



KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

Asta Šliupaitė

ELEKTROKARDIOGRAMOS PARAMETRŲ
KOMPLEKSIŠKUMO TYRIMAS

Magistro darbas

Vadovai
prof. Z. Navickas
prof. A. Vainoras

KAUNAS, 2008



KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

TVIRTINU
Katedros vedėjas
doc. N.Listopadskis
2008 06 06

ELEKTROKARDIOGRAMOS PARAMETRŲ
KOMPLEKSIŠKUMO TYRIMAS

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

Vadovai

prof. dr. Z. Navickas

prof. habil. dr. A. Vainoras

2008 06 04

Recenzentas

prof. J. Sapagovas

2008 06 04

Atliko

FMMM-6 gr. stud.

2008 06 04

A. Šliupaitė

KAUNAS, 2008

KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

Pirmininkas: Leonas Saulis, profesorius (VGTU)

Sekretorius: Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)

Nariai: Algimantas Jonas Aksomaitis, profesorius (KTU)

Vytautas Janilionis, docentas (KTU)

Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU)

Rimantas Rudzkis, habil. dr., valdybos pirmininko pavaduotojas (DnB NORD Bankas)

Zenonas Navickas, profesorius (KTU)

Arūnas Barauskas, dr., vice-prezidentas projektams (UAB „Baltic Amadeus“)

Šliupaitė A. The analysis of complexity of electrocardiogram parameters: Master's work in applied mathematics / supervisors prof. Z. Navickas, prof. A. Vainoras; Department of Applied mathematics, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2008. – 57 p.

SUMMARY

Medical data are often analysed using statistical methods. However the aim of this work is to analyse the complexity of some electrocardiogram (ECG) parameters using algebraic mathematical methods, because if we consider a human organism a complex and individual system, the former methods are not adequate. Mainly, we analyse two parameters of ECG: the complexity of R wave amplitude and duration between R waves.

The method of Hankel matrices, in which functions of the finite h -rank are written as linear combinations of exponential functions, is used. Firstly, we interpolate the data parameters with splines of third range in order to choose h step without restrictions in the algorithm. Then the received function is approximated with exponential functions, which vary in separate intervals of data series. The number of exponents in the expression specifies the complexity of the given data in the particular interval. Thus we can compare the alternation of complexity in the whole register of ECG.

In this work the data of ECG, which is recorded, when a person is under normal conditions, is given physical charge (veloergometer) and in recovery period, are analysed. Different tendencies of complexity changes, which are observed in these periods, give us important information about the process of heart activity as the complexity mainly shows the factors (combinations of active muscles) that empower heart work.

The obtained results show, that for a data set of durations between R waves, when electrocardiogram is recorded under conditions of constantly increasing physical charge, complexity is lesser than in the recovery period. We also can state, that the complexity fluctuates in recovery period much more intensely, while under physical charge it is more stable. The variation of complexity of AR amplitudes doesn't have such obvious tendencies.

TURINYS

IVADAS.....	8
1. BENDROJI DALIS.....	9
1.1 MEDICININĖ DALIS	9
1.1.1 Elektrokardiograma, jos kilmė ir registracija.....	9
1.1.2 Veloergometrinio mėginio metu vertinami parametrai.....	12
1.1 MATEMATINĖ DALIS	13
1.2.1 Funkcijų interpoliavimas.....	14
1.2.2. Funkcijos reiškimas eksponentinių funkcijų suma	18
1.2.3. Teorinės išraiškos ir skaičiavimo algoritmas	22
1.2.4. Skaičiavimo pavyzdžiai	25
2. TIRIAMOJI DALIS	26
2.1 Parametrų kompleksiskumo tyrimas.....	26
2.2. Funkcijos reiškimas baigtine eksponenčių suma	33
2.3 Kompleksiskumo integralinis vidurkinimas	39
3. PROGRAMINĖ REALIZACIJA IR INSTRUKCIJA VARTOTOJUI.....	40
IŠVADOS	42
PADĖKA.....	43
LITERATŪRA.....	44
1 Priedas RR, AR ir ŠSD kompleksiskumo vertinimo pavyzdžiai	46
2 Priedas Programų tekstų ištraukos	49
3 Priedas Straipsnis: Kai kurių EKG parametrų tyrimas taikant Henkelio matricas	51
4 Priedas Straipsnis: Elektrokardiogramos parametrų kompleksiskumo tyrimas.....	55

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

1.1 pav. Elektrokardiograma	9
1.2 pav. Sujaudinimo plitimas širdyje	10
1.3 pav. EKG bangų priklausomybė nuo sujaudinimo plitimo širdyje	10
1.4 pav. Einthoveno trikampis	11
1.5 pav. Unipolinės galūnių derivacijos remiantis Goldbergeriu	12
1.6 pav. EKG užrašymas pagal Wilsoną	12
1.7 pav. Tiesinio interpoliavimo polinomo grafiko pavyzdys.....	17
1.8 pav. Funkcijos reiškimo eksponenčių suma algoritmo schema.....	24
1.9 pav. Funkcijos aproksimavimas eksponenčių suma bei paklaidos.....	26
2.1 pav. Determinantų reikšmių konvergavimas į nulį skirtinguose segmentuose	28
2.2 pav. <i>H rango</i> priklausomybė nuo žingsnio <i>h</i> dydžio	29
2.3 pav. RR parametras(<i>raudona</i>) ir jo kompleksiskumas(<i>mėlyna</i>).....	30
2.4 pav. ŠSD/100(<i>raudona</i>) ir jo kompleksiskumas(<i>mėlyna</i>)	31
2.5 pav. AR parametras(<i>raudona</i>) ir jo kompleksiskumas(<i>mėlyna</i>).....	32
2.6 pav. Funkcijos aproksimavimas eksponenčių suma (<i>1 intervalas</i>)	37
2.7 pav. Aboliutinių paklaidų grafikas (<i>1 intervalas</i>).....	37
2.8 pav. Funkcijos aproksimavimas eksponenčių suma (<i>2 intervalas</i>)	38
2.9 pav. Aboliutinių paklaidų grafikas (<i>2 intervalas</i>).....	39
2.10 pav. Kompleksiskumo integralinis vidurkinimas	40

LENTELIŲ SĄRAŠAS

2.1 lentelė Determinantų reikšmių konvergavimas prie nulio.....	28
2.2 lentelė Λ reikšmės	33
2.3 lentelė λ reikšmės.....	34
2.4 lentelė μ reikšmės	34

IVADAS

Medicinoje duomenys dažniausiai yra analizuojami statistiniais metodais. Tačiau šiame darbe elektrokardiogramos (EKG) parametrus tirsime naudodamiesi algebriniais metodais, nes į kiekvieno žmogaus organizmą žvelgiant kaip į sudėtingą ir unikalią kompleksinę sistemą, statistinio tyrimo nepakanka.

Egzistuoja specialus algoritmas, leidžiantis funkciją $f(x)$, aprašytą Teiloro eilute arba jos reikšmėmis, išreikšti baigtine eksponenčių suma [7]:

$$f(x) = \sum_{k=1}^m \mu_k e^{\lambda_k x} .$$

Šio darbo tikslas – baigtine eksponenčių suma aproksimuoti EKG parametrų funkcijos dalis, kurios turi baigtinį kompleksiskumą, bei tirti parametrų kompleksiskumo pokyčius ilgame EKG įrašė. Skaičiavimams buvo naudota *Maple* matematinė programinė įranga.

Pirmasis skyrius – bendroji dalis yra suskirstytas į medicininę ir matematinę dalis. Medicininėje dalyje pateikiama trumpa bendra informacija apie elektrokardiogramą ir jos prigimtį bei aptariamas veloergometrinis mėginys. Matematinėje dalyje pateikiama funkcijų interpoliavimo teorija bei funkcijų reiškinio eksponenčių suma algoritmas. Daugiau teorijos apie funkcijų reiškinį baigtine eksponenčių suma bei įvairių skaičiavimo pavyzdžių galima rasti prof. Z. Navicko ir L. Bikulčienės straipsniuose [3], [4], [5], [6]. Antrajame skyriuje – tiriamojoje dalyje aprašomas minėtos metodikos taikymas tiriant elektrokardiogramos parametrų funkcijos kompleksiskumą bei jos dalių aproksimavimą, pateikiami eksperimentų rezultatai ir išvados.

Šio darbo tema buvo skaityti pranešimai tarptautinėje konferencijoje „Biomedicininė inžinerija“ (2007 m.), taip pat konferencijoje „Matematika ir matematikos dėstymas – 2008“. Konferencijų leidiniuose išspausdinti straipsniai pateikti prieduose.

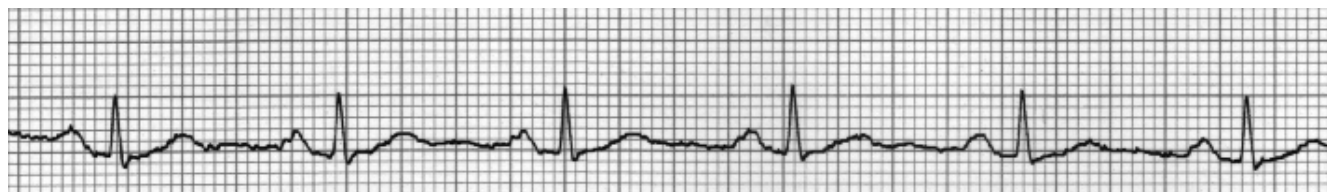
1. BENDROJI DALIS

1.1 MEDICININĖ DALIS

Šiame skyriuje pateikiama trumpa bendra informacija apie elektrokardiogramą, jos prigimtį bei registravimo technologijas. Taip pat aptariama veloergometrija, kuri naudojama kaip funkcinis mėginys organizmo adaptyvumui vertinti.

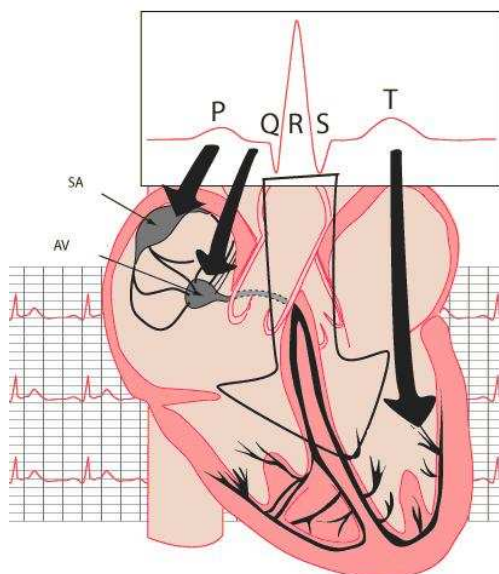
1.1.1 ELEKTROKARDIOGRAMA, JOS KILMĖ IR REGISTRACIJA

Elektrokardiograma (EKG) registruoja širdies elektrinius reiškinius, kurie per skystą ir laidžią vidinę terpę, silpnėdami išplinta į kūno paviršių (1.1 pav.). Signalai registruojami kūno paviršiuje naudojami diagnozuoti širdies būklę. Kiekviena ląstelė širdyje yra dipolio vektorius, turintis kryptį ir dydį. Kiekvienu laiko momentu visų širdies skaidulų vektoriai sumuojasi ir sudaro suminį dipolio vektorių [1].



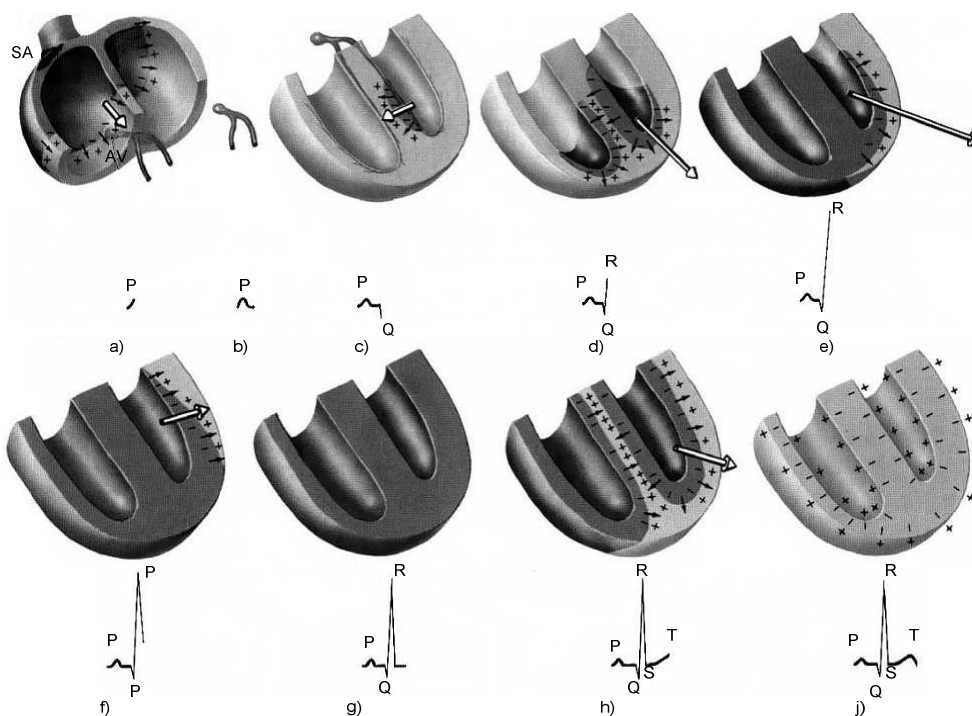
1.1 pav. Elektrokardiograma

Širdžiai kaip ir siurblio funkcionavimui svarbiausia, kad skirtingos dalys susitrauktų laiku ir nuosekliai. Šis nuoseklumas yra kontroliuojamas elektrinių signalų. Signalas prasideda širdies dalyje, atsakingoje už širdies darbo ritmą, vadinamu sinusiniu ar sinoatrialiniu mazgu (SA), besirandančiu prieširdyje (1.2 pav.). SA mazgas sudarytas iš stimuliuojančių skaidulų, kurių dažnis yra reguliuojamas autonominės nervų sistemos. Širdies raumuo yra sudarytas iš elektriškai viena su kita sujungtų skaidulų. Širdies skaidulų audinys tarp skilvelio ir prieširdžio sulaiko visas elektrines komunikacijas, išskyrus atrioventrikulinį (AV) mazgą, kur signalai yra uždelsiami [1].



1.2 pav. Sujaudinimo plitimas širdyje

Kai abu prieširdžiai būna sujaudinti, tarp jų atsiranda potencialų skirtumas, o suminis vektorius tampa lygus nuliui. P banga registruoja sujaudinimo plitimą prieširdžiais (1.3 pav., a).

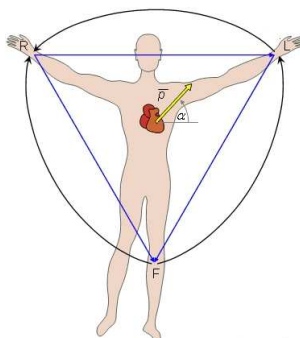


1.3 pav. EKG bangų priklausomybė nuo sujaudinimo plitimo širdyje

Elektrinis sujaudinimas iš prieširdžių į skilvelius gali plisti tik per atrioventrikulinį mazgą (1.3 pav., b), nes kitas prieširdžių ir skilvelių dalis skiria nedirgus jungiamasis audinys. PQ segmento metu elektrinis sujaudinimas plinta atrioventrikuliniu mazgu ir atrioventrikuliniu pluoštu (1.3 pav., c). Skilvelių miokardo Q banga parodo skilvelių miokardo sujaudinimo pradžia. Susidaręs suminis vektorius būna mažas ir dažniausiai nukreiptas link skilvelių pagrindo. Bangai plintant skilvelių

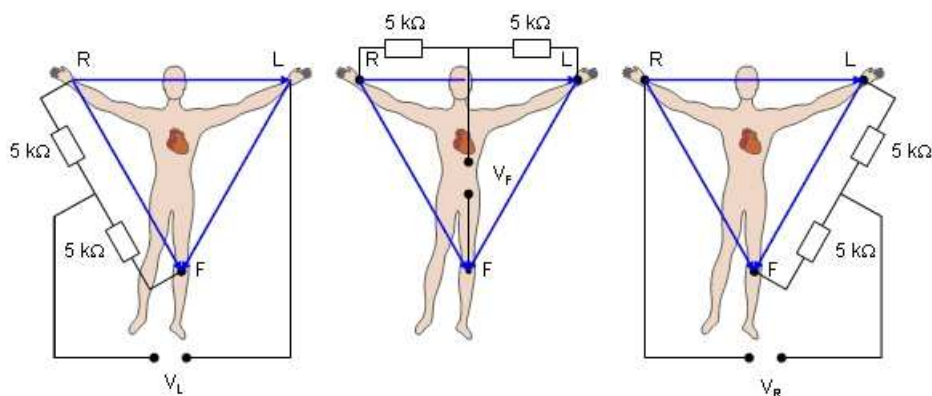
miokardu ir didėjant miokardo masei, integralinis vektorius didėja – registruojama R banga, kuri charakterizuoja sujaudinimo plitimo kryptį skilveliuose (1.3 pav., d). Skilvelių sujaudinimas plinta iš vidaus į išorę (1.3 pav., e, f). Vėliausiai sujaudinami subepikardiniai sluoksniai kairiojo skilvelio pagrinde ir registruojama S banga (1.3 pav., g). ST segmento atveju abu prieširdžiai yra sujaudinti, o suminis vektorius tampa lygus nuliui. Paskutinė T banga registruoja skilvelių miokardo repoliarizaciją (1.3 pav., h) [1].

Elektrokardiogramoje yra taikomos bipolinės ir unipolinės EKG derivacijos. Užrašant bipoliniu būdu, matuojamas potencialų skirtumas tarp dviejų aktyvių elektrodų. Unipolinio užrašymo metu naudojamas vienas bendras neaktyvus elektrodas, kurio atžvilgiu matuojamas aktyvaus elektrodo potencialas. Pagal elektrodų dėjimo vietas yra skiriamos galūnių ir krūtinės derivacijos. Galūnių derivacijos yra skirstomos į bipolines (I, II, III remiantis Einthovenu) (1.4 pav.) ir unipolines (aVR, aVL, aVF remiantis Goldbergeriu) (1.5 pav.). Dažniausiai, kaip ir šio tyrimo metu, taikomas EKG užrašymas remiantis Einthovenu. Šio užrašymo metu aktyvieji elektrodai tvirtinami prie dešinės rankos, kairės rankos ir kairės kojos, o prie dešinės kojos prijungiamas įžeminimo elektrodas. Užrašymo ašys sudaro Einthoveno trikampio kraštines, kuriose projektuojasi suminis vektorius, susidarantis jaudinimui plintant širdyje.



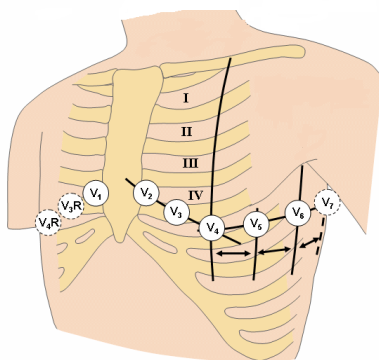
1.4 pav. Einthoveno trikampis

Visų derivacijų užrašomų EKG bangų amplitudė priklauso nuo suminio vektoriaus projekcijos derivacijos ašyje. Jaudinimui plintant širdies viršūnės link, susidareš maksimalus suminis vektorius projektuojasi derivacijų ašyse skirtingai.



1.5 pav. Unipolinės galūnių derivacijos remiantis Goldbergeriu

Užrašant derivacijas remiantis Goldbergeriu, dviejų galūnių elektrodai sujungiami į indiferentinį elektrodą, kurio atžvilgiu matuojamas potencialų skirtumas aktyviuoju elektrodu nuo trečios galūnės (1.5 pav.). Šiuo metodu užrašomi didesnės amplitudės potencialai, negu indiferentinio elektrodo atžvilgiu. Derivacijos aVR aktyvusis elektrodas prijungiamas prie dešinės, derivacijos aVL – prie kairės rankos ir derivacijos aVF – prie kairės kojos (1.5 pav.).



1.6 pav. EKG užrašymas pagal Wilsoną

Unipolinės krūtinės derivacijos užrašomos remiantis Wilsonu. ($V_1 - V_6$) Jomis užrašomi suminio vektoriaus kitimai tik horizontalioje plokštumoje. Užrašant remiantis Wilsonu, trijų galūnių elektrodai sujungiami į indiferentinį elektrodą, o aktyvieji elektrodai dedami prie krūtinės ląstos sienelės tam tikrų taškų (1.6 pav.). Remiantis susitarimu, QRS komplekso teigiama banga žymima R, o neigiama banga prieš R bangą Q, po R bangos – S banga.

