo pasiskirstymo funkcijos išraiškos.

$$P\left(\frac{X_1^{(N)}-1}{\frac{p}{\alpha}}<x\right)=\sum_{j=1}^{\infty}P\left(X_1^{(j)}<\frac{px}{\alpha}+1\right)\cdot P(N=j).$$

$$F\left(\frac{xp}{\alpha}+1\right)=1-\frac{1}{\left(\frac{xp}{\alpha}+1\right)^{\alpha}}=1-\frac{1}{1+xp+O\left(x^2p^2\right)}=\frac{xp}{1+xp}. \qquad \textbf{(2.65)}$$

Pasinaudosime (2.43) formule.

$$P\left(\frac{X_1^{(j)}-1}{\frac{p}{\alpha}}<x\right)=\frac{j!}{0!(j-1)!}\int_0^{F\left(\frac{xp}{\alpha}+1\right)}t^0\cdot(1-t)^{j-1}dt=j\int_0^{\frac{xp}{xp+1}}(1-t)^{j-1}dt=$$

$$=-j\int_0^{\frac{xp}{xp+1}}(1-t)^{j-1}d(1-t)=-(1-t)^j\Bigg|_0^{\frac{xp}{xp+1}}=-\left(1-\frac{xp}{xp+1}\right)^j+1^j=1-\left(\frac{1}{xp+1}\right)^j.$$

$$P\left(\frac{X_1^{(N)}-1}{\frac{p}{\alpha}}<x\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{1}{xp+1}\right)^j\right)\cdot P(N=j)=\sum_{j=1}^{\infty}P(N=j)-\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{xp+1}\right)^j p(1-p)^{j-1}$$

Kadangi $\frac{1}{xp+1}<1$ ($x\geq 1$), tai

$$P\left(\frac{X_1^{(N)}-1}{\frac{p}{\alpha}}<x\right)=1-\frac{p}{1-p}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1-p}{xp+1}\right)^j=1-\frac{p}{1-p}\cdot\frac{1-p}{xp+1}\cdot\frac{xp+1}{xp+p}=1-\frac{1}{x+1}.$$

Gavome teoremos pirmos dalies (2.62) įrodymą

$$P\left(\frac{X_1^{(N)}-1}{\frac{p}{\alpha}}<x\right)=1-\frac{1}{x+1}.$$

Įrodyta teoremos pirmoji dalis.

Tirsime antrąjį apatinį ekstremumą.

$$P\left(\frac{X_2^{(N)}-1}{\frac{p}{\alpha}}<x\right)=P\left(X_1^{(1)}<\frac{xp}{\alpha}+1\right)\cdot P(N=1)+\sum_{j=2}^{\infty}P\left(X_2^{(j)}<\frac{xp}{\alpha}+1\right)\cdot P(N=j).$$

Žinome, kad

$$P\left(X_j^{(j)}<\frac{xp}{\alpha}+1\right)=F^j\left(\frac{xp}{\alpha}+1\right), \qquad \textbf{(2.66)}$$

$$P(N=1)=p. \qquad \textbf{(2.67)}$$

Pasinaudojus (2.65), (2.66), (2.67), gauname:

$$P\left(X_1^{(1)}<\frac{xp}{\alpha}+1\right)\cdot P(N=1)=\left(1-\frac{1}{\frac{xp}{\alpha}+1}\right)p=\frac{xp^2}{xp+1} \qquad \textbf{(2.68)}$$

O iš (2.43) išplaukia, kad

$$P\left(X_2^{(j)}<\frac{xp}{\alpha}+1\right)=\frac{j!}{1!(j-2)!}\int_0^{\frac{xp}{xp+1}}t\cdot(1-t)^{j-2}\,dt.$$

Integralą $I_3=\int_0^{\frac{xp}{xp+1}}t\cdot(1-t)^{j-2}\,dt$ integruosime dalimis:

$$I_3=-\frac{t(1-t)^{j-1}}{j-1}\Bigg|_0^{\frac{xp}{xp+1}}+\frac{1}{j-1}\int_0^{\frac{xp}{xp+1}}(1-t)^{j-1}\,dt=\frac{-\frac{xp}{xp+1}\left(1-\frac{xp}{xp+1}\right)^{j-1}}{j-1}+$$

$$+\frac{1}{j-1}\int_0^{\frac{xp}{xp+1}}(1-t)^{j-1}\,dt=\frac{1}{j-1}\left(-\frac{xp}{xp+1}\cdot\left(\frac{1}{xp+1}\right)^{j-1}-\frac{(1-t)^j}{j}\Bigg|_0^{\frac{xp}{xp+1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{j-1}\left(-\frac{xp}{xp+1}\cdot\left(\frac{1}{xp+1}\right)^{j-1}-\frac{1}{j}\left(1-\frac{xp}{xp+1}\right)^{j}+\frac{1}{j}\right)=\frac{-\frac{xpj}{xp+1}\cdot\left(\frac{1}{xp+1}\right)^{j-1}-\left(\frac{1}{xp+1}\right)^{j}+1}{j(j-1)}=$$

$$=\frac{1-\frac{xpj}{xp+1}\cdot\frac{xp+1}{(xp+1)^j}-\left(\frac{1}{xp+1}\right)^{j}}{j(j-1)}=\frac{1-xpj\cdot\frac{1}{(xp+1)^j}-\left(\frac{1}{xp+1}\right)^{j}}{j(j-1)}.$$

Tokiu būdu

$$P\left(X_2^{(j)} < \frac{xp}{\alpha}+1\right) = \frac{j!}{(j-2)!}\frac{1-(xpj+1)\cdot\left(\frac{1}{xp+1}\right)^j}{j(j-1)} = 1-(xpj+1)\left(\frac{1}{xp+1}\right)^j .$$

Dabar

$$P\left(X_2^{(N)} < \frac{xp}{\alpha}+1\right) = \frac{xp^2}{xp+1} + \sum_{j=2}^{\infty}\left(1-(xpj+1)\left(\frac{1}{xp+1}\right)^j\right)\cdot p(1-p)^{j-1} = \frac{xp^2}{xp+1}+S .$$

Toliau

$$S = \frac{p}{1-p}\sum_{j=2}^{\infty}\left((1-p)^j-(xpj+1)\left(\frac{1-p}{xp+1}\right)^j\right) = \frac{p}{1-p}\left(\sum_{j=2}^{\infty}(1-p)^j-\sum_{j=2}^{\infty}(xpj+1)\left(\frac{1-p}{xp+1}\right)^j\right) =$$

$$= \frac{p}{1-p}\sum_{j=2}^{\infty}(1-p)^j - \frac{xp^2}{1-p}\sum_{j=2}^{\infty} j\left(\frac{1-p}{xp+1}\right)^j - \frac{p}{1-p}\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{1-p}{xp+1}\right)^j = A_4+A_5+A_6 .$$

Ieškodami ketvirtosios eilutės sumą, gauname

$$A_4 = \frac{p}{1-p}\sum_{j=2}^{\infty}(1-p)^j = p\sum_{j=1}^{\infty}(1-p)^j = 1-p . \qquad \textbf{(2.69)}$$

Pasinaudosime (2.51) formule ir apskaičiuosime penktosios eilutės sumą.

$$A_5 = -\frac{xp^2}{1-p}\cdot\frac{2\frac{(1-p)^2}{(xp+1)^2}-\frac{(1-p)^3}{(xp+1)^3}}{\left(1-\frac{1-p}{xp+1}\right)^2} = -\frac{xp^2}{1-p}\cdot\frac{\frac{2\cdot(1-p)^2(xp+1)-(1-p)^3}{(xp+1)^3}}{\left(\frac{xp+p}{xp+1}\right)^2} =$$

$$= -\frac{xp^2(1-p)^2\left(2(xp+1)-(1-p)\right)}{(1-p)(xp+1)\cdot p^2(x+1)^2} = -\frac{x(1-p)(2xp+2-1+p)}{(xp+1)(x+1)^2} = -\frac{x(1-p)(2xp+1+p)}{(xp+1)(x+1)^2} .$$

Taigi

$$A_5 = -\frac{x(1-p)(2xp+1+p)}{(xp+1)(x+1)^2} . \qquad \textbf{(2.70)}$$

Dabar skaičiuojame šeštosios eilutės sumą.

$$A_6 = -\frac{p}{1-p}\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{1-p}{xp+1}\right)^j = -\frac{p}{xp+1}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1-p}{xp+1}\right)^j = -\frac{p}{xp+1}\cdot\frac{\frac{1-p}{xp+1}}{1-\frac{1-p}{xp+1}} =$$

$$= -\frac{p}{xp+1}\cdot\frac{(1-p)(xp+1)}{(xp+1)p(x+1)} = -\frac{1-p}{(x+1)(xp+1)} .$$

Taigi

$$A_6 = -\frac{1-p}{(x+1)(xp+1)}. \qquad \textbf{(2.71)}$$

Turėdami rezultatus (2.69), (2.70) ir (2.71) bei atlikę elementariausius veiksmus, gauname:

$$P\left(X_2^{(N)} < \frac{xp}{\alpha}+1\right) = \frac{xp^2}{xp+1} + 1 - p - \frac{x(1-p)(2xp+1+p)}{(xp+1)(x+1)^2} - \frac{1-p}{(x+1)(xp+1)} =$$

$$= \frac{xp^2(x+1)^2 + (x+1)^2(xp+1) - (x+1)^2 p(xp+1) - x(1-p)(2xp+1+p) - (x+1)(1-p)}{(x+1)^2(xp+1)} =$$

$$= \frac{xp^2\left(x^2+2x+1\right) + (xp+1)\left(x^2+2x+1\right) - \left(x^2+2x+1\right)\left(xp^2+p\right) - 2x^2p - x + 2x^2p^2}{(x+1)^2(xp+1)} =$$

$$\frac{+xp^2 - (1-p)(x+1)}{} = \frac{x^3p + x^2 - x^2p + 2x^2p^2 + xp^2}{(x+1)^2(xp+1)}.$$

Taigi

$$P\left(X_2^{(N)} < \frac{xp}{\alpha}+1\right) = \frac{x^3p + x^2 - x^2p + 2x^2p^2 + xp^2}{(x+1)^2(xp+1)}. \qquad \textbf{(2.72)}$$

Skaičiuodami ribą, kai $p \to 0$, lygybei (2.72), gauname teoremos antros dalies (2.63) įrodymą:

$$\lim_{p\to 0} P\left(X_2^{(N)} < \frac{xp}{\alpha}+1\right) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^2.$$

Įrodyta antroji teoremos dalis.

