KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

Kristina Bražėnaitė

EKSTREMALIŲJŲ REIKŠMIŲ SKIRSTINIŲ ASIMPTOTIKA

Magistro darbas

Vadovas
doc. dr. A. Jokimaitis

KAUNAS, 2006

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

TVIRTINU
Katedros vedėjas
prof. dr. J.Rimas
2006 06 01

EKSTREMALIŲJŲ REIKŠMIŲ SKIRSTINIŲ ASIMPTOTIKA

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

Kalbos konsultantas
dr. J. Džežulskienė
2006 05 23

Vadovas
doc. dr. A. Jokimaitis
2006 05 22

Recenzentas
dr. J. Mačys
2006 06 01

Atliko
FMMM 4 gr. stud.
K. Bražėnaitė
2006 05 20

KAUNAS, 2006

KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

Pirmininkas: Leonas Saulis, profesorius (VGTU)

Sekretorius: Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)

Nariai: Algimantas Jonas Aksomaitis, profesorius (KTU)

Vytautas Janilionis, docentas (KTU)

Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU)

Rimantas Rudzkis, habil. dr., banko „DnB NORD“ vyriausiasis analitikas

Zenonas Navickas, profesorius (KTU)

Arūnas Barauskas, dr., UAB „Elsis“ generalinio direktoriaus pavaduotojas

Bražėnaitė K. The asymptotic of the distribution of the extreme values : Master‘s work in applied mathematics / supervisor dr. assoc. prof. A. Jokimaitis; Department of Applied mathematics, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2006. – 80 p.

SUMMARY

The theory of extremes is used in many fields: to forecast natural disasters, to analyse corrosion, air polution, resistance to discontinuity, system reliability and in many others.

Let $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ be a sequence of independent random variables, which distribution function $F(x) = P(X_j < x), \quad j \geq 1$ and density function $p(x) \geq 0$.

We denote

$$Z_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n), \quad \tilde{Z}_n = G_n^{-1}(Z_n);$$
$$W_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n), \quad \tilde{W}_n = g_n^{-1}(W_n);$$

here $G_n(x)$ and $g_n(x)$ are norming functions.

If

$$z_n(x) = n(1 - F(G_n(x))) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z(x) > 0;$$
$$u_n(x) = nF(g_n(x)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u(x) > 0; \quad \forall x \in R,$$

then

$$P(\tilde{Z}_n < x) \to H(x) = e^{-z(x)};$$
$$P(\tilde{W} < x_n) \to L(x) = 1 - e^{-u(x)}.$$

We analyse the estimates of the distribution of the extreme values

$$P(\tilde{Z}_n < x) = e^{-z_n(x)}(1 - R_n(x)), \qquad \frac{z_n^2(x)}{2n\left(1 + \frac{5}{6}\frac{z_n^2(x)}{n}\right)} \leq R_n(x) \leq \frac{5}{6}\frac{z_n^2(x)}{n};$$

$$P(W_n < x) = 1 - e^{-u_n(x)}(1 - R_n(x)), \quad \frac{u_n^2(x)}{2n\left(1 + \frac{5}{6}\frac{u_n^2(x)}{n}\right)} \leq R_n(x) \leq \frac{5}{6}\frac{u_n^2(x)}{n}.$$

The results are shown for identically distributed random variables, nonidentically distributed random variables and many-dimentional random variables. In this paper we prove the theorems, where analogical estimates for densities of extreme values are obtained. We analyse them for identically distributed random variables (linear and non-linear normalization). At the end of this paper we present graphical results using Matlab 6.4.

TURINYS

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

ĮVADAS

Štai keli pavyzdžiai, kuriuose ekstremaliosios reikšmės (maksimumai arba minimumai) vaidina svarbų vaidmenį.

Stichiniai gamtos reiškiniai. Potvyniai, liūtys, ekstremalios temperatūros, uraganai gali padaryti nuostolių įvairiems statiniams (bokštams, užtvankoms, gyvenamiesiems pastatams ir pan.). Aišku, tokių stichinių nelaimių negalime išvengti, tačiau projektuojant šiuos statinius bei parenkant jiems statybines medžiagas, galima ir reikia atsižvelgti į minėtų stichinių nelaimių galimybę ir tai padėtų sumažinti padarinius. Šioms problemoms spręsti reikalinga pakankamai tiksli teorija, kuri leistų atsižvelgti į galimų ekstremalių gamtos reiškinių poveikį.

Sistemų patikimumo problema. Sakysime, sistema nustoja veikusi, jeigu sugenda bent vienas iš jos elementų. Šiuo atveju mažiausiai patikimas sistemos elementas turi lemiamos įtakos visos sistemos funkcionavimui.

Korozija. Paprastai laikoma, kad metalinė danga su dideliu korozinių dėmių skaičiumi yra pažeista korozijos, jeigu kurioje nors iš dėmių korozija apima visą dangos storį. Korozijos dėmių gylis yra atsitiktinis ir jis kinta laike priklausomai nuo aplinkos poveikio. Šiuo atveju lemiamą įtaką turi maksimali korozijos defekto gylio reikšmė.

Atmosferos užterštumas. Atmosferos užterštumas išreiškiamas procentiniu teršalų kiekiu atmosferoje. Svarbu, kad maksimali koncentracijos reikšmė neviršytų nustatytos normos.

Atsparumas trūkiams. Kaip rodo eksperimentai, nėra absoliučiai vienalyčių medžiagų. Todėl ir atsparumas trūkimui taip pat gali būti nevienodas, net jei medžiagos pagamintos taikant tą patį technologinį procesą. Šį faktą galima paaiškinti tuo, kad kiekviename taške (arba mažoje srityje) medžiagos atsparumas yra atsitiktinis dydis. Medžiagos atsparumą traukimui lemia minimalų atsparumą turintis taškas (grandinė trūksta silpniausioje vietoje).

Šie pateikti pavyzdžiai toli gražu neišsemia visų atvejų, kuomet gali būti taikoma ekstremaliųjų reikšmių teorija, tačiau ir jų pakanka parodyti, kokia plati gali būti šios teorijos taikymo sritis. Tačiau ne vien tik taikomojo pobūdžio uždaviniais turtinga ekstremaliųjų reikšmių teorija, joje gausu ir įdomių teorinių problemų. Plačiau su ekstremaliųjų reikšmių teorija bei jos taikymais galime susipažinti [4] ir [5] monografijose.

Šiame darbe nagrinėjama nepriklausomų atsitiktinių dydžių ekstremaliųjų reikšmių skirstinių asimptotika, tiriamas jų konvergavimo greitis bei ieškomi konvergavimo greičio įverčiai. Taip pat nagrinėjama ekstremaliųjų reikšmių tankių asimptotika, suformuluotos ir įrodytos teoremos, kuriose gaunami minimumo ir maksimumo tankių įverčiai. Šie uždaviniai sprendžiami nagrinėjant kelis atvejus:

1) kai ekstremaliosios reikšmės normuotos tiesiškai (klasikinė ekstremaliųjų reikšmių schema);
2) kai ekstremaliosios reikšmės normuotos netiesiškai;
3) kai ekstremaliosios reikšmės yra daugiamatės;
4) kai imamos nevienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių ekstremaliosios reikšmės.

Ekstremaliųjų reikšmių asimptotika buvo tirta [1], [8], ekstremaliųjų reikšmių konvergavimo greitis nagrinėtas [7], [10] , o ekstremaliųjų reikšmių tankių asimptotinis tyrimas atliktas [3], [9] ir [11] darbuose.

Magistro darbo tema 2006 m. perskaitytas pranešimas mokslo konferencijoje „Matematika ir matematikos dėstymas 2006“. Pranešimo medžiaga bus išspausdinta leidinyje „Matematika ir matematinis modeliavimas“.

1 BENDROJI DALIS

1.1 EKSTREMALIŲJŲ REIKŠMIŲ SCHEMOS SĄVOKA

Sakykime, kad $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ yra atsitiktinių dydžių seka. Sudarykime *n* pirmųjų sekos narių variacinę eilutę

$$X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq ... \leq X_{n:n}.$$

Fiksuokime $k \in N$. Kai $n \to \infty$, atsitiktinius dydžius $X_{k:n}$ ir $X_{n-k+1:n}$ vadinsime *k*-osiomis ekstremaliosiomis reikšmėmis. Didžiausią ir mažiausią variacinės eilutės narius pažymėsime

$$Z_n = \max(X_1, X_2, ...X_n),$$
$$W_n = \min(X_1, X_2, ...X_n).$$

Atsitiktinius dydžius Z_n ir W_n vadinsime ekstremaliosiomis reikšmėmis arba tiesiog maksimumu ir minimumu.

Tarkime, $u_n = u_n(x)$ yra tokia realaus kintamojo funkcijų seka, kad pasiskirstymo funkcijų seka

$$H_n(u_n(x)) = P(Z_n < u_n(x))$$

silpnai konverguoja į pasiskirstymo funkciją $H(x)$. Taip apibrėžta struktūra Z_n kartu su prielaidomis apie atsitiktinių dydžių seką $\{X_n, n \geq 1\}$ bei funkcijų seką $\{u_n, n \geq 1\}$ sudaro maksimumų schemą.

Analogiškai apibrėžiame minimumų schemą. Tarkime, $v_n = v_n(x)$ yra tokia realaus kintamojo funkcijų seka, kad pasiskirstymo funkcijų seka

$$L_n(v_n(x)) = P(W_n < v_n(x))$$

silpnai konverguoja į neišsigimusią pasiskirstymo funkciją *L(x)*. Taip apibrėžta struktūra W_n kartu su prielaidomis apie atsitiktinių dydžių seką $\{X_n, n \geq 1\}$ bei funkcijų seką $\{v_n, n \geq 1\}$ sudaro minimumų schemą.

Jei atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ yra vienodai pasiskirstę su pasiskirstymo funkcija *F(x)*, o normavimo funkcijos u_n ir v_n tiesinės, t. y.

$$\begin{aligned} u_n(x) &= a_n + b_n x, \quad a_n \in R, \quad b_n > 0, \\ v_n(x) &= c_n + d_n x, \quad c_n \in R, \quad d_n > 0, \end{aligned} \qquad \textbf{(1.1)}$$

tai tokia ekstremaliųjų reikšmių (maksimumų arba minimumų) schema vadinama klasikine.

Galimi įvairūs klasikinės ekstremaliųjų reikšmių schemos apibendrinimai. Pavyzdžiui, vietoje maksimumo ar minimumo galime imti *k*-tąsias ekstremaliąsias reikšmes; galime nagrinėti atsitiktinių dydžių serijų sekų ekstremaliąsias reikšmes; atsitiktiniai dydžiai $\{X_n, n \geq 1\}$ gali būti nevienodai pasiskirstę arba priklausomi; normavimo funkcijos u_n ir v_n gali būti netiesinės; atsitiktiniai dydžiai $\{X_n, n \geq 1\}$ gali būti daugiamačiai; variacinės eilutės ilgis gali būti ne fiksuotas, o atsitiktinis (šią problemą nagrinėja vadinamosios perkėlimo teoremos); pagaliau galima nagrinėti ne atsitiktinių dydžių, o atsitiktinių procesų ar atsitiktinių laukų ekstremaliąsias reikšmes.

1.2 RIBINIAI EKSTREMALIŲJŲ REIKŠMIŲ SKIRSTINIAI

Suformuluosime keletą fundamentalių vienmačių ekstremaliųjų reikšmių teorijos rezultatų.

Sakykime, $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ yra nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka. Tarkime,

$$F(x) = P(X_j < x), \ \forall j \geq 1.$$

Pažymėkime

$$\begin{aligned} Z_n &= \max(X_1, X_2, ... X_n), \\ W_n &= \min(X_1, X_2, ... X_n). \end{aligned}$$

Tarkime, kad egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantų sekos $\{a_n, \quad n \geq 1\}$, $\{b_n > 0, \quad n \geq 1\}$, $\{c_n > 0, \quad n \geq 1\}$ ir $\{d_n, \quad n \geq 1\}$, kad

$$\lim_{n \to \infty} P\left(Z_n < a_n + b_n x\right) = H(x), \qquad \textbf{(1.2)}$$

$$\lim_{n \to \infty} P(W_n < c_n + d_n x) = L(x) \qquad \textbf{(1.3)}$$

kiekviename funkcijų $H(x)$ ir $L(x)$ tolydumo taške (čia H(x) ir $L(x)$ yra neišsigimusios pasiskirstymo funkcijos). Tokį konvergavimą vadinsime silpnuoju pasiskirstymo funkcijų arba atsitiktinių dydžių konvergavimu.

Sakysime, kad skirstinys F priklauso ribinio skirstinio H traukos sričiai (žymėsime $F \in D(H)$), jeigu egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantos, kad būtų tenkinama (1.2) lygybė.

Sakysime, kad skirstinys F priklauso ribinio skirstinio L traukos sričiai (žymėsime $F \in D(L)$), jeigu egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantos, kad būtų tenkinama (1.3) lygybė. Pažymėkime

$$\begin{aligned} \alpha(F) &= \inf\{x : F(x) > 0\}, \\ \omega(F) &= \sup\{x : F(x) < 1\}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Suformuluosime sąlygas, kurias turi tenkinti skirstinys F, kad jis priklausytų kurio nors neišsigimusio ribinio skirstinio traukos sričiai. Taip pat pateiksime konstantų parinkimo būdą.