1.1.2 VELOERGOMETRINIO MĖGINIO METU VERTINAMI PARAMETRAI

Organizmo adaptacijos prie fizinių krūvių ypatumai ir galimybės bei adaptacijos procesų eigas operatyvi kontrolė yra aktualus sporto medicinos, klinikinės medicinos ir fiziologijos uždavinys. Šio uždavinio sprendimas neatskiriama susijęs su organizmo fiziologinės būsenos vertinimu (14). Šiuo

metu plečiasi žmogaus organizmo kaip adaptyvios kompleksinės dinaminės sistemos samprata. Tokios sudėtingos sistemos funkcijų vertinimui reikalinga ir atitinkama diagnostinė sistema. Sportininko organizmo funkcionalumui, prisitaikymo galimybėms, adaptyvumui vertinti gana plačiai naudojami funkciniai mėginiai, kada organizmui suteikiamas tam tikras poveikis ir pagal jo atsaką bei reakciją sprendžiama apie organizmo būseną. Sporto medicinos, klinikinėje praktikoje vienu populiariausių tokio tipo tyrimų yra veloergometrija (2). Pastaroji naudojama kaip poveikio priemonė tam tikram, lengvai standartizuojamam, fiziniam aktyvumui realizuoti. Tiriamojo asmens reakcija į veloergometrinių krūvių sudėtinga, kompleksinė, daugelio sistemų funkcijas apimanti reakcija – tai ir raumenų veikla, būtina užduotam pajėgumui pasiekti, reguliacinių sistemų pokytis priderinant širdies ir kraujagyslių sistemą prie raumenų vykdomos funkcijos bei pačios širdies ir kraujagyslių sistemos pokytis pakankamai raumenų ir kitų sistemų hemodinamikai palaikyti. Aptarsime pagrindinius parametrus, gaunamus atlikus veloergometrinių mėginių:

Iš elektrokardiogramos gaunamas širdies susitraukimų dažnis ($\check{S}SD$). Parametro kitimo ribos 20 – 250 kartų per minutę. Fizinio krūvio metu $\check{S}SD$ didėja todėl, kad intensyvintų širdies darbą, nes būtina patenkinti dirbančių raumenų poreikius. Po fizinio krūvio $\check{S}SD$ ne iš karto grįžta į pradinį lygį. Atlikus mažo intensyvumo fizinį krūvį, $\check{S}SD$ greitai mažėja iki lygio, buvusio ramybės būsenoje. Atliekant didelio intensyvumo fizinius pratimus, $\check{S}SD$ pokyčius galima suskirstyti į dvi fazes: greito eksponentiško mažėjimo ir lėto mažėjimo iki lygio, buvusio ramybės būsenoje. Manoma, kad ilgalaikių treniruočių metu $\check{S}SD$ mažėja dėl kelių veiksnių. Tai priklauso nuo pratimų intensyvumo, jų apimties, trukmės, pertraukų tarp pratimų bei pratime dalyvaujančių raumenų kiekio. Kol kas mažai išnagrinėti $\check{S}SD$ pokyčių fiziologiniai mechanizmai, taikant ilgalaikes fizines treniruotes.

Dažnai veloergometrinių mėginių metu taip pat vertinami elektrokardiogramos EKG ciklų R dantelio amplitudės (AR), intervalai tarp jų (RR).

1.1 MATEMATINĖ DALIS

Daugelio tolydžiųjų funkcijų reiškimas specialia eksponentinių sumų forma populiarus tiek matematikoje, tiek jos taikymuose: virpesių mechanikoje, medicinoje ir kt. Ši forma išreiškia paprastųjų diferencialinių lygčių su pastoviais koeficientais sprendinius. Šiame skyriuje aptariamas funkcijų reiškimas eksponentinių funkcijų suma bei prisimenamas matematikos teorijoje gerai žinomas funkcijų interpoliavimas.

1.2.1 FUNKCIJŲ INTERPOLIAVIMAS

Interpoliavimo sąvoka. Gamtos moksluose ir technikoje argumentas ir funkcijos reikšmė nustatoma stebėjimais. Stebėtojas tam tikrais laiko momentais išmatuoja ir užrašo argumento x_i ir funkcijos $y = f(x_i)$ reikšmes. Duomenis surašomi į lentelę, kuria išreiškiama funkcijos priklausomybė nuo argumento atskiruose taškuose. Gautoji lentelė naudojama teoriniam ar praktiniam reiškinio tyrimui (10,11).

Apibrėžimas. Funkcijos $f(x)$ duotos reikšmių lentelė, išreiškimas analizinė formule vadinamas interpoliavimu, jei reikšmės, gautos pagal formulę taškuose x_i , sutampa su funkcijos reikšmėmis lentelėje. Apskritai interpoliavimo sąvoka yra platesnė.

Tarkime duota funkcijos $y = f(x)$ reikšmių lentelė (x_i, y_i) ; čia $i = 0, 1, \dots, n$, y_i reikšmės yra tikslios arba paklaidos tokios mažos, kad praktiškai jų galima nepaisyti. Reikia rasti aproksimuojančią funkciją $y = F(x)$, priklausančią funkcijų klasei K ir tenkinančią sąlygas

$$F(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (1.1)$$

Šios sąlygos vadinamos Lagranžo interpoliavimo sąlygomis, o pati funkcija $y = F(x)$ – Lagranžo interpoliacinė funkcija, arba tiesiog interpoliacinė funkcija.

Kaip matyti iš interpoliavimo uždavinio formuluotės, keičiant aproksimuojančiųjų funkcijų klasę K bei interpoliavimo sąlygas galima rasti įvairias interpoliacines išraiškas. Istoriskai pirmoji aproksimuojančiųjų funkcijų klasė buvo n – tosios eilės polinomų klasė. Pastaruoju metu plačiai naudojama splainų klasė – taip dažnai sumažinamas kompiuterinio skaičiavimo laikas (10).

Nors interpoliacinis polinomas yra vienintelis, tačiau istoriskai susiformavo nemažai jo išraiškų: Lagranžo, Aitkeno, Niutono, Gauso ir kt. Skaičiuojant kompiuteriais populiariausia yra Lagranžo interpoliacinė išraiška (x). Ją aptarsime plačiau.

Lagranžo interpoliacinė išraiška. Ieškosime n – tosios eilės daugianario $F(x)$ tenkinančio Lagranžo interpoliavimo sąlygas – (x.x formulė). Nagrinėkime polinomus:

$$F_i(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}, \quad i = \overline{0, n}.$$

$$\text{Jie turi tokią savybę: } F_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{kai } i = j, \\ 0, & \text{kai } i \neq j; \end{cases} \quad j \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Pasinaudodami polinomis $F_i(x)$, galime iš karto parašyti interpoliacinio polinomo $F(x)$ išraišką:

$$F(x) = \sum_{i=0}^n F_i(x) y_i. \quad (1.2)$$

Šis polinomas interpoliacinis, nes jis yra n – tosios eilės polinomas ir tenkina Lagranžo interpoliavimo sąlygas – (x.x) formulė – interpoliacinio polinomo išraiška vadinama Lagranžo interpoliacine išraiška, todėl literatūroje simbolis $F(x)$ keičiamas $L_n(x)$.

Jei atstumai tarp interpoliavimo taškų vienodi, t.y. $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} = h$, tai Lagranžo interpoliacinį polinomą galima užrašyti kitokiu būdu. Šiuo atveju $x_k = x_0 + kh$. Pažymėję $x = x_0 + th$, $0 \leq t \leq n$, gauname

$$x - x_i = (t - i)h, \quad x_k - x_i = (k - i)h.$$

Vadinasi

$$F_k(x) = F(x_0 + th) = (-1)^{n-k} \frac{t(t-1)\dots(t-k+1)(t-k-1)\dots(t-n)}{k!(n-k)!} = (-1)^{n+k} \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{n!(t-k)} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Pažymėję $C_n^k := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ir įrašę $F_k(x_0 + th)$ išraišką į (x.x) formulę, gauname

$$L_n(x) = L_n(x_0 + th) = (-1)^n \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{n!} \cdot \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \frac{f(x_0 + kh)}{t-k}.$$

Niutono interpoliacinė išraiška. Pažymėkime

$$\omega_n = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n) \quad (1.3)$$

$$L_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)\omega_0(x) + f(x_0, x_1, x_2)\omega_1(x) + \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n)\omega_{n-1}(x).$$

Šis polinomas vadinamas Niutono interpoliacine išraiška.

Tiesinis interpoliavimas. Tiesinio interpoliavimo formulė netiksli, tačiau dažnai taikoma praktikoje, kai tikslios interpoliacinės išraiškos yra nereikalingos, sunkiai apskaičiuojamos ar tiesiog

nėra galimybių praktiškai patikrinti, kokios paklaidos gaunamos tarpiniuose taškuose, naudojant vieną ar kitą interpoliacinę išraišką (10). Šio darbo programinėje įrangoje tiesinis interpoliavimas taikomas tais atvejais, kai tikslios interpoliacinės išraiškos nėra reikalingos tolimesniems skaičiavimams.

Sakykime turime taškus x_0, x_1, \dots, x_n ir funkcijos $y=f(x)$ reikšmes $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$. Iš visų interpoliacinių polinomų paprasčiausias yra pirmojo laipsnio interpoliacinis polinomas. Jį apskaičiuojame, naudodamiesi dviem argumentu ir funkcijos reikšmėmis.

Užrašykime Lagranžo interpoliacinį polinomą:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0) \dots (x-x_{k-1})(x-x_{k+1}) \dots (x-x_n)}{(x_k-x_0) \dots (x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1}) \dots (x_k-x_n)} f(x_k).$$

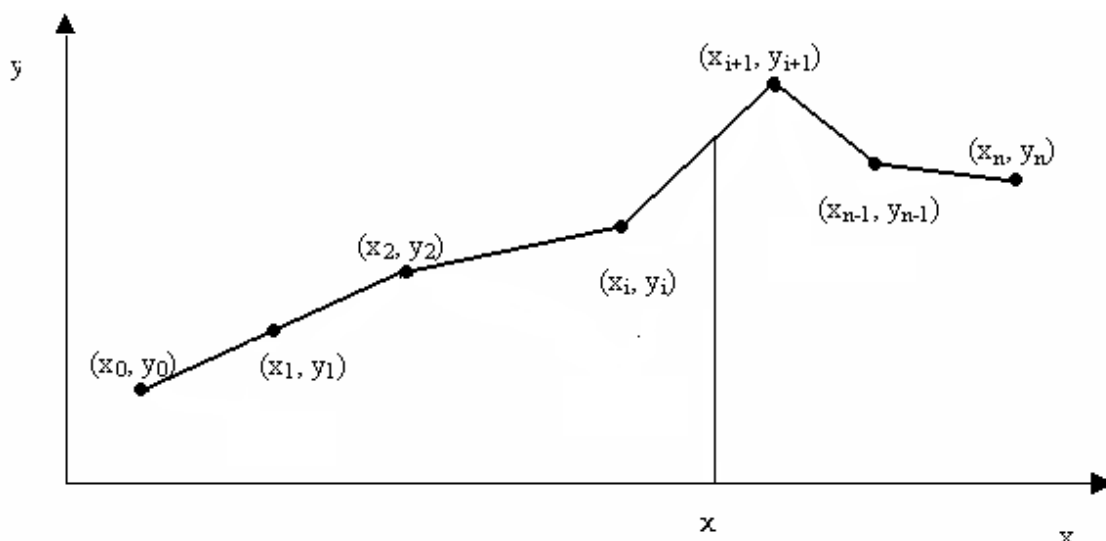
Jei $f(x_i)$ ir $f(x_{i+1})$ yra dvi minėtos funkcijos reikšmės, tai paėmę $n = 1$, gauname:

$$L_1(x) = \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} f(x_i) + \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i} (x-x_i).$$

Tokiu būdu, pirmojo laipsnio interpoliacinis polinomas funkcijai, kurios reikšmės žinomos $n+1$ taškuose x_0, x_1, \dots, x_n , išreiškiamas formule:

$$L_1(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i} (x-x_i), \quad \text{jei } x_i \leq x \leq x_{i+1} \text{ ir } (i=0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Interpoliavimas pirmojo laipsnio polinomais vadinamas tiesiniu interpoliavimu. Tiesinio interpoliavimo formulės (polinomo) grafikas yra laužtė (x.x pav), jungianti taškus $(x_i, f(x_i))$, ($i=0, 1, \dots, n$).



1.7 pav. Tiesinio interpoliavimo polinomo grafiko pavyzdys

Interpoliaciniai splainai. Splainas – tai tolydžioji iki p -tosios eilės išvestinės imtinai funkcija, sudaryta iš kurios nors funkcijos dalių. Istoriskai splainai pradėti konstruoti iš n -tosios eilės polinomo dalių, todėl čia, kalbėdami apie splainus laikysime juos funkcijomis, sudarytomis iš polinomo dalių. Splainas, sudarytas iš kubinio polinomo dalių, vadinamas kubiniu [10].

Splaino apibrėžimas. Tarkime, kad intervale $[a; b]$ duotas tinklelis $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Tada n -tosios eilės defekto k splainas yra funkcija $y = g(x)$, tenkinanti šias sąlygas:

- 1) kiekviename intervale $[x_{i-1}; x_i]$ ($i = \overline{1, N}$) $g(x)$ yra n -tojo laipsnio polinomas;
- 2) kiekviename vidiniame tinklelio taške x_i ($i = \overline{1, N-1}$) galioja lygybė

$$g^{(l)}(x_i - 0) = g^{(l)}(x_i + 0), \quad l = \overline{0, n-k}.$$

Splaino pavadinimas kilęs iš anglų kalbos žodžio *spline*, reiškiančio standžią liniuotę. Inžinieriai (jau ir Leonardas da Vinčis), norėdami per atokiau išsidėsčiusius taškus nubrėžti tolydžią kreivę, imdavo standžią, pavyzdžiui, plieninę, liniuotę ir išraitydavo ją taip, kad ji eitų per tuos taškus. Liniuotė įgaudavo kubinio splaino formą. Iš fizikos žinoma, kad liniuotės vidinė potencinė energija

$$\Phi(u) = \int_a^b (u''(x))^2 dx;$$

čia $u(x)$ – liniuotės formą apibūdinanti kreivė. Kaip 1957 m. įrodė Dž.K. Holidėjus, funkcionalas $\Phi(u)$ turi pačią mažiausią reikšmę, kai $u(x)$ yra kubinis splainas $g(x)$ su natūraliomis kraštinėmis sąlygomis, t.y. $g''(a) = g''(b) = 0$.

Literatūroje nurodomos keturios splainų užrašymo formos, iš kurių tik dvi naudojamos praktiniame skaičiavime:

- 1) dalimis polinominė forma, kai kiekviename intervale $[x_{i-1}; x_i]$ nurodoma polinomo išraiška;
- 2) tiesinio B splainų darinio forma [10].

Praktikoje dažniausiai naudojami kubiniai defekto 1 splainai, kurie dažnai vadinami tiesiog kubiniais splainais.

1.2.2. FUNKCIJOS REIŠKIMAS EKSPONENTINIŲ FUNKCIJŲ SUMA

Šiame skyrelyje pateikiamos sąvokos ir teoremos, leidžiančios nusakyti sąlygas, kai eilutė gali būti išreiškiama baigtine standartinių (eksponentinių ir trigonometrinių) funkcijų suma. Ši teorija buvo pateikta straipsnyje [7].

1 apibrėžimas. Skaičių rinkinį $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbf{C}$, kai $n \in \mathbf{N}$, vadinsime Van-der-Mondo rinkiniu (V -rinkinys), jeigu jis tenkina sąlygą $\lambda_k \neq \lambda_r$, kai $k \neq r$. Su kiekvienu V -rinkiniu galima sudaryti nelygų nuliui Van-der-Mondo determinantą $V_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$:

$$V_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) := \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - \lambda_1)(\lambda_n - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - \lambda_{n-1})$$

Pastebėsime, kad visuomet $V_1(\lambda_1) = 1$.

Tegul duota kompleksinių skaičių seka $(p_j; j \in \mathbf{Z})$. Tada su kiekvienu $m \in \mathbf{N}$ ir fiksuotu $j_0 \in \mathbf{Z}_0$ galime sudaryti Hankelio matricą $H_{j_0}^{(m)}$ bei išplėstinę matricą $\bar{H}_{j_0}^{(m)}(\rho)$:

$$H_{j_0}^{(m)} := \begin{vmatrix} p_{j_0} & p_{j_0+1} & \dots & p_{j_0+m-1} \\ p_{j_0+1} & p_{j_0+2} & \dots & p_{j_0+m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{j_0+m-1} & p_{j_0+m} & \dots & p_{j_0+2m-2} \end{vmatrix}, \quad \bar{H}_{j_0}^{(m)}(\rho) := \begin{vmatrix} p_{j_0} & p_{j_0+1} & \dots & p_{j_0+m} \\ p_{j_0+1} & p_{j_0+2} & \dots & p_{j_0+m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{j_0+m-1} & p_{j_0+m} & \dots & p_{j_0+2m-1} \\ 1 & \rho & \dots & \rho^m \end{vmatrix}.$$

2 apibrėžimas. Jeigu duotajai kompleksinių skaičių sekai $(p_j; j \in \mathbf{Z})$ egzistuoja toks r_0 , tenkinantis sąlygą $r_0 = \max_{\substack{m \in \mathbf{N} \\ j_0 \in \mathbf{Z}_0}} \text{rang } H_{j_0}^{(m)}$, tai sakysime, kad kompleksinių skaičių seka $(p_j; j \in \mathbf{Z})$ turi H -rangą r_0 . Tada naudosisimės tokiu žymėjimu $H\text{-rang}(p_j; j \in \mathbf{Z}) = r_0$.

Pateiksime keletą pavyzdžių.

1 pavyzdys. $H\text{-rang}(a_0 + jd; j \in \mathbf{Z}) = 2$, kai $d \neq 0$.

Iš tikrųjų duotajai sekai

$$\det H_j^{(1)} = |a_0 + dj| = a_0 + dj, \det H_j^{(2)} = \begin{vmatrix} a_0 + dj & a_0 + d(j+1) \\ a_0 + d(j+1) & a_0 + d(j+2) \end{vmatrix} = -d^2, \det H_j^{(m)} \equiv 0, \quad \text{kai}$$

$$m = 3, 4, \dots \text{ Taigi } r_0 = \max_{m,j} \text{rang } H_j^{(m)} = 2.$$

2 pavyzdys. $H - \text{rang}(j^2; j \in \mathbf{Z}) = 3.$

$$\text{Pastebėsime, kad } \det H_j^{(3)} = \begin{vmatrix} j^2 & (j+1)^2 & (j+2)^2 \\ (j+1)^2 & (j+2)^2 & (j+3)^2 \\ (j+2)^2 & (j+3)^2 & (j+4)^2 \end{vmatrix} = -8, \det H_j^{(m)} \equiv 0, \text{ kai } m = 4, 5, \dots$$

$$\text{Taigi } r_0 = \max_{m,j} \text{rang } H_j^{(m)} = 3.$$

3 pavyzdys. Analogiškai galime parodyti, kad

$$H - \text{rang}(a_l j^l + a_{l-1} j^{l-1} + \dots + a_1 j + a_0; j \in \mathbf{Z}) = l + 1, \text{ kai } a_l \neq 0, l \in \mathbf{N}.$$

Betarpiskai gauname, kad $H - \text{rang}(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots) = n$, kai $a_n \neq 0$.

Sutarsime laikyti, kad $H - \text{rang}(0, 0, \dots) = 0$.

Seka $(j!; j \in \mathbf{Z}_0)$ H-rango neturi, nes $\det H_m^{(j)} \neq 0$, su visais $m \in \mathbf{N}$ ir $j \in \mathbf{Z}_0$.

Betarpiskai iš H-rango apibrezimo išplaukia tokios išvados:

1 išvada. Tegul $q_j = p_{j+n}$, kai $n \in \mathbf{N}$ - fiksuotas ir, be to, $m_1 < m_2$. Tada

$$H - \text{rang}(p_j; j \in \mathbf{Z}_0) \geq H - \text{rang}(q_j; j \in \mathbf{Z}_0), \quad \text{rang } H_{j_0}^{(m_1)} \leq \text{rang } H_{j_0}^{(m_2)}.$$

2 išvada. Jeigu $H - \text{rang}(p_j; j \in \mathbf{Z}_0) = r_0$, tai $\det H_0^{(r_0)} \neq 0$, o $\det H_j^{(r_0+1+n)} \equiv 0$, kai $j, n \in \mathbf{Z}_0$.

Taigi

$$H - \text{rang}(p_j; j \in \mathbf{Z}_0) = \max_{m \in \mathbf{N}} \text{rang } H_0^{(m)} \quad (1.4)$$

3 išvada. Duotoji seka $(p_j; j \in \mathbf{Z}_0)$ turi H-rangą, tenkinantį atitiktį

$$H - \text{rang}(p_j; j \in \mathbf{Z}_0) = m, \quad m \in \mathbf{Z}_0 \text{ tada ir tik tada, kai egzistuoja tokios konstantos}$$

$A_0, A_1, \dots, A_{m-1} \in \mathbf{C}$, nepriklausančios nuo j ir tenkinančios sąlygą

$$A_0 p_j + A_1 p_{j+1} + \dots + A_{m-1} p_{j+m-1} = p_{j+m} \quad (1.5)$$

su visomis $j \in \mathbf{Z}_0$ reikšmėmis, ir, be to, (1.4) sąryšis yra negalimas su m' , kai $m' < m$.

4 išvada. Dvi kompleksinių skaičių sekos $(p_j; j \in \mathbf{Z}_0)$ ir $(q_j; j \in \mathbf{Z}_0)$, turinčios H-rangus, lygios tada ir tik tada, t.y. $p_j = q_j, j \in \mathbf{Z}_0$, kai $H - \text{rang}(p_j; j \in \mathbf{Z}_0) = H - \text{rang}(q_j; j \in \mathbf{Z}_0) = m$ ir $p_j = q_j$, kai $j = 0, 1, \dots, 2m - 1$.