Tirsime trečiąjį apatinį ekstremumą.

$$P\left(X_3^{(N)} < \frac{xp}{\alpha}+1\right) = P\left(X_1^{(1)} < \frac{xp}{\alpha}+1\right)\cdot P(N=1) + P\left(X_2^{(2)} < \frac{xp}{\alpha}+1\right)\cdot P(N=2) +$$

$$+ \sum_{j=3}^{\infty} P\left(X_3^{(j)} < \frac{xp}{\alpha}+1\right)\cdot P(N=j).$$

Turime

$$P\left(X_2^{(2)} < \frac{xp}{\alpha}+1\right)\cdot P(N=2) = F^2\left(\frac{xp}{\alpha}+1\right)p(1-p) = \frac{x^2p^4}{(xp+1)^2}p(1-p) = \frac{x^2p^5(1-p)}{(xp+1)^2}.$$

Pasinaudosime (2.43) formule.

$$P\left(X_3^{(j)} < \frac{xp}{\alpha}+1\right) = \frac{j!}{2!(j-3)!}\int_0^{\frac{xp}{xp+1}} t^2\cdot(1-t)^{j-3}\,dt = \frac{j(j-1)(j-2)}{2}\int_0^{\frac{xp}{xp+1}} t^2\cdot(1-t)^{j-3}\,dt.$$

Integralą $I_4 = \int_0^{\frac{xp}{xp+1}} t^2\cdot(1-t)^{j-3}\,dt$ integruosime dalimis:

$$I_4 = -\frac{(1-t)^{j-2}}{j-2}\Bigg|_0^{\frac{xp}{xp+1}} + \frac{2}{j-2} I_3 = \frac{-\dfrac{x^2p^2}{(xp+1)^2}\left(1-\dfrac{xp}{xp+1}\right)^{j-2}}{j-2} +$$

$$+\frac{2}{j-2}\left(\frac{1-(xpj+1)\cdot\left(\dfrac{1}{xp+1}\right)^{j}}{j(j-1)}\right) = \frac{-\dfrac{x^2p^2}{(xp+1)^2}\left(\dfrac{1}{xp+1}\right)^{j-2}}{j-2} + \frac{2}{j-2}\left(\frac{1-(xpj+1)\cdot\left(\dfrac{1}{xp+1}\right)^{j}}{j(j-1)}\right).$$

Tokiu būdu

$$P\left(X_3^{(j)} < \frac{xp}{\alpha}+1\right) = \frac{j(j-1)(j-2)}{2}\left(\frac{-\dfrac{x^2p^2}{(xp+1)^2}\left(\dfrac{1}{xp+1}\right)^{j-2}}{j-2} + \right.$$

$$\left.+\frac{2}{j-2}\left(\frac{1-(xpj+1)\cdot\left(\dfrac{1}{xp+1}\right)^{j}}{j(j-1)}\right)\right) = -\frac{j(j-1)}{2}\cdot\frac{(xp)^2}{(xp+1)^j} + 1 - \left(\frac{1}{xp+1}\right)^j (xpj+1).$$

Dabar

$$P\left(X_3^{(j)} < \frac{xp}{\alpha}+1\right) = \frac{xp^2}{xp+1} + \frac{p^5x^2(1-p)}{(xp+1)^2} - \sum_{j=3}^{\infty}\frac{j(j-1)(xp)^2}{2(xp+1)^j}\cdot p(1-p)^{j-1} +$$

$$+\sum_{j=3}^{\infty}p(1-p)^{j-1} - \sum_{j=3}^{\infty}xpj\left(\frac{1}{xp+1}\right)^j p(1-p)^{j-1} - \sum_{j=3}^{\infty}\left(\frac{1}{xp+1}\right)^j p(1-p)^{j-1} =$$

$$= \frac{xp^2}{xp+1} + \frac{p^5x^2(1-p)}{(xp+1)^2} + B_5 + B_6 + B_7 + B_8.$$

Skaičiuojame B_i, $i = 5, 6, 7, 8$.

$$B_5 = -\frac{p^3x^2}{2}\sum_{j=3}^{\infty} j(j-1)\left(\frac{1}{xp+1}\right)^{j-2}(1-p)^{j-1} = -\frac{p^3x^2(1-p)}{2(1+xp)^2}\sum_{j=3}^{\infty} j(j-1)\left(\frac{1-p}{xp+1}\right)^{j-2}.$$

Pritaikome (2.55) formulę,

$$B_5 = -\frac{p^3x^2(1-p)}{2(xp+1)^2}\cdot\frac{6\dfrac{1-p}{xp+1} - 6\dfrac{(1-p)^2}{(xp+1)^2} + 2\dfrac{(1-p)^3}{(xp+1)^3}}{\left(1-\dfrac{1-p}{xp+1}\right)^3} =$$

$$= -\frac{p^3 x^2(1-p)}{2(xp+1)^2} \cdot \frac{\dfrac{6(1-p)(xp+1)^2 - 6(1-p)^2(xp+1) + 2(1-p)^3}{(xp+1)^3}}{\left(\dfrac{xp+p}{xp+1}\right)^3} =$$

$$= -\frac{x^2(1-p)}{(xp+1)^2} \cdot \frac{(1-p)\left(3(1+2xp+x^2p^2) - 3(1+xp-p-xp^2) + (1-2p+p^2)\right)}{(x+1)^3} =$$

$$= \frac{(x^2 - 2x^2p + x^2p^2)(3xp + 3x^2p^2 + p + 3xp^2 + 1 + p^2)}{(x+1)^3(xp+1)^2} =$$

$$= \frac{-3x^3p - 3x^4p^2 + x^2p + 3x^3p^2 - x^2 + 6x^4p^3 + 3x^3p^3 + x^2p^3 - 3x^4p^4 - 3x^3p^4 - x^2p^4}{(x+1)^3(xp+1)^2}.$$

Taigi

$$B_5 = \frac{-3x^3p - 3x^4p^2 + x^2p + 3x^3p^2 - x^2 + 6x^4p^3 + 3x^3p^3 - 3x^4p^4 - 3x^3p^4 - x^2p^4}{(x+1)^3(xp+1)^2}. \quad \textbf{(2.73)}$$

Skaičiuojame B_6.

$$B_6 = \sum_{j=3}^{\infty} p(1-p)^{j-1} = \frac{p}{1-p}\sum_{j=3}^{\infty}(1-p)^j = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{(1-p)^3}{1-1+p} = (1-p)^2. \qquad \textbf{(2.74)}$$

Skaičiuojame B_7.

$$B_7 = -\sum_{j=3}^{\infty} xpj\left(\frac{1}{xp+1}\right)^j p(1-p)^{j-1} = -\frac{xp^2}{1-p}\sum_{j=3}^{\infty} j\left(\frac{1-p}{xp+1}\right)^j.$$

Pritaikę (2.58) formulę, skaičiuojame:

$$B_7 = -\frac{xp^2}{1-p} \cdot \frac{3\left(\dfrac{1-p}{xp+1}\right)^3 - 2\left(\dfrac{1-p}{xp+1}\right)^4}{\left(1 - \dfrac{1-p}{xp+1}\right)^2} = -\frac{x(1-p)^2(3xp+1+2p)}{(x+1)^2(xp+1)^2} =$$

$$= -\frac{(x - 2xp + xp^2)(1 + 3xp + 2p)}{(x+1)^2(xp+1)^2} = -\frac{x + 3x^2p - 6x^2p^2 - 3xp^2 + 3x^2p^3 + 2xp^3}{(x+1)^2(xp+1)^2}.$$

Taigi

$$B_7 = -\frac{x + 3x^2p - 6x^2p^2 - 3xp^2 + 3x^2p^3 + 2xp^3}{(x+1)^2(xp+1)^2}. \qquad \textbf{(2.75)}$$

Rasime B_8.

$$B_8 = -\sum_{j=3}^{\infty}\left(\frac{1}{xp+1}\right)^j p(1-p)^{j-1} = -\frac{p}{1-p}\sum_{j=3}^{\infty}\left(\frac{1-p}{xp+1}\right)^j = -\frac{p}{1-p} \cdot \frac{\dfrac{(1-p)^3}{(xp+1)^3}}{1 - \dfrac{1-p}{xp+1}} =$$

$$= -\frac{p}{1-p} \cdot \frac{(1-p)^3}{(x+1)p(xp+1)^2} = -\frac{(1-p)^2}{(x+1)(xp+1)^2}.$$

Taigi

$$B_8 = -\frac{(1-p)^2}{(x+1)(xp+1)^2}. \qquad \textbf{(2.76)}$$

Turėdami rezultatus (2.73), (2.74), (2.75) ir (2.76), ieškome normuoto apatinio ekstremumo pasiskirstymo funkcijos išraiškos.

$$P\left(X_3^{(j)} < \frac{xp}{\alpha} + 1\right) = \frac{xp^2}{xp+1} + \frac{p^5 x^2 (1-p)}{(xp+1)^2} +$$

$$+ \frac{-3x^3 p - 3x^4 p^2 + x^2 p + 3x^3 p^2 - x^2 + 6x^4 p^3 + 3x^3 p^3 + x^2 p^3 - 3x^4 p^4 - 3x^3 p^4 - x^2 p^4}{(x+1)^3 (xp+1)^2} +$$

$$+ (1-p)^2 - \frac{x + 3x^2 p - 6x^2 p^2 - 3xp^2 + 3x^2 p^3 + 2xp^3}{(x+1)^2 (xp+1)^2} - \frac{(1-p)^2}{(x+1)(xp+1)^2} =$$

$$= \frac{x^2 p^3 - 2x^3 p + x^3 - 3x^4 p^2 + x^2 p^5 + xp^2 + 5x^4 p^3 + 4x^3 p^2 + 3x^3 p^3 + 3x^2 p^2 + 2x^4 p -}{(x+1)^3 \cdot}$$

$$\frac{x^5 p^3 + x^5 p^5 + 3x^4 p^5 + 3x^3 p^5 - x^4 p^6 - 3x^4 p^6 - 3x^3 p^6 - x^2 p^6 + x^5 p^2 + x^5 p^4}{\cdot (xp+1)^2}. \qquad \textbf{(2.77)}$$

Skaičiuodami ribą, kai $p \to 0$, lygybei (2.77), gauname teoremos trečiosios dalies (2.64) įrodymą

$$\lim_{p \to 0} P\left(X_3^{(j)} < \frac{xp}{\alpha} + 1\right) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^3 = \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^3.$$

Teorema įrodyta.

2.4 PAKLAIDOS

Turėdami Pareto skirstinį (2.1) (kai $\alpha \neq 1$) ir maksimumo atveju lygybę (2.8), nesunku įvertinti paklaidą.

Pažymėkime:

$$\Delta_N(x, p) = P\left(p^{\frac{1}{\alpha}} Z_N < x\right) - \frac{x^\alpha}{x^\alpha + 1}. \qquad \textbf{(2.78)}$$

Tada

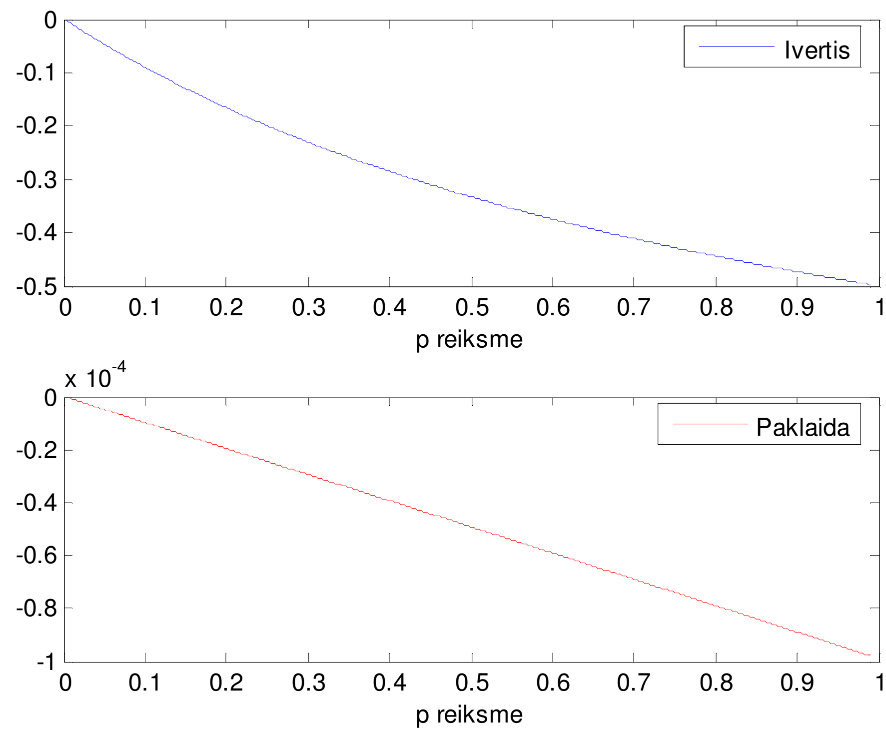
$$\Delta_N(x, p) = \frac{-p}{(1 + x^\alpha)(1 + x^\alpha - p)}. \qquad \textbf{(2.79)}$$