1.1 teorema. Tarkime, $\omega(F) = \infty$ ir egzistuoja tokia teigiama konstanta α , kad

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1-F(tx)}{1-F(t)} = x^{-\alpha} \tag{1.5}$$

su visais $x > 0.$ Tuomet $F \in D(H_{1,\alpha})$. Čia

$$H_{1,\alpha} = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0. \end{cases}$$

Normavimo konstantas b_n galima parinkti tokiu būdu:

$$\begin{aligned} b_n &= \inf\left\{x : 1 - F(x) \le \frac{1}{n}\right\}, \\ a_n &= 0. \end{aligned}$$

1.2 teorema. Tarkime, kad $\omega(F) < \infty$, o pasiskirstymo funkcija

$$F^*(x) = F(\omega(F) - \frac{1}{x}) \qquad \textbf{(1.6)}$$

tenkina (1.5) sąlygą. Tuomet $F \in D(H_{2,\alpha})$. Čia

$$H_{2,\alpha}(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^{\alpha}), & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$a_n = \omega(F),$$
$$b_n = \omega(F) - \inf\left\{x : 1 - F(x) \leq \frac{1}{n}\right\}.$$

1.3 teorema. Tarkime, kad su baigtine konstanta α integralas

$$\int_{\alpha}^{\omega(F)} (1 - F(y))dy \qquad \textbf{(1.7)}$$

yra baigtinis. Intervale $(\alpha(F), \omega(F))$ apibrėžkime funkciją

$$R(t) = \frac{1}{1 - F(t)} \int_{t}^{\varpi(t)} (1 - F(y))dy\,. \qquad \textbf{(1.8)}$$

Jei su visais realiaisiais x egzistuoja riba

$$\lim_{t \to \omega(F)} \frac{1 - F(t + xR(t))}{1 - F(t)} = \exp(-x),$$

tai $F \in D(H_{3,0})$. Čia

$$H_{3,0}(x) = \exp(-\exp(-x)), \quad x \in R.$$

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$a_n = \inf\left\{x : 1 - F(x) \le \frac{1}{n}\right\},$$
$$b_n = R(a_n).$$

1.4 teorema. Tarkime, $\alpha(F) = -\infty$ ir egzistuoja tokia teigiama konstanta α, kad

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{F(tx)}{F(t)} = x^{-\alpha} \qquad \textbf{(1.9)}$$

su visais $x > 0$. Tuomet $F \in D(L_{1,\alpha})$. Čia

$$L_{1,\alpha} = \begin{cases} 1 - (\exp(-(-x)^{-\alpha}), & x \le 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$d_n = \sup\left\{x : F(x) \le \frac{1}{n}\right\},$$
$$c_n = 0.$$

1.5 teorema. Tarkime, kad $\alpha(F) < \infty$, o pasiskirstymo funkcija

$$F^*(x) = F(\alpha(F) - \frac{1}{x}) \qquad \textbf{(1.10)}$$

tenkina (1.9) sąlygą. Tuomet $F \in D(L_{2,\alpha})$. Čia

$$L_{2,\alpha}(x) = \begin{cases} 1 - \exp((-x)^{\alpha}), & x < 0, \\ 0, & x \ge 0. \end{cases}$$

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$c_n = \alpha(F),$$
$$d_n = \sup\left\{x : F(x) \le \frac{1}{n}\right\} - \alpha(F).$$

1.6 teorema. Tarkime, kad su baigtine konstanta α integralas

$$\int_{\alpha(F)}^{\alpha} \left(1 - F(y)\right) dy \tag{1.11}$$

yra baigtinis. Intervale $\left(\alpha(F), \omega(F)\right)$ apibrėžkime funkciją

$$r(t) = \frac{1}{F(t)} \int_{\alpha(F)}^{t} (F(y)) dy \ . \tag{1.12}$$

Jei su visais realiaisiais x egzistuoja riba

$$\lim_{t \to \alpha(F)} \frac{F\left(t + xr(t)\right)}{F\left(t\right)} = \exp(x),$$

tai $F \in D(L_{3,0})$. Čia

$$L_{3,0}\left(x\right) = 1 - \exp(-\exp(x)), \quad x \in R.$$

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$c_n = \sup\left\{x : F(x) \le \frac{1}{n}\right\},$$
$$d_n = r(c_n).$$

Pastaba. Šiose teoremose pateiktas centravimo ir normavimo konstantų a_n, b_n, c_n ir d_n parinkimo būdas nėra vienintelis. Mes negalime teigti, kad tai yra pats paprasčiausias konstantų parinkimo būdas ir kad taip parinktos konstantos yra geriausios, tačiau jis yra geras tuo, kad yra paprastas ir konstruktyvus.

1.7 teorema. Klasikinėje maksimumų schemoje egzistuoja tik trys $\left(H_{1,\alpha}, H_{2,\alpha}, H_{3,0}\right)$ neišsigimusio ribinio skirstinio tipai.

1.8 teorema. Klasikinėje minimumų schemoje egzistuoja tik trys $\left(L_{1,\alpha}, L_{2,\alpha}, L_{3,0}\right)$ neišsigimusio ribinio skirstinio tipai.

1.9 teorema. Tarkime turime klasikinę maksimumų schemą:

1) $F \in D(H_{1,\alpha})$ tada ir tik tada, kai $\omega(F) = \infty$ ir tenkinama (1.5) sąlyga.

2) $F \in D(H_{2,\alpha})$ tada ir tik tada, kai $\omega(F) < \infty$ ir funkcija $F^*(x) = F(\varpi(F) - \frac{1}{x})$ $(x > 0)$ tenkina (1.5) sąlygą.

3) $F \in D(H_{3,0})$ tada ir tik tada, kai (1.7) integralas yra baigtinis ir tenkina (1.8) sąlygą.

1.10 teorema. Tarkime turime klasikinę minimumų schemą:

1) $F \in D(L_{1,\alpha})$ tada ir tik tada, kai $\alpha(F) = \infty$ ir tenkinama (1.9) sąlyga.

2) $F \in D(L_{2,\alpha})$ tada ir tik tada, kai $\alpha(F) < \infty$ ir funkcija $F^*(x) = F(\alpha(F) - \frac{1}{x})$ $(x > 0)$ tenkina (1.9) sąlygą.

3) $F \in D(L_{3,\alpha})$ tada ir tik tada, kai (1.11) integralas yra baigtinis ir tenkina (1.12) sąlygą.

Šio skyrelio rezultatai pirmą kartą gauti [7], o 1.1 – 1.10 teoremų įrodymai pateikti [6] darbuose.

1.3 DAUGIAMAČIŲ EKSTREMALIŲJŲ REIKŠMIŲ SCHEMOS SĄVOKA

Sakykime, kad $\{X_n = (X_{1,n}, X_{2,n}, ..., X_{m,n}), n \geq 1\}$ yra m-mačių atsitiktinių dydžių seka. Pažymėkime

$$Z_{i,n} = \max(X_{i,1}, X_{i,2}, ..., X_{i,n}),$$
$$W_{i,n} = \min(X_{i,1}, X_{i,2}, ..., X_{i,n}), \quad i = 1, ..., m.$$

Apibrėšime m-mačių atsitiktinių dydžių pirmųjų n sekos narių maksimumą ir minimumą:

$$Z_n = (Z_{1,n}, Z_{2,n}, ..., Z_{m,n}),$$
$$W = (W_{1,n}, W_{2,n}, ..., W_{m,n}).$$

m-mačius atsitiktinius dydžius Z_n ir W_n vadinsime daugiamatėmis ekstremaliosiomis reikšmėmis arba tiesiog daugiamačiu maksimumu ir daugiamačiu minimumu. Toks daugiamačių ekstremaliųjų reikšmių apibrėžimo būdas nėra vienintelis, tačiau jis yra labai plačiai taikomas daugiamačių ekstremaliųjų reikšmių teorijoje, kadangi toks maksimumo ar minimumo apibrėžimo būdas dažnai būna sąlygotas taikomojo pobūdžio uždavinių specifikos.

Aritmetines operacijas tarp vektorių apibrėšime pagal komponentes, t.y.

$$x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, ..., x_m+y_m),$$
$$xy=(x_1y_1, x_2y_2, ..., x_my_m),$$
$$\frac{x}{y}=\left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, ..., \frac{x_m}{y_m}\right),$$

o nelygybė $x<y$ reikš nelygybių sistemą $x_i<y_i\,(1\le i\le m)$.

Tarkime, $\{g_n(x)=(g_{1,n}(x_1),...,g_{m,n}(x\ )), n\ge 1\}$ yra tokių griežtai monotoninių ir tolydžių (kiekvienos komponentės atžvilgiu) vektorinių funkcijų (jas vadinsime normalizavimo funkcijomis) seka, kad pasiskirstymo funkcijų seka

$$G_n(g_n(x))=P(Z_n<g_n(x))$$

silpnai konverguoja į neišsigimusią m-matę pasiskirstymo funkciją G *(*m-matę pasiskirstymo funkciją G vadinsime neišsigimusia, jeigu visos jos vienmatės marginaliosios pasiskirstymo funkcijos $G_i(x_i)(i=1,...,m)$ yra neišsigimusios. Taip apibrėžta struktūra Z_n kartu su prielaidomis apie m-mačių atsitiktinių dydžių seką $\{X_n, n\ge 1\}$ bei normalizavimo funkcijų seką $\{g_n(x), n\ge 1\}$ sudaro daugiamačių maksimumų schemą.

Tarkime, $\{t_n(x)=(t_{1,n}(x_1),...,t_{m,n}(x_m)), n\ge 1\}$ yra tokių normalizavimo funkcijų seka, kad pasiskirstymo funkcijų seka

$$T_n(t_n)=P(W_n<t_n(x))$$

silpnai konverguoja į neišsigimusią m-matę pasiskirstymo funkciją T. Taip apibrėžta struktūra W_n kartu su prielaidomis apie m-mačių atsitiktinių dydžių seka $\{X_n, n\ge 1\}$ bei normalizavimo funkcijų seka $\{t_n(x), n\ge 1\}$ sudaro daugiamačių minimumų schemą.

Jeigu m-mačiai atsitiktiniai dydžiai $\{X_n, n\ge 1\}$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę su pasiskirstymo funkcija

$$F(x_1,...,x_m)=P(X_{1,j}<x_1,...,X_{m,j}<x_m) \quad \forall j\ge 1,$$

o normalizavimo funkcijos $g_n(x)$ ir $t_n(x)$ yra tiesinės, t.y.

$$g_n(x) = \left(a_{1,n} + b_{1,n}x_1, \ldots., a_{m,n} + b_{m,n}x_m\right),$$
$$t_n(x) = \left(c_{1,n} + d_{1,n}x_1, \ldots., c_{m,n} + d_{m,n}x_m\right),$$
$$a_{i,n}, c_{i,n} \in R\ b_{i,n} > 0,\ d_{i,n} > 0,\ i = 1,\ldots, m,$$

tai tokią daugiamačių ekstremaliųjų reikšmių schemą vadinsime klasikine daugiamačių ekstremaliųjų reikšmių (maksimumų arba minimumų) schema.

Kaip ir vienmačiu atveju, klasikinė ekstremaliųjų reikšmių schema gali būti apibendrinta. Galima nagrinėti daugiamačių atsitiktinių dydžių serijų sekų ekstremaliąsias reikšmes; normalizavimo funkcijos gali būti netiesinės; daugiamačių atsitiktinių dydžių sekos ilgis gali būti ne fiksuotas, o atsitiktinis; *m*-mačiai atsitiktiniai dydžiai gali būti nevienodai pasiskirstę arba priklausomi. Galima nagrinėti *k*-tąsias daugiamates ekstremaliąsias reikšmes. Pagaliau su daugiamačių ekstremaliųjų reikšmių schema glaudžiai susiję daugiamačiai rekordai ir indukuotos pozicinės statistikos.

1.4 EKSTREMALIŲJŲ REIKŠMIŲ LOKALINĖS TANKIŲ TEOREMOS

Sakykime $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę, absoliučiai tolydieji atsitiktiniai dydžiai su pasiskirstymo funkcija $F(x) = P\left(X_j < x\right)$ ir tankio funkcija $p(x)$.

Pažymėkime

$$Z_n = \max\left(X_1, \ldots, X_{n+1}\right),$$
$$W_n = \min\left(X_1, \ldots, X_{n+1}\right).$$

Tarkime, kad skirstinys $F(x)$ toks, jog galima parinkti tokias centravimo ir normavimo konstantų sekas $\{a_n, n \geq 1\}$, $\{b_n > 0, n \geq 1\}$, jog $F(x)$ priklauso neišsigimusio ribinio skirstinio $H(x)$ traukos sričiai

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n < a_n + b_n x) = H(x).$$

Tarkime, kad egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantų sekos $\{c_n, n \geq 1\}$, $\{d_n > 0, n \geq 1\}$, jog $F(x)$ priklauso neišsigimusio ribinio skirstinio $L(x)$ traukos sričiai

$$\lim_{n\to\infty} P(W_n < c_n + d_n x) = L(x).$$

Tiesiškai normuoto maksimumo $\left(Z_n - a_n\right)/b_n$ tankio funkciją pažymėkime:

$$p_{Z_n}(x) = (n+1)b_n p\left(a_n + b_n x\right)F^n(a_n + b_n x).$$

Suformuluosime sąlygas, kurias turi tenkinti skirstinys $F(x)$, kad iš (1.2) sąryšio išplauktų

$$\lim_{n\to\infty} p_{Z_n}(x) = H'(x). \qquad \textbf{(1.13)}$$

1.11 teorema. Tegul *F(x)* pasiskirstymo funkcija turi $p(x)$ pasiskirstymo tankį. Jeigu $F \in D(H)$ ir

a) $H = H_{1,\alpha}$, tai (1.13) sąryšis bus teisingas intervale $\left(0,\infty\right)$ tada ir tik tada, kai tankio funkcija $p(x)$ yra teigiama su pakankamai dideliais *x*, ir su $\alpha > 0$ tenkinama sąlyga

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xp(x)}{1 - F(x)} = \alpha;$$

b) $H = H_{2,\alpha}$, tai (1.13) sąryšis bus teisingas intervale $\left(0,\infty\right)$ tada ir tik tada, kai tankio funkcija $p(x)$ yra teigiama, ir su $\alpha > 0$ tenkinama sąlyga

$$\lim_{x\to w(F)} \frac{\left(w(F) - x\right)p(x)}{1 - F(x)} = \alpha;$$

čia $\omega(x) = \sup\left\{x : F(x) < 1\right\}$;

c) $H = H_{3,0}$, tai (1.13) sąryšis bus teisingas su visais *x* tada ir tik tada, kai tenkinama sąlyga

$$\lim_{x\to w(F)} \frac{d}{dx}\left(\frac{1 - F(x)}{p(x)}\right) = 0.$$

Pažymėkime tiesiškai normuoto minimumo $\dfrac{W_n - c_n}{d_n}$ tankio funkciją

$$p_{W_n}(x) = (n+1)d_n p\left(c_n + d_n x\right)\left(1 - F\left(c_n + d_n x\right)\right)^n.$$

Suformuluosime sąlygas, kurias turi tenkinti skirstinio funkcija *F(x)*, kad tiesiškai normuoto minimumo tankis p_{W_n} konverguotų į ribinio skirstinio *L(x)* tankį, t.y.

$$\lim_{n\to\infty} p_{W_n}(x) = L'(x). \qquad \textbf{(1.14)}$$

1.12 teorema. Tegul *F(x)* pasiskirstymo funkcija turi $p(x)$ pasiskirstymo tankį. Jei $F \in D(L)$ ir

a) $L = L_{1,\alpha}$, tai (1.14) sąryšis bus teisingas intervale $(-\infty;0)$ tada ir tik tada, kai tankio funkcija $p(-x)$ yra teigiama su pakankamai dideliais *x*, ir su $\alpha > 0$ tenkinama sąlyga

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xp(-x)}{F(-x)} = \alpha;$$

b) $L = L_{2,\alpha}$, tai (1.14) sąryšis bus teisingas intervale $(0;\infty)$ tada ir tik tada, kai tankio funkcija $p(-x)$ yra teigiama, ir $\alpha > 0$ tenkinama sąlyga

$$\lim_{x\to\alpha(F)} \frac{(\alpha(F)-x)p(-x)}{F(-x)} = \alpha;$$

čia $\alpha(F) = \inf\{x : F(x) > 0\}$;

c) $L = L_{3,0}$, tai (1.14) sąryšis bus teisingas su visais *x* tada ir tik tada, kai tenkinama sąlyga

$$\lim_{x\to\alpha(F)} \frac{d}{dx}\left(\frac{1-F(-x)}{p(-x)}\right) = 0.$$

1.11 – 1.12 teoremos suformuluotos ir įrodytos [10] darbe.

1.5 VIENODAI PASISKIRSČIUSIŲ EKSTREMALIŲJŲ REIKŠMIŲ SKIRSTINIO ASIMPTOTIKA

Tarkime, kad $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ yra nepriklausomų ir vienodų skirstinių su $P(X_j < x) = F(x)$ atsitiktinių dydžių seka. Apibrėžkime netiesines struktūras:

$$Z_n = \max(X_1, X_2, ..., X_n), \quad \tilde{Z}_n = G_n^{-1}(Z_n);$$

$$W_n = \min(X_1, X_2, ..., X_n), \quad \tilde{W}_n = g_n^{-1}(W_n).$$

Čia $\{G_n, n \geq 1\}$ ir $\{g_n, n \geq 1\}$— tolydžiųjų ir monotoniškai didėjančių normavimo funkcijų sekos. Atskiru atveju (tiesinis normavimas) $G_n(x) = a_n + b_n x$; $g_n(x) = c_n + d_n x$.