Lema. Tegul duota seka $(p_j; j \in \mathbf{Z}_0)$, kai

$$p_j := \sum_{r=1}^m \mu_r \lambda_r^j, \text{ o } \lambda_1, \dots, \lambda_m \quad (1.6)$$

yra V -rinkinys.

$$\text{Tada } \det H_j^{(m)} = (\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_m) (\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_m)^j V_m^2(\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_m), \quad (1.7)$$

$$\det \bar{H}_j^{(m)} = \det H_j^{(m)} (\rho - \lambda_1)(\rho - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (\rho - \lambda_m), \quad (1.8)$$

Iš tikrųjų $\det H_j^{(m)} = (\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_m) (\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_m)^j \sum_{(r_1, r_2, \dots, r_m)} \det \|\lambda_{r_k}^{k+l-2}\|_{k,l=1}^m$. sumuojama pagal

visus sveikųjų skaičių $1, 2, \dots, m$ kėlinius (r_1, r_2, \dots, r_m) . Pastebėję, kad

$\sum_{(r_1, r_2, \dots, r_m)} \det \|\lambda_{r_k}^{k+l-2}\|_{k,l=1}^m = (\det \|\lambda_k^{l-1}\|)^2, k, l = 1, \dots, m$, gauname (1.8) tapatybės įrodymą. Analogiškai

įrodoma ir (1.9) tapatybė.

5 išvada. Iš lemos įrodymo turime, kad $\det H_j^{(m)} \equiv 0$, kai p_j nusakomas (1.4) su visais $j \in \mathbf{Z}_0$, o $n = m + 1, m + 2, \dots$. Taigi H -rang($p_j; j \in \mathbf{Z}$) = m .

Tegul

$$\binom{j}{k} := \begin{cases} 0, & 0 \leq j < k; \\ \frac{j!}{k!(j-k)!}, & k \leq j; \end{cases} \quad \binom{j}{k} \cdot 0^{j-k} := \begin{cases} 0, & j \neq k; \\ 1, & k = j. \end{cases}, \quad j, k \in \mathbf{Z}_0. \quad (1.9)$$

Tada paėmę V -rinkinį $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ galime sudaryti skaičių seką $(p_j; j \in \mathbf{Z}_0)$, nusakomą sąryšiu

$$p_j := \sum_{r=1}^m \sum_{k_r=0}^{m_r-1} a_{rk_r} \binom{j}{k_r} \lambda_r^{j-k_r} \quad (1.10)$$

su visais $m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbf{N}$ ir $a_{rk_r} \in \mathbf{C}$.

10 apibrėžimas. Skaičių seka, nusakoma (1.10) sąryšiu, vadinsime algebrine progresija, o koeficientus $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ jos vardikliais.

Pastaba. Skaičių sekos, pateiktos pavyzdžiuose, o taip pat nusakytos (1.7) sąryšiu, yra algebrinės progresijos, kurių vardiklius galima sudaryti betarpiškai. Pavyzdžiui, sekos $(p_j; j \in \mathbf{Z}_0)$, kai $p_j = a_0 + jd$, vardikliai yra $\lambda_{1,2} = 1$, t.y.

$$p_j = a_0 + d \binom{j}{1} 1^{j-1} \text{ ir t.t. Taigi tiek aritmetinė, tiek geometrinė progresijos yra algebrinės}$$

progresijos.

Tegul $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_m \in \mathbf{C} / \{0\}$ yra V -rinkinys. Tada galima sudaryti išraiškas:

$$\Delta_k^{(0)}(j) := \hat{\lambda}_k^j, \quad \Delta_k^{(r+1)}(j) := \frac{\Delta_k^{(r)}(j) - \Delta_{k+1}^{(r)}(j)}{\hat{\lambda}_k - \hat{\lambda}_{k+r+1}}, \quad r = 0, 1, \dots; k = 1, 2, \dots, n - r - 1. \quad (1.11)$$

Kadangi $\Delta_k^{(r)}(j)$ galime išreikšti ir taip:

$\Delta_k^{(r)}(j) = \mu_{k_0} \hat{\lambda}_k^{(j)} + \mu_{k_1} \hat{\lambda}_{k+1}^{(j)} + \dots + \mu_{k_r} \hat{\lambda}_{k_r}^{(j)}$ su koeficientais $\mu_{k_0}, \mu_{k_1}, \dots, \mu_{k_r}$, nepriklausančiais nuo j , tai seka $(\Delta_k^{(r)}(j); j \in \mathbf{Z}_0)$, $r = 1, 2, \dots, m - k$ yra algebrinė progresija ir, be to, $H - \text{rang}(\Delta_k^{(r)}(j); j \in \mathbf{Z}_0) = r + 1$.

Pastebėsime, kad egzistuoja ribos

$$\lim_{\hat{\lambda}_k, \hat{\lambda}_{k+1}, \dots, \hat{\lambda}_{k+r} \rightarrow \lambda_k} \Delta_k^{(r)}(j) = \binom{j}{r} \lambda_k^{j-r}, \text{ kai } \lambda_k \text{ bet koks fiksuotas kompleksinis skaičius.}$$

Pasinaudoję (1.10) tapatybe, ribos skaičiavimo ypatumais bei (1.6) sąryšiais, gauname, kad skaičių sekos $\left(\binom{j}{r} \lambda_k^{j-r}; j \in \mathbf{Z}_0 \right)$ H -rangas tenkina sąryšį:

$$H - \text{rang} \left(\binom{j}{r} \lambda_k^{j-r}; j \in \mathbf{Z}_0 \right) = r + 1, \text{ ir, be to,}$$

$$\det H_j^l = \begin{cases} (-1)^{\binom{l+1}{2}} \lambda_k^l, & l = r + 1, \dots \\ 0, & m = r + 2, r + 3, \dots \end{cases}$$

Iš $\Delta_k^{(r)}(j)$ pateiktų savybių turime, kad (1.9) išraiška yra atitinkamu ribiniu perėjimu gaunama iš (1.4) išraiškos, t.y. atitinkamai parinkus koeficientus $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ turime, kad

$$p_j := \lim_{\substack{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_{m_1} \rightarrow \lambda_1 \\ \dots \\ \hat{\lambda}_{m_1+\dots+m_{n-1}+1}, \dots, \hat{\lambda}_{m_1+\dots+m_n} \rightarrow \lambda_n}} \sum_{r=1}^m \mu_r \hat{\lambda}_r^j = \sum_{r=1}^n \sum_{k_r=0}^{m_r-1} a_{rk_r} \binom{j}{k_r} \lambda_r^{j-k_r}, \quad j \in \mathbf{Z}_0,$$

kai $m_1 + \dots + m_{n-1} = m$, ir, be to, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbf{C}$ yra V -rinkinys. Tada, pasinaudojus ribiniu perėjimu, $H - \text{rang}(p_j; j \in \mathbf{Z}_0) = m$.

Iš ankščiau pateiktų samprotavimų išplaukia tokia išvada.

6 išvada. Jeigu algebrinės progresijos $(p_j; j \in \mathbf{Z}_0)$ narys p_j yra nusakomas (1.9), tai jos Henkelio matricos $H_j^{(m)}$ ir $\overline{H}_j^{(m)}$ tenkina sąryšius:

$$\det H_j^{(m)} = \sigma_m \left(\lambda_1^{m_1} \cdot \lambda_2^{m_2} \cdot \dots \cdot \lambda_n^{m_n} \right)^j, \quad \det \overline{H}_j^{(m)} = \det H_j^{(m)} \cdot (\rho - \lambda_1)^{m_1} \cdot (\rho - \lambda_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (\rho - \lambda_n)^{m_n},$$

kai daugiklis $\sigma_m \neq 0$ ir nepriklauso nuo j .

Pastebėsime, kad su visais V -rinkiniais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ teisinga tokia pereinamybė:

$$\left(\lambda_1^{m_1} \cdot \lambda_2^{m_2} \cdot \dots \cdot \lambda_n^{m_n} \right)^0 = 1.$$

Taigi yra teisinga tokia teorema.

2 teorema. Algebrinės progresijos $(p_j; j \in \mathbf{Z}_0)$, nusakomos (1.10) sąryšiu, H -rangas tenkina sąryšį:

$$H\text{-rang}(p_j; j \in \mathbf{Z}_0) = m_1 + m_2 + \dots + m_n, \text{ kai } a_{rm_{r-1}} \neq 0.$$

Tegul duota realaus kintamojo x konverguojanti su visomis $x, x_0 \in \mathbf{R}$ reikšmėmis, kai x_0 - fiksuotas, laipsninė eilutė

$$y(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j \frac{(x-x_0)^j}{j!}, |p_j| \leq M^j, 0 \leq M < +\infty \quad (1.12)$$

11 apibrėžimas. Funkciją, nusakomą (1.10) išraiška, vadinsime algebrine, jeigu ją galima išreikšti tokia baigtine suma:

$$y(x) = \sum_{r=1}^n Q_r(x) e^{\lambda_r x}, \quad (1.13)$$

$$\text{kai } Q_r(x) = \sum_{k_r=0}^{m_{r-1}} a_{rk_r} x^{k_r}, m_r = 1, 2, \dots; a_{rk_r} \in \mathbf{C}, \text{ ir, be to, } a_{rm_{r-1}} \neq 0.$$

3 teorema. Laipsninė eilutė, nusakoma (1.12) sąryšiu, yra išreiškiamą (1.13) išraiška tada ir tik tada, kai (1.9) eilutės koeficientai sudaro algebrinę progresiją $(p_j; j \in \mathbf{Z}_0)$.

Iš ankščiau pateiktos medžiagos išplaukia tokia išvada.

7 išvada. Algebrinę funkciją $y(x)$, nusakomą (1.12) išraiška, galime išreikšti ir tokia išraiška:

$$y(x) = \mu_0 + \sum_{r=1}^m (\mu_r \cos(\lambda_r(x-x_0)) + \gamma_r \sin(\nu_r(x-x_0)))$$

tada ir tik tada, kai jos (1.9) laipsninės eilutės koeficientų seka $(p_j; j \in \mathbf{Z}_0)$ yra algebrinė, turinti (1.13) išraišką, ir, be to, jos vardiklių realiosios dalys lygios nuliui.

1.2.3. TEORINĖS IŠRAIŠKOS IR SKAIČIAVIMO ALGORITMAS

Skaičiavimo algoritmo esmę sudaro funkcijos $f(x)$ eksponentinės išraiškos (1.13) vektorių $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ ir $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ sudarytų iš atitinkamų koeficientų μ_k, λ_k bei tų koeficientų skaičiaus m radimas, kai duotas $f(x)$ Teiloro eilutės (1.12) koeficientų vektorius $\vec{p} = (p_0, p_1, \dots, p_n), n > m; n, m \in \mathbf{N}$. Algoritmo schema pavaizduota 1.8 pav. Skaičiavimai susideda iš tokių dalių:

1. Konstruojamos Hankelio matricos, sudarytos iš Teiloro eilutės koeficientų

$$H_0^{(k)} = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \dots & p_{k-1} \\ p_1 & p_2 & \dots & p_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k-1} & p_k & \dots & p_{2k-2} \end{pmatrix},$$

o po to skaičiuojami jų rangai.

Jei duotą funkciją $f(x)$ galima išreikšti eksponenčių suma, tai šios sumos dėmenų skaičius lygus funkcijos H-rangui [7].

Taikant algoritmą randamas toks m , su kuriuo $m = \max_{k \in N} \text{rang} H_0^{(k)}$, t.y. $\det H_0^{(m)} \neq 0$, o $\det H_0^{(m+r)} \equiv 0, \forall r \in N$.

Kompiuterinėje algoritmo realizacijoje sąlyga $\det H_0^{(m+r)} \equiv 0$ keičiama sąlyga $\det H_0^{(m+r)} < \varepsilon, r = m+1, m+2, \dots, m+l, l \in N$.

2. Panaudojus algebrinių lygčių sprendimo metodus surandame tokios algebrinės lygties

$$\begin{vmatrix} p_0 & p_1 & \dots & p_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m-1} & p_m & \dots & p_{2m-1} \\ 1 & \rho & \dots & \rho^m \end{vmatrix} = 0 \quad (1.14)$$

šaknis $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$, nes jos tenkina sąlygas:

$$\lambda_1 = \rho_1, \lambda_2 = \rho_2, \dots, \lambda_m = \rho_m.$$

3. Sudaroma tiesinių lygčių sistema

$$\lambda_1^j \mu_1 + \lambda_2^j \mu_2 + \dots + \lambda_m^j \mu_m = p_j, \quad j = 0, \dots, m-1. \quad (1.15)$$

Jos sprendimui naudojami tiesinės algebras metodai - sprendinys yra koeficientai $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$.

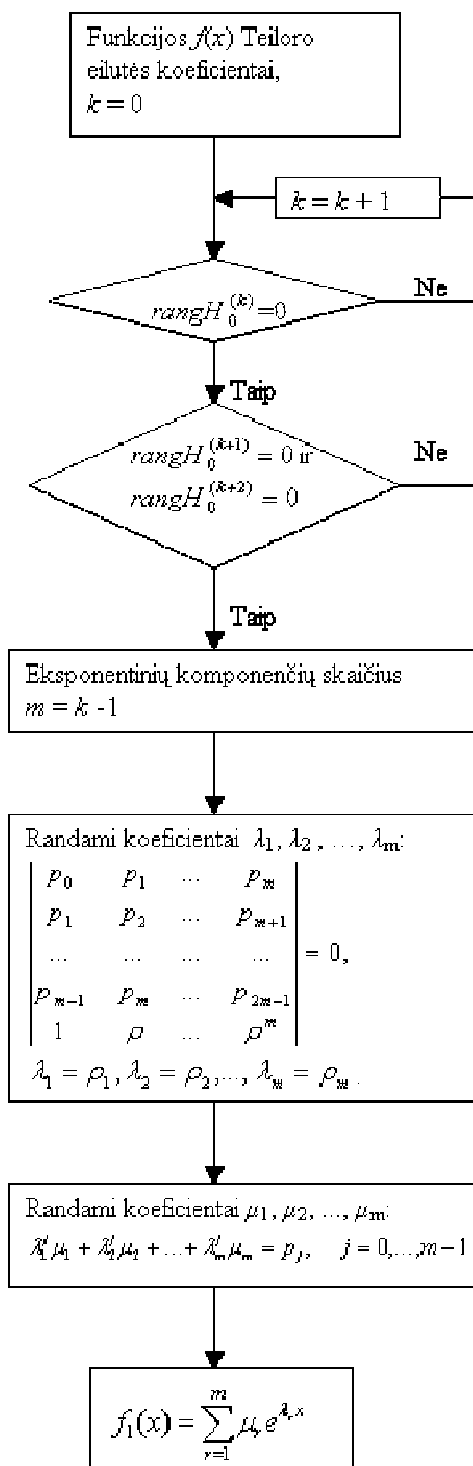
Pastebėję, kad funkcijos reikšmių seka $f(0), f(h), f(2h), \dots$ sudaro algebrinę progresiją, kaip ir koeficientai p_j , tą patį algoritmą galime naudoti ir funkcijos $f(x) = \sum_{r=1}^m \mu_r e^{\lambda_r x}$ išraiškai rasti, kai žinoma ką tik paminėta šios funkcijos reikšmių seka $f(0), f(h), f(2h), \dots, f(nh), n > m; n, m \in N$. Ši seka sudaro algebrinę progresiją kaip ir $f(x)$ Teiloro eilutės koeficientai, nes

$$f(kh) = \sum_{r=1}^m \mu_r e^{\lambda_r kh} = \sum_{r=1}^m (\mu_r e^{\lambda_r k})^h = \sum_{r=1}^m \mu_r \Lambda_r^k, \quad \text{čia } e^{\lambda_r h} = \Lambda_r.$$

Tada vietoje Teiloro eilutės koeficientų vektoriaus $\vec{p} = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ paėmę funkcijos $f(x)$ reikšmių vektorių

$$\bar{y} = (y_0, y_1, \dots, y_n) = (f(0), f(h), f(2h), \dots, f(nh)), n > m; n, m \in N$$

ir jam pritaikę anksčiau aprašytus skaičiavimus, galime rasti koeficientus m , $\bar{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ ir $\bar{\Lambda} = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_m)$. Koeficientai $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ randami kompleksinių skaičių aibėje naudojantis sąryšiu $\lambda_r = Ln(\Lambda_r)$, $r = 1, 2, \dots, m$, t.y. logaritmuojant vektoriaus $\bar{\Lambda} = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_m)$ komponentes.



1.8 pav. Funkcijos reiškimo eksponenčių suma algoritmo schema
(Teiloro koeficientų atveju)

1.2.4. SKAIČIAVIMO PAVYZDŽIAI

1) Tegul diferencialinės lygties sprendinys išreiškiamas eilute

$$y(x) := 2 \sum_{k=0}^{+\infty} 3^{k-1} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} 3^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Tada eilutės koeficientai $p_j = \begin{cases} 2 \cdot 3^{k-1}, & j = 2k, \\ 3^k, & j = 2k+1, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots$

Tuomet

$$\begin{vmatrix} 1 & \rho & \rho^2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = -(\rho^2 - 3) = 0, \quad \lambda_1 = \sqrt{3}, \lambda_2 = -\sqrt{3},$$

t.y. $n = m = 2$, ir $y(x) = \mu_1 e^{\sqrt{3}x} + \mu_2 e^{-\sqrt{3}x}$ arba

$$y(x) = \mu_1 + \mu_2 + (\mu_1 \sqrt{3} - \mu_2 \sqrt{3}) \frac{x}{1!} + 3(\mu_1 + \mu_2) \frac{x^2}{2!} + \dots = \frac{2}{3} + \frac{x}{1!} + 2 \frac{x^2}{2!} + \dots \text{ t.y. } \begin{cases} \mu_1 + \mu_2 = 2/3, \\ \mu_1 \sqrt{3} - \mu_2 \sqrt{3} = 1. \end{cases}$$

Vadinasi, $\mu_1 = \frac{2 + \sqrt{3}}{6}$, $\mu_2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{6}$. Tada $y(x) = \frac{2 + \sqrt{3}}{6} \exp(\sqrt{3}x) + \frac{2 - \sqrt{3}}{6} \exp(-\sqrt{3}x)$.

2) Pateiksime pavyzdį, iliustruojantį šio algoritmo veikimą funkcijai, kurios išraiška ir yra baigtinė eksponenčių suma. Tarkime, kad duotos funkcijos,

$$f_1(x) = 0.093e^x - 7^{\frac{1}{5}} e^{-0.2x} - 20.124e^{2.13x} + 5^{\frac{1}{12}} e^{2^{\frac{7}{20}}x} - \cos(\sqrt{2})e^{-0.1e^{\sqrt{2}x}} - \\ - 0.082e^{0.06x} + \sqrt{7}e^{-0.7x} + 0.175e^{0.801x} + \frac{1}{2}\pi e^{-0.914x} + \sqrt{2}\sqrt{\pi}e^{-2.18\sqrt{5}x},$$

išreiškiamos 10 eksponentinių funkcijų suma, reikšmės taškuose $x = 0, h, 2h, \dots, 10h$, $h = 0.4$. Šiuo atveju, pasinaudojus 1.2.3 skyrelyje pateiktu algoritmu, gaunamas $f_1(x)$ eksponentinės išraiškos artinys. Stebėdami kaip determinantai $\det H_0^{(k)}$ monotoniškai artėja prie nulio, skaičiavimus nutraukiame sąlygoje $\det H_0^{(m+r)} < \varepsilon$, $r = m+1, m+2, m+3$ imdami $\varepsilon = 10^{-5}$. Taip randama paprastesnė funkcijos $f_1(x)$ išraiška – $f_2(x)$ tik su 5 eksponenčių suma:

$$f_2(x) = 2.51e^{-4.88x} + 3.67e^{-0.83x} - 20.65e^{0.3x} + 0.55e^{1.19x} + 0.62e^{1.31x}.$$

Šios funkcijos reikšmės intervale $(-0,25; 3)$ yra labai artimos (paklaida neviršija 10^{-6}) pradinės funkcijos $f_1(x)$ reikšmėms.