Kadangi $x \geq p^{\frac{1}{\alpha}}$, tai įvertis

$$-\frac{p}{1+p} \leq \Delta_N(x, p) \leq 0. \qquad \textbf{(2.80)}$$

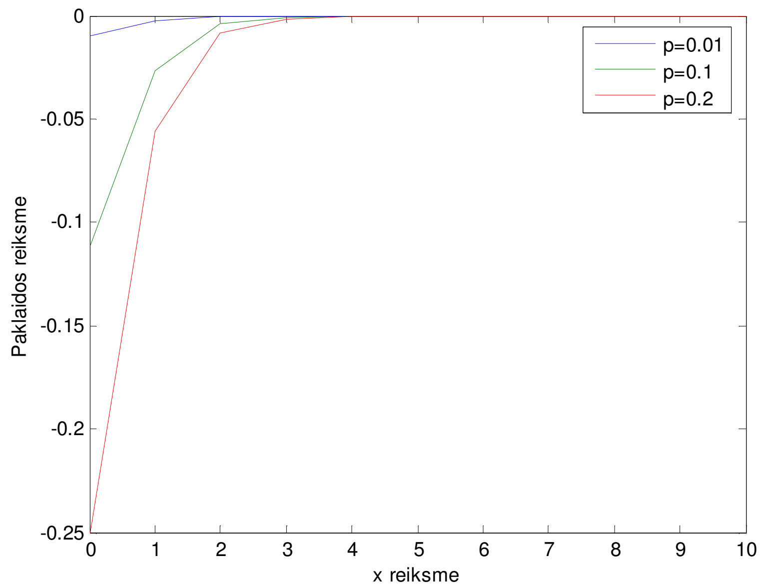
Paklaidoms skaičiuoti naudojama Maple programinė įranga. Programos tekstas pateiktas 2 priede.

Gauti rezultatai pateikiami 2.1 ir 2.2 paveiksluose. Kiti rezultatai pateikiami 1 priede.



2.1 pav. Paklaidos ir įverčio $\Delta_N(x, p)$ priklausomybės nuo p, kai $x = 10$ ir $\alpha = 2$

Iš 2.1 paveikslo matoma, kad paklaida mažesnė už įvertį. Be to, p artėjant prie nulio, tiek paklaida, tiek įvertis artėja prie nulio.



2.2 pav. Paklaidos ir įverčio $\Delta_N(x, p)$ priklausomybė nuo *x*, kai $p = 0.01,\ 0.1,\ 0.2$ ir $\alpha = 2$

Iš 2.2 paveikslo galima teigti, kad *x* artėjant į $+\infty$, paklaida artėja prie nulio.

Minimumo atveju, kai $\alpha \neq 1$, paklaida:

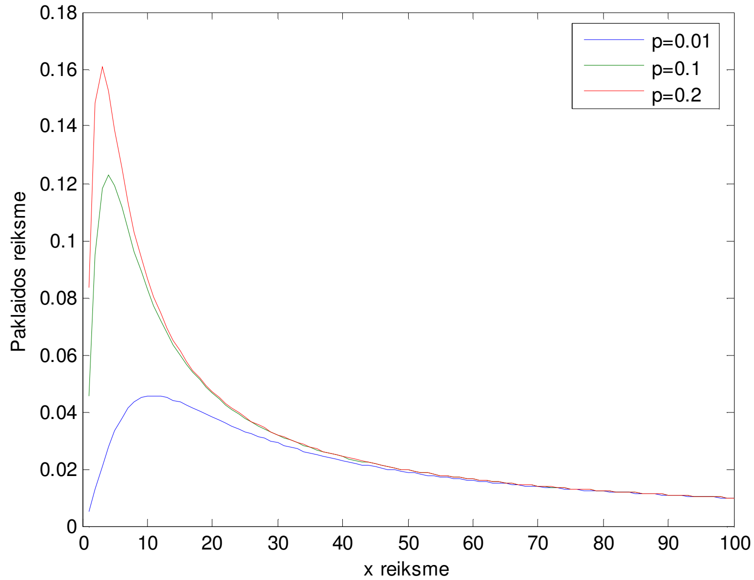
$$\Delta_1(x, p) = P\left(\frac{W_N - 1}{\frac{p}{\alpha}} < x\right) - \frac{x}{x+1}. \tag{2.81}$$

Tada

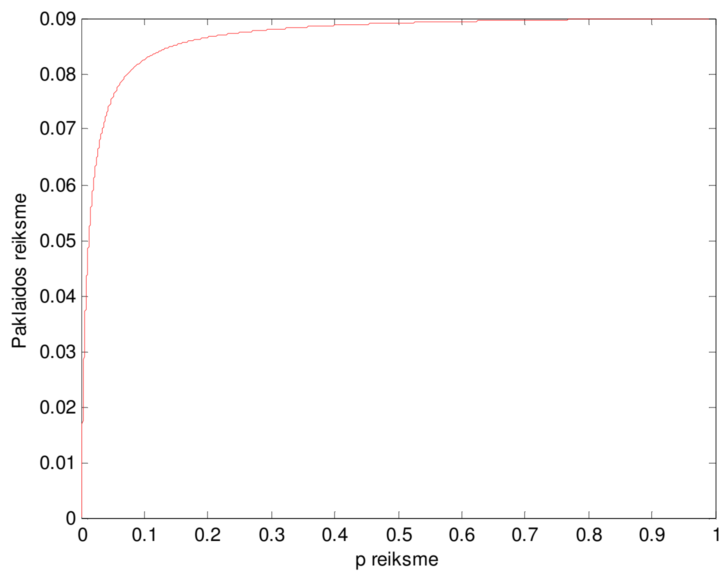
$$\Delta_1(x, p) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1 + x + \frac{O(x^2 p^2)}{p}} \leq \frac{Cx^2 p}{(1+x)^2}, \quad x \geq 0, \tag{2.82}$$

čia C – absoliuti konstanta.

Gauti rezultatai pateikiami 2.3 ir 2.4 paveiksluose. Kiti rezultatai pateikiami 1 priede.



2.3 pav. Paklaidos $\Delta_1(x, p)$ priklausomybė nuo *x*, kai $p = 0.01,\ 0.1,\ 0.2$



2.4 pav. Paklaidos $\Delta_1(x, p)$ priklausomybė nuo *p*, kai $x = 10$

Iš 2.3 ir 2.4 paveikslų matoma, kad *x* artėjant į $+\infty$, paklaida artėja prie nulio, o *p* artėjant prie nulio, paklaida taip pat artėja prie nulio.

Apskaičiavus apatinių ekstremumų geometrinį stabilumą, gaunami asimptotiniai rezultatai. Imame atvejį, kai $k=2$ ir apskaičiuojame paklaidą.

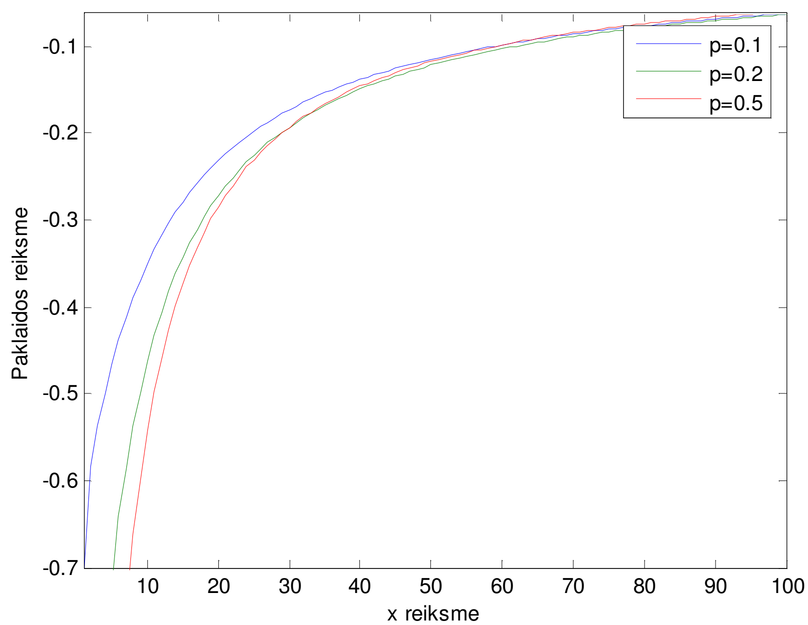
Kai $\alpha=1$:

$$\Delta_{2_1}(p)=\frac{-4x^2p+x^3p+x^2-2x+5xp+2x^2p^2-3xp^2+1-2p+p^2}{x^2(xp+1-p)}-\left(\frac{x-1}{x}\right)^2=$$

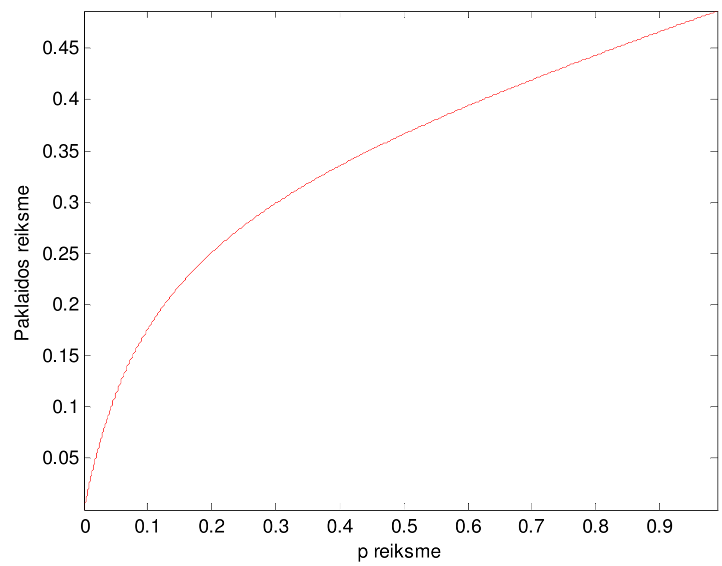
$$=\frac{2p^2x^2-7x^2p+2xp-2p-3p^2x+p^2+x^3p}{x^2(px-p+1)}=O(p),\quad p\to 0,\quad x\in\mathbf{R} \qquad \textbf{(2.83)}$$

Gavome, kad paklaida yra eilės *p*.

Gauti rezultatai pateikiami 2.5 ir 2.6 paveiksluose. Kiti rezultatai pateikiami 1 priede.



2.5 pav. Paklaidos $\Delta_{2_1}(x,p)$ priklausomybė nuo *x*, kai $p=0.1,\ 0.2,\ 0.5$



2.6 pav. Paklaidos $\Delta_{2_1}(x, p)$ priklausomybė nuo *p*, kai $x = 10$

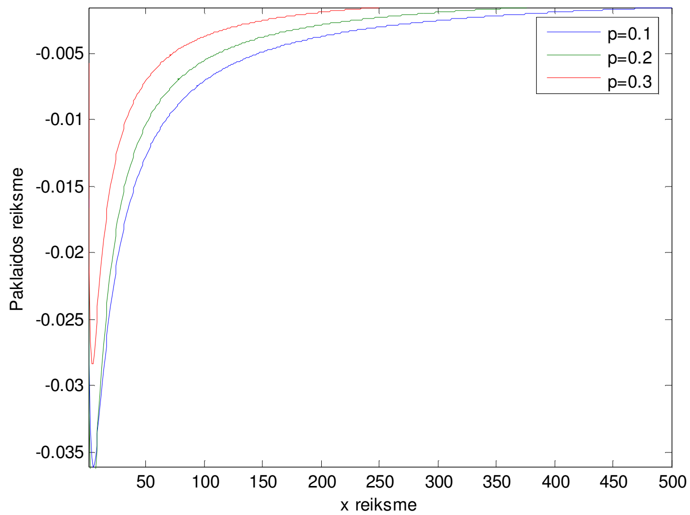
Iš 2.5 ir 2.6 paveikslų matoma, kad *x* artėjant į $+\infty$, paklaida artėja prie nulio, o *p* artėjant prie nulio, paklaida taip pat artėja prie nulio.