Jeigu

$$z_n(x) = n(1 - F(G_n(x))) \underset{n\to\infty}{\to} z(x), \tag{1.15}$$

$$u_n(x) = n(F(g_n(x))) \underset{n\to\infty}{\to} u(x), \tag{1.16}$$

tai

$$P\left(\tilde{Z}_n < x\right) \to H\left(x\right) = e^{-z(x)}, \tag{1.17}$$

$$P\left(\tilde{W}_n < x\right) \to L\left(x\right) = 1 - e^{-u(x)} \tag{1.18}$$

su visais $x \in R$.

1.13 teorema. Tarkime, kad yra tenkinama (1.15) sąlyga. Tada su visais *x*, tenkinančiais sąlygą $\frac{z_n(x)}{n} \leq \frac{1}{2}$, galioja dėstinys

$$P(\tilde{Z}_n < x) = e^{-z_n(x)}(1 - R_n(x)); \tag{1.19}$$

čia

$$\frac{z_n^2(x)}{2n(1 + \frac{5}{6}\frac{z_n^2(x)}{n})} \leq R_n(x) \leq \frac{5}{6}\frac{z_n^2(x)}{n}.$$

1.14 teorema. Tarkime, kad yra tenkinama (1.16) sąlyga. Tada su visais *x*, tenkinančiais sąlygą $\frac{u_n(x)}{n} \leq \frac{1}{2}$, galioja dėstinys

$$P(\tilde{W}_n < x) = 1 - e^{-u_n(x)}(1 - R_n(x)); \tag{1.20}$$

čia

$$\frac{u_n^2(x)}{2n(1 + \frac{5}{6}\frac{u_n^2(x)}{n})} \leq R_n(x) \leq \frac{5}{6}\frac{u_n^2(x)}{n}.$$

Pastabos:

1. Kompaktiškesnis (tačiau ne toks tikslus) liekamojo nario įvertis:

$$\frac{z_n^2(x)}{2n + z_n^2(x)} \leq R_n(x) \leq \frac{z_n^2(x)}{n}.$$

1. Sąlygas $\frac{z_n(x)}{n} \le \frac{1}{2}$, $\frac{u_n(x)}{n} \le \frac{1}{2}$ galime keisti sąlygomis $\frac{z_n(x)}{n} \le q < 1$, $\frac{u_n(x)}{n} \le q < 1$. Tada į $R_n(x)$ įverčius įeis parametras *q*.
2. Pažymėkime

$$\rho_n(x) = z_n(x) - z(x),$$

tada

$$P(\tilde{Z}_n \le x) = H(x) e^{-\rho_n(x)} (1 - R_n(x)). \qquad \textbf{(1.21)}$$

Yra skirstinių, kuriems $\rho_n(x) \equiv 0$, tuomet

$$P(\tilde{Z}_n \le x) = H(x)(1 - R_n(x)).$$

1.13 – 1.14 teoremos yra suformuluotos ir įrodytos [1] darbe.

1.6 NEVIENODAI PASISKIRSČIUSIŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMO SKIRSTINIO ASIMPTOTIKA

Tarkime, kad $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ yra nepriklausomų atsitiktinių dydžių, turinčių skirstinio funkcijas

$$F_j(x) = P(X_j < x), \forall j \ge 1,$$

seka. Apibrėžkime šių atsitiktinių dydžių sekos pirmųjų *n* narių maksimumą

$$Z_n = \max\{X_1, ..., X_n\}.$$

Pažymėkime

$$m_n(x) = \min_{1 \le j \le n} (1 - F_j(a_n + b_n x)), \qquad \textbf{(1.22)}$$

$$M_n(x) = \max_{1 \le j \le n} (1 - F_j(a_n + b_n x)), \qquad \textbf{(1.23)}$$

$$z_n(x) = \sum_{j=1}^{n} (1 - F_j(a_n + b_n x)); \qquad \textbf{(1.24)}$$

čia $\{a_n, \quad n \geq 1\}$ ir $\{b_n, \quad n \geq 1\}$ – centravimo ir normavimo konstantų sekos.

Tarkime, tenkinama sąlyga

$$\lim_{n\to\infty} M_n(x) = 0, \quad \forall x \in R.$$

Tada tam, kad tiesiškai normuoto maksimumo $\dfrac{Z_n - a_n}{b_n}$ skirstinys silpnai konverguotų į neišsigimusį ribinį skirstinį *H(x)*, būtina ir pakankama, jog būtų tenkinama sąlyga

$$\lim_{n\to\infty} z_n(x) = z(x);$$

be to ribinis skirstinys $H(x) = e^{-z(x)}$.

1.15 teorema. Tarkime, kad

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n < a_n + b_n x) = H(x) = e^{-z(x)}.$$

Su visais *x*, su kuriais $M_n(x) \leq \dfrac{1}{2}$, teisingas dėstinys

$$P(Z_n < a_n + b_n x) = e^{-z_n(x)}(1 - R_n(x)); \qquad \textbf{(1.25)}$$

čia

$$\frac{\frac{1}{2} m_n(x) z_n(x)}{1 + M_n(x) z_n(x)} \leq R_n(x) \leq M_n(x) z_n(x).$$

1.15 teorema suformuluota ir įrodyta [8] darbe.

2 TIRIAMOJI DALIS

2.1 VIENODAI PASISKIRSČIUSIŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMO SKIRSTINIO ASIMPTOTINIS TYRIMAS

Šiame skyrelyje taikydami 1.13 teoremos rezultatus gausime nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių ekstremaliųjų reikšmių maksimumo skirstinių dėstinius.

2.1.1 Eksponentinis skirstinys. Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ turi eksponentinį skirstinį:

$$F(x) = 1 - e^{-x}, \qquad x \geq 0.$$

Šiuo atveju $\omega(F) = +\infty$. Kadangi $\omega(F)$ yra begalinis, galime taikyti 1.1 arba 1.3 teoremą. 1.1 teoremos sąlyga yra netenkinama, todėl taikome 1.3 teoremą. Integralas

$$\int_{\alpha}^{\infty}(1 - F(y))dy = \int_{0}^{\infty} e^{-y} dy = -e^{-y} \Big|_{0}^{\infty} = 1$$

yra baigtinis ir

$$R(t) = \frac{\int_{t}^{w(F)}(1 - F(y))dy}{1 - F(t)} = \frac{\int_{t}^{\infty} e^{-t} dt}{e^{-t}} = \frac{-e^{-t}}{e^{-t}} = 1, \quad \alpha(F) < t < \omega(F),$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1 - F(t + xR(t))}{1 - F(t)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^{-(t+x)}}{e^{-t}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^{-t} e^{-x}}{e^{-t}} = e^{-x},$$

tai $F \in D(H_{3.0}(x))$; čia

$$H_{3,0}(x) = e^{-e^{-x}}, \quad x \in R.$$

Centravimo ir normavimo konstantas parenkame tokias:

$$a_n = \ln(n), \qquad b_n = 1.$$

Toliau gauname

$$z_n(x) = n(1 - F(a_n + b_n x)) = n\left(1 - \left(1 - e^{-(\ln(n) + x)}\right)\right) = e^{-x},$$

$$z(x) = \lim_{n \to \infty} z_n(x) = \lim_{n \to \infty} e^{-x} = e^{-x}.$$

Šiuo atveju

$$\rho_n(x) = z_n(x) - z(x) = 0,$$

todėl yra teisinga (1.21) išraiška

$$P(Z_n < a_n + b_n x) = H(x)e^{-\rho_n(x)}(1 - R_n(x)) = e^{-e^{-x}}(1 - R_n(x)); \quad \textbf{(2.1)}$$

čia

$$\frac{e^{-2x}}{2n + e^{-2x}} \le R_n(x) \le \frac{e^{-2x}}{n}.$$

Naudodami (2.1) išraišką ($\rho_n(x) \equiv 0$) surandame eksponentinių atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio konvergavimo greičio įvertį:

$$P(Z_n < a_n + b_n x) - H(x) = H(x)(1 - R_n(x)) = H(x)(1 - R_n(x)) - H(x) = -H(x)R_n(x), \quad \textbf{(2.2)}$$

todėl

$$-H(x)R_{n,1}(x) < P(Z_n < a_n + b_n x) - H(x) < -H(x)R_{n,2}(x),$$

$$-e^{-e^{-x}} \frac{e^{-2x}}{2n + e^{-2x}} < \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n - e^{-e^{-x}} < -e^{-e^{-x}} \frac{e^{-2x}}{n}.$$

Eksponentinių atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio konvergavimo greičio įverčio grafinė realizacija pateikta 1 priede.

2.1.2 Tolygusis skirstinys. Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ turi tolygųjį skirstinį:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \le x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Šiuo atveju $\omega(F) = 1$ yra baigtinis, todėl taikome 1.2 teoremą. Konstruojame funkciją

$$F^*(x) = F\left(w(F) - \frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{x}$$

ir tikriname, ar ji tenkina (1.5) sąlygą. Kadangi

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1-F^*(tx)}{1-F^*(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{tx}}{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{x}=x^{-1},$$

tai funkcija $F^*(x)$ tenkina (1.5) sąlygą, todėl $F\in D(H_{2,\alpha})$;

čia

$$H_{2,\alpha}(x)=\begin{cases} e^x, & x<0,\\ 1, & x\geq 0.\end{cases}$$

Centravimo ir normavimo konstantas parenkame tokias:

$$a_n=1,\qquad b_n=\frac{1}{n}.$$

Toliau gauname

$$z_n(x)=n(1-F(a_n+b_nx))=n(1-1-\frac{x}{n})=-x,$$

$$z(x)=\lim_{n\to\infty}z_n(x)=\lim_{n\to\infty}(-x)=-x.$$

Šiuo atveju

$$\rho_n(x)=z_n(x)-z(x)=0,$$

todėl yra teisinga (1.21) išraiška

$$P(Z_n<a_n+b_nx)=H(x)e^{-\rho_n(x)}(1-R_n(x))=e^x(1-R_n(x));$$

čia

$$\frac{x^2}{2n+x^2}\leq R_n(x)\leq\frac{x^2}{n}.$$

Taikydami (2.2) išraišką gauname tolygiųjų atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio konvergavimo greičio įvertį

$$-H(x)R_{n,1}(x)<P(Z_n<a_n+b_nx)-H(x)<-H(x)R_{n,2}(x),$$

$$-e^x\frac{x^2}{2n+x^2}<\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-e^x<-e^x\frac{x^2}{n}.$$

Tolygiųjų atsitiktinių dydžių maksimumo konvergavimo greičio įverčio grafinė realizacija pateikta 2 priede.

2.1.3 Netiesinis normavimas. Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ turi skirstinį:

$$F(x) = 1 - \frac{1}{\ln(x)}, \qquad x \geq e.$$

[6] darbe yra parodyta, jog šio skirstinio atveju neegzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantų sekos, kad tiesiškai normuoto maksimumo skirstinys konverguotų į neišsigimusį skirstinį, todėl parenkame netiesinę normavimo funkciją $\alpha_n^{-1}(Z_n) = \frac{\ln Z_n}{n}$. Gauname

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\ln(Z_n)}{n} < x\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(Z_n < e^{nx}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{\ln e^{nx}}\right)^n = e^{-\frac{1}{x}}, \quad x > 0;$$

$$H(x) = x^{-\frac{1}{x}}.$$

Šiuo atveju

$$z_n(x) = n(1 - F(\alpha_n(x))) = n\left(1 - 1 + \frac{1}{nx}\right) = \frac{1}{x},$$

$$z(x) = \lim_{n\to\infty} z_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

ir

$$\rho_n(x) = z_n(x) - z(x) = 0.$$

Tuomet taikome (1.21) išraišką

$$P(Z_n < \alpha_n(x)) = H(x)e^{-\rho_n(x)}(1 - R_n(x)) = e^{-\frac{1}{x}}(1 - R_n(x));$$

čia

$$\frac{1}{2nx^2 + 1} \leq R_n(x) \leq \frac{1}{nx^2}.$$

Taikydami (2.2) išraišką gauname netiesiškai normuotų atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio konvergavimo greičio įvertį

$$-H(x)R_{n,1}(x) < P(Z_n < \alpha_n(x)) - H(x) < -H(x)R_{n,2}(x),$$

$$-e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{2nx^2 + 1} < \left(1 - \frac{1}{nx}\right)^n - e^{-\frac{1}{x}} < -e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{nx^2}.$$

Netiesiškai normuotų atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio konvergavimo greičio įverčio grafinė realizacija pateikta 3 priede.

2.2 VIENODAI PASISKIRSČIUSIŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MINIMUMO SKIRSTINIO ASIMPTOTINIS TYRIMAS

Šiame skyrelyje taikydami 1.14 teoremos rezultatus gausime nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių ekstremaliųjų reikšmių minimumo skirstinių dėstinius.

2.2.1 Tolygusis skirstinys. Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ turi tolygųjį skirstinį:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \le x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Kadangi $\alpha(F) = 0$ yra baigtinis, taikome 1.5 teoremą. Konstruojame funkciją

$$F^*(x) = F\left(\alpha(F) - \frac{1}{x}\right) = F\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}.$$

Kadangi

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{F^*(tx)}{F^*(t)} = \lim_{t \to -\infty} \frac{-\frac{1}{tx}}{-\frac{1}{t}} = \lim_{t \to -\infty} \frac{t}{tx} = \lim_{t \to -\infty} \frac{1}{x} = x^{-1},$$

tai ribinis skirstinys yra

$$L_{2,\alpha}(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-x), & x < 0, \\ 0, & x \ge 0. \end{cases}$$

Centravimo ir normavimo konstantas parenkame tokias:

$$c_n = 0, \qquad d_n = \frac{1}{n}.$$

Toliau turime

$$u_n(x) = nF(c_n + d_n x) = nF\left(\frac{x}{n}\right) = n\frac{x}{n} = x,$$
$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} x = x.$$

Šiuo atveju

$$\rho_n(x) = u_n(x) - u(x) = 0.$$

Tuomet

$$P(W_n < c_n + d_n x) = 1 - P(W_n > c_n + d_n x) = 1 - e^{-u(x)}(1 - R_n(x)) = 1 - e^{-x}(1 - R_n(x));$$

čia

$$\frac{x^2}{2n\left(1+\frac{5}{6}\frac{x^2}{n}\right)} \le R_n(x) \le \frac{5}{6}\frac{x^2}{n}.$$

Tolygiai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių minimumo skirstinio konvergavimo greičio įvertis ($\rho_n(x) = 0$) yra

$$1 - e^{-u_n(x)}(1 - R_n(x)) - L(x) = 1 - e^{-u(x)}(1 - R_n(x)) - 1 + e^{-u(x)} = e^{u(x)}(R_n(x)) = (1 - L(x))R_n(x). \quad \textbf{(2.3)}$$

Tuomet

$$(1 - L(x))R_{n,1}(x) < P(W_n < c_n + d_n x) - L(x) < (1 - L(x))R_{n,2}(x),$$

$$e^{-x}\frac{x^2}{2n\left(1+\frac{5}{6}\frac{x^2}{n}\right)} < e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n < e^{-x}\frac{5}{6}\frac{x^2}{n}.$$

Tolygiųjų atsitiktinių dydžių minimumo skirstinio konvergavimo greičio įverčio grafinė realizacija pateikta 4 priede.