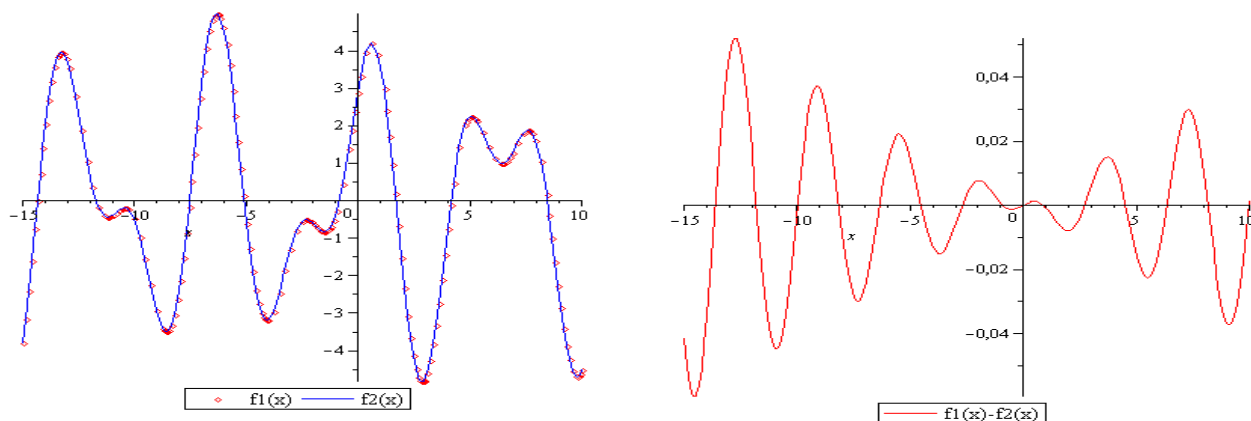
3) Tarkime turime funkciją $f_1(x) = 2\sin(\sqrt{3}x) + 3\cos(x)$. Vėl taikydami 1.2.3. skyrelio algoritmą, gauname, kad ją galime išreikšti 4 eksponenčių suma

$$f_2(x) = \frac{3}{2}e^{I \cdot x} - I e^{\frac{173}{100}I \cdot x} + I e^{-\frac{173}{100}I \cdot x} + \frac{3}{2}e^{-I \cdot x}.$$

Dabar naudodamiesi Oilerio formule, pabandysime atstatyti pradinę funkciją t.y.

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2}(\cos x + I \sin x) - I \left(\cos \frac{173}{100}x + I \sin \frac{173}{100}x \right) + I \left(\cos -\frac{173}{100}x - I \sin \frac{173}{100}x \right) + \frac{3}{2}(\cos x - I \sin x) = \\ & = \frac{3}{2} \cos x + \frac{3}{2} I \sin x - I \cos \frac{173}{100}x + \sin \frac{173}{100}x + I \cos \frac{173}{100}x + \sin \frac{173}{100}x + \frac{3}{2} \cos x - \frac{3}{2} I \sin x = 3 \cos x + 2 \sin \left(\frac{173}{100}x \right). \end{aligned}$$

Matome, kad rezultatas nėra analogiškas, vietoj koeficiento $\sqrt{3}$ turime 1,73. Ši paklaida įtakoja tai, jog didėjant argumento reikšmės moduliui, didėja absoliutinė paklaida tarp funkcijos f_1 ir jos aproksimacinės funkcijos f_2 .



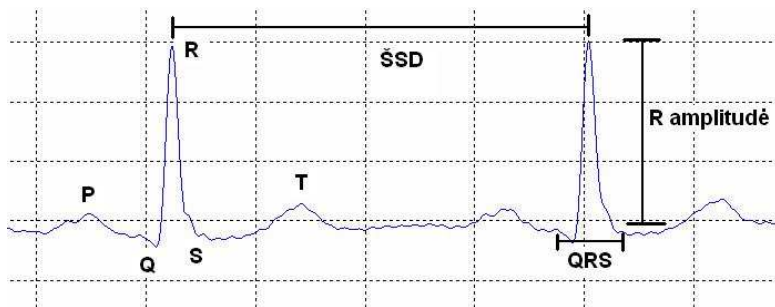
1.9 pav. Funkcijos aproksimavimas eksponenčių suma bei paklaidos

2. TIRIAMOJI DALIS

2.1 PARAMETRŲ KOMPLEKSIŠKUMO TYRIMAS

Daugelį tolydžių funkcijų galima išreikšti baigtine eksponenčių suma. Vienas iš tokių reiškimo metodų gaunamas pasinaudojant Henkelio matricos minorais. Pastarąjį metodą pritaikome elektrokardiogramos (EKG) parametrų tyrimui.

Pasinaudodami Henkelio matricos minorų skaičiavimu ištyrime, kiek komponentų sudaro EKG parametrų: R dantelio amplitudės (2.1 pav.) (AR), intervalų tarp R dantelių amplitudžių (RR) bei širdies susitraukimo dažnio (ŠSD) „signalą“ skirtingo krūvio metu (normali būseną, krūvio pradžia, intensyviausias krūvis, atsigavimas) t.y. veloergometrinio mėginio metu.



2.1 pav. Elektrokardiogramos parametrai

Tarkime, kad turime baigtinę seką vieno anksčiau minėtų parametru. Šią seką interpoliuojame trečios eilės daugianariais, kurių skaičius yra lygus sekos elementų, ir taip gauname funkciją f , vadinamą *splainu*. Turėdami šią funkciją, galime laisvai pasirinkti fiksuotą realų teigiamą žingsnį h ir gauti naują duomenų seką $(h_0 \ h_1 \ h_2 \ \dots \ h_n)$, kur $h_k = f(kh)$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Iš šių duomenų konstruojame Henkelio minorų matricas:

$$H^{(1)} = (h_0), \quad H^{(2)} = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix}, \quad H^{(3)} = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 \\ h_1 & h_2 & h_3 \\ h_2 & h_3 & h_4 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad H^{(k)} = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_{k-1} \\ h_1 & h_2 & \dots & h_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{k-1} & h_k & \dots & h_{2k-2} \end{pmatrix}, \quad \dots \quad (2.1)$$

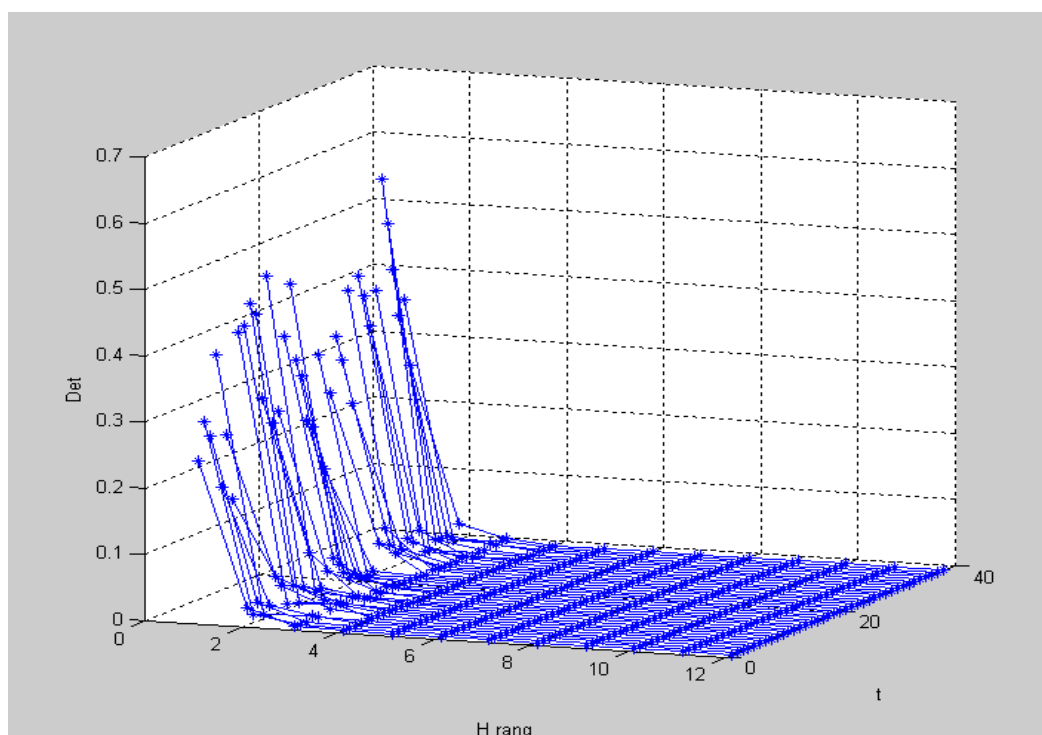
Toliau kiekvienai sudarytai matricai skaičiuojame determinantus. Ieškome tokio skaičiaus m , kad $m = \max_{k \in N} \text{rang } H^{(k)}$, $\det H^{(m)} \neq 0$, o $\det H^{(m+r)} \equiv 0$, $\forall r \in N$. Šis skaičius (jei jis egzistuoja!) vadiname duotosios funkcijos Henkelio rangą. Henkelio matricos minorų matricos rango reikšmė m būtent ir parodo kiek komponentių įeina į tiriamos funkcijos (dinaminės sistemos pvz.: širdies veiklos) sudėtį arba, kitaip tariant, nusako kompleksškumą.

Skaičiuojant Henkelio matricų minorus funkcijai f , atitinkamai EKG prametrų seką pastebime, kad skirtingu metu minorai skirtingai artėja prie 0. Kompiuterinėje realizacijoje laikome, kad minoras lygus nuliui, kai jis yra mažesnis už pasirinktą ε . Mūsų nustatyta riba yra $\varepsilon = 10^{-10}$. Taigi, programoje Henkelio matricos minorai skaičiuojami pradedant 2-a eile ir ji didinama, kol minorų reikšmės pasiekia „0“. Lentelėje 2.1 pateiktas minorų artėjimas prie nulio pirmajame duomenų sekos fragmentų RR parametrai.

2.1 lentelė Determinantų reikšmių konvergavimas prie nulio

<i>1 eilės</i>	<i>2 eilės</i>	<i>3 eilės</i>	<i>4 eilės</i>
1.144000000	0.02173242284	0.001568441355	0.0001342321448
<i>5 eilės</i>	<i>6 eilės</i>	<i>7 eilės</i>	<i>8 eilės</i>
0.00001339976583	0.000001387222366	$-6.692635271 \cdot 10^{(-8)}$	$5.232529598 \cdot 10^{(-10)}$
<i>9 eilės</i>			
$1.653661258 \cdot 10^{(-11)}$			

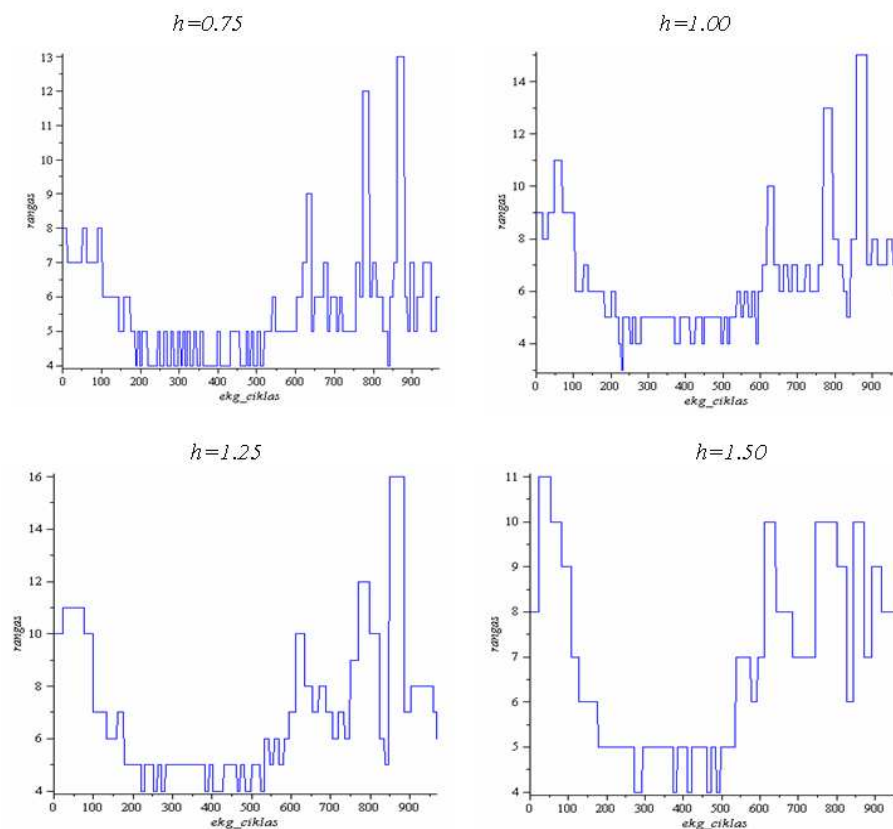
Priešingai nei teorinėms kreivėms, skaičiuojant nuo kiekvieno skirtingo funkcijos f taško, gauname skirtingą determinantų nelygių „0“ eilę, tačiau dažniausiai kuo artimesni taškai tuo panašesnis ir gaunamas rangas. 2.1 paveiksle matyti kaip AR parametro minorai artėja prie „0“ ne tik pirmajame segmente, bet visiems duomenų sekos intervalams. Mat suskaičiavę vieno segmento rangą ir žinodami kiek funkcijos reikšmių buvo panaudota konstruojant Henkelio minorų seką, mes vėl taikome analogišką algoritmą nuo to tiriamos funkcijos f taško, kuris yra pirmasis nepanaudotas ankstesnėje konstrukcijoje. T.y., jei pradėję skaičiuoti nuo taško i , segmente gauname rangą m , tai kito fragmento pradžios taškas, nuo kurio pradėdame konstruoti naujus minorus, bus $i + 2 \cdot m - 1$. Taikant Henkelio matricų metodiką diferencialinių lygčių sprendiniams ar virpesių mechanikos lygtims, kur funkcijos yra panašios į periodines, tokio segmentavimo nėra, nes galime iš labai mažos funkcijos dalies reikšmių nustatyti bendrą kompleksiskumą bei gauti eksponentinę išraišką „prognozuojančią“ likusią funkcijos dalį. Deja, medicininiai duomenys yra visiškai aperiodiniai ir atsitiktiniai, todėl šiuo atveju minėtos privilegijos neturime.



2.1 pav. Determinantų reikšmių konvergavimas į nulį skirtinguose segmentuose

Kompleksiškumo matas m taip pat reaguoja ir į žingsnio h bei slenksčio ε parinkimą. 2.2 paveiksle galime matyti kaip žingsnio h dydis įtakoja RR parametro kompleksiškumo pokyčius pacientui, kuriam atliekamas veloergometrinis mėginys. Akivaizdu, kad kuo labiau skiriasi h , tuo skirtingesnis ir kompleksiškumas, tačiau bendra tendencija, jog po 500-ojo ekg ciklo, kuomet pasiekę maksimalų krūvį, žmogaus organizmas pereina į atsigavimo periodą, išlieka. Savo tyrimuose pasirinkome $h=0.75$ remdamiesi medikų rekomendacijomis, nes su šiuo žingsniu daugeliui pacientų išryškėjo reali kompleksiškumo reakcija į kūvio pokyčius. Be to, vėliau atliekamas aproksimavimas eksponentine išraiška, lėmė mažiausias paklaidas.

Taigi, apibendrinami galime konstatuoti, kad kompleksiškumo vertinimas šiuo atveju, deja, yra pakankamai jautrus įvairioms pasirenkamoms sąlygoms.



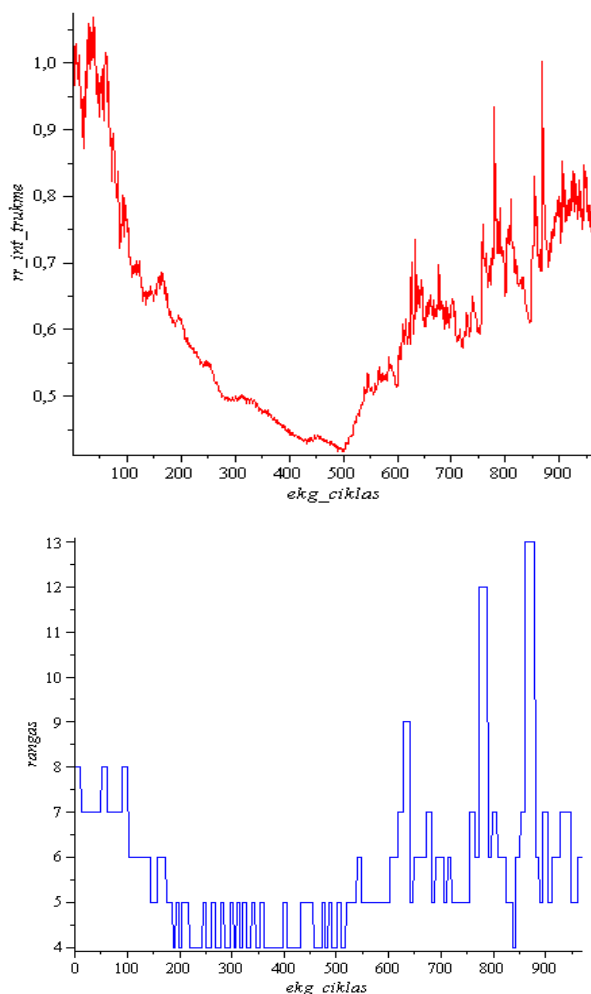
2.2 pav. H rango priklausomybė nuo žingsnio h dydžio

Taigi, tyrimo metu pastebėjome, kad skirtingose perioduose dalyvauja skirtingas komponentių skaičius. Taip pat pastebime, kad skirtingų žmonių Henkelio matricos minorų reikšmės skirtingai kinta, tačiau būdinga bendra reakcija į krūvį ir kompleksiškumo dydis, kuris pvz. RR parametrų atveju yra 4-5 krūvio metu ir svyruoja apie 6-7 įprastinėmis sąlygomis. Prieš skaičiuojant Henkelio matricos minorus elektrokardiogramos parametrus, jų masteliai buvo suvienodinti ir sutalpinti į intervalą

[0 ; 10] tam, kad galima būtų atlikti kompleksiskumo palyginimą skirtingų eilių parametrus. Toliau pateiksime gautų rezultatų aptarimą tirtiems parametrus atskirai.

Intervalų tarp R dantelių amplitudžių (RR parametro) kompleksiskumas.

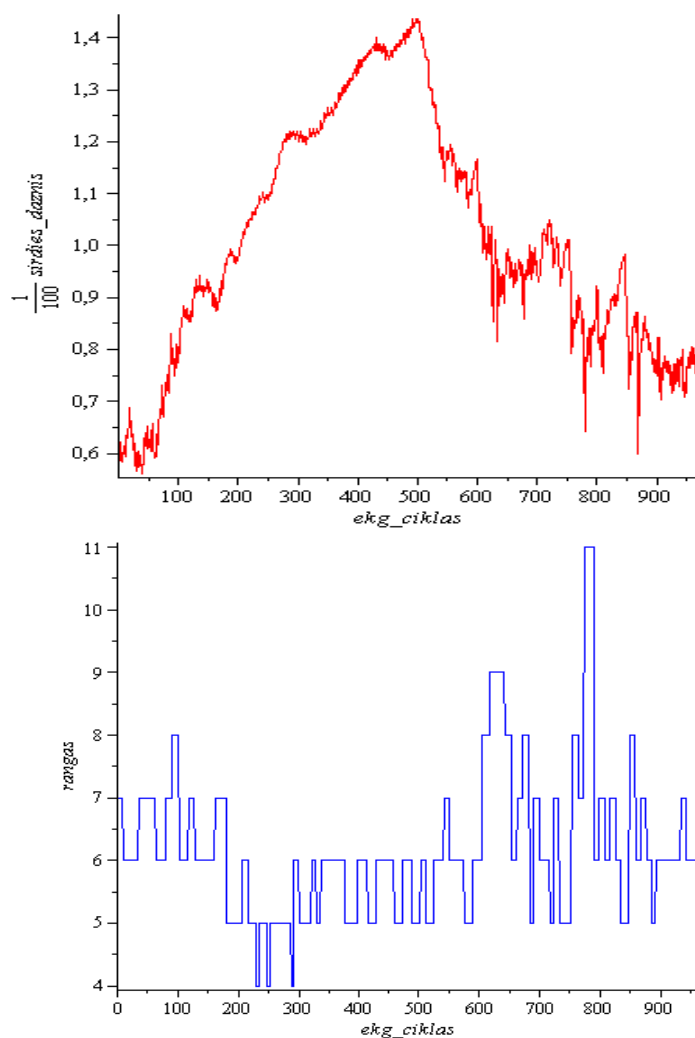
Paveiksle 2.3 pavaizduotas vidutinio amžiaus vyro elektrokardiogramos, įrašytos veloergometrinio mėginio metu, RR parametrų kompleksiskumas. Krūvis yra didinamas nuo 100-tojo ekg ciklo iki 500-ojo ekg ciklo kas 100 ekg ciklų 50-čia W, toliau yra atsigavimo laikotarpis. Matyti kompleksiskumo perėjimas nuo 4-5 komponentių krūvio metu prie 6-8 atsigavimo laikotarpiu, ką galima paaiškinti tuo, jog krūvio metu širdies ir plaučių darbas yra labiau koreliuotas ir RR intervalai ne taip „trūkčioja“ t.y. atstumai tarp R dantelių amplitudžių tampa panašaus ilgio. Todėl čia kompleksiskumas yra pastovesnis. Atsigavimo laikotarpiu kompleksiskumo dydžio kitimas tampa daug intensyvesnis. Tokios tendencijos išlieka daugeliui tirtų pacientų (vidutinio amžiaus sveikiems vyrams), tačiau kitos pacientų grupės t.y. žmonės, turintys širdies ydą, ar moterys dar nebuvo analizuotos. Konkrečiai šiuo atveju atsigavimo laikotarpiu kompleksiskumas nebepakilo iki anksčiau normalioje būsenoje buvusios ribos 8, kas rodo teigiamą krūvio(sporto) įtaką širdies ir plaučių darbui bei sąveikai.