Kai $\alpha \neq 1$:

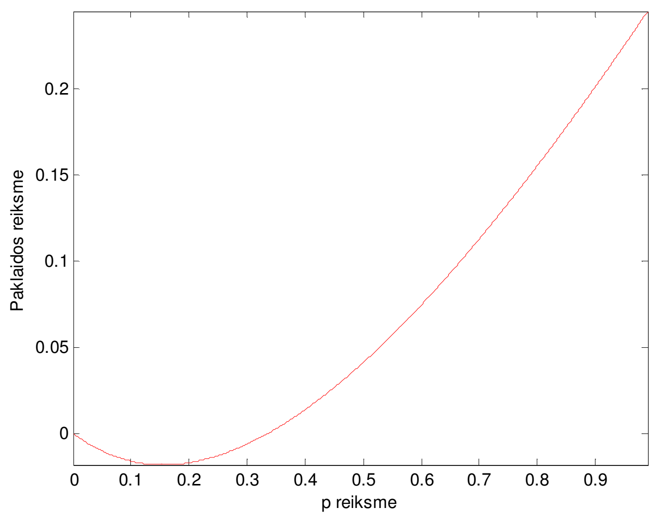
$$\Delta_{2_2}(p) = \frac{x^3 p + x^2 - x^2 p + 2x^2 p^2 + xp^2}{(x+1)^2 (xp+1)} - \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \\ = \frac{2p^2 x^2 + p^2 x - px^2}{(x+1)^2 (px+1)} = O(p),\ p \to 0,\ x \in \mathbf{R} \tag{2.84}$$

Paklaida yra eilės *p*.

Gauti rezultatai pateikiami 2.7 ir 2.8 paveiksluose. Kiti rezultatai pateikiami 1 priede.



2.7 pav. Paklaidos $\Delta_{2_2}(x, p)$ priklausomybė nuo *x*, kai $p = 0.1, 0.2, 0.3$



2.8 pav. Paklaidos $\Delta_{2_2}(x, p)$ priklausomybė nuo *p*, kai $x = 1$

Iš 2.7 ir 2.8 paveikslų matoma, kad *x* artėjant į $+\infty$, paklaida artėja prie nulio, o *p* artėjant prie nulio, paklaida taip pat artėja prie nulio.

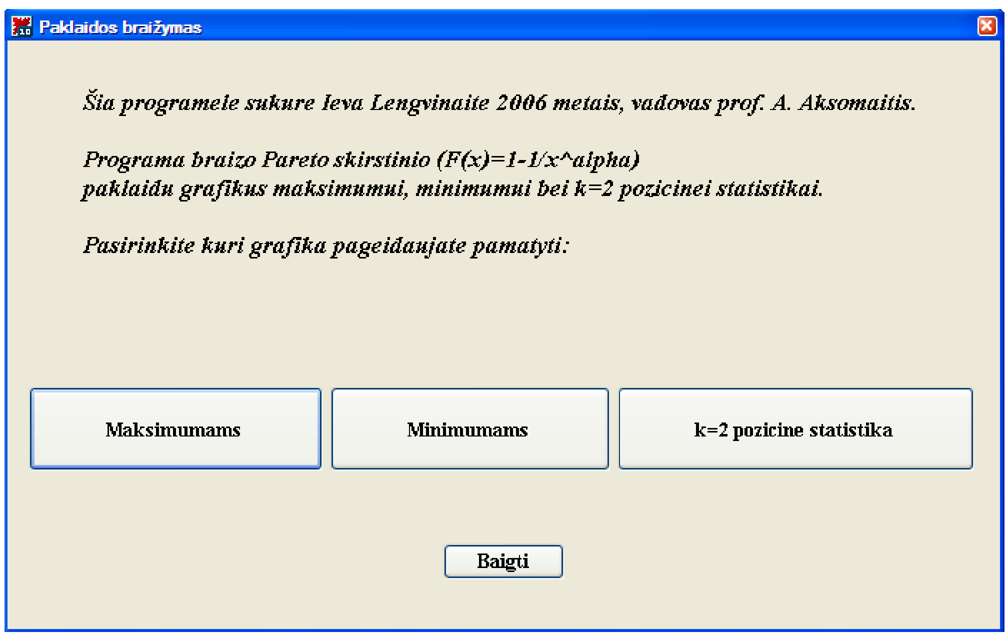
2.5 PROGRAMINĖ REALIZACIJA IR INSTRUKCIJA VARTOTOJUI

Programa parašyta Maple 10 programiniu paketu. Maple yra vienas iš galingiausių matematinių paketų. Su Maple atsakymą galima gauti ir analiziniu, ir skaitiniu, ir grafiniu pavidalu. Be to, jame įdiegta Maplets technologija, kurios pagalba galima sukurti suprantamą vartotojui programėlę. Maplets paketas turi viršutinę funkciją Maplet, procedūrą Display ir tris vidinius paketus: Elements, Tools ir Examples.

Pagrindinis reikalavimas, kad vartotojas turėtų įdiegta savo kompiuteryje paketą Maple 10.

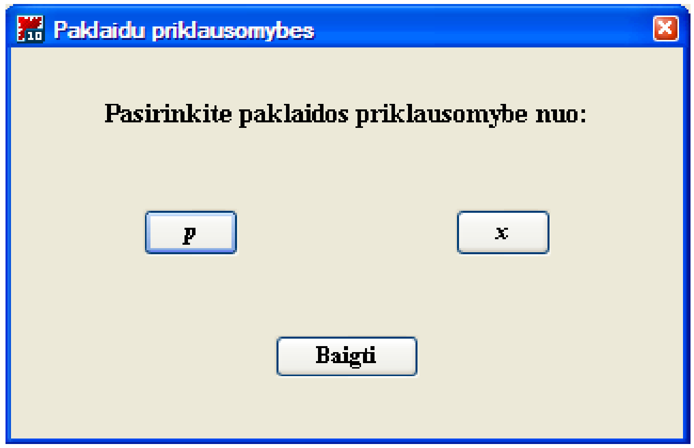
Ši programa braižo paklaidų grafikus maksimumo, minimumo bei $k = 2$ pozicinės statistikos atvejui. Grafikai pateikiami dvejopai, t.y. galima pasirinkti paklaidos priklausomybę nuo x arba p pageidaujamuose taškuose.

Spustelėjus ant failo „programa“, atsidaro programos tekstą, tada paspaudus mygtuką  mygtukų juostoje, atsiveria pagrindinis programos langas.



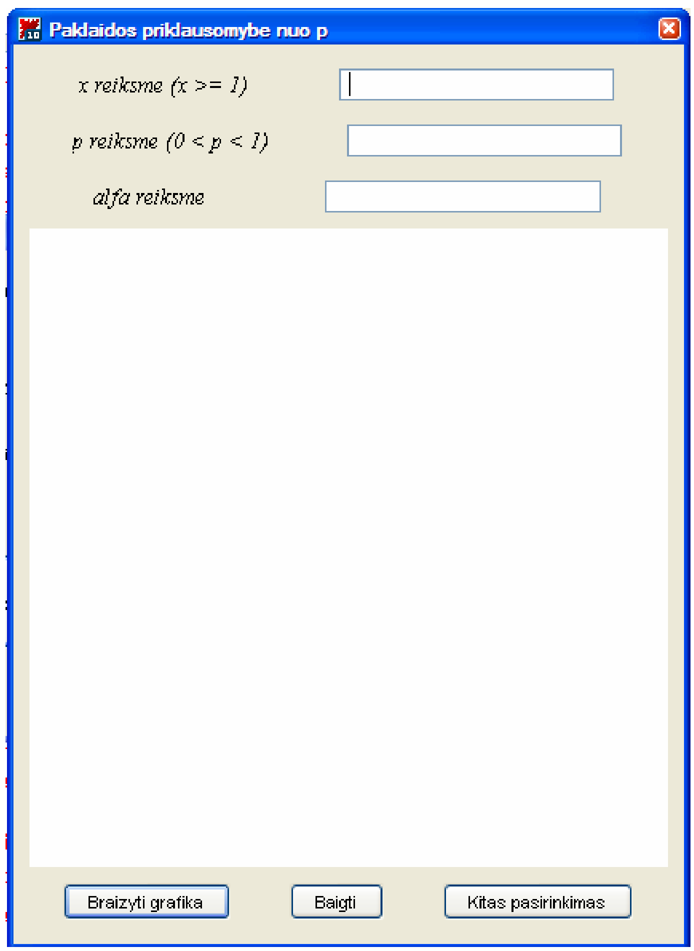
2.9 pav. Pagrindinis programos langas

Galimi 3 pasirinkimai. Paspaudus kurį nors variantą, atsiveria kitas langas, kuriame galima pasirinkti paklaidos priklausomybe nuo x arba p.



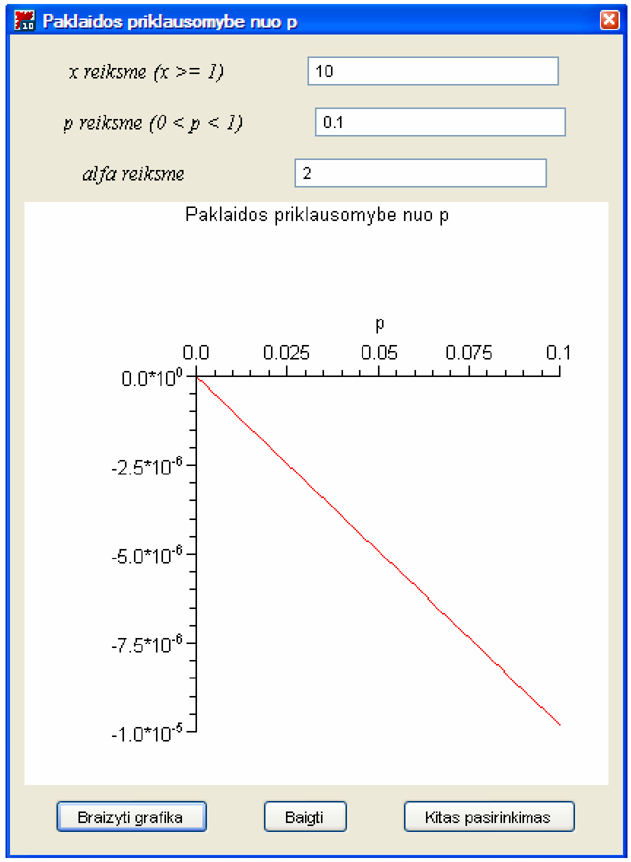
2.10 pav. Paklaidos priklausomybės pasirinkimas

Paspaudus mygtuką „p“, atsiveria langas.



2.11 pav. Paklaidos priklausomybės nuo *p* langas maksimumo atveju

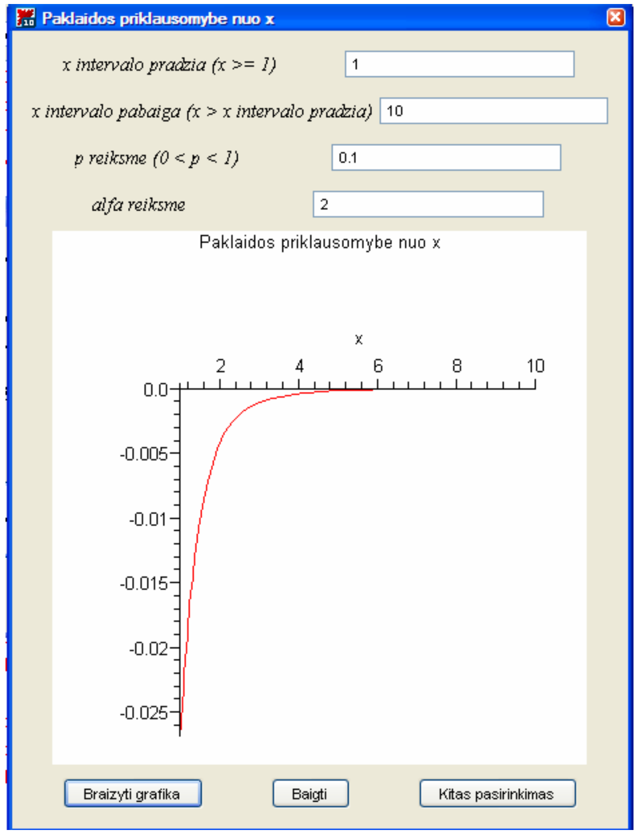
Įvedus reikšmes ir paspaudus mygtuką „Braižyti grafiką“, baltame fone nubraižomas norimas grafikas.