2.2.2 Netiesinis normavimas. Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ turi skirstinį:

$$F(x) = 1 - \frac{1}{\ln(x)}, \qquad x \ge e.$$

Parenkame netiesinę normavimo funkciją $\beta(W_n) = e^{(1+\frac{x}{n})}$. Gauname

$$P(W_n < \beta_n(x)) = 1 - \left(1 - F(\beta_n(x))\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{1+\frac{x}{n}}\right)^n,$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(W_n < e^{\left(1+\frac{x}{n}\right)}\right) = L(x) = 1 - e^{-x}.$$

Šiuo atveju

$$u_n(x) = n(F(\beta_n(x))) = n\left(1 - \frac{1}{1+\frac{x}{n}}\right) = \frac{nx}{n+x},$$

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{n+x} = x$$

ir

$$\rho_n(x) \neq 0.$$

Tuomet

$$P(W_n < \beta_n(x)) = 1 - e^{-u_n(x)}\left(1 - R_n(x)\right) = 1 - e^{-\frac{nx}{n+x}}(1 - R_n(x));$$

čia

$$\frac{\left(\frac{nx}{n+x}\right)^2}{2n\left(1+\frac{5}{6}\frac{\left(\frac{nx}{n+x}\right)^2}{n}\right)} \leq R_n(x) \leq \frac{5}{6}\frac{\left(\frac{nx}{n+x}\right)^2}{n}.$$

Netiesiškai normuotų atsitiktinių dydžių minimumo skirstinio įverčių grafinė realizacija pateikta 5 priede.

2.3 NEVIENODAI PASISKIRSČIUSIŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMO SKIRSTINIO ASIMPTOTINIS TYRIMAS

Šiame skyrelyje tirsime nevienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio asimptotiką. Taikydami 1.15 teoremą gausime maksimumo skirstinio įvertį, kai atsitiktiniai dydžiai turi Pareto skirstinį.

Pareto skirstinys. Nagrinėkime atsitiktinius dydžius $\{X_n, n \geq 1\}$. Tarkime, kad k atsitiktinių dydžių yra pasiskirstę pagal Pareto skirstinį su parametru $\lambda_1 = 1,$ o likusieji atsitiktinių dydžių pasiskirstę pagal Pareto skirstinį su parametru $\lambda_1 = 2,$ t.y.

$$F_j(x) = 1 - \frac{\lambda_j}{x}, \quad x \geq \lambda_j > 0, \quad j = 1;2.$$

Parinkę centravimo ir normavimo konstantas

$$a_n = 0, \quad b_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = k + 2n - 2k = 2n - k$$

gauname

$$z_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(1 - F_j(a_n + b_n x)\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{x(2n-k)} = \frac{k}{x(2n-k)} + \frac{2n-2k}{x(2n-k)} = \frac{1}{x},$$

$$M_n(x) = \max_{1\leq j\leq n}\left(1 - F_j(a_n + b_n x)\right) = \max_{1\leq j\leq n} \frac{\lambda_j}{x\sum_{j=1}^{n}\lambda_i} = \max_{1\leq j\leq n} \frac{\lambda_j}{x(2n-k)} = \frac{2}{x(2n-k)},$$

$$m_n(x) = \min_{1\leq j\leq n}\left(1 - F_j(a_n + b_n x)\right) = \min_{1\leq j\leq n} \frac{\lambda_j}{x\sum_{j=1}^{n}\lambda_i} = \min_{1\leq j\leq n} \frac{\lambda_j}{x(2n-k)} = \frac{1}{x(2n-k)}.$$

Taikome 1.15 teoremą ir tikriname sąlygą

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq j\leq n} \frac{\lambda_j}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i} = \lim_{n\to\infty} \max_{1\leq j\leq n} \frac{\lambda_j}{2n-k} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2n-k} = 0,$$

todėl

$$\lim_{n\to\infty} M_n(x) = 0$$

ir

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n < a_n + b_n x) = H(x) = e^{-\frac{1}{x}}, \quad x > 0.$$

Toliau gauname

$$z_n(x) = \frac{1}{x},$$

$$z(x) = \lim_{n\to\infty} z_n(x) = \frac{1}{x}.$$

Todėl

$$\rho_n(x) = z_n(x) - z(x) = 0.$$

Pažymėkime

$$C_n^{(1)} = \min_{1\le j\le n} \frac{\lambda_j}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i} = \frac{1}{2n-k},$$

$$C_n^{(2)} = \max_{1\le j\le n} \frac{\lambda_j}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i} = \frac{2}{2n-k}.$$

Gauname tokį nevienodai pasiskirsčiusių Pareto atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio įvertį:

$$P(Z_n < a_n + b_n x) = H(x)e^{-\rho(x)}(1 - R_n(x)) = e^{-\frac{1}{x}}(1 - R_n(x));$$

čia

$$\frac{C_n^{(1)}}{2x^2 + 2C_n^{(2)}} \le R_n(x) \le \frac{C_n^{(2)}}{x},$$

$$\frac{\frac{1}{2n-k}}{2x^2 + \frac{4}{2n-k}} \le R_n(x) \le \frac{\frac{2}{2n-k}}{x^2}.$$

Taikydami (2.2) išraišką gauname nevienodai pasiskirsčiusių Pareto atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio konvergavimo greičio įvertį

$$-H(x)R_{n,1}(x) < P(Z_n < a_n + b_n x) - H(x) < -H(x)R_{n,2}(x).$$

Kadangi

$$P(Z_n < a_n + b_n x) = \prod_{j=1}^{n} F_j(a_n + b_n x) = F_1^k(a_n + b_n x)F_2^{n-k}(a_n + b_n x) = \left(1 - \frac{1}{(2n-k)x}\right)^k \left(1 - \frac{2}{(2n-k)x}\right)^{n-k},$$

tai

$$-e^{-\frac{1}{x}}\frac{\frac{1}{2n-k}}{2x^2+\frac{4}{2n-k}} < \left(1-\frac{1}{(2n-k)x}\right)^k\left(1-\frac{2}{(2n-k)x}\right)^{n-k} - e^{-\frac{1}{x}} < -e^{-\frac{1}{x}}\frac{2}{\frac{2n-k}{x^2}}.$$

Pareto atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio konvergavimo greičio grafinė realizacija pateikta 6 priede.

2.4 NEVIENODAI PASISKIRSČIUSIŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MINIMUMO SKIRSTINIO ASIMPTOTINIS TYRIMAS

Suformuluosime ir įrodysime teoremą, kurioje yra gaunamas nevienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių minimumo skirstinio įvertis.

Tarkime, kad $X_1, X_2, ...X_n, ...$ yra nepriklausomų atsitiktinių dydžių, turinčių skirstinio funkcijas

$$F_j(x) = P(X_j < x), \quad \forall j \geq 1$$

seka. Apibrėžkime šių atsitiktinių dydžių pirmųjų *n* narių minimumą:

$$W_n = \min\{X_1, X_2, ..., X_n\}.$$

Pažymėkime

$$m_n(x) = \min_{1\leq j\leq n} F_j(c_n + d_n x),$$
$$M_n(x) = \max_{1\leq j\leq n} F_j(c_n + d_n x),$$
$$u_n(x) = \sum_{j=1}^{n} F_j(c_n + d_n x);$$

čia $\{c_n\}$ ir $\{d_n > 0\}$ - centravimo ir normavimo konstantų sekos.

Tarkime, kad tenkinama sąlyga

$$\lim_{n\to\infty} M_n(x) = 0,$$

tada tam, kad tiesiškai normuoto minimumo $\frac{W_n - c_n}{d_n}$ skirstinys silpnai konverguotų į neišsigimusį ribinį skirstinį *L(x)*, būtina ir pakankama, jog būtų tenkinama sąlyga

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x) > 0.$$

Be to ribinis skirstinys yra $L(x) = 1 - e^{-u(x)}$.

2.1 teorema. Tarkime, kad

$$\lim_{n\to\infty} P(W_n < c_n + d_n x) = L(x) = 1 - e^{-u(x)}.$$

Su visais *x*, su kuriais $M_n(x) \le \frac{1}{2}$, teisingas dėstinys

$$P(W_n < c_n + d_n x) = 1 - e^{-u_n(x)}(1 - R_n(x));$$

čia

$$\frac{\frac{1}{2} m_n(x) u_n(x)}{1 + M_n(x) u_n(x)} \le R_n(x) \le M_n(x) u_n(x).$$

Įrodymas. Turime

$$P(W_n < c_n + d_n x) = 1 - \prod_{j=1}^{n} (1 - F_j(c_n + d_n x)) = 1 - \exp\left\{ \sum_{j=1}^{n} \ln\left(-\left(1 - \left(1 - F_j(c_n + d_n(x))\right)\right)\right) \right\} =$$
$$= 1 - \exp\left\{ \sum_{j=1}^{n} \ln\left(-F_j(c_n + d_n x)\right) \right\}.$$

Logaritmą skleisdami Teiloro eilute gauname

$$P(W_n < c_n + d_n(x)) = 1 - \exp\left\{ -\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{\left(F_j(c_n + d_n x)\right)^k}{k} \right\}.$$

Pažymėkime

$$L_n(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{\left(F_j(c_n + d_n(x)\right)^k}{k}.$$

Tuomet

$$P(W_n < c_n + d_n x) = 1 - e^{-u_n(x) - L_n(x)}.$$

Iš čia gauname

$$P(W_n < c_n + d_n x) = 1 - e^{-u_n(x)}(1 - R_n(x))\,; \qquad \textbf{(2.4)}$$

čia

$$R_n(x) = 1 - e^{-L_n(x)}. \qquad \textbf{(2.5)}$$

Įvertindami narį $R_n(x)$ naudosime nelygybes

$$\frac{t}{1+t} \le 1 - e^{-t} \le t,$$

kurios yra teisingos su visais $t \ge 0$.

Iš pradžių rasime įvertį iš viršaus. Atsižvelgę į teoremos sąlygą $M_n(x) \le \frac{1}{2}$ gauname

$$R_n(x) = 1 - e^{-L_n(x)} \le L_n(x) \le \sum_{j=1}^{n} \left(F_j(c_n + d_n x)\right)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{16} + \ldots\right) \le \sum_{j=1}^{n} (F_j(c_n + d_n x))^2 \le$$
$$\le M_n(x) u_n(x). \qquad \textbf{(2.6)}$$

Dabar surasime įvertį iš apačios:

$$R_n(x) = 1 - e^{-L_n(x)} \ge \frac{L_n(x)}{1 + L_n(x)} \ge \frac{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(F_j(c_n + d_n(x)))^2}{1 + M_n(x)u_n(x)} \ge \frac{\frac{1}{2} m_n(x) u_n(x)}{1 + M_n(x) u_n(x)}. \qquad \textbf{(2.7)}$$

Atsižvelgę į (2.6.) ir (2.7.) nelygybes gauname nario $R_n(x)$ įvertį. Tada iš (2.4.) išplaukia teoremos teiginys.

Tolygusis skirstinys. Tarkime, kad *k* atsitiktinių dydžių tolygiai pasiskirstę intervale $(0, \theta_1)$ (čia $\theta_1 = 1$), o likusieji atsitiktiniai dydžiai yra tolygiai pasiskirstę intervale $(0, \theta_2)$ (čia $\theta_2 = 2$) , t.y.

$$F_j(x) = \theta_j x, \quad 0 < x < \frac{1}{\theta_j}, \quad j = 1;2, \quad \theta_1 = 1; \quad \theta_2 = 2.$$

Parenkame centravimo ir normavimo konstantas

$$c_n = 0, \quad d_n = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \theta_j} = \frac{1}{2n-k}.$$

Šiuo atveju

$$u_n(x) = \left(\frac{\theta_1 x}{\sum_{j=1}^{n} \theta_j} + \ldots + \frac{\theta_n x}{\sum_{j=1}^{n} \theta_j} \right) = x,$$

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) = x.$$

Tolygiai pasiskirsčiusiems atsitiktiniams dydžiams

$$M_n(x) = \max_j F_j(c_n + d_n x) = \max_j \left(\frac{\theta_j x}{\sum_{j=1}^{n} \theta_i} \right) = \frac{2x}{\sum_{j=1}^{k} 1 + \sum_{j=n-k}^{n} 2} = \frac{2x}{k + 2n - 2k} = \frac{2x}{2n-k},$$

$$m_n(x) = \min_j F_j(c_n + d_n x) = \min_j \frac{\theta_j x}{\sum_{j=1}^{n} \theta_i} = \frac{x}{2n-k}.$$

Tikriname 2.1 teoremos sąlygą

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1 \le j \le n} \frac{\theta_j x}{\sum_{j=1}^{n} \theta_i} = \lim_{n\to\infty} \frac{2x}{2n-k} = 0.$$

Ši sąlyga tenkinama, todėl

$$\lim_{n\to\infty} P(W_n < c_n + d_n x) = L(x) = 1 - e^{-x}, \quad x > 0.$$

Toliau turime

$$\rho_n(x) = u_n(x) - u(x) = 0.$$

Tuomet taikydami 2.1 teoremą gauname

$$P(W_n < c_n + d_n x) = 1 - e^{-u_n(x)}(1 - R_n(x)) = 1 - e^{-x}(1 - R_n(x)),$$

čia

$$\frac{\frac{1}{2} m_n(x) u_n(x)}{1 + M_n(x) u_n(x)} \le R_n(x) \le M_n(x) u_n(x),$$

$$\frac{\frac{1}{2}\frac{x^2}{2n-k}}{1+\frac{2x^2}{2n-k}} \le R_n(x) \le \frac{2x^2}{2n-k}.$$

Taikydami (2.3) išraišką gausime nevienodai pasiskirsčiusių tolygiųjų atsitiktinių dydžių minimumo skirstinio konvergavimo greičio įvertį.

$$(1-L(x))R_{n,1}(x) < P(W_n < c_n + d_n x) - L(x) < (1-L(x))R_{n,2}(x)$$

Kadangi

$$P(W_n < c_n + d_n x) = 1 - \prod_{j=1}^{n}(1-F_j(x)) = 1 - \left(1-\frac{x}{2n-k}\right)^k \left(1-\frac{2x}{2n-k}\right)^{n-k},$$

tai

$$e^{-x}\frac{\frac{1}{2}\frac{x^2}{2n-k}}{1+\frac{2x^2}{2n-k}} < e^{-x} - \left(1-\frac{x}{2n-k}\right)^k \left(1-\frac{2x}{2n-k}\right)^{n-k} < e^{-x}\frac{2x^2}{2n-k}.$$

Tolygiųjų atsitiktinių dydžių minimumo skirstinio konvergavimo greičio grafinė realizacija pateikta 7 priede.

2.5 DAUGIAMAČIŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMO SKIRSTINIO ASIMPTOTINIS TYRIMAS

Daugiamačių atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio įverčius rasime 1.13 teoremos rezultatą pritaikę daugiamačių atsitiktinių dydžių schemai.