2.3 pav. RR parametras(raudona) ir jo kompleksiskumas(mėlyna)

Širdies susitraukimų dažnio (ŠSD parametro) kompleksiškas.

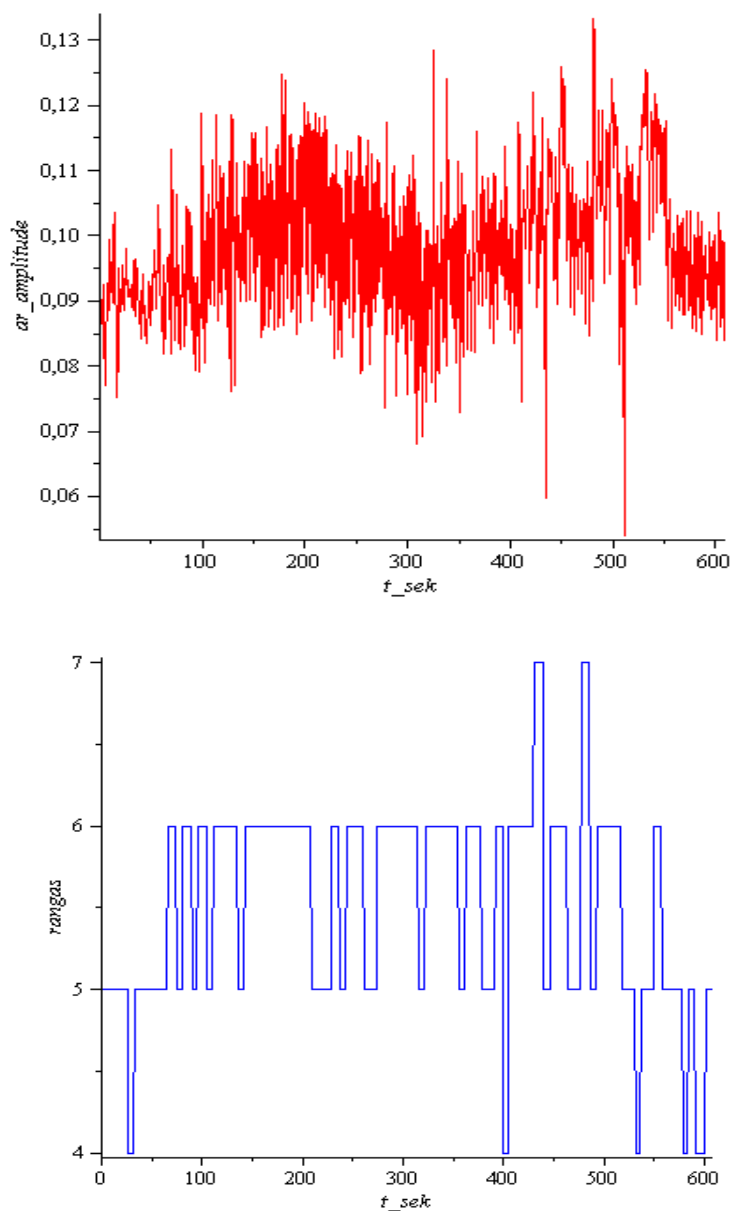
Širdies susitraukimų dažnis (ŠSD) yra atvirkščias dydis RR parametrui, kuriuos sieja $\text{ŠSD} = \frac{60}{RR}$, čia RR matuojamas sek. priklausomybė. Tačiau šiems dydžiams neturėtume gauti analogiškų kompleksiško grafiku, nes pakitęs parametru reikšmių dydis jautriai įtakoja Henkelio matricų minorų reikšmes. Todėl išlieka tik tokios pačios tendencijos t.y. krūvio metu gaunamas mažesnis kompleksiškas. Kompleksiškumas labai jautriai reaguoja ir į išskirtis t.y. netikėtai pakitusią vieną ŠSD reikšmę (gali būti neteisingas įrenginio nuskaitymas), kai jo reikšmės trumpam pakyla iki 10-15, todėl tyrėjui visuomet svarbu sekti ne tik kompleksiško, bet ir pačių parametru kitimą.



2.4 pav. ŠSD/100(raudona) ir jo kompleksiškas(mėlyna)

R dantelių amplitudžių (AR parametro) kompleksiškas.

Tiriant AR parametrus tokių ryškių kompleksiško dydžio pokyčių kaip RR parametrų atveju lyginant krūvio ir atsigavimo periodus nepastebėta. Ankstesniuose pavyzdžiuose minėtam pacientui gauname pastovesnį bei mažesnį rangą pirmąsias 90 sek. (2.5 pav.), prieš veloergometrinio mėginio pradžią, tas matyti dar keliems žmonėms, tačiau reikalingi detalesni tyrimai. Keičiant tikslumo ribą į $\varepsilon = 10^{-12}$ ($h = 0.75$), tendencija išryškėja dar labiau. Tai, kad AR parametro kompleksiškas yra didesnis krūvio metu, aiškintina širdies padidėjusiu aktyvumu t.y. papildomų raumenų grupių bei kombinacijų įsitraukimu atliekant savo funkciją. Tai patvirtinantys rezultatai pristatyti ir 2007 m. spalio mėn. *Biomedicinės inžinerijos* konferencijoje, kai modifikuota metodika taikyta nenormuotiems duomenims, o h žingsnis imtas eile mažesnis [3 priedas].



2.5 pav. AR parametras(raudona) ir jo kompleksiškas(mėlyna)

Kadangi $\Lambda = e^\lambda$, tai gautoms Λ randame logaritmą

$\lambda_k = \operatorname{Ln} \Lambda_k = \ln |\Lambda_k| + i \arg \Lambda_k + 2\pi l$, $l \in N, k = \overline{1, m}$; čia $l = 0$ ir taip gauname λ reikšmes, kurios pavaizduotos 2.3 lentelėje.

2.3 lentelė λ reikšmės

Interv. Nr.	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8
1	-0.0022776+ 0. I	-0.41790+ 1.0738 I	-0.021893+ 2.2171 I	-0.028462+ 3.1552 I	1.0061+ 4.1888 I	-0.028462- 3.1552 I	-0.021893- 2.2171 I	-0.41790- 1.0738 I
2	-0.84930+ 0. I	-0.0065984+ 0. I	0.21331+ 1.2118 I	0.15897+ 2.4057 I	0.23628+ 4.1888 I	0.15897- 2.4057 I	0.21331- 1.2118 I	---
3	0.013856+ 0. I	-0.92894+ 1.6354 I	0.022973+ 1.6637 I	0.47402+ 2.9812 I	0.47402- 2.9812 I	0.022973- 1.6637 I	-0.92894- 1.6354 I	---
4	-1.7095+ 0. I	0.0029241+ 0. I	-0.0053057+ 1.4666 I	0.40598+ 2.6173 I	-0.77848+ 4.1888 I	0.40598- 2.6173 I	-0.0053057- 1.4666 I	---
5	-0.87054+ 0. I	0.0031419+ 0. I	1.1728+ 0.78622 I	0.11946+ 2.2312 I	0.30574+ 4.1888 I	0.11946- 2.2312 I	1.1728- 0.78622 I	---
6	-0.16361+ 0. I	0.044130+ 0. I	-0.010667+ 1.2811 I	-0.26885+ 3.0963 I	-1.8166+ 4.1888 I	-0.91124+ 4.1888 I	-0.26885- 3.0963 I	-0.010667- 1.2811 I
7	-0.015232+ 0. I	-0.11490+ 1.4164 I	-0.18272+ 2.4962 I	-0.23833+ 4.1888 I	0.83073+ 4.1888 I	-0.18272- 2.4962 I	-0.11490- 1.4164 I	---
8	-0.013214+ 0. I	-0.35201+ 1.0201 I	-0.27007+ 2.3241 I	0.034508+ 3.3904 I	0.034508- 3.3904 I	-0.27007- 2.3241 I	-0.35201- 1.0201 I	---
9	0.017363+ 0. I	-0.076496+ 0.45264 I	0.064622+ 2.1096 I	0.36852+ 4.1888 I	2.9246+ 4.1888 I	0.064622- 2.1096 I	-0.076496- 0.45264 I	---
10	-0.14455 +0. I	-0.011464+ 0. I	-0.24192+ 1.3858 I	-0.17262+ 2.5365 I	-0.31366+ 3.5848 I	-0.31366- 3.5848 I	-0.17262- 2.5365 I	-0.24192- 1.3858 I
...

Taip pat sudarome tiesinių lygčių sistemą:

$$\Lambda_1^j \mu_1 + \Lambda_2^j \mu_2 + \dots + \Lambda_m^j \mu_m = h_j, \quad j = 0, \dots, m-1 \text{ ir randame koeficientus } \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m.$$

Jie taip pat yra kompleksiniai skaičiai (2.4 lentelė).

2.4 lentelė μ reikšmės

Interv. Nr.	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4
1	1.0121- 5.69*10 ^{^(-101)} I	0.067857-0.015825 I	0.0028379+ 0.0054850 I	-0.0047317+ 0.00048925 I
2	0.055702+ 6.7543*10 ^{^(-100)} I	0.95586- 1.4323*10 ^{^(-100)} I	0.0016608+0.0026499 I	-0.0023028- 0.00010532 I
3	0.92799+ 3.5*10 ^{^(-101)} I	0.015698-0.0045204 I	-0.0047254+0.011301 I	0.000030862- 0.00013668 I
4	0.042732- 8.3122*10 ^{^(-100)} I	1.0142+ 2.375*10 ^{^(-100)} I	0.0067033+0.012501 I	0.00034300+ 0.00014469 I

5	0.099362+ 2.1788*10 ⁽⁻⁹⁹⁾ I	0.94257- 1.595*10 ⁽⁻⁹⁹⁾ I	-9.7360*10 ⁽⁻⁷⁾ - 1.5996*10 ⁽⁻⁷⁾ I	0.0019799-0.0059278 I
6	0.45460+ 4.5357*10 ⁽⁻¹⁰¹⁾ I	0.59281- 4.5367*10 ⁽⁻¹⁰¹⁾ I,	0.0021825+0.020372 I	0.0073847+0.0086258 I
7	0.99818+ 4.39*10 ⁽⁻¹⁰¹⁾ I	0.0090354+0.011275 I	-0.0011799-0.0094106 I	-0.0041034- 8.7772*10 ⁽⁻¹⁰¹⁾ I
8	0.90523+ 1.0*10 ⁽⁻¹⁰²⁾ I	-0.032578+0.017482 I	0.0027542+0.012122 I	-0.00065681+ 0.00039173 I
9	0.70512+ 5.7794*10 ⁽⁻¹⁰⁰⁾ I	0.051802-0.031717 I	-0.0052854+0.0020366 I	-0.00015473- 4.496*10 ⁽⁻¹⁰¹⁾ I
10	-0.088997+ 4.5061*10 ⁽⁻¹⁰¹⁾ I	0.86768- 3.0* 10 ⁽⁻¹⁰²⁾ I	-0.025295-0.0095404 I	0.0037985-0.014455 I
...

Interv. Nr.	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8
1	-9.7612*10 ⁽⁻⁸⁾ + 3.626*10 ⁽⁻¹⁰²⁾ I	-0.0047317- 0.00048925 I	0.0028379- 0.0054850 I	0.067857+0.015825 I
2	-0.00039906- 7.8*10 ⁽⁻¹⁰¹⁾ I	-0.0023028+ 0.00010532 I	0.0016608-0.0026499 I	---
3	0.000030862+ 0.00013668 I	-0.0047254-0.011301 I	0.015698+0.0045204 I	---
4	-0.0088043+ 2.4467*10 ⁽⁻¹⁰⁰⁾ I	0.00034300- 0.00014469 I	0.0067033-0.012501 I	---
5	-0.00026308- 9.4*10 ⁽⁻¹⁰¹⁾ I	0.0019799+0.0059278 I	-9.7360*10 ⁽⁻⁷⁾ + 1.5996*10 ⁽⁻⁷⁾ I	---
6	-0.14027+ 3.4978*10 ⁽⁻¹⁰⁰⁾ I	0.042740- 2.98*10 ⁽⁻¹⁰⁰⁾ I	0.0073847-0.0086258 I	0.0021825-0.020372 I
7	0.0000027157- 4.88*10 ⁽⁻¹⁰²⁾ I	-0.0011799+0.0094106 I	0.0090354-0.011275 I	---
8	-0.00065681- 0.00039173 I	0.0027542-0.012122 I	-0.032578-0.017482 I	---
9	1.5647*10 ⁽⁻¹⁴⁾ - 1.67*10 ⁽⁻¹⁰⁶⁾ I	-0.0052854-0.0020366 I	0.051802+0.031717 I	---
10	0.0096979+0.00054987 I	0.0096979-0.00054987 I	0.0037985+0.014455 I	-0.025295+0.0095404 I
...

Tada, kai jau žinome koeficientus λ_k ir μ_k , $k = \overline{1, m}$, naudodamiesi formule

$$f(x) = \sum_{k=1}^m \mu_k e^{\lambda_k x}$$

nuosekliai galime aprašyti funkcijos f fragmentus.

Pvz. **1 intervalas** aprašomas funkcijos, sudarytos iš 8 eksponenčių sumos ($m=8$), dalimi:

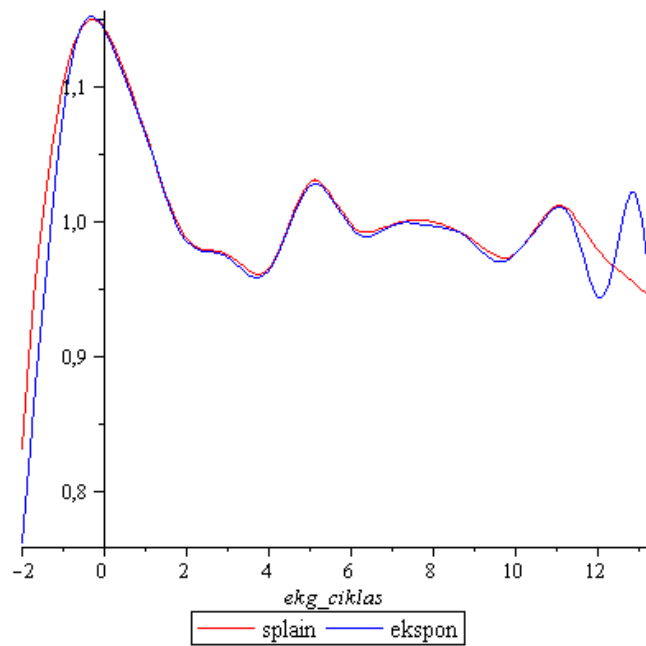
$$\begin{aligned} f(x) = & (1.0121 - 1.0 \cdot 10^{-101} I) e^{(-0.0022776 + 0.0 \cdot I)x} + (0.067857 - 0.015825I) e^{(-0.41790 + 1.0738I)x} + \\ & + (0.0028379 + 0.0054850I) e^{(0.021893 + 2.2171I)x} + (-0.0047317 + 0.00048925I) e^{(-0.028462 + 3.1552I)x} + \\ & + (-9.7612 \cdot 10^{-8} + 4.6 \cdot 10^{-103} I) e^{(1.0061 + 4.1888I)x} + (-0.0047317 - 0.00048925I) e^{(-0.028462 - 3.1552I)x} + \\ & + (0.0028379 - 0.0054850I) e^{(0.021893 - 2.2171I)x} + (0.067857 + 0.015825I) e^{(-0.41790 - 1.0738I)x} \end{aligned}$$

Pasinaudoję Oilerio formule $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ bei formulėmis $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ir $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$,

galime šią išraišką parašyti be kompleksinių skaičių, nes λ_k ir μ_k koeficientai yra poromis jungtiniai:

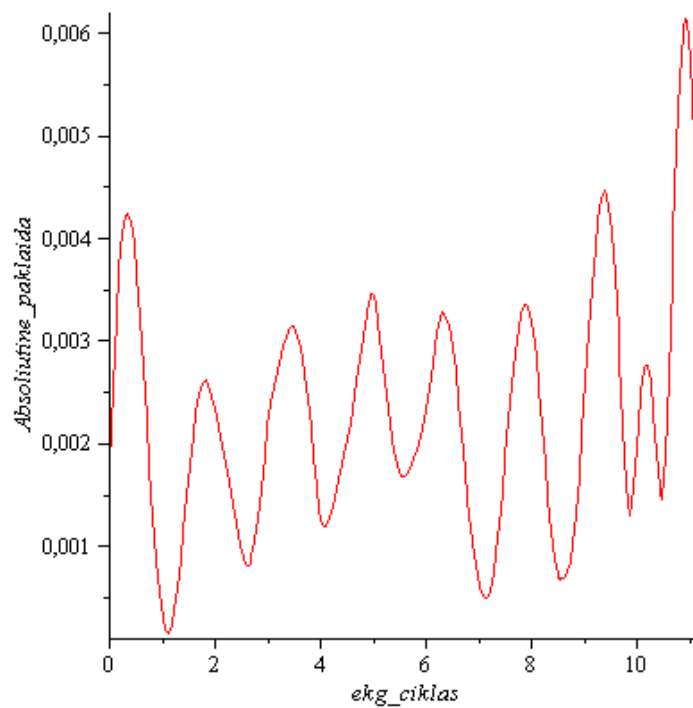
$$\begin{aligned} f(x) = & 1.01 \cosh(0.00228 x) + 0.000978 \sinh(0.0285 x) \sin(3.16 x) \\ & - 0.00946 \cosh(0.0285 x) \cos(3.16 x) \\ & + 0.00946 \sinh(0.0285 x) \cos(3.16 x) \\ & - 0.000978 \cosh(0.0285 x) \sin(3.16 x) \\ & - 0.0316 \sinh(0.418 x) \sin(1.07 x) \\ & - 2.00 \cdot 10^{-101} \sinh(1.01 x) \sin(4.19 x) \\ & + 0.00568 \sinh(0.0219 x) \cos(2.22 x) \\ & + 0.0316 \cosh(0.418 x) \sin(1.07 x) \\ & - 0.0110 \cosh(0.0219 x) \sin(2.22 x) \\ & + 0.136 \cosh(0.418 x) \cos(1.07 x) \\ & - 2.00 \cdot 10^{-101} \cosh(1.01 x) \sin(4.19 x) \\ & - 0.0110 \sinh(0.0219 x) \sin(2.22 x) \\ & + 0.00568 \cosh(0.0219 x) \cos(2.22 x) \\ & - 1.01 \sinh(0.00228 x) - 0.136 \sinh(0.418 x) \cos(1.07 x) \\ & - 9.76 \cdot 10^{-8} \cosh(1.01 x) \cos(4.19 x) \\ & - 9.76 \cdot 10^{-8} \sinh(1.01 x) \cos(4.19 x) \end{aligned}$$

2.6 paveikslo grafike matome kaip splaino funkcija (raudona linija) yra aproksimuojama šia gautąja išraiška (mėlyna linija) intervale $[0; 11.25]$. Intervalo kompleksiskumas yra 8.