2.12 pav. Paklaidos priklausomybės nuo *p* langas maksimumo atveju, kai pasirinktos reikšmės bei nubraižytas grafikas

Norėdami pasirinkti kitą variantą, spaudžiamas mygtukas „Kitas pasirinkimas“ ir grįžtama prie 2.10 lango.

Pasirinkus paklaidos priklausomybę nuo *x*, atsiveria langas, kuriame taip pat reikia įvesti reikiamas reikšmes ir paspaudus reikiamą mygtuką „Braižyti“, nubraižomas grafikas.



2.13 pav. Paklaidos priklausomybės nuo *x* langas maksimumo atveju, kai pasirinktos reikšmės bei nubraižytas grafikas

Norint uždaryti programą, paspaudžiama „Baigti“.

Šios programos dėka, vartotojas supranti gali pamatyti paklaidų priklausomybes nuo *p* arba *x* minimumo, maksimumo ir $k = 2$ pozicinei statistikai dominančiuose taškuose.

DISKUSIJOS

Tirdami Pareto atsitiktiniai dydžius, kai $\alpha = 1$, gavome, kad yra jie geometriškai maksimaliai stabilūs

$$P\left(\frac{Z_N - \frac{p-1}{p}}{\frac{1}{p}} < x\right) = 1 - \frac{1}{x}, \quad x \geq 1 .$$

Taikant perkėlimo teoremą

$$P\left(\frac{Z_N}{n} < x\right) \underset{n\to\infty}{\to} 1 - \frac{1}{1+x}, \; x \geq 0 .$$

Perkėlimo teoremoje būtina imti $p = \frac{1}{n}$, ir gaunamas ribinis skirstinys. Tuo tiesioginis būdas pranašesnis. Be to perkėlimo teoremoje gaunamas Pareto skirstinys, tačiau su poslinkiu, o tiesiogiai skaičiuojant – tikslus Pareto skirstinys.

Taip pat gavome, kad Pareto atsitiktiniai dydžiai yra minimaliai stabilūs

$$P\left(\frac{W_N - 1 + p}{p} < x\right) = 1 - \frac{1}{x}, \quad x \geq 1 .$$

Taikant perkėlimo teoremą

$$P\left((W_n - 1)\cdot n < x\right) \underset{n\to\infty}{\to} 1 - \frac{1}{1+x}, \; x \geq 0 .$$

Perkėlimo teoremoje reikalaujama, kad $p = \frac{1}{n}$. Be to perkėlimo teoremoje gaunamas ribinis Pareto skirstinys su poslinkiu, o skaičiuojant tiesiogiai – tikslus Pareto skirstinys.

Kai $\alpha \neq 1$ atveju, Pareto atsitiktiniai dydžiai nėra geometriškai maksimaliai stabilūs. Gaunamas asimptotinis stabilumas

$$\lim_{p\to 0} P\left(p^{\frac{1}{\alpha}} Z_N < x\right) = 1 - \frac{1}{1 + x^{\alpha}}, \quad x \geq 0 .$$

Taikant perkėlimo teoremą

$$P\left(\frac{Z_N}{n^{\frac{1}{\alpha}}} < x\right) \underset{n\to\infty}{\to} 1 - \frac{1}{1+x^{\alpha}}, \quad x \geq 0 .$$

Skaičiuodami tiek tiesioginiu būdu, tiek perkėlimo teoremos analizėje gavome tą patį rezultatą, tik tiesioginio būdo pranašumas tai, kad šiuo atveju užtenka imti $p \to 0$, o perkėlimo teoremoje būtina imti $p = \frac{1}{n}$.

Šiuo atveju, Pareto atsitiktiniai dydžiai taip pat nėra geometriškai minimaliai stabilūs. Gaunamas asimptotinis stabilumas

$$\lim_{p\to 0} P\left(\frac{W_N - 1}{\frac{p}{\alpha}} < x \right) = 1 - \frac{1}{1+x}, \quad x \geq 0 .$$

Taikant perkėlimo teoremą

$$P\left((W_n - 1)\cdot n^{\frac{1}{\alpha}} < x \right) \Rightarrow \Psi(x) = \int_0^\infty (1 - L(x))^z \, dA(z) = 1 - \frac{1}{1+x^\alpha} .$$

Perkėlimo teoremoje reikalaujama, kad $p = \frac{1}{n}$, skaičiuojant tiesioginiu būdu užtenka imti $p \to 0$ (pranašumas skaičiuojant tiesioginiu būdu). Perkėlimo teoremoje gaunamas Pareto skirstinys, tačiau su poslinkiu, o skaičiuojant tiesioginiu būdu – Pareto skirstinys (kai $\alpha = 1$) ir su poslinkiu.

Tirdami Pareto skirstinio apatinius ekstremumus ($k > 1$), tiek, kai $\alpha = 1$, tiek, kai $\alpha \neq 1$, gavome, kad apatiniai ekstremumai nėra geometriškai stabilūs, tačiau jie yra asimptotiškai stabilūs.

Kai $\alpha = 1$, galima įtarti, kad

$$P\left(\frac{X_k^{(N)} - 1 + p}{p} < x \right) \Rightarrow F^k(x).$$

Kai $\alpha \neq 1$, galima įtarti, kad

$$P\left(\frac{X_k^{(N)} - 1}{\frac{p}{\alpha}} < x \right) \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)^k .$$

IŠVADOS

1. Kai $\alpha = 1$, Pareto atsitiktiniai dydžiai yra geometriškai maksimaliai (minimaliai) stabilūs.
2. Kai $\alpha \neq 1$, Pareto atsitiktiniai dydžiai nėra geometriškai maksimaliai (minimaliai) stabilūs. Ribinis skirstinys yra taip pat Pareto, tačiau su poslinkiu. Be to gaunamas asimptotinis stabilumas.
3. Perkėlimo teoremos analizėje tiriant struktūrą Z_N ir W_N reikalaujama, kad būtų $p = \frac{1}{n}$, be to gaunami asimptotiniai rezultatai. Tiesioginis būdas pranašesnis, nes tokiu atveju reikia imti tik $p \to 0$. Perkėlimo teoremoje gaunami ribiniai skirstiniai, o skaičiuojant tiesioginiu būdu – gaunamas tikslus skirstinys (kai $\alpha = 1$ atveju).
4. Kai imties didumas N yra atsitiktinis, Pareto skirstinio apatiniai ekstremumai ($k > 1$) nėra geometriškai stabilūs, tačiau jie yra asimptotiškai stabilūs. Konvergavimo greitis yra eilės p.

REKOMENDACIJOS

Galimi tolesni tyrimai:

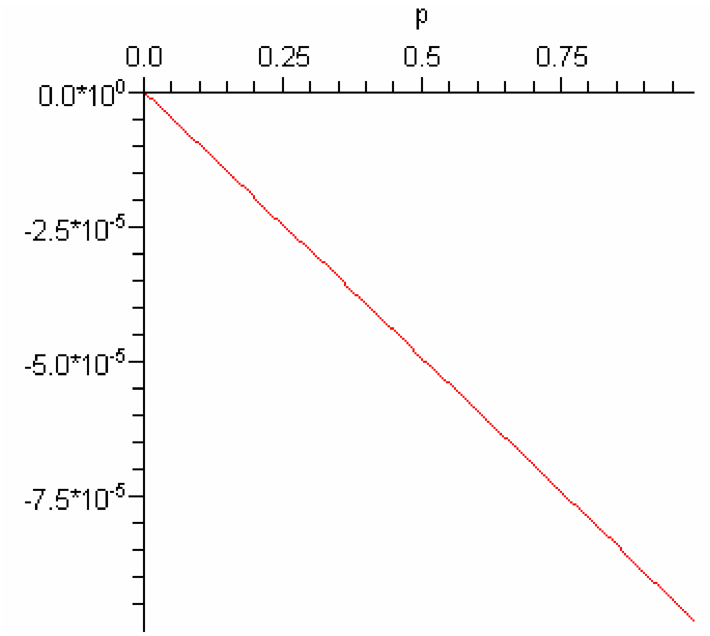
- Buvo ištirta, kas apatiniai ekstremumai ($k = 2, 3$) yra asimptotiškai stabilūs. Pratęsti šiuos tyrinėjimus, kai $k > 4$.
- Apskaičiuoti geometrinį stabilumą viršutiniams ekstremumams.
- Minimumo atveju įvertinti absoliučią konstantą konvergavimo greityje.

LITERATŪRA

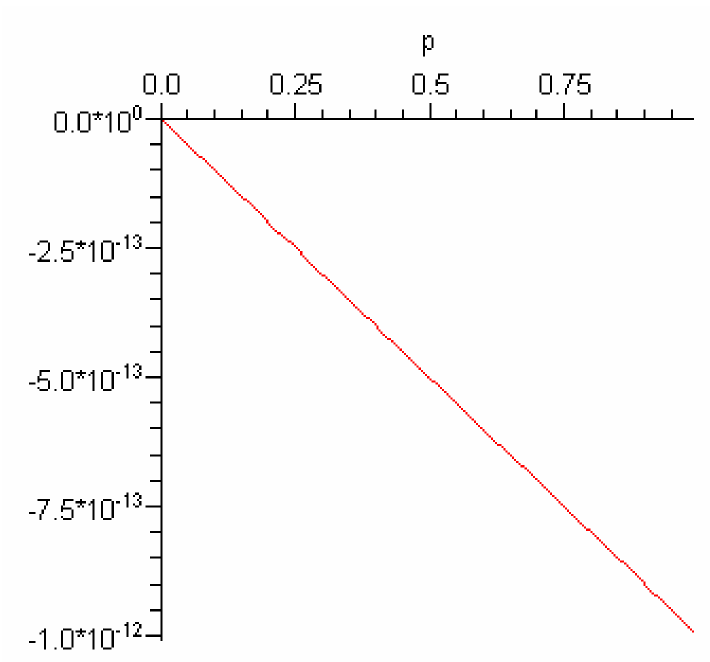
1. Aksomaitis A. Perkėlimo teorema ir geometriškai maks-stabilieji atsitiktiniai dydžiai. / Liet. matem. rink., 4 (spec. nr.), 2003.
2. Galambos J. The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics. New York, Willey, 1978.
3. Pilari R. N. Harmonic Mixtures and geometric Infinte Divisibillity. J. Ind. Statist. Assoc., 45-47, 1990.
4. Rachev S. and Mittnik S.. Stable Paretian Models in Finance, John Willey, New York, Singapūre, Toronto, 2000.
5. Rytgaard M. Estimation in the Pareto distribution. Nordisk Reinsurance Company A/S, Copenhagen, Denmark. / Astin Bulletin, Vol. 20, No. 2, p. 200-216.
6. Satheesh S. ir Unnikrishnan Nair N. On the stability of geometric extremes. / Journal of the Indian Statistical Association, Vol. 42, 1, 2004, p. 99-109.
7. Sreehari M. Maximum Stability and a Generalization, Statist. Probab. Lett., 23, 1995, p. 339-342.
8. Гнеденко Б. О распределениях Лапласа и логистическом как предельных в теории вероятностей. Сердика Българско мат. спис. Том 3, 1982.
9. http://bvio.ngic.re.kr/Bvio/index.php/Pareto_distribution