2.5.1 Dvimatis eksponentinis skirstinys. Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai

$$\{X_n = (X_{1,n}, X_{2,n}, ..., X_{m,n}), n \ge 1\}$$

turi skirstinio funkciją

$$F(x_1, x_2) = 1 - e^{-x_1} - e^{-x_2} + e^{-x_1-x_2}.$$

Šio skirstinio vienmatės marginaliosios funkcijos yra:

$$F_1(x_1) = \lim_{x_2\to\infty} F(x_1, x_2) = 1 - e^{-x_1},$$
$$F_2(x_2) = \lim_{x_1\to\infty} F(x_1, x_2) = 1 - e^{-x_2}.$$

Pasižymėję $x = (x_1, x_2)$ ir parinkę centravimo ir normavimo vektorius

$$a_n = (\ln(n), \ln(n)), \quad b_n = (1,1)$$

gauname

$$F(a_n + b_n x) = 1 - \frac{e^{-x_1}}{n} - \frac{e^{-x_2}}{n} + \frac{e^{-x_1-x_2}}{n^2}.$$

Ribinis skirstinys

$$H(x) = \lim_{n\to\infty} P(Z_n < a_n + b_n x) = \lim_{n\to\infty} F^n(a_n + b_n x) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{e^{-x_1}}{n} - \frac{e^{-x_2}}{n} + \frac{e^{-x_1-x_2}}{n^2}\right)^n =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{ne^{-x_1} + ne^{-x_2} - e^{-x_1-x_2}}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{ne^{-x_1} + ne^{-x_2} - e^{-x_1-x_2}}{n^2}\right)^{-\frac{n^2}{ne^{-x_1}+ne^{-x_2}-e^{-x_1-x_2}}\cdot n\cdot\left(-\frac{ne^{-x_1}+ne^{-x_2}-e^{-x_1-x_2}}{n^2}\right)} =$$
$$= e^{-e^{-x_1}-e^{-x_2}}, \quad x_1 > 0,\ x_2 > 0.$$

Tuomet

$$z_n(x) = n(1 - F(a_n + b_n x)) = n\left(1 - 1 + \frac{e^{-x_1}}{n} + \frac{e^{-x_2}}{n} - \frac{e^{-x_1-x_2}}{n^2}\right) = e^{-x_1} + e^{-x_2} - \frac{e^{-x_1-x_2}}{n};$$

$$z(x) = \lim_{n\to\infty} z_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(e^{-x_1} + e^{-x_2} - \frac{e^{-x_1-x_2}}{n}\right) = e^{-x_1} + e^{-x_2};$$

$$\rho_n(x) = z_n(x) - z(x) = -\frac{e^{-x_1-x_2}}{n}.$$

Taikydami (1.21) išraišką gauname

$$P(Z_n < a_n + b_n x) = H(x)e^{-\rho_n(x)}(1 - R_n(x)) = e^{-e^{-x_1}-e^{-x_2}}\, e^{\frac{e^{-x_1-x_2}}{n}}(1 - R_n(x));$$

čia

$$\frac{z_n^2(x)}{2n + z_n^2(x)} \le R_n(x) \le \frac{z_n^2(x)}{n},$$

$$\frac{\left(e^{-x_1}+e^{-x_2}-\frac{e^{-x_1-x_2}}{n}\right)^2}{2n+\left(e^{-x_1}+e^{-x_2}-\frac{e^{-x_1-x_2}}{n}\right)^2}\le R_n(x)\le\frac{\left(e^{-x_1}+e^{-x_2}-\frac{e^{-x_1-x_2}}{n}\right)^2}{n}.$$

Dvimačių eksponentinių atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio įverčių grafinė realizacija pateikta 8 priede.

2.5.2 Dvimatis Pareto skirstinys. Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai

$$\left\{X_n=\left(X_{1,n},X_{2,n},...,X_{m,n}\right),\ n\ge 1\right\}$$

turi skirstinio funkciją

$$F\left(x_1,x_2\right)=1-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1x_2},\quad x_1>0,\ x_2>0.$$

Šio skirstinio vienmatės marginaliosios funkcijos yra

$$F_1(x_1)=\lim_{x_2\to\infty}F\left(x_1,x_2\right)=1-\frac{1}{x_1},$$
$$F_2(x_2)=\lim_{x_1\to\infty}F\left(x_1,x_2\right)=1-\frac{1}{x_2}.$$

Pasižymėję $x=(x_1,x_2)$ ir parinkę centravimo ir normavimo vektorius

$$a_n=(0,0),\quad b_n=(n,n)$$

randame ribinį skirstinį

$$H(x)=\lim_{n\to\infty}P\left(Z_n<a_n+b_nx\right)=e^{\left(-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)},\quad \left(x_1,x_2\right)>0.$$

Tuomet

$$z_n(x)=n\left(1-F\left(a_n+b_nx\right)\right)=n\left(\frac{1}{nx_1}+\frac{1}{nx_2}-\frac{1}{n^2x_1x_2}\right)=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}-\frac{1}{nx_1x_2},$$
$$z(x)=\lim_{n\to\infty}z_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}-\frac{1}{nx_1x_2}\right)=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2},$$
$$\rho_n(x)=z_n(x)-z(x)=-\frac{1}{nx_1x_2}.$$

Taikydami (1.21) išraišką daugiamačiams atsitiktiniams dydžiams gauname

$$P(Z_n < a_n + b_n x) = H(x)e^{-\rho_n(x)}(1 - R_n(x)) = e^{\left(-\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)} e^{-\frac{1}{n x_1 x_2}}(1 - R_n(x));$$

čia

$$\frac{z_n^2(x)}{2n + z_n^2(x)} \le R_n(x) \le \frac{z_n^2(x)}{n},$$

$$\frac{\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - \frac{1}{n x_1 x_2}\right)^2}{2n + \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - \frac{1}{n x_1 x_2}\right)^2} \le R_n(x) \le \frac{\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - \frac{1}{n x_1 x_2}\right)^2}{n}.$$

Dvimačių Pareto atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio įverčių grafinė realizacija pateikta 9 priede.

2.6 VIENODAI PASISKIRSČIUSIŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMO TANKIO ASIMPTOTINIS TYRIMAS

Suformuluosime ir įrodysime teoremą, kurioje yra gaunamas vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių $\frac{Z_n - a_n}{b_n}$ maksimumo tankio įvertis. Sakykime, kad $G_n(x) = a_n + b_n x$.

Jeigu

$$z_n(x) = n(1 - F(a_n + b_n x)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z(x), \qquad \textbf{(2.8)}$$

tai

$$P(Z_n < a_n + b_n x) \to H(x) = e^{-z(x)}. \qquad \textbf{(2.9)}$$

2.2 teorema. Tarkime yra tenkinama (2.6) sąlyga. Tuomet su visais x tokiais, kad $\frac{z_n(x)}{n} \le \frac{1}{2}$, yra teisingas tankio įvertis:

$$p_{Z_n}(x) = (n+1) b_n p(a_n + b_n x) e^{-z_n(x)}(1 - R_n(x)); \qquad \textbf{(2.10)}$$

čia

$$\frac{z_n^2(x)}{2n\left(1+\frac{5}{6}\frac{z_n^2(x)}{n}\right)} \le R_n(x) \le \frac{5}{6}\frac{z_n^2(x)}{n}.$$

Įrodymas. Atsitiktiniai dydžiai $\{X_j, j=1,2..n+1\}$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę, todėl

$$P(Z_n < a_n + b_n x) = F^{n+1}(a_n + b_n x),$$

$$p_{Z_n}(x) = \left(F^{n+1}(a_n + b_n x)\right)' = (n+1)b_n p(a_n + b_n x)F^n(a_n + b_n x)$$

ir

$$F^n(a_n + b_n x) = \left(1 - \frac{z_n(x)}{n}\right)^n.$$

Atsižvelgę į sąlygą $\frac{z_n(x)}{n} \le \frac{1}{2}$, gauname

$$P(Z_n < a_n + b_n x) = (n+1)b_n p(a_n + b_n x)e^{\left\{-n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{z_n(x)}{n}\right)^k\right\}} =$$

$$= (n+1)b_n p(a_n + b_n x)e^{-z_n(x)} \exp\left\{-n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{z_n(x)}{n}\right)^k\right\} = (n+1)b_n p(a_n + b_n x)e^{-z_n(x)}(1 - R_n(x)); \qquad \textbf{(2.11)}$$

čia

$$R_n(x) = 1 - \exp\left\{-n\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{z_n(x)}{n}\right)^k\right\}. \qquad \textbf{(2.12)}$$

Įvertinsime liekamąjį narį $R_n(x)$ taikydami nelygybę

$$\frac{t}{t+1} \le 1 - e^{-t} \le t,$$

kuri yra teisinga visiems $t \ge 0$.

Viršutinis įvertis yra:

$$R_n(x) \le n\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{z_n(x)}{n}\right)^k \le \frac{z_n^2(x)}{2n}\left(1+\frac{2}{3}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{z_n(x)}{n}\right)^{k-2}\right)=$$

$$=\frac{z_n^2(x)}{2n}\left(1+\frac{2}{3}\frac{\frac{z_n(x)}{n}}{1-\frac{z_n(x)}{n}}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{z_n(x)}{n}\right)^{k-2}\right) \le \frac{z_n^2(x)}{2n}\left(1+\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{6}\frac{z_n^2(x)}{n}. \qquad \textbf{(2.13)}$$

Apatinis įvertis:

$$R_n(x) \ge \frac{n\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{z_n(x)}{n}\right)^k}{1+n\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{z_n(x)}{n}\right)^k} \ge \frac{\frac{z_n^2(x)}{2n}}{1+\frac{5}{6}\frac{z_n^2(x)}{n}}=\frac{z_n^2(x)}{2n\left(1+\frac{5}{6}\frac{z_n^2(x)}{n}\right)}. \qquad \textbf{(2.14)}$$

Iš (2.12), (2.13) ir (2.14) mes gauname liekamojo nario $R_n(x)$ įvertį. Tuomet taikydami (2.11) gauname teoremos teiginį.

Pastabos:

1. Galima naudoti kompaktiškesnį, tačiau grubesnį $R_n(x)$ įvertį

$$\frac{z_n^2(x)}{2n+z_n^2(x)} \le R_n(x) \le \frac{z_n^2(x)}{n}.$$

2. Sąlygą $\frac{z(x)}{n} \le \frac{1}{2}$ galima pakeisti $\frac{z_n(x)}{n} \le q \le 1$. Tada į $R_n(x)$ įverčius įeis parametras q.

3. Pažymėkime

$$\rho_n(x) = z_n(x) - z(x).$$

Tuomet

$$p_{Z_n}(x) = (n+1)p(a_n + b_n x)b_n H(x)e^{-\rho_n(x)}(1-R_n(x)).$$

Jeigu $\rho_n(x) \equiv 0$, tai

$$p_{Z_n}(x) = (n+1)p(a_n + b_n x)b_n H(x)(1-R_n(x)).$$

2.6.1 Eksponentinis skirstinys. Nagrinėkime eksponentinius atsitiktinius dydžius $\{X_j, \quad j \ge 1\}$, kurių skirstinio funkcija ir tankis yra:

$$F(x) = 1-\exp(-x); \qquad p(x) = \exp(-x).$$

Parinkę centravimo ir normavimo konstantas $a_n = \ln(n), \quad b_n = 1$ gauname

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n < a_n + b_n x) = H_3(x) = e^{-e^{-x}}.$$

Tikriname 1.14 teoremos c) sąlygą:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{p(x)\int_x^\infty (1-F(t))dt}{(1-F(x))} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-x}\int_x^\infty \left(1-1+e^{-t}\right)dt}{\left(1-F(t)\right)} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-x}e^{-x}}{\left(e^{-x}\right)^2} = 1.$$

Ši sąlyga yra tenkinama, todėl

$$\lim_{n\to\infty} p_{Z_n(x)} = H'(x) = e^{-x}e^{-e^{-x}}.$$

Turime

$$p_{Z_n(x)} = (n+1)b_n p(a_n + b_n x)F^n(a_n + b_n x) = \frac{n+1}{n} e^{-x}(1-e^{-\ln(n)-x})^n,$$

$$z_n(x) = n(1-F(a_n + b_n x)) = n(1-1+e^{-\ln(n)-x}) = e^{-x}.$$

Taikome 2.2 teoremą eksponentiniams atsitiktiniams dydžiams ir gauname

$$p_{Z_n}(x) = \frac{n+1}{n} e^{-x}e^{-e^{-x}}(1-R_n(x));$$

čia

$$\frac{e^{-2x}}{2n(1+\frac{5}{6}\frac{e^{-2x}}{n})} \le R_n(x) \le \frac{5}{6}\frac{e^{-2x}}{n}.$$

Eksponentinių atsitiktinių dydžių maksimumo tankio įverčių grafinė realizacija pateikta 10 priede.

2.6.2 Tolygusis skirstinys. Nagrinėkime tolygiuosius atsitiktinius dydžius $\{X_j, \quad j \ge 1\}$, kurių skirstinio funkcija ir tankis yra:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \le x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases} \qquad p(x) = 1.$$

Parinkę centravimo ir normavimo konstantas $a_n = 1, \quad b_n = \dfrac{1}{n}$ gauname

$$\lim_{n\to\infty} P\left(Z_n < a_n + b_n x\right) = H\left(x\right) = e^x, \quad x < 0.$$

Tikriname 1.14 teoremos b) sąlygą:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(1-x\right)}{1-F\left(x\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-x} = 1.$$

Ši sąlyga yra tenkinama, todėl

$$\lim_{n\to\infty} p_{Z_n(x)} = H'(x) = e^x.$$

Turime

$$p_{Z_n(x)} = (n+1)b_n p(a_n + b_n x)F^n(a_n + b_n x) = \frac{(n+1)}{n}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,$$

$$z_n(x) = n(1 - F(a_n + b_n x)) = n(1 - 1 - \frac{x}{n}) = -x.$$

Taikome 2.2 teoremą tolygiesiems atsitiktiniams dydžiams

$$p_{Z_n}(x) = \frac{n+1}{n} e^x (1 - R_n(x));$$

čia

$$\frac{x^2}{2n(1+\frac{5}{6}\frac{x^2}{n})} \le R_n(x) \le \frac{5}{6}\frac{x^2}{n}.$$

Tolygiųjų atsitiktinių dydžių maksimumo tankio įverčių grafinė realizacija pateikta 11 priede.

2.7 VIENODAI PASISKIRSČIUSIŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MINIMUMO TANKIO ASIMPTOTIKA

Suformuluosime ir įrodysime teoremą, kurioje yra gaunamas vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių $\dfrac{Z_n - c_n}{d_n}$ minimumo tankio įvertis. Sakykime, kad $g_n(x) = c_n + d_n x$.

Jeigu

$$u_n(x) = n(F(c_n + d_n x)) \underset{n\to\infty}{\to} u(x), \tag{2.15}$$

tai

$$P(W_n < c_n + d_n x) \to L(x) = 1 - e^{-u(x)} . \tag{2.16}$$

2.3 teorema. Tarkime yra tenkinama (2.16) sąlyga. Tuomet su visais x tokiais, kad $\frac{u_n(x)}{n} \le \frac{1}{2}$, yra teisingas tankio įvertis*:*

$$p_{W_n}(x) = (n+1) d_n p(c_n + d_n x) e^{-u_n(x)} (1 - R_n(x)); \tag{2.17}$$

čia

$$\frac{u_n^2(x)}{2n\left(1 + \frac{5}{6}\frac{u_n^2(x)}{n}\right)} \le R_n(x) \le \frac{5}{6}\frac{u_n^2(x)}{n}.$$

Įrodymas. Atsitiktiniai dydžiai $\{X_j,\ j = 1, 2 .. n+1\}$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę, todėl

$$P(W_n < c_n + d_n x) = 1 - (1 - F(a_n + b_n x))^{n+1},$$

$$p_{W_n}(x) = \left(1 - (1 - F(a_n + b_n x))^{n+1}\right)' = (n+1) d_n p(c_n + d_n x)(1 - F(c_n + d_n x))^n$$

ir

$$(1 - F(c_n + d_n x))^n = \left(1 - \frac{u_n(x)}{n}\right)^n .$$

Su visais x tokiais, kad $\frac{u_n(x)}{n} \le \frac{1}{2}$, gauname

$$P(W_n < c_n + d_n x) = (n+1) d_n p(c_n + d_n x) e^{\left\{-n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{u_n(x)}{n}\right)^k\right\}} =$$

$$= (n+1) d_n p(c_n + d_n x) e^{-u_n(x)} \exp\left\{-n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{u_n(x)}{n}\right)^k\right\} = (n+1) d_n p(c_n + d_n x) e^{-u_n(x)} (1 - R_n(x)); \tag{2.18}$$

čia

$$R_n(x) = 1 - \exp\left\{-n\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{u_n(x)}{n}\right)^k\right\}. \qquad \textbf{(2.19)}$$

Įvertinsime liekamąjį narį $R_n(x)$ taikydami nelygybę

$$\frac{t}{t+1} \le 1 - e^{-t} \le t,$$

kuri yra teisinga visiems $t \ge 0$.