2.6 pav. Funkcijos aproksimavimas eksponenčių suma (1 intervalas)

Gaunamos absoliutinės paklaidos neviršija 0.0065 (2.7 pav.):



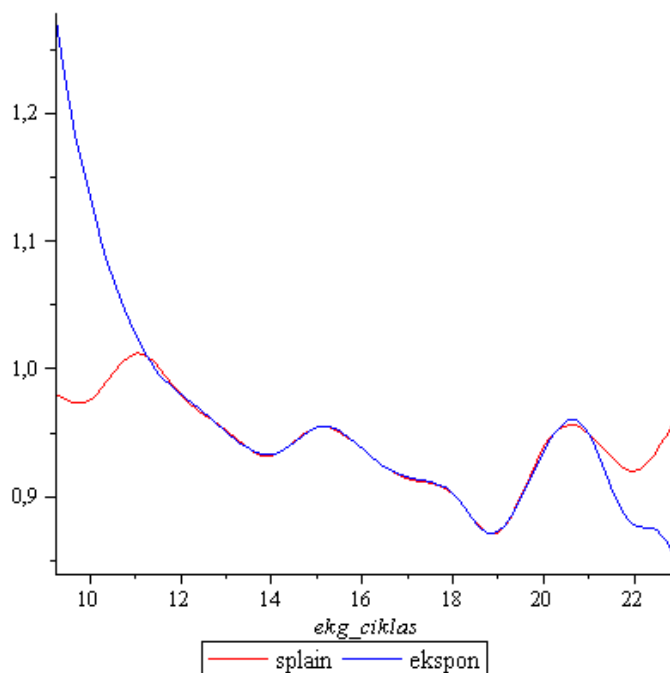
2.7 pav. Aboliutinių paklaidų grafikas (1 intervalas)

2-ame intervale [11.25; 21] kompleksiškas pakinta ir yra aprašomas funkcijos, sudarytos iš 7 ekponenčių sumos ($m=7$), dalimi:

$$\begin{aligned}
f(x) = & (0.055702 - 5.9530 \cdot 10^{-100} I) e^{(-0.84930 + 0.0I)x} + (0.95586 + 5.4502 \cdot 10^{-100} I) e^{(-0.0065984 + 0.0I)x} + \\
& + (0.0016608 + 0.0026499I) e^{(0.2133I + 1.2118I)x} + (-0.0023028 - 0.00010532I) e^{(0.15897 + 2.4057I)x} + \\
& + (-0.00039906 + 5.7 \cdot 10^{-101} I) e^{(0.23628 + 4.1888I)x} + (-0.0023028 + 0.00010532I) e^{(0.15897 - 2.4057I)x} + \\
& + (0.0016608 - 0.0026499I) e^{(0.2133I - 1.2118I)x}
\end{aligned}$$

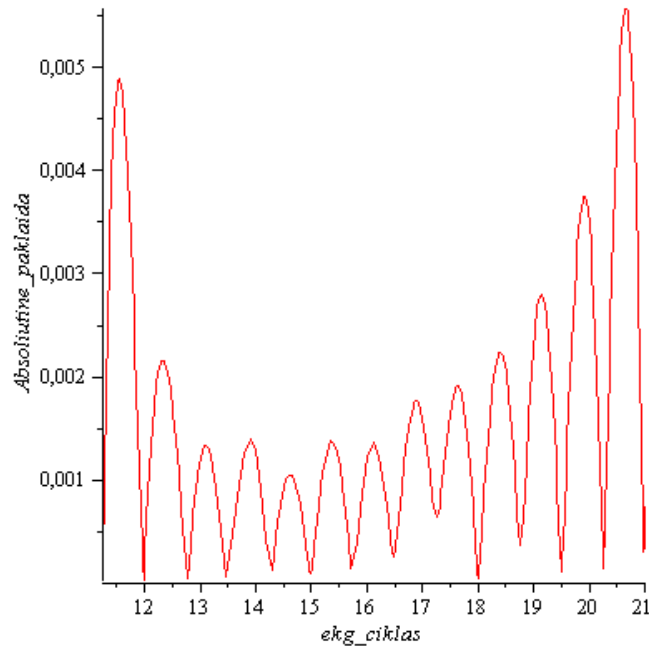
Pasinaudoję Eulerio formule, šią išraišką taip pat galime parašyti be kompleksinių skaičių:

$$\begin{aligned}
f(x) = & -0.000399 \sinh(0.236 x) \cos(4.19 x) \\
& + 0.00332 \sinh(0.213 x) \cos(1.21 x) \\
& - 0.00530 \cosh(0.213 x) \sin(1.21 x) \\
& - 5.70 \cdot 10^{-101} \cosh(0.236 x) \sin(4.19 x) \\
& + 0.0557 \cosh(0.849 x) - 0.956 \sinh(0.00660 x) \\
& + 0.956 \cosh(0.00660 x) - 0.0557 \sinh(0.849 x) \\
& - 0.00530 \sinh(0.213 x) \sin(1.21 x) \\
& - 5.70 \cdot 10^{-101} \sinh(0.236 x) \sin(4.19 x) \\
& + 0.000211 \sinh(0.159 x) \sin(2.41 x) \\
& - 0.000399 \cosh(0.236 x) \cos(4.19 x) \\
& - 0.00461 \cosh(0.159 x) \cos(2.41 x) \\
& + 0.00332 \cosh(0.213 x) \cos(1.21 x) \\
& - 0.00461 \sinh(0.159 x) \cos(2.41 x) \\
& + 0.000211 \cosh(0.159 x) \sin(2.41 x)
\end{aligned}$$



2.8 pav. Funkcijos aproksimavimas eksponenčių suma (2 intervalas)

Šiuo atveju gaunamos absoliutinės paklaidos neviršija 0.006:



2.9 pav. Aboliutinių paklaidų grafikas (2 intervalas)

3-čiame intervale vėl gauname funkciją, kurios kompleksiskumas 7:

$$\begin{aligned}
 f(x) = & (0.92799 + 1.0 \cdot 10^{-102} I) e^{(0.013856 + 0.01I)x} + (0.015698 - 0.0045204I) e^{(-0.92894 + 1.6354I)x} + \\
 & + (-0.0047254 + 0.011301I) e^{(0.022973 + 1.6637I)x} + (0.000030862 - 0.00013668I) e^{(0.47402 + 2.9812I)x} + \\
 & + (0.000030862 + 0.00013668I) e^{(0.47402 - 2.9812I)x} + (-0.0047254 - 0.011301I) e^{(0.022973 - 1.6637I)x} + \\
 & + (0.015698 + 0.0045204I) e^{(-0.92894 - 1.6354I)x}
 \end{aligned}$$

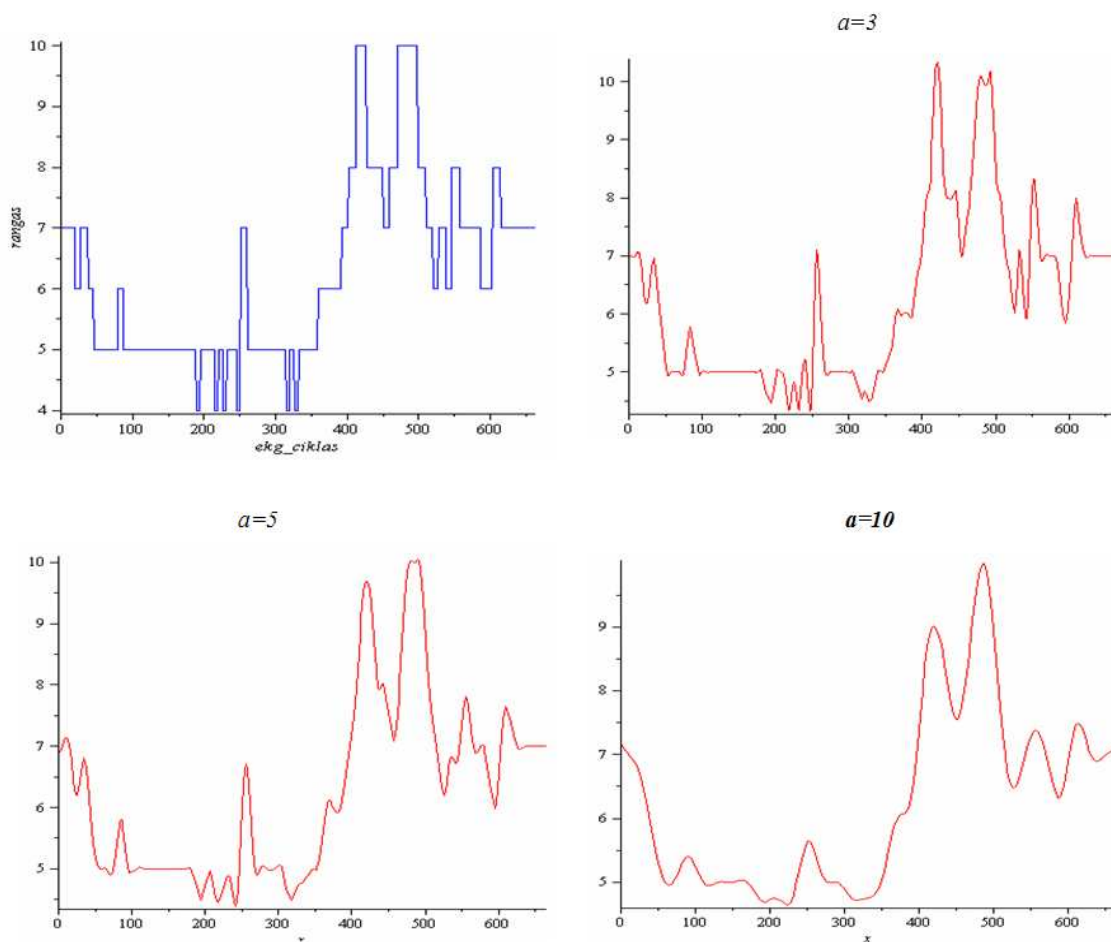
Taip procesas tęsiamas toliau visiems (šiuo atveju 135) intervalams tiriant konkretaus paciento elektrokardiogramos parametrų kompleksiskumą.

2.3 KOMPLEKSIŠKUMO INTEGRALINIS VIDURKINIMAS

Medikams pageidaujant, kompleksiskumo grafiką vaizduosime ir kitu būdu t.y. atliekant integralinį vidurkinimą. Šio metodo esmė yra plotų po kompleksiskumo kreivę skaičiavimas, pasirinkus pastovaus ilgio intervalą $2a$. Gautas plotų reikšmės atidedamos šių intervalų viduryje, o gautieji taškai interpoliuojami splineu (3-čios eilės kūbiniu). Tolydžiuoju atveju būtų gaunama nauja

funkcija $F(x) = \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f(y) dy$. Priklausomai nuo to, kokio ilgio pasirenkame a parametą, gauname

skirtingo detalumo lygio grafikus. 2.10 paveiksle matome, kokią įtaką RR parametro kompleksiskumo vaizdavimui daro a parinkimas, kai jis yra 3, 5 ir 10 ekg ciklų. Medikai rekomendavo rinktis $a=10$ variantą.



2.10 pav. Kompleksiškumo integralinis vidurkinimas

3. PROGRAMINĖ REALIZACIJA IR INSTRUKCIJA VARTOTOJUI

Maple – viena geriausių universalių matematinių sistemų. Apimtimi ir galimybėmis jai artimos *MathCad* ir *Mathematica*, bet darbas su *Maple* patogesnis. Ši sistema dažnai charakterizuojama kaip simbolių skaičiavimų lyderis. Savo darbe naudojau šį paketą, nes *Maple* turi patogią *linalg* paprogramę, apimančią tiesinę algebrą bei vektorinį skaičiavimą, joje patogiu dirbti su matricomis, paprasta braižyti grafikus, kas buvo labai svarbu šiame darbe. Skaičiavimus taip pat labai palengvino standartinės funkcijos *linsolve* – sprendžia tiesinę lygčių sistemą, *collect* – surenka koeficientus prie vienodų polinomo laipsnių, *map* – pritaiko procedūrą kiekvienam išraiškos operandui, *ln* – randa kompleksinio skaičiaus logaritmą ir kt. Aritmetiniai apskaičiavimai *Maple* gali būti vykdomi bet kokių norimų tikslumu (gali būti šimtai ar tūkstančiai ženklų po kablelio). Tačiau sistema turi ir trūkumą, kad tiek didelio, tiek ir mažesnio tikslumo aritmetiniai skaičiavimai yra vykdomi sąlyginai lėčiau ir tai nėra stiprioji šio paketo pusė.

Visą atliktą tyrimą programoje suskirsčiau į dvi dalis. Pirmojoje dalyje yra skaičiuojami Henkelio rangai t.y. kompleksiskumas ilgiems elektrokardiogramos įrašams bei vaizduojami tiriamieji

parametrai. Vartotojas gali pasirinkti, kokiems parametrams - AR, RR ar ŠSD bus skaičiuojamas kompleksiskumo grafikas. Galima keisti žingsnį h , skaičiavimų tikslumą ε . Taip programoje galima pasirinkti norimą tirti pacientą. Kompleksiškumas taip pat vaizduojamas atlikus integralinį vidurkinimą. Tačiau vartotojo sąsajos langas dar nėra sukurtas, o šiuos veiksmus reikia vykdyti *Maple* sistemos darbiniam lange. Sąsajos nekūrėme, nes darbo tikslas kol kas buvo analizinis, tiriamasis, kuris vėliau, gavus daugiau praktinių rezultatų, bus pristatytas medicams kaip taikomoji programa.

Antroje programos dalyje yra atliekamas parametrų funkcijos aproksimavimas eksponenčių suma pasirinktam baigtinio kompleksiskumo intervalui. Intervalą nurodo vartotojas. Rezultatuose galime matyti reikiamos aproksimacijai eksponenčių sumos funkcijos išraišką, taip pat jos trigonometrinę formą be kompleksinių skaičių. Vartotojui pateikiamas intervalo aproksimacijos grafikas bei absoliutinių paklaidų grafikas.

Darbą su programa reikia pradėti atsidarius failą *kompleks.mw*, padarius reikiamus pasirinkimus (nurodomas pacientas, tiriamas parametras ir t.t.) bei spausti *Maple* sistemos vykdymo komandos mygtuką.

IŠVADOS

- 1) Realizuota funkcijų reiškinio eksponentėmis metodika vertinant kompleksiskumą. Ji taikyta EKG parametrų.
- 2) Nustatėme, kad intervalų tarp R dantelių (taip pat ŠSD) kompleksiskumas skiriasi priklausomai nuo to, ar EKG fiksuojama įprastomis sąlygomis ar fizinio krūvio metu. Fizinio krūvio metu gaunamas mažesnis intervalų tarp R dantelių (taip pat ŠSD) kompleksiskumas. Gautos tendencijos būdingos daugeliui pacientų.
- 3) Pastebėjome, kad fizinio krūvio metu gaunamas pastovesnis intervalų tarp R dantelių kompleksiskumas nei įprastomis sąlygomis. R dantelių amplitudžių atveju tokių ryškių tendencijų nėra.
- 4) Parametrų kompleksiskumo vertinimas gali būti naudingas pacientų širdies bei plaučių sistemų darbo stebėjimui veloergometriniu mėginio metu.

PADĖKA

Nuoširdžiai dėkoju savo magistrinio darbo vadovui prof. Z. Navickui už visokeriopą pagalbą, konsultavimą matematine tematika ir didelę kantrybę. Taip pat dėkoju prof. A. Vainorui už įdomios magistrinio darbo temos pasiūlymą ir konsultavimą medicinos tematika bei dr. L. Gargasui ir KMU kardiologijos institutui už aprūpinimą duomenimis. Mano magistrinio darbo rašymas būtų neįmanomas be šių žmonių pagalbos.

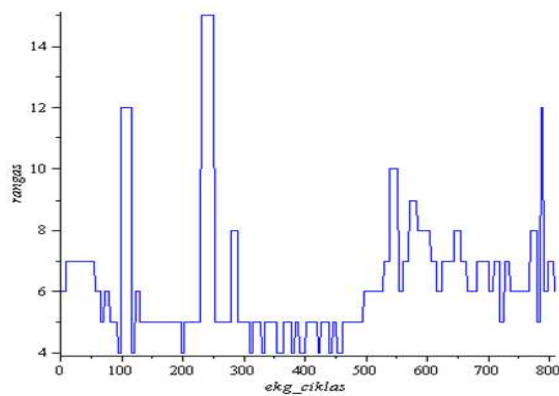
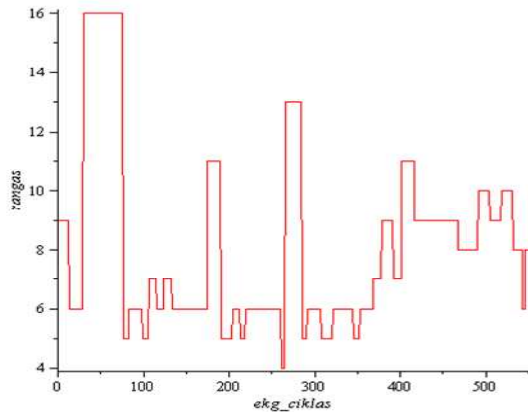
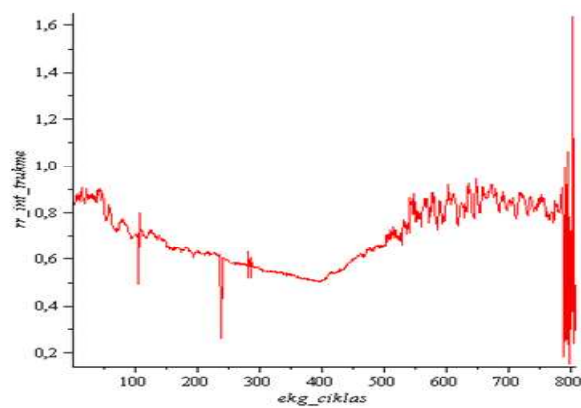
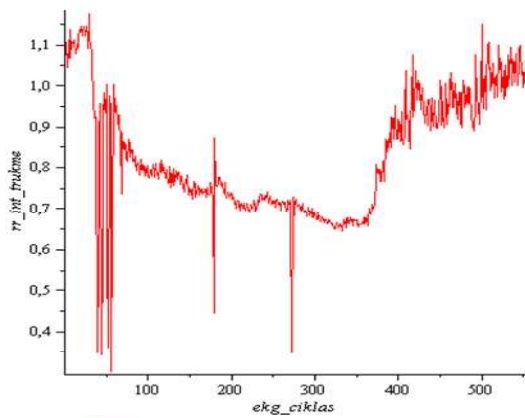
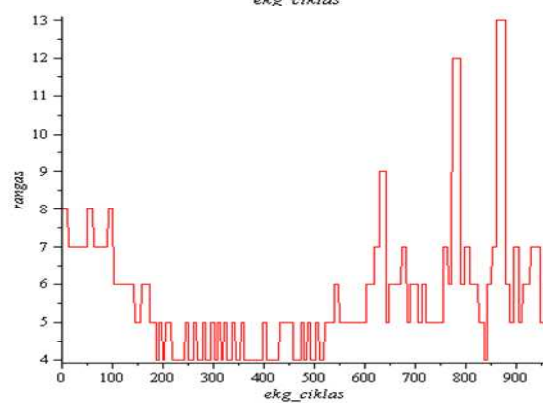
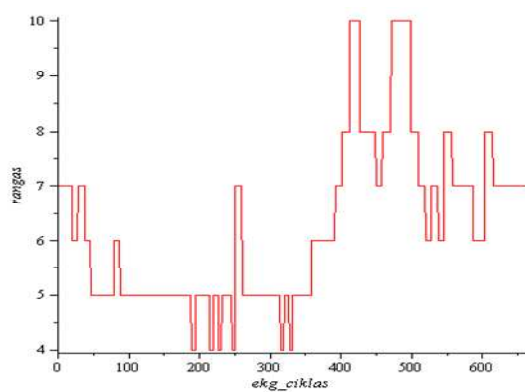
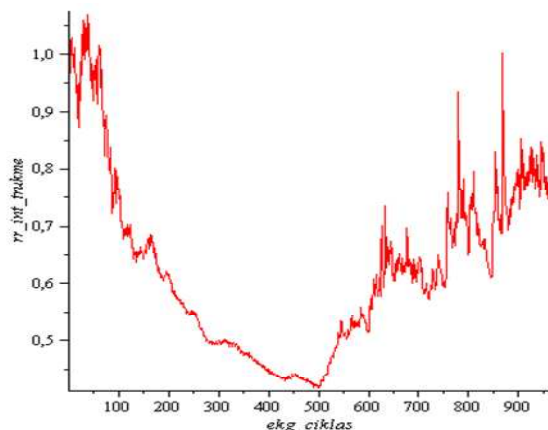
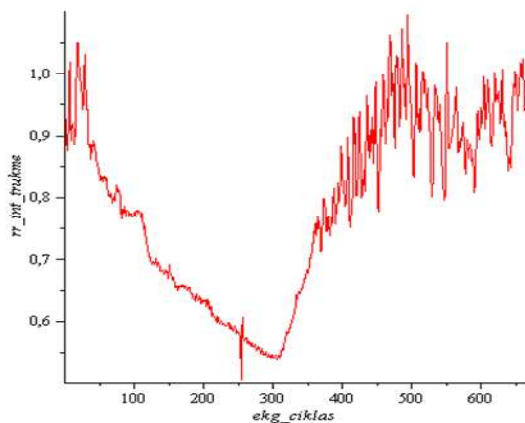
LITERATŪRA

1. Lipman B. S. and Massie E. Clinical Scalar Electrocardiography. Year Book Medical Publishers, Chicago, USA, 1975.
2. Vainoras A. Veloergometrija ir sisteminių vertinimų galimybė / Vainoras A., Gargasas L., Jaruševičius G., Šilanskienė A., Miškinis V., Ruseckas R., et. al.// Lithuanian journal of Cardiology 1999; 6(4): p. 760–763.
3. Bikulčienė L. Realization of operator expressions for the solutions of differential equations, Lietuvos matematikos rinkinys, Lietuvos matematikų draugijos XLIII konferencijos mokslo darbai. Matematikos ir informatikos institutas, Lietuvos matematikų draugija, VU. ISSN 0132-2818. 2002, T. 42, spec. nr. p. 159-164.
4. Bikulčienė L., Marcinkevičius R., Navickas Z.. Algorithm of operator method for solving differential equations. Algorithmic Information Theory: Conference proceedings.16th-18th May 2005, University of Vaasa, Finland, University of Vaasa, Vaasa Polytechnic, Rovaniemi Polytechnic. University of Vaasa, 2005. ISBN 952-476-124-6. p. 31-40. Prieiga per internetą: <<http://www.uwasa.fi/ait05/index.htm>>.
5. Bikulčienė L., Marcinkevičius R., Navickas Z. Adapted operator method for solving of ordinary differential equations. ITI 2005, Proceedings of the 27th International Conference on Information Technology Interfaces, June 20 - 23, 2005, Cavtat, Croatia / editors: Vesna Lužar-Stiffler, Vesna Hljuz Dobric. Zagreb, SRCE University Computing Centre, University of Zagreb, 2005. ISBN 953-7138-02-X. p. 611-616. Prieiga per internetą: <<http://iti.srce.hr>>.
6. Bikulčienė L., Marcinkevičius R., Navickas Z. Computer realization of the operator method for solving of differential equations. Lecture Notes in Computer Science : Numerical Analysis and its Applications: third international conference, June 29 - July 3, 2004, Rousse, Bulgaria: revised selected papers. ISSN 0302-9743. 2005, Vol. 3401. p. 179-186.
7. Navickas Z., Bikulčienė L.. Expressions of solutions of ordinary differential equations by standard functions. Proceedings of the 10th International Conference Mathematical Modelling and Analysis 2005 and 2nd International Conference Computational Methods in Applied Mathematics, June 1-5, 2005, Trakai, Lithuania. Vilnius, Technika, 2005. ISBN 9986-05-924-0. p. 143-150. Prieiga per internetą: <http://www.techmat.vtu.lt/~art/proc/index.html>
8. Navickas Z.. Adapted formal algorithms for the solution of differential equations. International Journal of differential equations and applications, Volume 1A No. 4 2000, Plodiv, Bulgaria. p. 415-424.