1 PRIEDAS

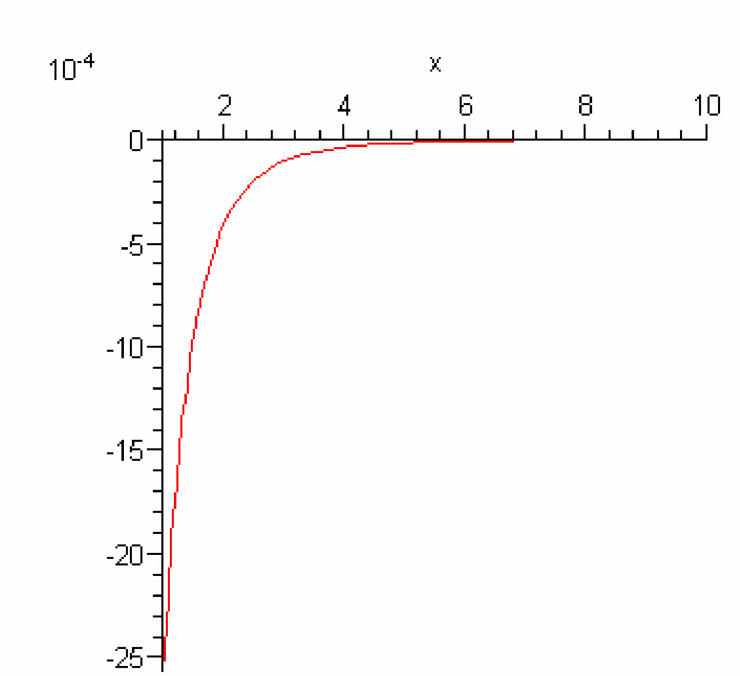
Maksimumo atveju paklaidų grafikai, kai $\alpha \neq 1$.



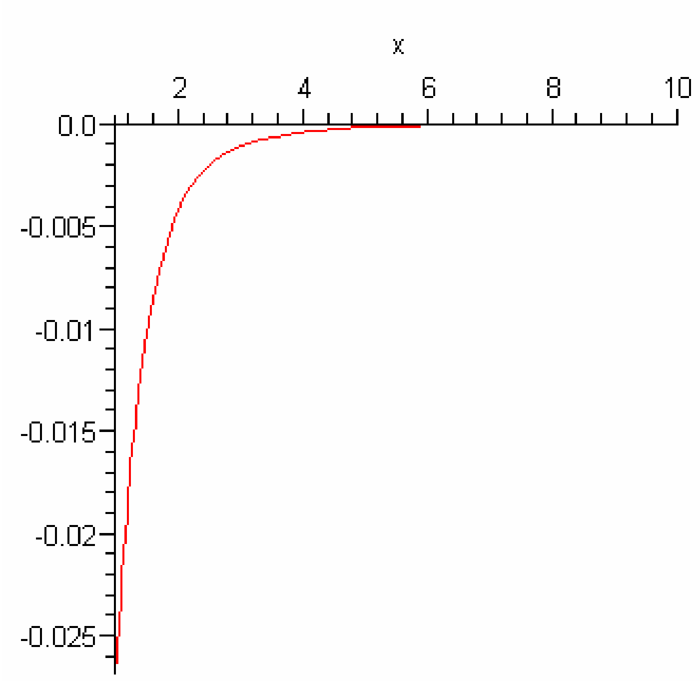
1.1 pav. Paklaidos $\Delta_N(x, p)$ priklausomybė nuo *p*, kai $x = 10$



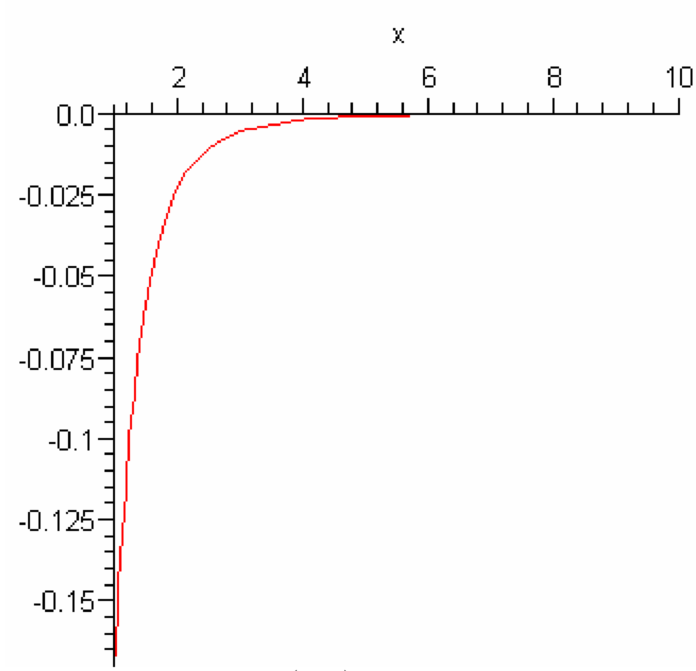
1.2 pav. Paklaidos $\Delta_N(x, p)$ priklausomybė nuo *p*, kai $x = 1000$



1.3 pav. Paklaidos $\Delta_N(x, p)$ priklausomybė nuo *x*, kai $p = 0.01$

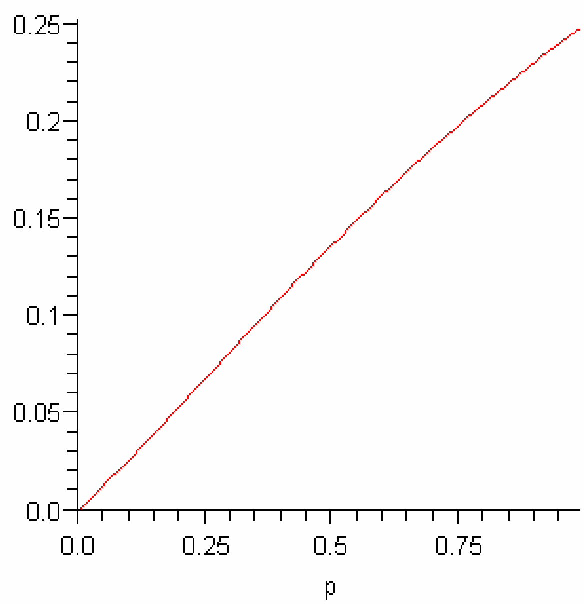


1.4 pav. Paklaidos $\Delta_N(x, p)$ priklausomybė nuo *x*, kai $p = 0.1$

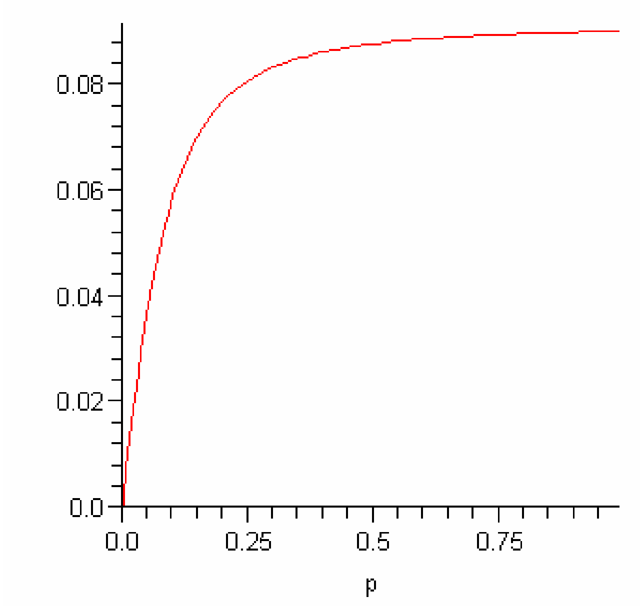


1.5 pav. Paklaidos $\Delta_N(x, p)$ priklausomybė nuo *x*, kai $p = 0.5$

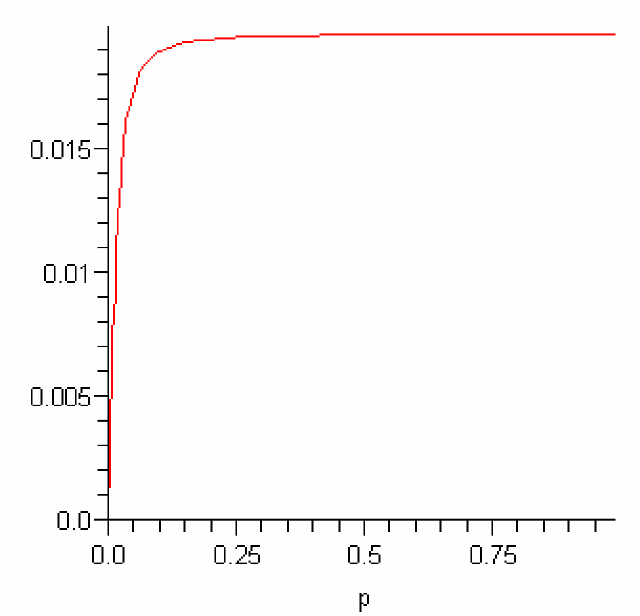
Minimumo atveju paklaidų grafikai, kai $\alpha \neq 1$.



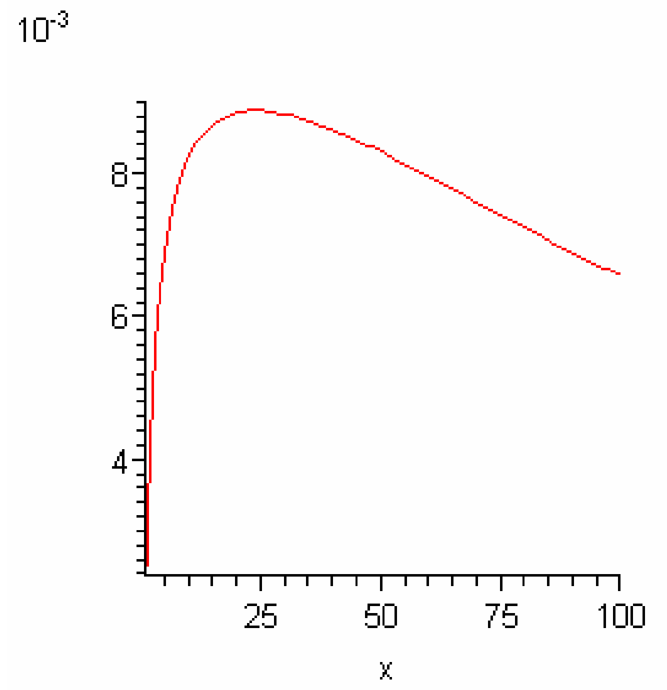
1.6 pav. Paklaidos $\Delta_1(x, p)$ priklausomybė nuo *p*, kai $x = 1$



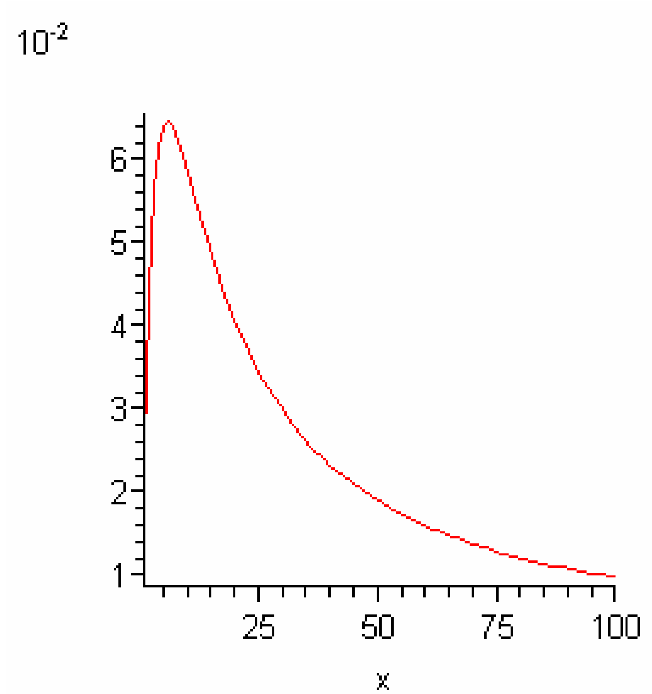
1.7 pav. Paklaidos $\Delta_1(x, p)$ priklausomybė nuo p, kai $x = 10$