Viršutinis įvertis yra:

$$R_n(x) \le n\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{u_n(x)}{n}\right)^k \le \frac{u_n^2(x)}{2n}\left(1 + \frac{2}{3}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{u_n(x)}{n}\right)^{k-2}\right) =$$

$$= \frac{u_n^2(x)}{2n}\left(1 + \frac{2}{3}\frac{\frac{u_n(x)}{n}}{1 - \frac{u_n(x)}{n}}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{u_n(x)}{n}\right)^{k-2}\right) \le \frac{u_n^2(x)}{2n}\left(1 + \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{6}\frac{u_n^2(x)}{n}. \qquad \textbf{(2.20)}$$

Apatinis įvertis:

$$R_n(x) \ge \frac{n\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{u_n(x)}{n}\right)^k}{1 + n\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{u_n(x)}{n}\right)^k} \ge \frac{\frac{u_n^2(x)}{2n}}{1 + \frac{5}{6}\frac{u_n^2(x)}{n}} = \frac{u_n^2(x)}{2n\left(1 + \frac{5}{6}\frac{u_n^2(x)}{n}\right)}. \qquad \textbf{(2.21)}$$

Iš (2.19), (2.20) ir (2.21) mes gauname liekamojo nario $R_n(x)$ įvertį. Tuomet taikydami (2.18) gauname teoremos teiginį.

Tolygusis skirstinys. Nagrinėkime tolygiuosius atsitiktinius dydžius $\{X_j, \quad j \ge 1\}$, kurių skirstinio funkcija ir tankis yra:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \le x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases} \qquad p(x) = 1.$$

Parankę centravimo ir normavimo konstantas $c_n = 0, \quad d_n = \frac{1}{n}$ gauname

$$\lim_{n\to\infty} P\left(W_n < c_n + d_n x\right) = L_2(x) = 1 - e^{-x}, \quad x < 0 .$$

Tikriname 1.15 teoremos b) sąlygą:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\alpha(F) - x\right)p(-x)}{F(-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{-x} = 1.$$

Ši sąlyga yra tenkinama, todėl

$$\lim_{n\to\infty} p_{W_n(x)} = L'(x) = e^{-x}.$$

Turime

$$p_{W_n(x)} = (n+1)d_n p(c_n + d_n x)(1 - F(c_n + d_n x))^n = \frac{n+1}{n}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n,$$

$$u_n(x) = nF(c_n + d_n x) = n\left(\frac{x}{n}\right) = x.$$

Taikome 2.3 teoremą tolygiesiems atsitiktiniams dydžiams

$$p_{W_n}(x) = \frac{n+1}{n} e^{-x}\left(1 - R_n(x)\right),$$

čia

$$\frac{(x)^2}{2n(1 + \frac{5}{6}\frac{(x)^2}{n})} \le R_n(x) \le \frac{5}{6}\frac{(x)^2}{n}.$$

Tolygiųjų atsitiktinių dydžių minimumo tankio įverčių grafinė realizacija pateikta 12 priede.

2.8 NETIESIŠKAI NORMUOTŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMO TANKIO ASIMPTOTIKA

Suformuluosime teoremą, kurioje yra gaunamas netiesiškai normuoto maksimumo $\alpha_n^{-1}(Z_n)$ tankio įvertis; čia $\alpha_n(x)$ yra netiesinių normavimo funkcijų seka

Jeigu

$$z_n(x) = n(1 - F(\alpha_n(x))) \underset{n\to\infty}{\to} z(x) > 0, \qquad \textbf{(2.22)}$$

tai

$$P\left(Z_n < \alpha_n(x)\right) \to H(x) = e^{-z(x)}. \qquad \textbf{(2.23)}$$

Be to dar tarkime, kad

$$\lim_{n\to\infty} p_{Z_n(x)} = H'(x).$$

2.4 teorema. Tarkime yra tenkinama (2.23) sąlyga. Tuomet su visais x tokiais, kad $\frac{z_n(x)}{n} \le \frac{1}{2}$, yra teisingas tankio įvertis:

$$p_{Z_n}(x) = (n+1)\alpha_n'(x)p(\alpha_n(x))e^{-z_n(x)}(1-R_n(x)); \qquad \textbf{(2.24)}$$

čia

$$\frac{z_n^2(x)}{2n\left(1+\frac{5}{6}\frac{z_n^2(x)}{n}\right)} \le R_n(x) \le \frac{5}{6}\frac{z_n^2(x)}{n}.$$

Šios teoremos įrodymas yra analogiškas kaip ir 2.2 teoremos.

Netiesiškai normuotas skirstinys. Nagrinėkime atsitiktinius dydžius $\{X_j, \quad j \ge 1\}$, kurių skirstinio funkcija ir tankis yra:

$$F(x) = 1 - \frac{1}{\ln(x)}, \qquad p(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^2}.$$

Parinkę netiesinę normavimo funkciją $\alpha_n(x) = e^{nx}$ gauname

$$\lim_{n\to\infty} p_{Z_n}(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{nx^2}\left(1-\frac{1}{nx}\right)^n\right) = H'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}.$$

Turime

$$p_{Z_n(x)} = (n+1)\alpha_n'(x)p(\alpha_n(x))(F(\alpha_n(x)))^n = (n+1)ne^{nx}\frac{1}{e^{nx}(nx)^2}\left(1-\frac{1}{nx}\right)^n,$$

$$z_n(x) = n(1-F(\alpha_n(x)) = n\left(\frac{1}{nx}\right) = \frac{1}{x}.$$

Taikome 2.4 teoremą

$$p_{Z_n}(x) = (n+1)\alpha_n'(x)p(\alpha_n(x))e^{-z_n(x)}(1-R_n(x)) = \frac{(n+1)}{nx^2}e^{-\frac{1}{x}}(1-R_n(x));$$

čia

$$\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{2n+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \le R_n(x) \le \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{n}.$$

Šių netiesiškai normuotų atsitiktinių dydžių maksimumo tankio įverčių grafinė realizacija pateikta 13 priede.

2.9 NETIESIŠKAI NORMUOTŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MINIMUMO TANKIO ASIMPTOTIKA

Suformuluosime teoremą, kurioje yra gaunamas netiesiškai normuoto minimumo $\beta_n^{-1}(W_n)$ tankio įvertis; čia $\beta_n(x)$ netiesinių normavimo funkcijų seka.

Jeigu

$$u_n(x) = n(F(g_n(x))) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u(x) > 0, \tag{2.25}$$

tai

$$P(W_n < \beta_n(x)) \to L(x) = 1 - e^{-u(x)}. \tag{2.26}$$

Be to dar tarkime, kad

$$\lim_{n\to\infty} p_{W_n}(x) = L'(x).$$

2.5 teorema. Tarkime yra tenkinama (2.26) sąlyga. Tuomet su visais x tokiais, kad $\frac{u_n(x)}{n} \le \frac{1}{2}$,yra teisingas tankio įvertis*:*

$$p_{W_n}(x) = (n+1)d_n\, p(\beta_n(x))e^{-u_n(x)}(1 - R_n(x)); \tag{2.27}$$

čia

$$\frac{u_n^2(x)}{2n\left(1+\frac{5}{6}\frac{u_n^2(x)}{n}\right)} \le R_n(x) \le \frac{5}{6}\frac{u_n^2(x)}{n}.$$

Šios teoremos įrodymas yra analogiškas kaip ir 2.3 teoremos.

Netiesiškai normuotas skirstinys. Nagrinėkime atsitiktinius dydžius $\{X_j, \quad j \ge 1\}$, kurių skirstinio funkcija yra:

$$F(x) = 1 - \frac{1}{\ln(x)}, \qquad p(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^2}.$$

Parinkę netiesinę normavimo funkciją $\beta_n(x) = e^{\left(1+\frac{x}{n}\right)}$ gauname

$$P(W_n < \alpha_n(x)) = 1 - (1 - F(\alpha_n(x)))^n = 1 - \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\ln \alpha_n(x)}\right)\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{\ln e^{\left(1+\frac{x}{n}\right)}}\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{1+\frac{x}{n}}\right)^n$$

ir

$$\lim_{n\to\infty} P\left(W_n < e^{\left(1+\frac{x}{n}\right)}\right) = L(x) = 1 - e^{-x}.$$

Šiuo atveju yra tenkinama sąlyga

$$\lim_{n\to\infty} p_{W_n}(x) = L'(x) = e^{-x}.$$

Turime

$$p_{W_n(x)} = (n+1)\beta_n'(x)\, p(\beta_n(x))(1 - F(\alpha_n(x)))^n = \frac{(n+1)}{n\left(1+\frac{x}{n}\right)^2}\left(\frac{1}{1+\frac{x}{n}}\right)^n,$$

$$u_n(x) = n(F(\beta_n(x)) = \frac{nx}{n+x}.$$

Taikome 2.5 teoremą

$$p_{Z_n}(x) = (n+1)\beta_n'(x)\, p(\beta_n(x)) e^{-u_n(x)}(1 - R_n(x)) = \frac{(n+1)e^{-\left(\frac{nx}{n+x}\right)}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2}(1 - R_n(x));$$

čia

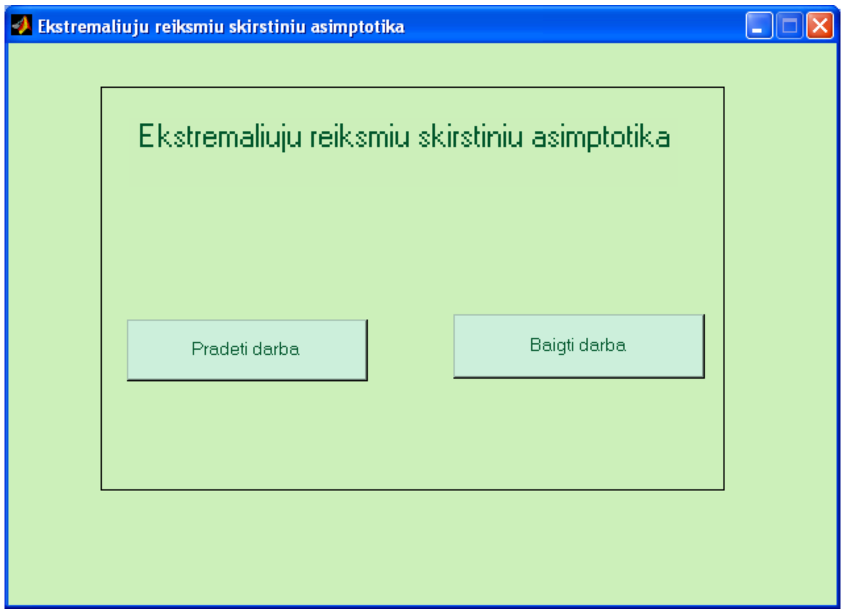
$$\frac{\left(\frac{nx}{n+x}\right)^2}{2n\left(1+\frac{5}{6}\frac{\left(\frac{nx}{n+x}\right)^2}{n}\right)} \le R_n(x) \le \frac{5}{6}\frac{\left(\frac{nx}{n+x}\right)^2}{n}.$$

Šių netiesiškai normuotų atsitiktinių dydžių minimumo tankio įverčių grafinė realizacija yra pateikta 14 priede.

3 PROGRAMINĖ REALIZACIJA IR INSTRUKCIJA VARTOTOJUI

Sąsaja su vartotoju yra sukurta naudojant Matlab 6.4 programinį paketą. Šis paketas pasirinktas todėl, kad jį naudojant matematiniai rezultatai gali būti nesunkiai ir išsamiai pavaizduoti grafiškai. Sąsaja su vartotoju yra sukurta naudojant Matlab 6.4 modulį „GUIDE“.

Programa yra skirta rezultatams grafiškai pavaizduoti. Ji paleidžiama atidarius bylą „mag1.fig“.

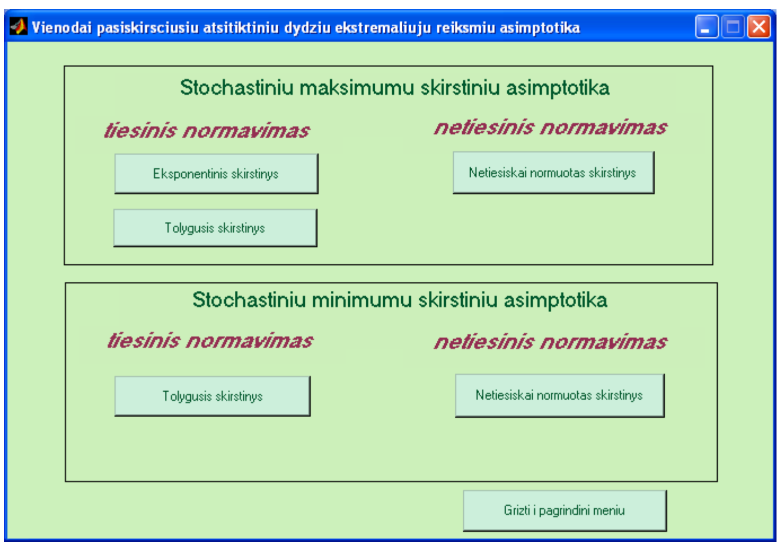


3.1 pav. Pagrindinis programos langas

Norėdamas pradėti darbą vartotojas pagrindiniame programos lange (3.1 pav.) turi paspausti mygtuką „pradėti darbą“. Jį paspaudus yra atidaromas langas, kuriame yra nurodyti pagrindiniai uždaviniai (3.2 pav.).

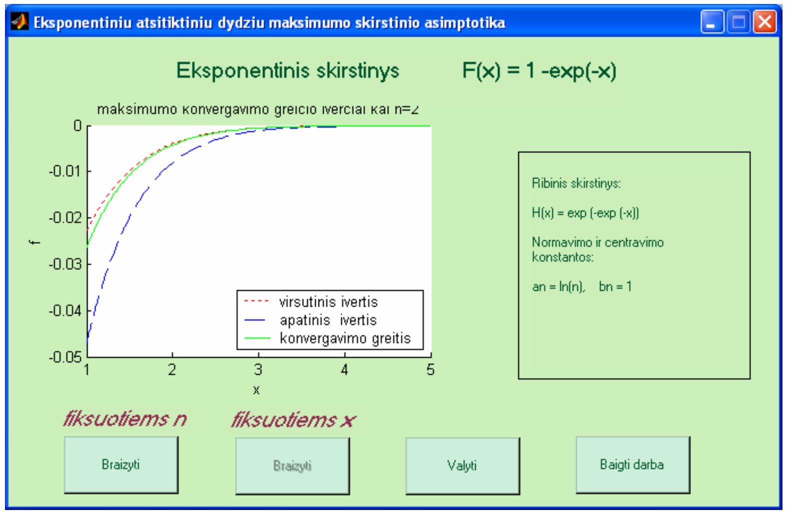
3.2 pav. Langas, kuriame yra nurodyti pagrindiniai sprendžiami uždaviniai

Paspaudus norimo uždavinio mygtuką yra atveriamas langas, kuriame tas uždavinys yra sprendžiamas konkretiems skirstiniams. Vartotojas gali pasirinkti minimumo arba maksimumo atvejį.