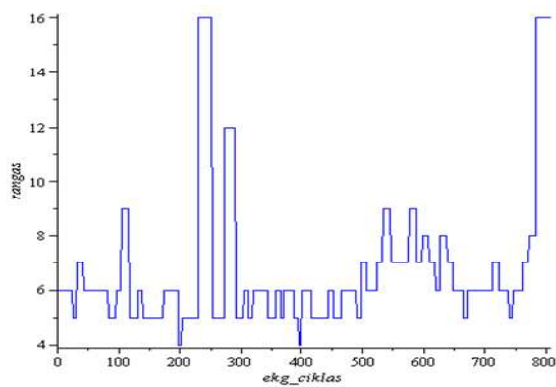
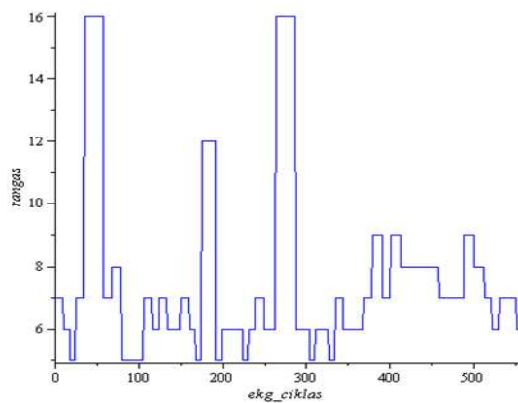
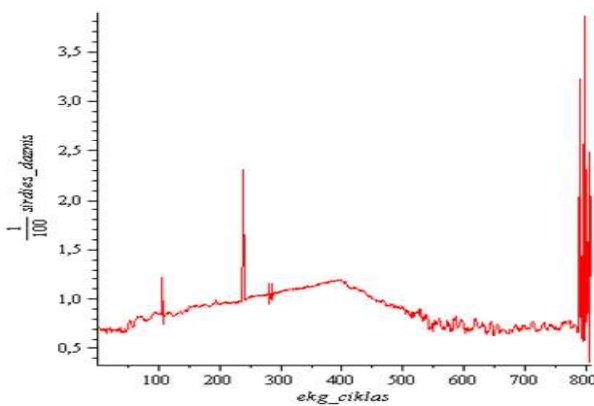
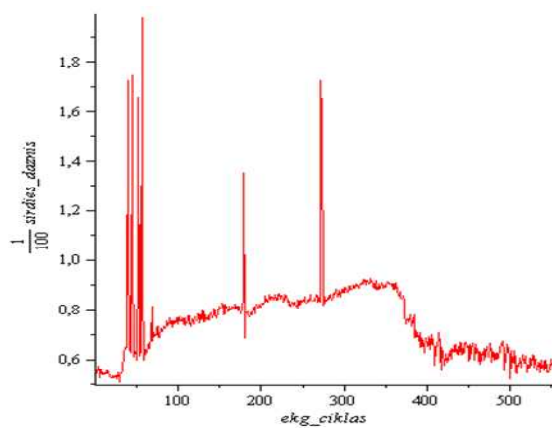
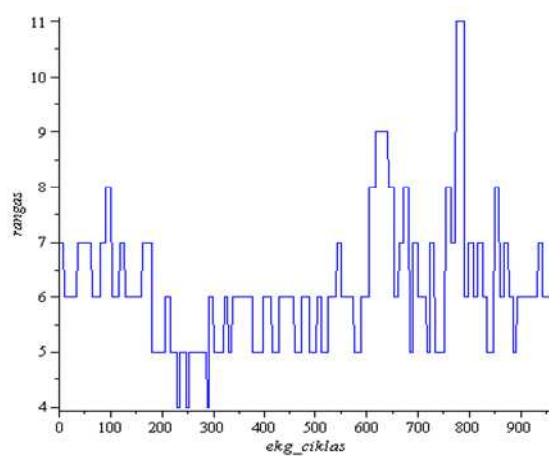
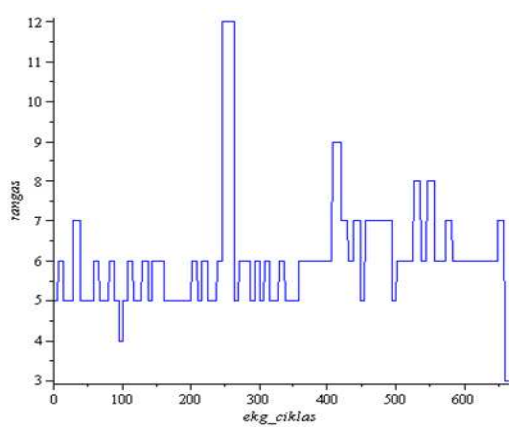
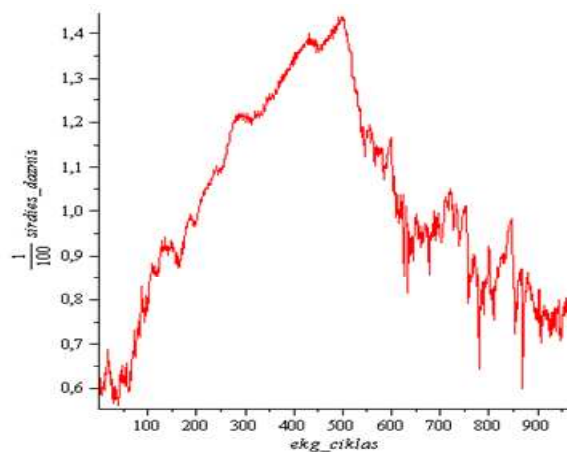
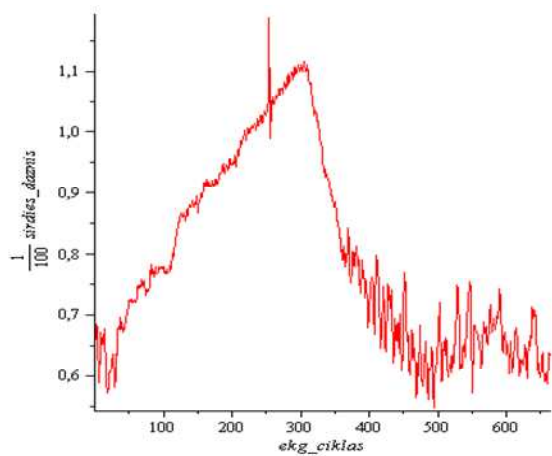
9. Petkevičiūtė D., Bikulčienė L., Navickas Z. Expression the functions of the finite H-rank as the linear combinations of exponential functions. Matematika ir matematinis modeliavimas-2006, Kaunas, Vtex, p. 91-95
10. Plukas K. Skaitiniai metodai ir algoritmai. Kaunas, 2001. 549 p. ISBN 955 – 03 – 061 –5.
11. Kvedaras B. Skaičiavimo metodai / B. Kvedaras, M. Sapagovas. Vilnius, 1974. 515 p.
12. Šliupaitė A., Navickas Z., Vainoras A. Kai kurių EKG parametrų tyrimas taikant Henkelio matricas // // Biomedicininė inžinerija = Biomedical engineering : tarptautinės konferencijos pranešimų medžiaga / Kauno technologijos universitetas. - ISBN 9955-25-151-4. - Kaunas, 2007, p. xxx-xxx.
13. Liepos Bikulčienės daktaro disertacija „Netiesinių diferencialinių lygčių tyrimas operatoriniu metodu“ (fiziniai mokslai, informatika). Kaunas, 2007. p. 55-56.
14. Poderys J. Kineziologijos pagrindai – Mokomoji knyga. Kaunas, 2004. p. 234.

1 PRIEDAS. RR, AR IR ŠSD KOMPLEKSIŠKUMO VERTINIMO PAVYZDŽIAI

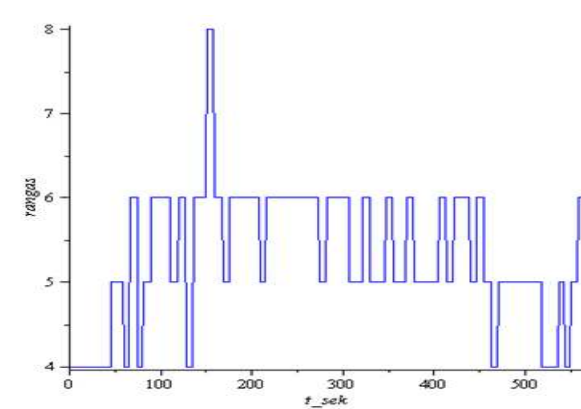
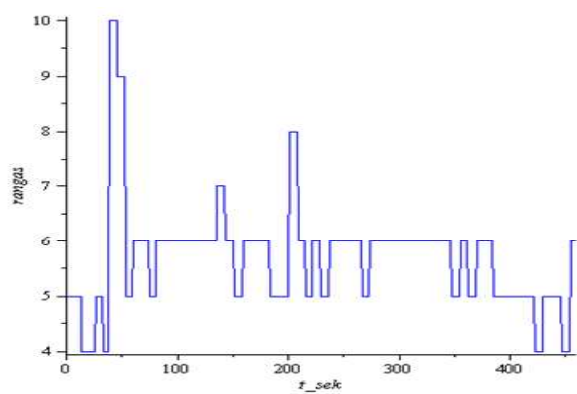
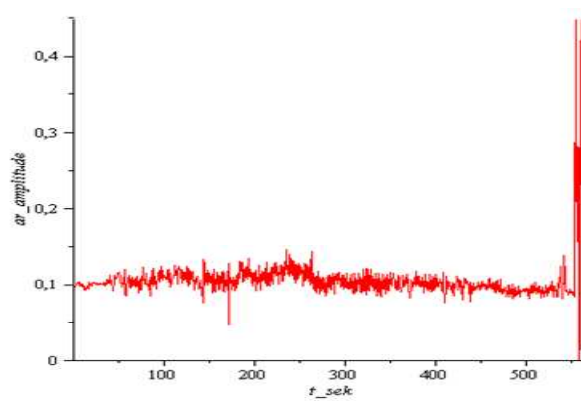
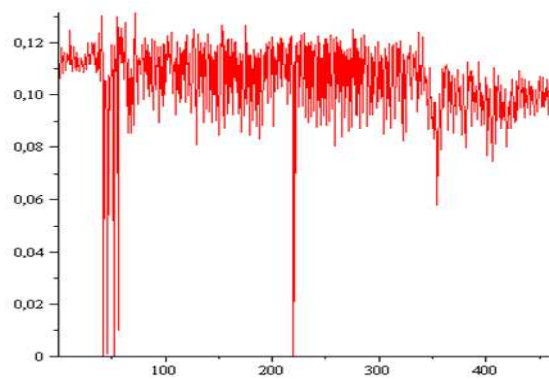
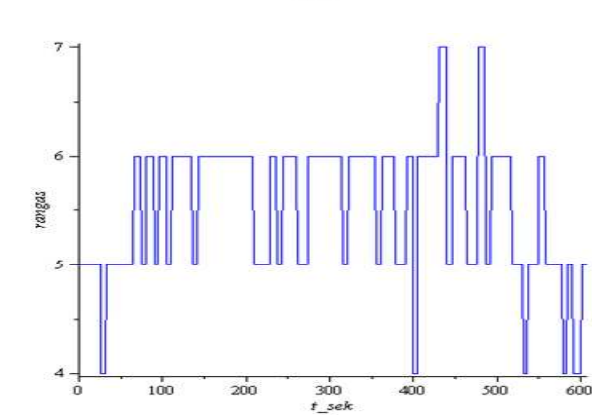
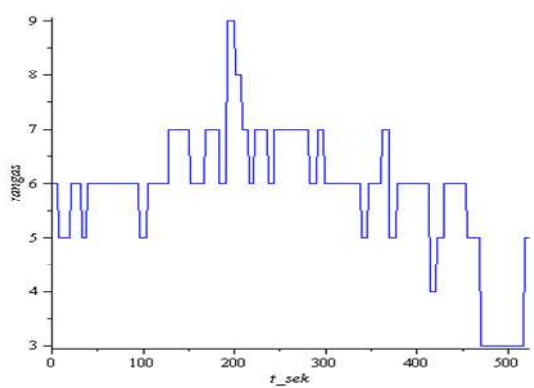
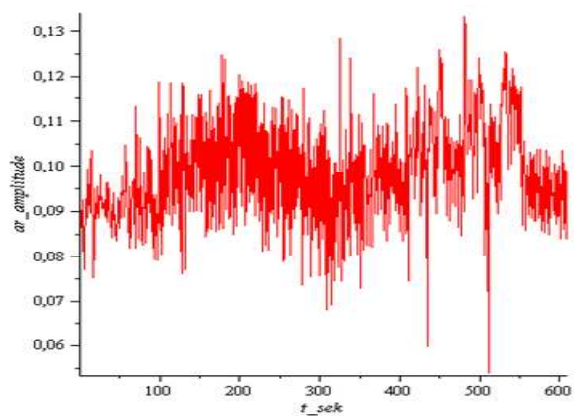
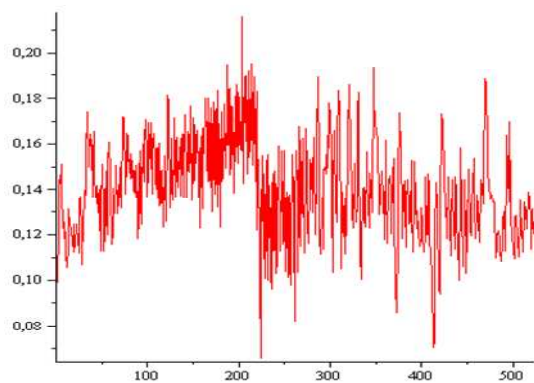
RR parametras



ŠSD parametras



AR parametras



2 PRIEDAS. PROGRAMŲ TEKSTŲ IŠTRAUKOS

Failas kompleks.mw. Ištraukos iš elektrokardiogramos parametrų kompleksiško tyrimo realizacijos *Maple* kalba, taikant Henkelio matricių ir reiškimo eksponenčių suma metodiką.

```

Digits := 100;
with(ExcelTools); L
:= Import("Duomenys.xls", "Parametrai", "A1");

          L:=Array(%id = 150832072)

# Pasirenkame duomenis ( 1 - 8 )
n:=5:
# Pasirenkame duomenis

T := Vector[row](L[4 .. 974, n]*0.001):
T1:=convert(T, Array):
ilgis:=ArrayNumElems( T1, NonZero):
T:=Vector[row](L[4..ilgis+3,n]*0.001);
plot([seq([i,T[i]],i=1..ilgis)], labels = [ekg_ciklas, rr_int_trukme],
labeldirections = [horizontal, vertical]);
u:=Vector[row](ilgis,n->n):
with(CurveFitting):
f1(x) :=spline(u,T,x):
plot(f1(x), x=3.75..20):

          T:=Vector[row](%id = 152336956)

> h:=1:
printlevel:=0:
tikslumas:=10^(-10):
dem:=0:
ind:=0:
M:=array(1..ilgis):
X[0]:=0:
      while X[ind]<ilgis do
        g:=(j)->eval(f1(x),x=h*(j-1+dem)):
N:=32:
v:=Vector[row](N,g):
d:=1:
poz:=0:
N:=if(modp(N,2)=0, N-1, N):
  for n from 1 to (N/2+1) while poz<3 do
    f:=(i,j) -> v[i+j-1]:
    A:=linalg[matrix](n,n,f):
    d:=linalg[det](A):
    d_modulis:=evalf(abs(d)):
    DET[n]:=d:
    poz := if(d_modulis<tikslumas,poz+1,0):
  end do:
m:=n-1-pez:
dem:=dem+2*m-1;
ind:=ind+1:
M[ind]:=m:

f(rho):=(i,j) -> if(i=m+1,rho^(j-1),v[i+j-1]):
B:=linalg[matrix](m+1,m+1,f(rho)):
d:=collect(linalg[det](B),rho):
lambda:=map(allvalues,[solve(d)]):
f:=(i,j) -> lambda[j]^(i-1):
C:=linalg[matrix](m,m,f):

```

```

b:=Vector(m,v[1..m]):
mu:=linalg[linsolve](C,b):
f:=(j) -> evalf((1/h)*ln(abs(lambda[j])) + (I/h)*argument(lambda[j])):
lambda2:=Vector[row](m, f):
f2(x):=add(mu[k]*exp(lambda2[k]*x),k=1..m):
X[ind]:=h*dem:
F[ind]:=f2(x):
  end do:
i:=0: for k from 1 to ind-1 do
  while i<X[k] do
    GR[i]:=M[k]: # cia tiesiog priskirti funkcija,o ne masyva
    i:=i+1:
  end do: end do:
#plot([seq([X[i],M[i]],i=1..ilgis)],style=patch) :
plot([seq([i,GR[i]],i=0..ilgis)], labels=[ekg_ciklas,
rangas],labeldirections=[horizontal,vertical],color=blue);
print(Viso intervalu yra); ind; ;

  # Pasirenkame intervala
interv := 1;
  # Pasirenkame intervala

plot(f1(x), x = X[interv-1] .. X[interv]);
Ftrig := convert(simplify(convert(F[interv], trig)), float, 3); ekspon_israiska :=
convert(F[interv], float, 5);
print();
Ftrig2 := unapply(Ftrig(x), x);
Ftrig3 := evalc(Re(Ftrig)); print();
print(Rangas);
M[interv];
plot(Ftrig2(x), x = 0 .. h*(2*M[interv]-1), color = blue);
plot(Ftrig2(x-X[interv-1]), x = X[interv-1] .. X[interv], color = blue);
plot([f1(x), evalc(Re(Ftrig2(x-X[interv-1])))], x = X[interv-1] .. X[interv],
color = [red, blue], legend = ["splain", "ekspon"], labels = [ekg_ciklas, ""]);
absol := abs(f1(x)-Ftrig2(x-X[interv-1]));
plot(absol(x), x = X[interv-1] .. X[interv], labels = [ekg_ciklas,
Absoliutine_paklaida], labeldirections = [horizontal, vertical]);

```

3 PRIEDAS STRAIPSNIS: KAI KURIŲ EKG PARAMETRŲ TYRIMAS TAIKANT HENKELIO MATRICAS

Publikacijos rūšis: Straipsnis recenzuojamoje Lietuvos tarptautinės konferencijos medžiagoje

Leidinyje: Biomedicininė inžinerija = Biomedical engineering : tarptautinės konferencijos pranešimų medžiaga / Kauno technologijos universitetas. ISBN 9955-25-151-4. Kaunas, 200, p. xx-xx

Kai kurių EKG parametrų tyrimas taikant Henkelio matricas

A.Šliupaitė^{1,2}, Z.Navickas¹, A.Vainoras², L.Gargasas²

¹Kauno Technologijos universitetas, ²KMU Kardiologijos institutas

Ivadas. Žinome, kad daugelį tolydžių funkcijų galima išreikšti baigtine eksponenčių suma. Kiek reikia eksponenčių, kad funkciją ar jos dalį būtų galima išreikšti eksponentėmis, parodo kompleksiškas, nustatomas skaičiuojant Henkelio matricų rangus. Šiuo atveju tirsime elektrokardiogramos R dantelio amplitudžių (aukščių) kompleksškumą atskiruose intervaluose.

Darbo tikslas. Ištirti, kiek komponentų dalyvauja užrašant EKG R dantelio amplitudes(aukščius), kai užrašoma seka yra suskaidoma pasirinkto ilgio intervalais. Tą patį padarysime ir kai EKG užrašoma krūvio metu.

Metodika. Tarkime, kad turime funkciją, kurią galima išreikšti baigtine eksponenčių suma:

$f(x) = \sum_{r=1}^m \mu_r e^{\lambda_r x}$, $\lambda_r \in C$. Turime duomenis $(h_0 \ h_1 \ h_2 \ \dots \ h_n)$, kur $h_k = f(hk)$, o h – fiksuotas teigiamas skaičius.