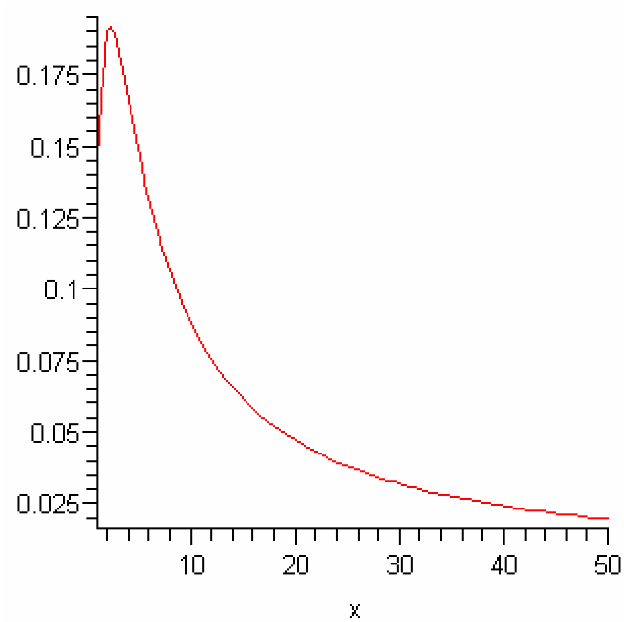
1.8 pav. Paklaidos $\Delta_1(x, p)$ priklausomybė nuo p, kai $x = 50$



1.9 pav. Paklaidos $\Delta_1(x, p)$ priklausomybė nuo x, kai $p = 0.01$

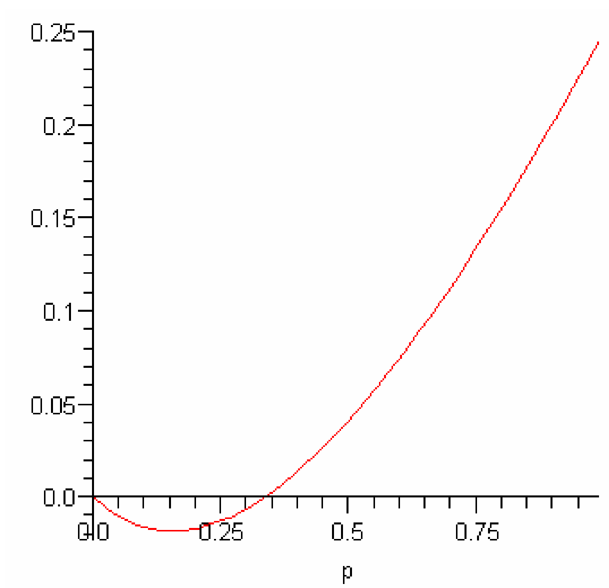


1.10 pav. Paklaidos $\Delta_1(x, p)$ priklausomybė nuo x, kai $p = 0.1$

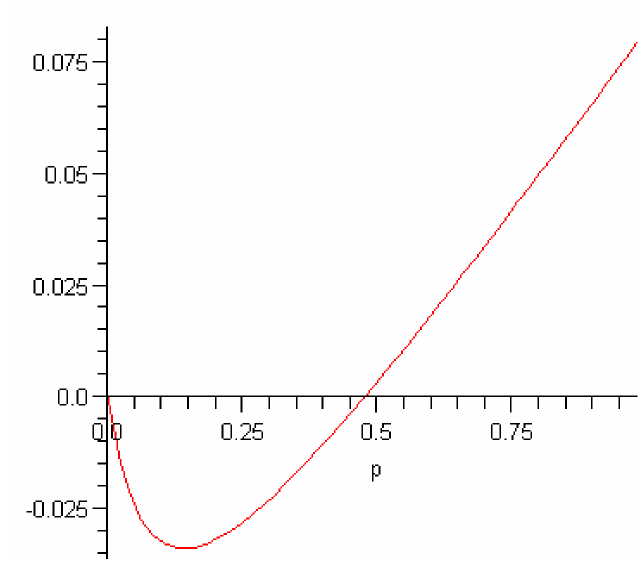


1.11 pav. Paklaidos $\Delta_1(x, p)$ priklausomybė nuo *x*, kai $p = 0.5$

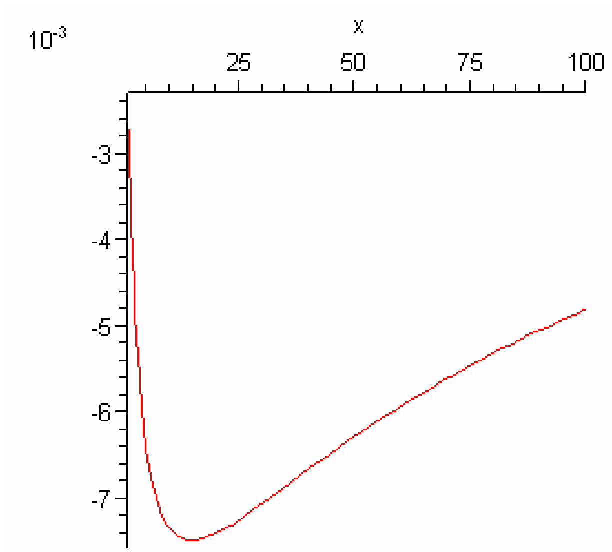
$k = 2$ pozicinės statistikos, kai $\alpha \neq 1$, atveju paklaidų grafikai.



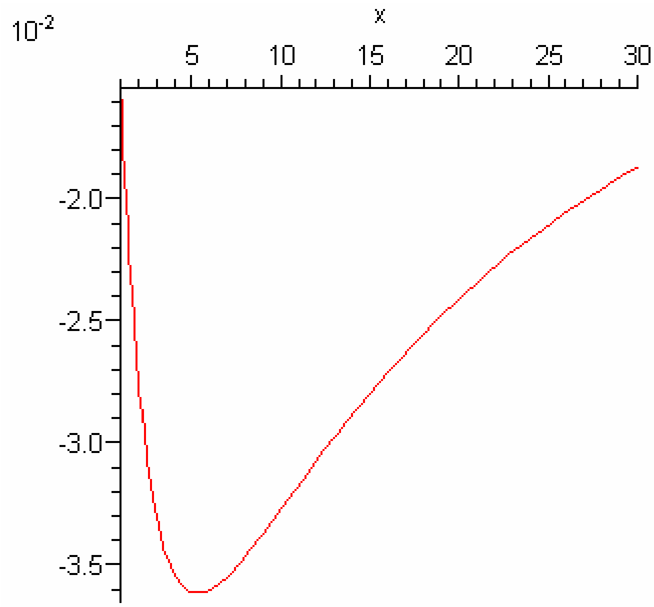
1.12 pav. Paklaidos $\Delta_{2_2}(x, p)$ priklausomybė nuo *p*, kai $x = 1$



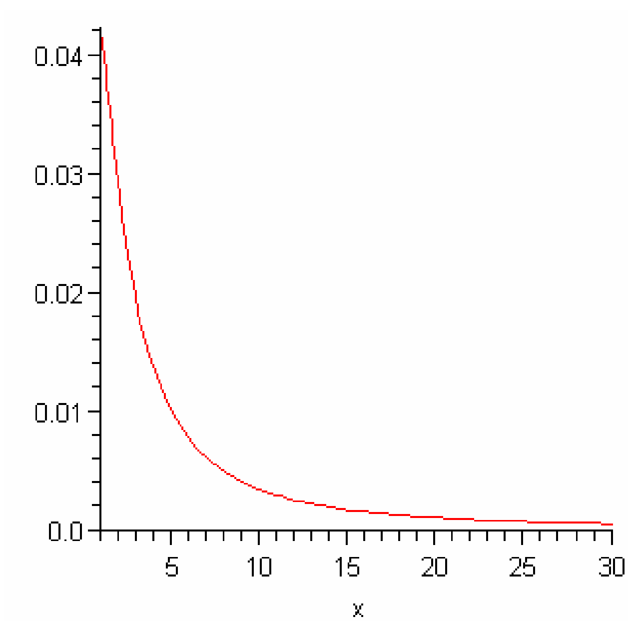
1.13 pav. Paklaidos $\Delta_{2_2}(x, p)$ priklausomybė nuo *p*, kai $x = 10$



1.14 pav. Paklaidos $\Delta_{2_2}(x, p)$ priklausomybė nuo *x*, kai $p = 0.01$

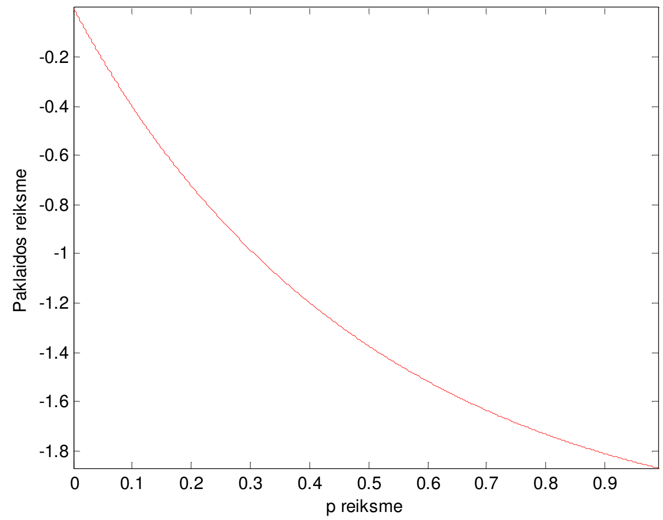


1.15 pav. Paklaidos $\Delta_{2_2}(x, p)$ priklausomybė nuo x, kai $p = 0.1$.

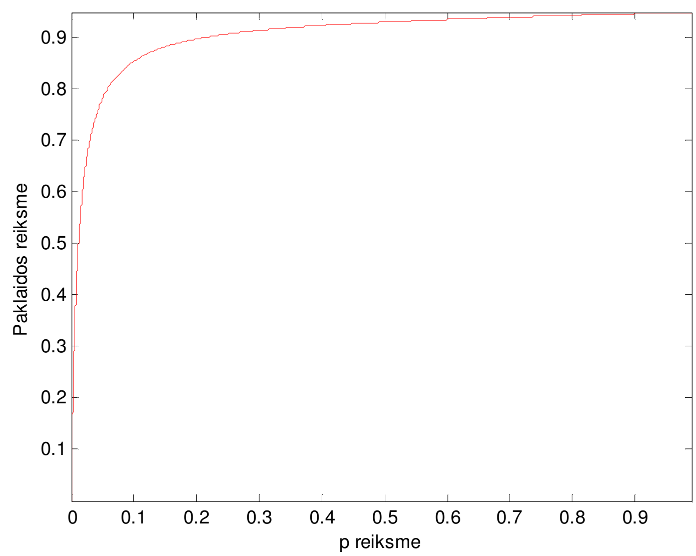


1.16 pav. Paklaidos $\Delta_{2_2}(x, p)$ priklausomybė nuo x, kai $p = 0.5$.