3.3 pav. Langas, kuriame vartotojo pasirinktas uždavinys yra sprendžiamas konkretiems skirstiniams

Sakykime, kad vartotojas tiria ekstremaliųjų reikšmių skirstinių asimptotiką maksimumo atveju. Paspaudus mygtuką „eksponentinis skirstinys“ (3.3 pav.) yra atveriamas grafinės realizacijos langas (3.4 pav.). Jame rezultatai pateikiami arba fiksuotiems n, arba fiksuotiems x paspaudus atitinkamą mygtuką. Mygtukas „valyti“ naudojamas grafiniams duomenims naikinti ir paruošia langą kito uždavinio sprendimui. Paspaudus mygtuką „ baigti darbą“ yra grįžtama į pasirinkto uždavinio meniu.



3.4 pav. Grafinės realizacijos langas

Toliau vartotojas gali spręsti tą patį uždavinį kito skirstinio atveju arba spragtelėjus mygtuką „grįžti į pagrindinį meniu“ sugrįžti į pagrindinį meniu. Analogiškai yra sprendžiami ir kiti uždaviniai.

DISKUSIJA

Ekstremaliųjų reikšmių teorija pasižymi įdomiomis teorinėmis problemomis, o jos rezultatai yra taikomi daugelyje sričių (meteorologijoje, finansuose, draudime, sistemų patikimumo tyrimuose, kokybės kontrolėje ir daugelyje kitų). Šiame darbe yra nagrinėjamas vienas iš šios teorijos uždavinių – ekstremaliųjų reikšmių skirstinių asimptotika. Pirmojoje darbo dalyje remiantis A. Aksomaičio gautu rezultatu yra surastos dvipusės ekstremaliųjų reikšmių skirstinių aproksimacijos. Šių aproksimacijų išraiškos yra taikomos konkretiems skirstiniams (eksponentiniam, tolygiajam, netiesiškai normuotam, Pareto). Bendruoju atveju aproksimacijų paklaidos eilės nustatyti negalima, tačiau tirdami konkrečius skirstinius nustatėme, jog paklaidos eilė yra $\frac{1}{n}$. Reikėtų paminėti, jog ši paklaidos eilė yra teisinga tik pasirinktų skirstinių atveju. Minimumo ir maksimumo skirstinių konvergavimo greičiai yra tirti tik tais atvejais, kai $\rho_n(x) \equiv 0$, todėl konvergavimo greitis yra surastas ne visiems nagrinėtiems skirstiniams. Pavyzdžiui, netiesiškai normuoto minimumo atveju nepavyko surasti tokio skirstinio, kuris tenkintų šią sąlygą, todėl nagrinėta tik skirstinio asimptotika. Analogiški rezultatai yra gauti ir nevienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių bei daugiamačių atsitiktinių dydžių schemoms.

Antrojoje darbo dalyje yra gauti ekstremaliųjų reikšmių tankių dėstiniai bei dvipusės aproksimacijos. Šiuo atveju norint gauti paprastesnę dėstinio išraišką yra nagrinėjami ne *n* narių, bet *n+1* nario maksimumai ir minimumai, tai yra

$$Z_n = \max(X_1, \ldots, X_{n+1}),$$

$$W_n = \min(X_1, \ldots, X_{n+1}).$$

Bendruoju atveju, kaip ir nagrinėjant ekstremaliųjų reikšmių skirstinių asimptotiką, paklaidos eilės nustatyti negalima, tačiau gautą rezultatą pritaikius konkretiems pavyzdžiams (eksponentiniam, tolygiajam, netiesiškai normuotam) gauta paklaidos eilė yra $\frac{1}{n}$.

IŠVADOS

1. Nepriklausomų atsitiktinių dydžių maksimumo skirstiniui galioja dėstinys:

$$P(Z_n < a_n + b_n x) = e^{-z_n(x)}(1 - R_n(x));$$

   čia $R_n(x)$ — tam tikra funkcija, priklausanti nuo *x* ir *n*.

2. Nagrinėtų skirstinių (eksponentinio, tolygiojo, Pareto) atveju dydžio $R_n(x)$ eilė *n* atžvilgiu lygi $\frac{1}{n}$.
3. Nepriklausomų atsitiktinių dydžių minimumo skirstiniui galioja analogiškas dėstinys kaip ir maksimumo skirstiniui.
4. Kai kuriems skirstiniams, kai $\rho_n(x) = 0$, yra gauti maksimumo ir minimumo skirstinių konvergavimo greičio įverčiai:

$$-H(x)R_{n,1}(x) < P(Z_n < a_n + b_n x) - H(x) < -H(x)R_{n,2}(x),$$
$$(1 - L(x))R_{n,1}(x) < P(W_n < c_n + d_n x) - L(x) < (1 - L(x))R_{n,2}(x).$$

5. Nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių maksimumo tankiui galioja dėstinys:

$$p_{Z_n}(x) = (n+1)b_n p(a_n + b_n x)e^{-z_n(x)}(1 - R_n(x));$$

   čia $R_n(x)$ — tokia pati funkcija kaip ir atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio atveju.

6. Nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių minimumo tankiui galioja analogiškas dėstinys kaip ir vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių maksimumo tankiui.

REKOMENDACIJOS

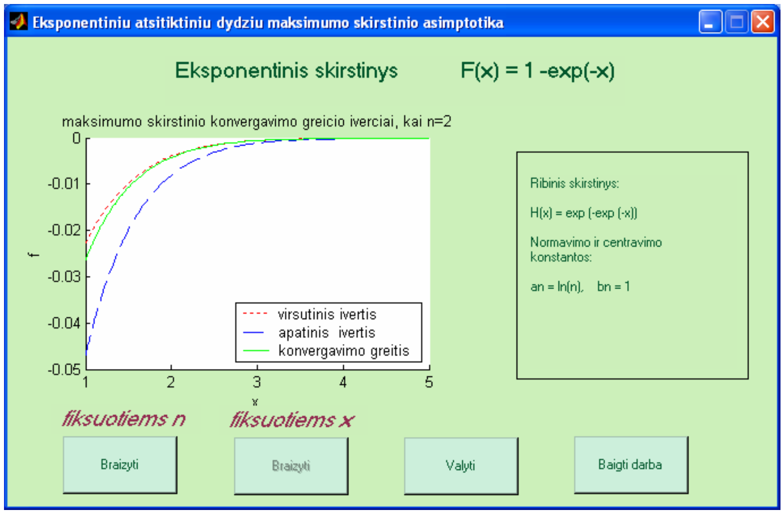
Šiame darbe yra tirta nepriklausomų atsitiktinių dydžių ekstremaliųjų reikšmių skirstinių asimptotika. Ši problema taip pat gali būti sprendžiama nagrinėjant įvairius klasikinės schemos apibendrinimus:

1. vietoje maksimumo arba minimumo galima imti *k*-tąsias ekstremaliąsias reikšmes;
2. nagrinėti ekstremaliųjų reikšmių asimptotiką, kai imties tūris yra atsitiktinis;
3. kai atsitiktiniai dydžiai $\{X_n, n \geq 1\}$ yra priklausomi.

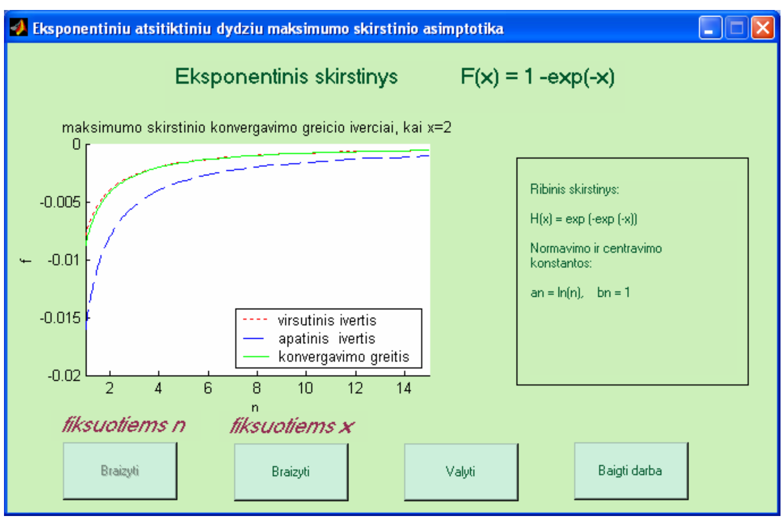
LITERATŪRA

1. Aksomaitis, A. Stochastinių maksimumų asimptotinis tyrimas/ rengiamas spaudai.
2. Aksomaitis, A. Non-uniform estimate of the rate of convergence in a limit theorem for max-scheme / Liet. Mat. Rinkinys 28, p. 211 – 215, 1988.
3. Aksomaitis, A., A. Jokimaitis Convergence Rate for Density of Maximum of independent random variables / Liet. Mat. Rinkinys 37, p. 133 – 138, 1997.
4. Coles, S., An Introduction to Statistical Modelingo f Extreme Values / Springer, Bristol 2001.
5. Finkenstadt, B., H. Rootzen Extreme Values in Finance, Telecomunications, and the Environment / Chapman and Hall / CRC, New York, 1999.
6. Galambos, J. The Asymptotic theory of Extreme Order Statistics / John Willey and Sons, New York ,1984.
7. Гнеденко, Б. В., Д. Б. Гнеденко. О распределениях Лапласа и логическом как предельных в теорий вероятностей / Сердика, 1982.
8. Jokimaitis, A. Nevienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio asimptotika / Liet. Matem. Rink., 44, spec. nr. 2004, p. 808 – 811.
9. Omey, E. Rates of Convergence for Densities in Extreme Value Theory / Ann. Probab. 16, p. 479 – 486, 1988.
10. Resnick, S.I.. Extreme Values, Regular variation, and Point Processes / New York: Springer, 1987.
11. Sweeting, T.J. On Domains of Uniform Attraction in Extreme Value Theory / Ann. Prob. 13, p. 196 – 205, 1985.

1 PRIEDAS. VIENODAI PASISKIRSČIUSIŲ EKSPONENTINIŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMO SKIRSTINIO ASIMPTOTIKA

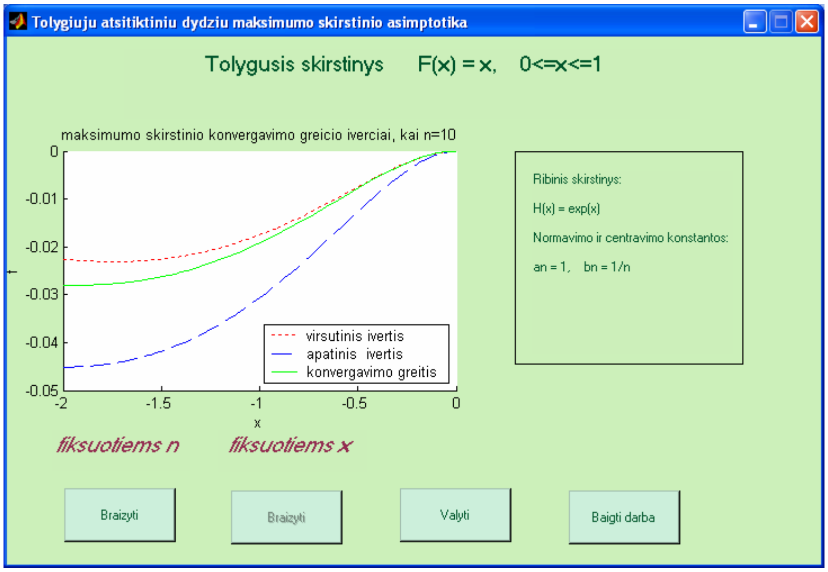


1.1 pav. Eksponentinių atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio konvergavimo greičio įverčiai, kai n=2

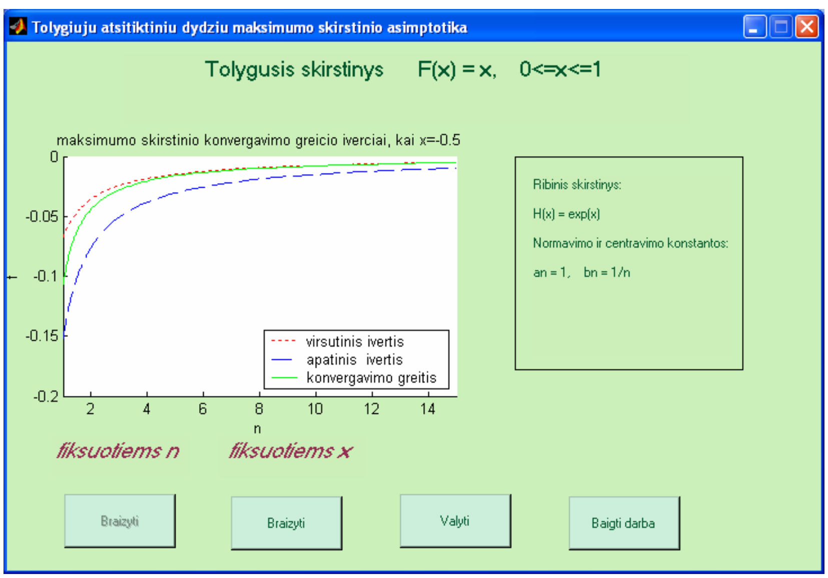


1.2 pav. Eksponentinių atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio konvergavimo greičio įverčiai, kai x=2

2 PRIEDAS. VIENODAI PASISKIRSČIUSIŲ TOLYGIŲJŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMO SKIRSTINIO ASIMPTOTIKA

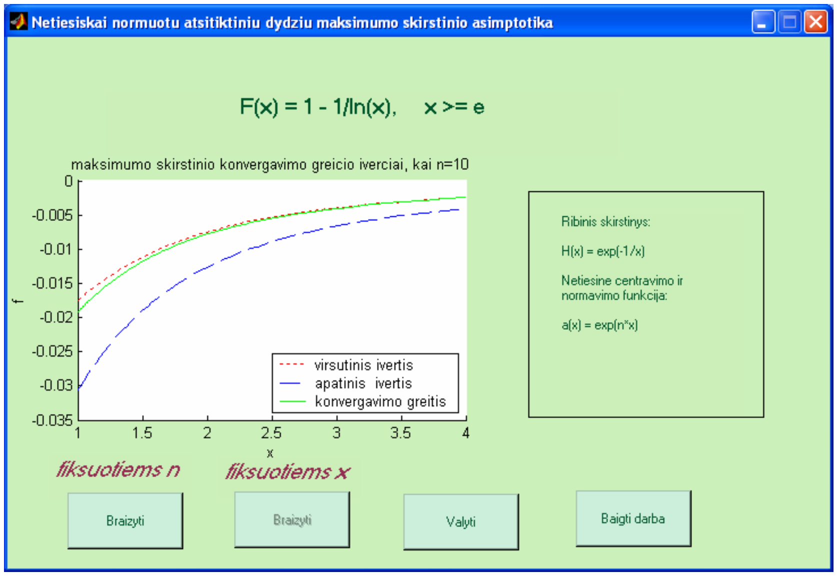


2.1 pav. Tolygiųjų atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio konvergavimo greičio įverčiai, kai n=10