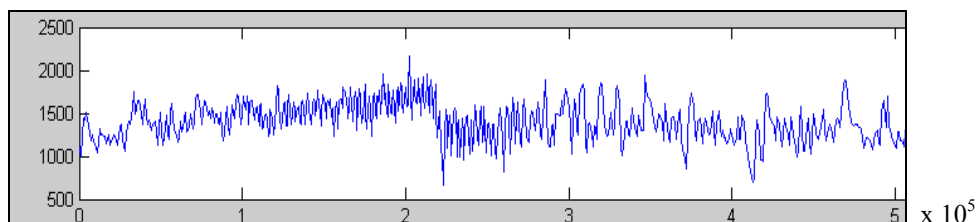
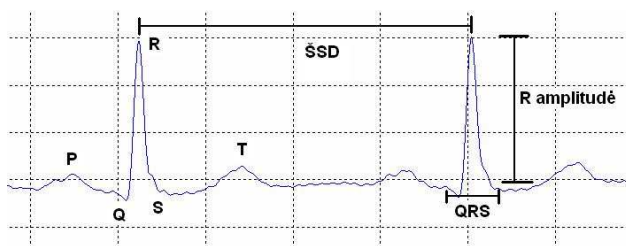
Tuomet konstruojame Henkelio matricas:

$$H^{(k)} = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_{k-1} \\ h_1 & h_2 & \dots & h_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{k-1} & h_k & \dots & h_{2k-2} \end{pmatrix}$$

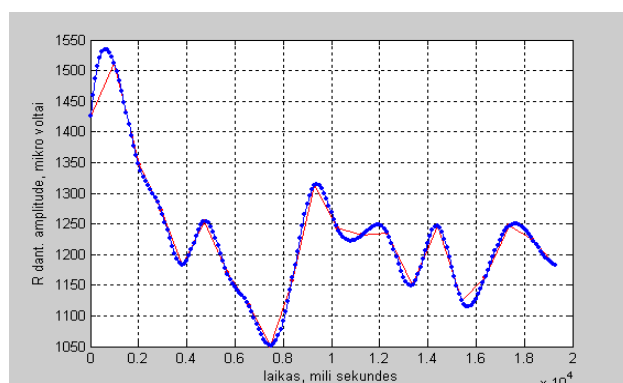
Jei duotą funkciją $f(x)$ galima išreikšti eksponenčių suma, tai šios sumos dėmenų skaičius lygus Henkelio matricos rangui $m = \max_{k \in N} \text{rang } H^{(k)}$, t.y. randamas toks m , kad $\det H^{(m)} \neq 0$, o $\det H^{(m+r)} \equiv 0$, $\forall r \in N$.

Henkelio matricos rangas m ir nusako funkcijos (dinaminės sistemos) kompleksškumą.

Rezultatai. Turime elektrokardiogramos R dantelio amplitudžių (aukščių) (mikro voltais) ~10 min. seką realiu laiku (milisekundėm).



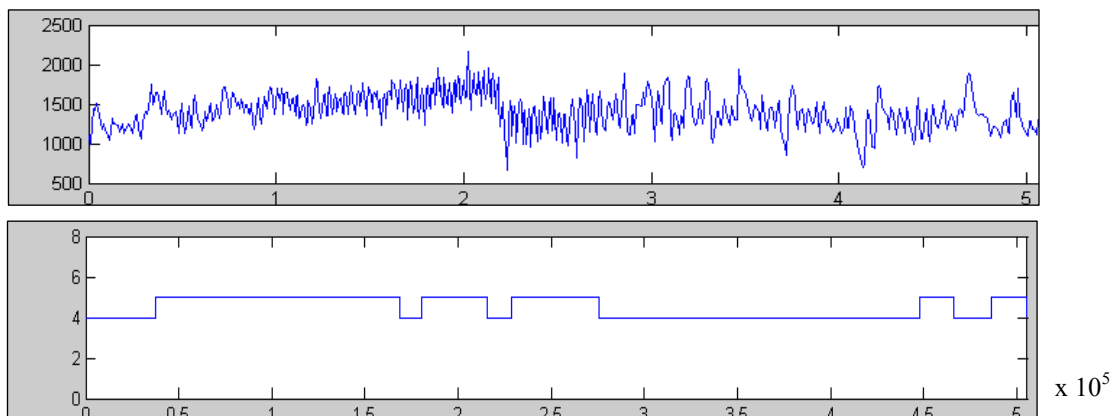
Suskaidykime šią seką į pasirinkto ilgio (pvz. 20 EKG ciklų) intervalus ir atlikime interpoliaciją (splainais).



Paskaičiavę grafike parodytam duomenų intervalui Henkelio matricių determinantus, gauname tokią seką:

1 eilės	2 eilės	3 eilės	4 eilės	5 eilės
1426	10893	236.19	0.055164	2.8221e-013

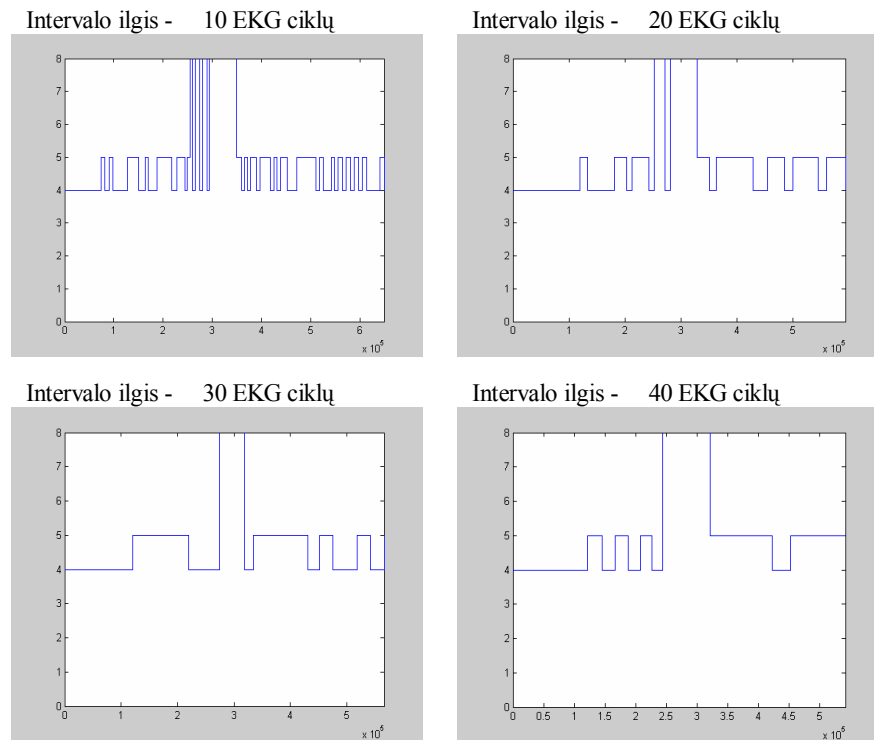
Kai determinantas mažesnis nei 10^{-12} eilės, tada jį laikome lygiu nuliui. Todėl galime daryti išvadą, jog šiuo atveju R dantelių intervalo kompleksiškumas yra 4. Paskaičiavę kompleksiškumą visiems sekos intervalams (ilgis 20 EKG ciklų), turime tokius rezultatus:



Iš pateiktų grafikų matyti, kad po maždaug 4,5 minučių, kai širdį (dinaminę sistemą) nustoje veikęs fizinis krūvis, kompleksiškumas tampa mažesnis t.y. nuo 5 komponentių pereinama prie 4. Pastebėjome, kad analogiškas R dantelių

kompleksiškumo padidėjimas būdingas daugeliui pacientų, kai EKG užrašoma esant fiziniam krūviui. Tačiau detalūs tyrimai šioje srityje nebuvo atlikti. Būtina paminėti, kad intervalų ilgių parinkimas daro didelę įtaką kompleksiškumui, tačiau tendencijos gali būti panašios. Geriausi rezultatai, išryškinantys tendencijas, kai širdis veikiama fizinio krūvio arba EKG užrašoma be jo, gaunami prie 20 EKG ciklų intervalo.

Iš grafikų galime matyti kokią įtaką kompleksiškumui daro intervalų parinkimas:



Analogišką tyrimą galima atlikti dar vienu EKG parametru t.y. laiko intervalais tarp R dantelių amplitudžių.

Išvados:

1. **Skaičiuodami Henkelio matricių determinantus įvertinome EKG R dantelio amplitudės kompleksiškumą.**
2. **Nustatėme, kad R dantelio kompleksiškumas skiriasi priklausomai nuo to, ar EKG fiksuojama įprastomis sąlygomis ar fizinio krūvio metu. Pastebėjome, kad fizinio krūvio metu gaunamas didesnis R dantelių kompleksiškumas. Gautos tendencijos būdingos daugeliui pacientų.**

Padėka. Straipsnis parengtas vykdant Lietuvos valstybinio mokslo ir studijų fondo finansuojamą projektą (sutarties Nr. B-02/2007).

LITERATŪRA:

1. Bikulčienė L., Petkevičiūtė D. Eilutės reiškimo eksponentinėmis funkcijomis algoritmas // Taikomoji matematika = Applied mathematics: VI studentų konferencijos pranešimų medžiaga / Kauno technologijos universitetas. – ISBN 9955-25-044-5. – Kaunas, 2006, p. 53-54

2. Bikulčienė L., Navickas Z. Laipsninių eilučių reiškimas baigtine eksponentinių funkcijų suma. Lietuvos matematikos rinkinys, 44 t. Vilnius, 2004, p.138-143.
3. L.Bikulciene, Z.Navickas. Expressions of solutions of ordinary differential equations by standard functions. Proceedings of the 10th International Conference MMA2005&CMAM , Trakai, 2005. Technika, p.485-491.

Analysis of some ECG parameters using Hankel matrices

A.Šliupaitė, Z.Navickas, A.Vainoras, L.Gargasas

Kaunas University of Technology, Institute of Cardiology, Kaunas University of Medicine, Lithuania

The main aim of this work was to adapt a special method, based on computing Hankel matrices determinants, to evaluating complexity of some ECG parameters, especially R wave amplitude. Complexity basically shows how many components participate in the work of a dynamic system. We found, that during intensive work, the rank of Hankel matrices, which shows the complexity, have tendency to differ from the rank evaluated in normal conditions.

4 PRIEDAS STRAIPSNIS: ELEKTROKARDIOGRAMOS PARAMETRŲ

KOMPLEKSIŠKUMO TYRIMAS

Publikacijos rūšis: Straipsnis atiduotas spaudai.

Leidinyje: Konferencijos medžiaga „Matematika ir matematikos dėstymas – 2008“

Elektrokardiogramos parametrų kompleksiško tyrimas

A. Šliupaitė^{1,2}, Z. Navickas¹, A. Vainoras²

¹Kauno technologijos universitetas

²Kauno medicinos universitetas

1. Įvadas. Medicinoje duomenys dažniausiai yra analizuojami statistiniais metodais. Tačiau šiame darbe EKG parametrus tirsime naudodamiesi algebriniais metodais, nes į kiekvieno žmogaus organizmą žvelgiant kaip į sudėtingą ir unikalią kompleksinę sistemą, statistinio tyrimo nepakanka.

2. Tyrimo metodika. 1. Tarkime, kad turime funkciją, kurią galima išreikšti baigtine eksponenčių suma:

$$f(x) = \sum_{r=1}^m \mu_r e^{\lambda_r x}, \lambda_r \in \mathbb{C}. \text{ Tegul duotas tos funkcijos reikšmių rinkinys } (h_0 \ h_1 \ h_2 \ \dots \ h_n), \text{ kur } h_k = f(hk), \text{ o}$$

h – fiksuotas teigiamas skaičius.

Konstruojame Henkelio matricas:

$$H^{(k)} = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_{k-1} \\ h_1 & h_2 & \dots & h_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{k-1} & h_k & \dots & h_{2k-2} \end{pmatrix}$$

Jei duotą funkciją $f(x)$ galima išreikšti eksponenčių suma, tai šios sumos dėmenų skaičius lygus Henkelio matricos rangui $m = \max_{k \in \mathbb{N}} \text{rang } H^{(k)}$, t.y. randamas toks m , kad $\det H^{(m)} \neq 0$, o $\det H^{(m+r)} \equiv 0, \forall r \in \mathbb{N}$.

Henkelio matricos rangas m nusako funkcijos kompleksiskumą. Kompiuterinėje algoritmo realizacijoje sąlyga $\det H_0^{(m+r)} \equiv 0$ keičiama sąlyga $\det H_0^{(m+r)} < \varepsilon, r = m+1, m+2, \dots, m+l, l \in \mathbb{N}$.

2. Panaudoję algebrinių lygčių sprendimo metodus, surandame algebrinės lygties

$$\begin{vmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_m \\ h_1 & h_2 & \dots & h_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m-1} & h_m & \dots & h_{2m-1} \\ 1 & \rho & \dots & \rho^m \end{vmatrix} = 0$$

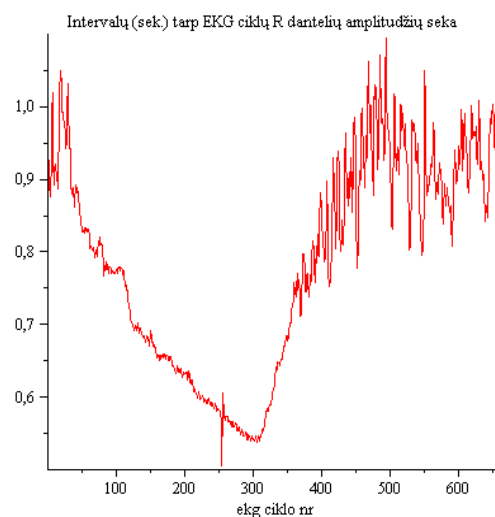
šaknis $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$. Koeficientai $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ randami kompleksinių skaičių aibėje naudojantis sąryšiu $\lambda_r = Ln(\rho_r) = \ln|\rho_r| + i(\arg \rho_r) + 2\pi l$, $l \in \square$, $r = \overline{1, m}$. Parametras l priklauso nuo žingsnio h parinkimo. Pastebėsime, kad prie pakankamai mažo h , $l = 0$.

3. Sudaroma tiesinių lygčių sistema

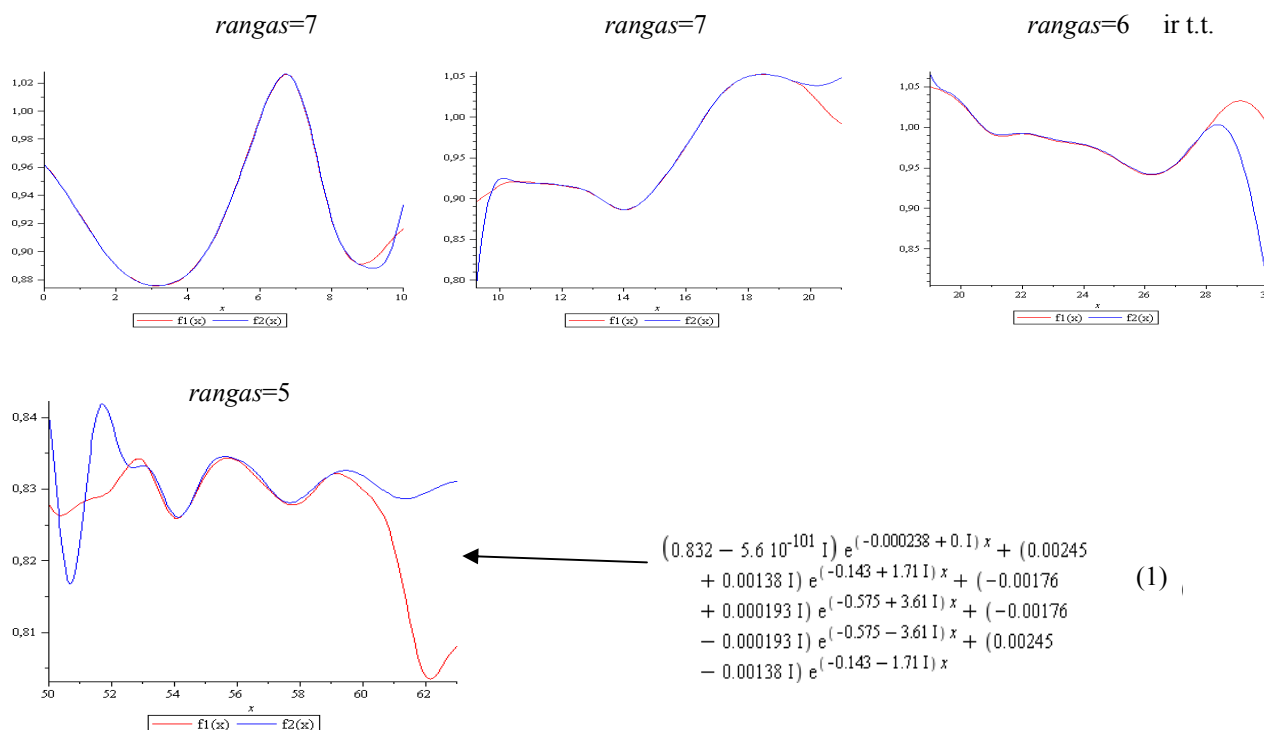
$$\rho_1^j \mu_1 + \rho_2^j \mu_2 + \dots + \rho_m^j \mu_m = h_j, \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Jos sprendimui naudojami tiesinės algebros metodai. Gautieji sprendiniai yra koeficientai $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$.

3. Parametrų kompleksiško tyrimas. Taikant Henkelio matricų bei funkcijų reiškimo eksponentėmis metodiką, yra tiriami žmogaus elektrokardiogramos (EKG) parametrai. Parametrų seką tiriamo dalimis, kadangi kompleksiskumas kinta laike. Pirmiausiai duomenis interpoliuojame kubinėmis kreivėmis. Tai atliekama tam, kad reiškimo eksponentinėmis funkcijomis algoritme galėtume laisvai pasirinkti žingsnio h dydį. Atlikus skaičiavimus pastebėta, kad geriausios aproksimacijos eksponentėmis gaunamos, kai $h = 0.75$. Pavyzdžiui, tirdami intervalus tarp R dantelių amplitudžių konkrečiam pacientui, kai pasirinktas $\varepsilon = 10^{-10}$, gauname tokius rezultatus:



1 pav. Parametrų masyvas

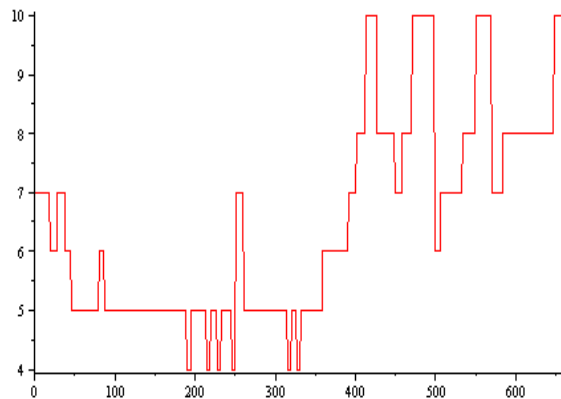


Pritaikę Eulerio formulę (1) išraiškai, gauname:

$$\begin{aligned}
 & -0.832 \sinh(0.000238 x) + 0.832 \cosh(0.000238 x) \\
 & + 0.000386 \sinh(0.575 x) \sin(3.61 x) \\
 & - 0.000386 \cosh(0.575 x) \sin(3.61 x) \\
 & + 0.00276 \sinh(0.143 x) \sin(1.71 x) \\
 & - 0.00276 \cosh(0.143 x) \sin(1.71 x) \\
 & + 0.00490 \cosh(0.143 x) \cos(1.71 x) \\
 & - 0.00490 \sinh(0.143 x) \cos(1.71 x) \\
 & - 0.00352 \cosh(0.575 x) \cos(3.61 x) \\
 & + 0.00352 \sinh(0.575 x) \cos(3.61 x)
 \end{aligned} \tag{2}$$

Pastebėtina, kad kuo didesnis rangas, tuo didesnę funkcijos intervalą galime atstatyti.

Tyrimas leidžia stebėti kompleksiško pokyčius laike tiriamiesiems parametrams, t.y. įprastomis elektrokardiogramos užrašymo sąlygomis, krūvio metu (kai pacientas mina veloergometrą) ir atsigavimo laikotarpiu. Pastebėta, kad kompleksiško kitimo tendencijos šiais periodais skiriasi. Tačiau patirtis rodo, kad dar reikalingi detalesni tyrimai ir klasifikavimai. 1 pav. duomenų masyvui rangų pokyčiai pavaizduoti 2 pav. Matyti, kad po 300 ekg ciklo numerio, prasidėjus atsigavimo laikotarpiui, rangų reikšmės išaugo, o jų kitimas tapo intensyvesnis.



2 pav. Rangų kitimas

4. Išvados.

1. Realizuota funkcijų reiškimo eksponentėmis metodika vertinant EKG parametrų kompleksškumą.
2. Nustatyta, kad tiriamų parametrų kompleksškumas skiriasi priklausomai nuo to, ar EKG fiksuojama įprastomis sąlygomis ar fizinio krūvio metu.

Literatūra

4. Bikulčienė L., Navickas Z. Laipsninių eilučių reiškinys baigtine eksponentinių funkcijų suma. Lietuvos matematikos rinkinys, 44 t. Vilnius, 2004, p.138-143.
5. L.Bikulciene, Z.Navickas. Expressions of solutions of ordinary differential equations by standard functions. Proceedings of the 10th International Conference MMA2005&CMAM. Trakai, 2005. Technika, p.485-491.
6. Petkevičiūtė D., Bikulčienė L., Navickas Z. Expression the functions of the finite H-rank as the linear combinations of exponential functions. Matematika ir matematinis modeliavimas-2006, Kaunas, Vtex, p. 91-95

THE ANALYSIS OF COMPLEXITY OF ELECTROCARDIOGRAM PARAMETERS

A. Šliupaitė, Z. Navickas, A. Vainoras

The analysis of complexity of ECG parameters is presented. We used the method of Hankel matrices in which functions of finite H-rank are written as linear formation of exponential functions.