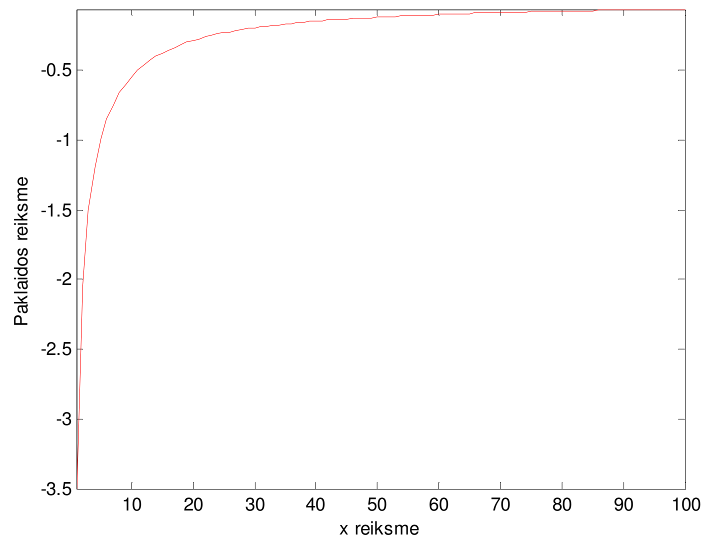
$k = 2$ pozicinės statistikos, kai $\alpha = 1$, atveju paklaidų grafikai.



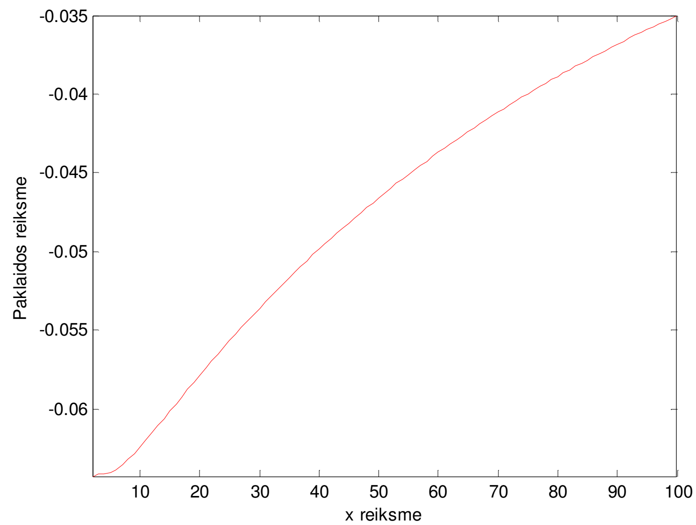
1.17 pav. Paklaidos $\Delta_{2_1}(x, p)$ priklausomybė nuo *p*, kai $x = 2$



1.18 pav. Paklaidos $\Delta_{2_1}(x, p)$ priklausomybė nuo *p*, kai $x = 100$



1.19 pav. Paklaidos $\Delta_{2_1}(x, p)$ priklausomybė nuo x, kai $p = 0.5$



1.20 pav. Paklaidos $\Delta_{2_1}(x, p)$ priklausomybė nuo x, kai $p = 0.01$

2 PRIEDAS

Programos tekstas

```
with(Maplets[Elements]):
maplet := Maplet('onstartup' = 'A1',
   Window['W1']('title' = "Paklaidos brai�ymas", 'layout' = 'BL1'),
   BoxLayout['BL1'](
      BoxColumn(
         BoxRow(Label("�ia programele sukure Ieva Lengvinaite 2006 metais, vadovas
prof. A. Aksomaitis.

Programa braizo Pareto skirstinio (F(x)=1-1/x^alpha)
paklaidu grafikus maksimumams, minimumams bei k=2 pozicinei statistikai.

Pasirinkite kuri grafika pageidaujate pamatyti:

", 'font'=Font("Ieva", italic, bold, 17))),
         BoxRow(
            Button("
 Maksimumams
    ", 'font'=Font("Maksimumams", bold, 14), Evaluate('function' =
'Maplets[Display](maplet2)')),
            Button("
  Minimumams
", 'font'=Font("Minimumams", bold, 14), Evaluate('function' =
'Maplets[Display](maplet5)')),
            Button("
k=2 pozicinei statistikai
", 'font'=Font("statistikai", bold, 14), Evaluate('function' =
'Maplets[Display](maplet8)'))),

         BoxRow(

            Button("  Baigti  ",'font'=Font("Baigti", bold, 14), Shutdown())
         )
      )
   ),
   Action['A1'](RunWindow('W1'))
):

maplet2:= Maplet('onstartup' = 'A2',
   Window['W2']('title' = "Paklaidu priklausomybes", 'layout' = 'BL10'),
   BoxLayout['BL10'](
      BoxColumn(
         BoxRow(Label("Pasirinkite paklaidos priklausomybe nuo:",
'font'=Font("paklaidos", bold, 14))),
         BoxRow(
            Button("  p  ", 'font'=Font("p", italic, bold, 13),
Evaluate('function' = 'Maplets[Display](maplet3)')),
            Button("  x  ", 'font'=Font("x", italic, bold, 13), 'onclick' =
CloseWindow('W2'), Evaluate('function' = 'Maplets[Display](maplet4)'))
         ),
         BoxRow(
            Button("  Baigti  ",'font'=Font("Baigti", bold, 12), Shutdown())
         )
      )
   ),
Action['A2'](RunWindow('W2'))
  ):
```

```
maplet3:= Maplet(Window['W3']('title'="Paklaidos priklausomybe nuo p", [
      [Label("x reiksme (x >= 1)", 'font'=Font("x", italic, 14)),
      TextField['xx']()],
      [Label("p reiksme (0 < p < 1)", 'font'=Font("p", italic, 14)),
      TextField['pp']()],
      [Label("alfa reiksme", 'font'=Font("alfa", italic, 14)),
TextField['alfa']()],
       Plotter['PL1'](),
      [Button("Braizyti grafika", 'enabled'='true', Evaluate('PL1' = 'plot([-
p/((1+xx^alfa)*(1+xx^alfa-p))], p=0..pp, title="Paklaidos priklausomybe nuo
p")')),
      Button("Baigti", Shutdown()),
      Button("Kitas pasirinkimas", Shutdown())
   ]])
):
maplet4 := Maplet(
   Window['W4']('title'="Paklaidos priklausomybe nuo x", [
      [Label("x intervalo pradzia (x >= 1)", 'font'=Font("x", italic, 14)),
      TextField['xx1']()],
      [Label("x intervalo pabaiga (x > x intervalo pradzia)", 'font'=Font("x",
italic, 14)),
      TextField['xx2']()],
      [Label("p reiksme (0 < p < 1)", 'font'=Font("p", italic, 14)),
TextField['pp']()],
      [Label("alfa reiksme", 'font'=Font("alfa", italic, 14)),
TextField['alfa']()],

       Plotter['PL1'](),
      [Button("Braizyti grafika", 'enabled'='true', Evaluate('PL1' = 'plot([-
pp/((1+x^alfa)*(1+x^alfa-pp))], x=xx1..xx2, title="Paklaidos priklausomybe nuo
x")')),
      Button("Baigti", Shutdown()),
      Button("Kitas pasirinkimas", Shutdown())
   ]])
):



maplet5:= Maplet('onstartup' = 'A3',
   Window['W5']('title' = "Paklaidos priklausomybes", 'layout' = 'BL11'),
   BoxLayout['BL11'](
      BoxColumn(
         BoxRow(Label("Pasirinkite paklaidos priklausomybe nuo:",
'font'=Font("paklaidos", bold, 14))),
         BoxRow(
            Button("p", Evaluate('function' = 'Maplets[Display](maplet6)')),
            Button("x", Evaluate('function' = 'Maplets[Display](maplet7)'))
         ),
         BoxRow(
            Button("Baigti", Shutdown())
         )
      )
   ),
Action['A3'](RunWindow('W5'))
  ):

maplet6:= Maplet(Window['W6']('title'="Paklaidos priklausomybe nuo p", [
      [Label("x reiksme (x >= 1)", 'font'=Font("x", italic, 14)),
TextField['xx']()],
      [Label("p reiksme (0 < p < 1)", 'font'=Font("p", italic, 14)),
TextField['pp']()],

       Plotter['PL1'](),
```

```
      [Button("Braizyti grafika", 'enabled'='true', Evaluate('PL1' =
'plot([(1/(1+xx))-(1/(1+xx+xx^2 * p+xx^3 * p^2))], p=0..pp, title="Paklaidos
priklausomybe nuo p")')),
      Button("Baigti", Shutdown()),
      Button("Kitas pasirinkimas", Shutdown())
   ]])
):
maplet7 := Maplet(
   Window['W7']('title'="Paklaidos priklausomybe nuo x", [
      [Label("x intervalo pradzia (x >= 1)", 'font'=Font("x", italic, 13)),
TextField['xx1']()],
      [Label("x intervalo pabaiga (x > x intervalo pradzia)", 'font'=Font("x",
italic, 13)), TextField['xx2']()],
      [Label("p reiksme (0 < p < 1)", 'font'=Font("p", italic, 13)),
TextField['pp']()],

       Plotter['PL1'](),
      [Button("Braizyti grafika", 'enabled'='true', Evaluate('PL1' =
'plot([(1/(1+x))-(1/(1+x+x^2 * pp+x^3 * pp^2))], x=xx1..xx2, title="Paklaidos
priklausomybe nuo x")')),
      Button("Baigti", Shutdown()),
      Button("Kitas pasirinkimas", Shutdown())
   ]])
):


maplet8:= Maplet('onstartup' = 'A3',
   Window['W8']('title' = "Paklaidos priklausomybes", 'layout' = 'BL12'),
   BoxLayout['BL12'](
      BoxColumn(
         BoxRow(Label("Pasirinkite paklaidos priklausomybe nuo:",
'font'=Font("paklaidos", bold, 14))),
         BoxRow(
            Button("p", Evaluate('function' = 'Maplets[Display](maplet9)')),
            Button("x", Evaluate('function' = 'Maplets[Display](maplet10)'))
         ),
         BoxRow(
            Button("Baigti", Shutdown())
         )
      )
   ),
Action['A3'](RunWindow('W8'))
  ):

maplet9:= Maplet(Window['W3']('title'="Paklaidos priklausomybe nuo p", [
      [Label("x reiksme (x >= 1)", 'font'=Font("x", italic, 14)),
TextField['xx']()],
      [Label("p reiksme (0 < p < 1)", 'font'=Font("p", italic, 14)),
TextField['pp']()],

       Plotter['PL1'](),
      [Button("Braizyti grafika", 'enabled'='true', Evaluate('PL1' =
'plot([(2*p^2*xx^2+p^2*xx-p*xx^2)/((xx+1)^2*(p*xx+1))], p=0..pp, title="Paklaidos
priklausomybe nuo p")')),
      Button("Baigti", Shutdown()),
      Button("Kitas pasirinkimas", Shutdown())
   ]])
):
maplet10 := Maplet(
   Window['W4']('title'="Paklaidos priklausomybe nuo x", [
      [Label ("x intervalo pradzia (x >= 1)", 'font'=Font("x", italic, 14)),
TextField['xx1']()],
      [Label("x intervalo pabaiga (x > x intervalo pradzia)", 'font'=Font("x",
italic, 14)), TextField['xx2']()],
```

```
      [Label("p reiksme (0 < p < 1)", 'font'=Font("p", italic, 14)),
TextField['pp']()],

       Plotter['PL1'](),
      [Button("Braizyti grafika", 'enabled'='true', Evaluate('PL1' =
'plot([(2*pp^2*x^2+pp^2*x-pp*x^2)/((x+1)^2*(pp*x+1))], x=xx1..xx2,
title="Paklaidos priklausomybe nuo x")')),
      Button("Baigti", Shutdown()),
      Button("Kitas pasirinkimas", Shutdown())
   ]])
):

Maplets[Display](maplet);
```