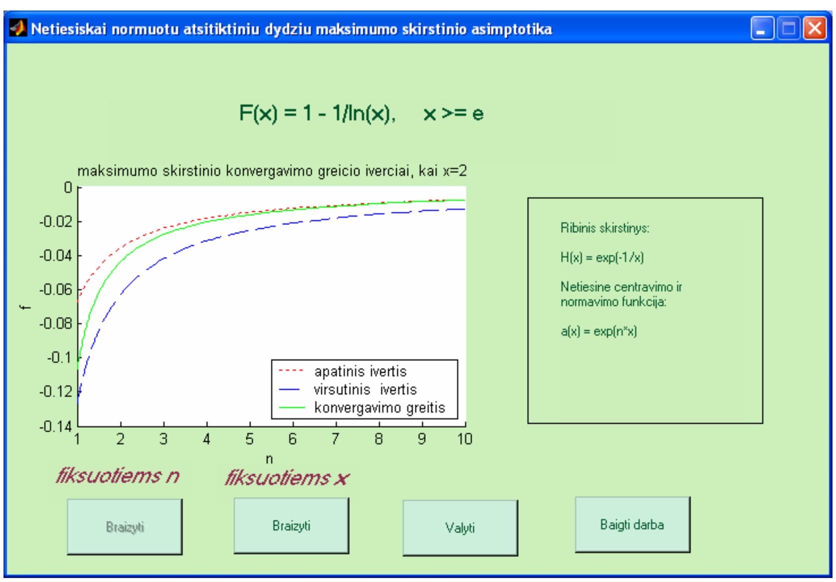


2.2 pav. Tolygiųjų atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio konvergavimo greičio įverčiai, kai x=-0.5

3 PRIEDAS. VIENODAI PASISKIRSČIUSIŲ NETIESIŠKAI NORMUOTŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMO SKIRSTINIO ASIMPTOTIKA

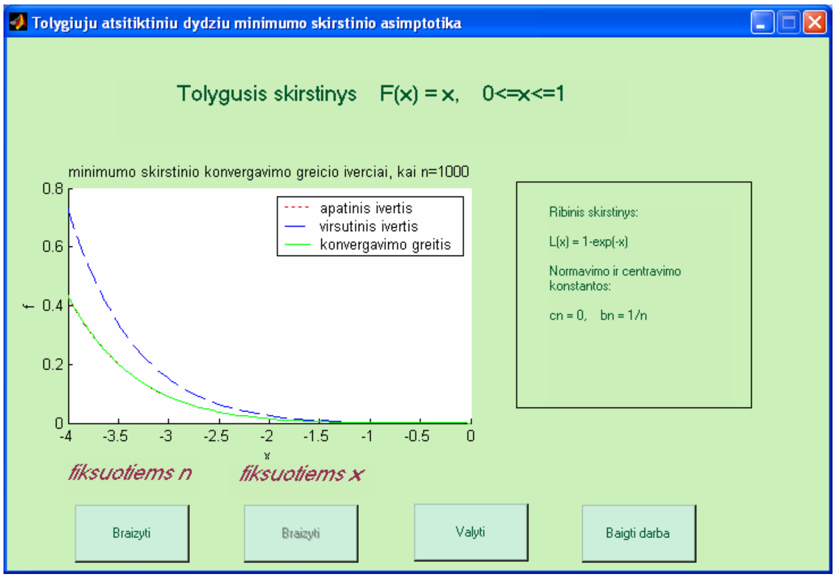


3.1 pav. Netiesiškai normuotų atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio konvergavimo greičio įverčiai, kai n=10

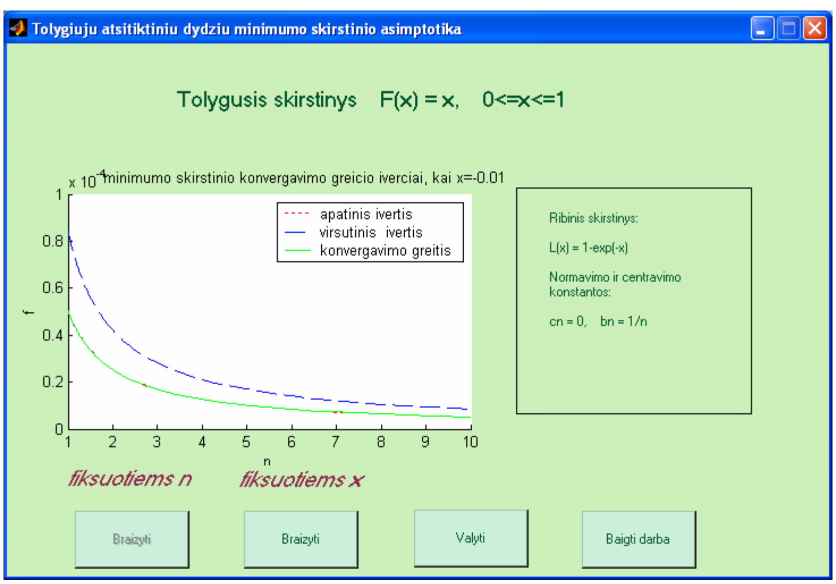


3.2 pav. Netiesiškai normuotų atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio konvergavimo greičio įverčiai, kai x=2

4 PRIEDAS. VIENODAI PASISKIRSČIUSIŲ TOLYGIŲJŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MINIMUMO SKIRSTINIO ASIMPTOTIKA

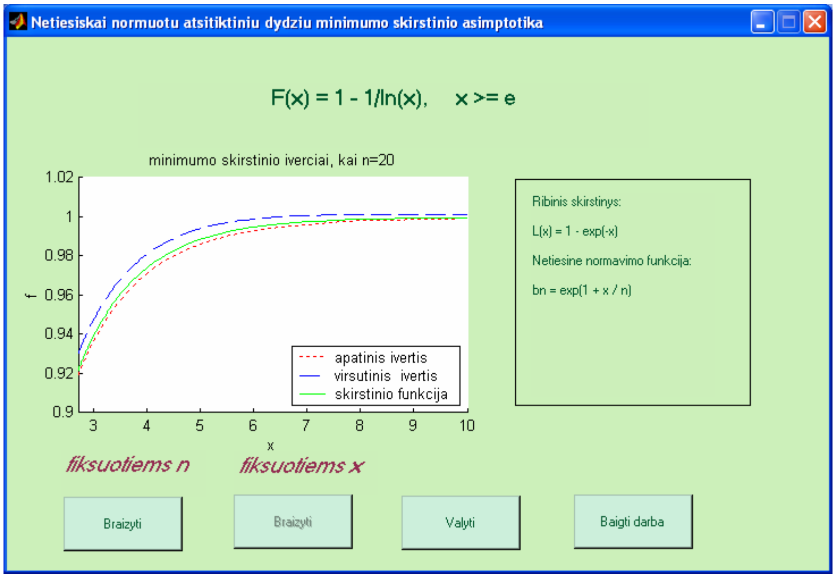


4.1 pav. Tolygiųjų atsitiktinių dydžių minimumo skirstinio konvergavimo greičio įverčiai, kai n=1000

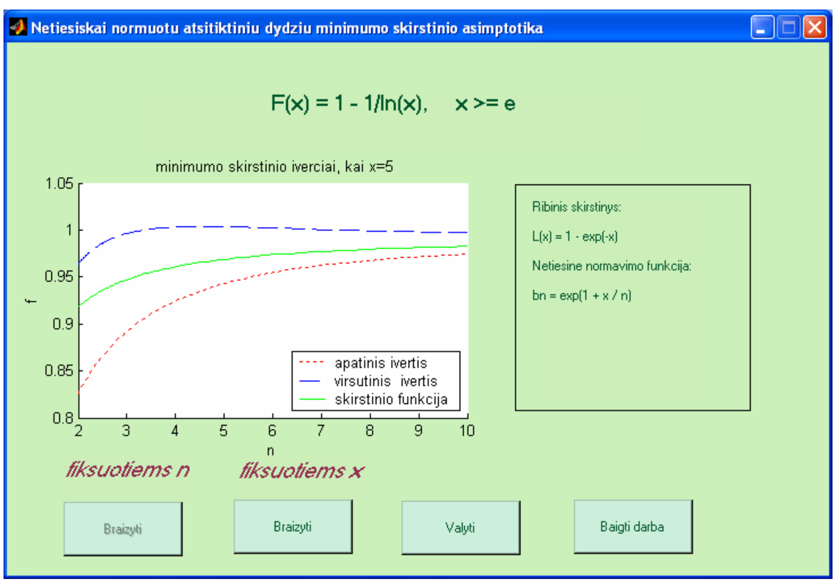


4.2 pav. Tolygiųjų atsitiktinių dydžių minimumo skirstinio konvergavimo greičio įverčiai, kai x=-0,01

5 PRIEDAS. VIENODAI PASISKIRSČIUSIŲ NETIESIŠKAI NORMUOTŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MINIMUMO SKIRSTINIO ASIMPTOTIKA

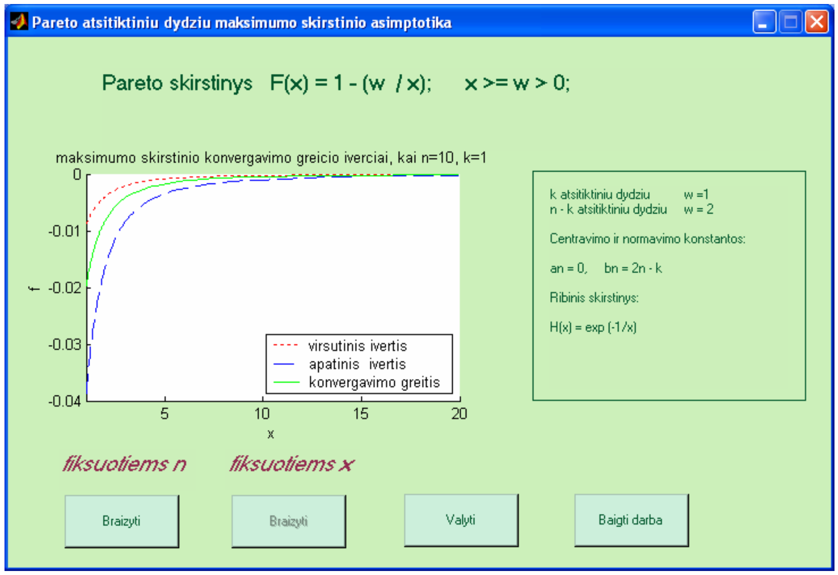


5.1 pav. Netiesiškai normuotų atsitiktinių dydžių minimumo skirstinio įverčiai, kai n=20

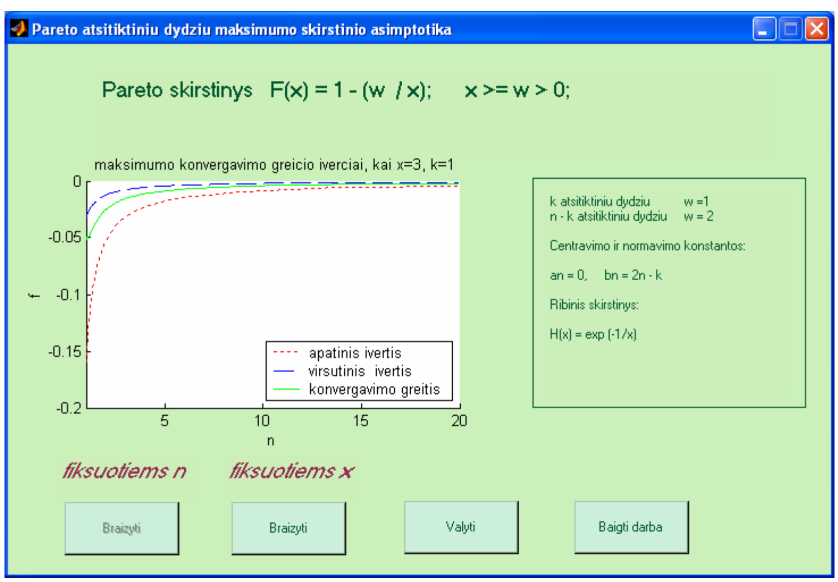


5.2 pav. Netiesiškai normuotų atsitiktinių dydžių minimumo skirstinio įverčiai, kai x=5

6 PRIEDAS. NEVIENODAI PASISKIRSČIUSIŲ PARETO ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMO SKIRSTINIO ASIMPTOTIKA

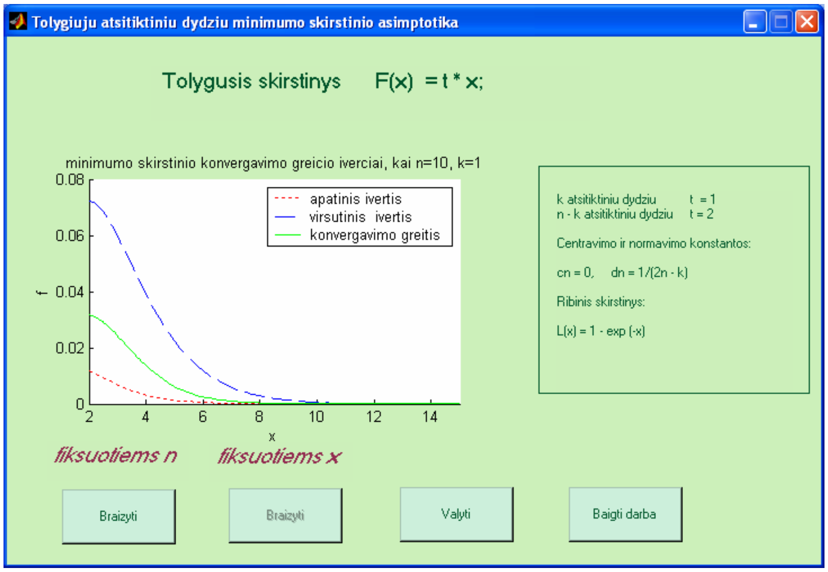


6.1 pav. Pareto atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio konvergavimo greičio įverčiai, kai n=10, k=1

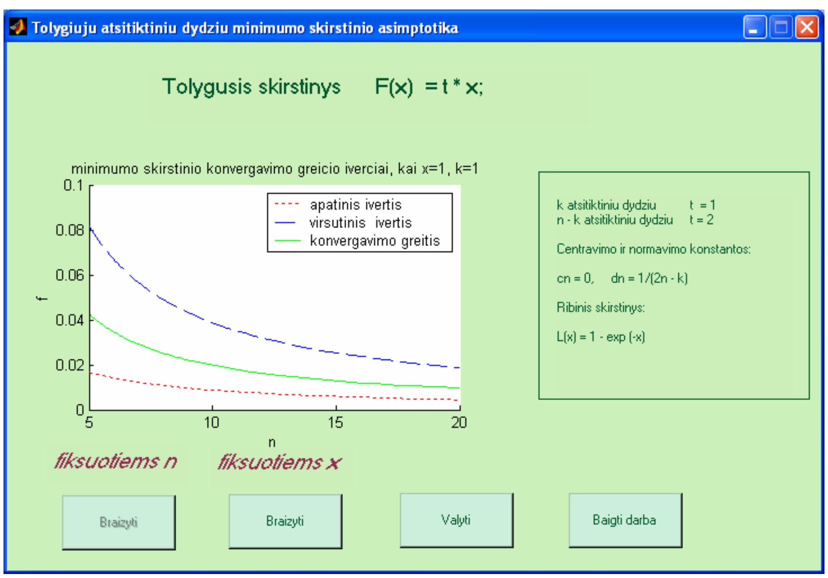


6.2 pav. Pareto atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio konvergavimo greičio įverčiai, kai x=3, k=1

7 PRIEDAS. NEVIENODAI PASISKIRSČIUSIŲ TOLYGIŲJŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MINIMUMO SKIRSTINIO ASIMPTOTIKA

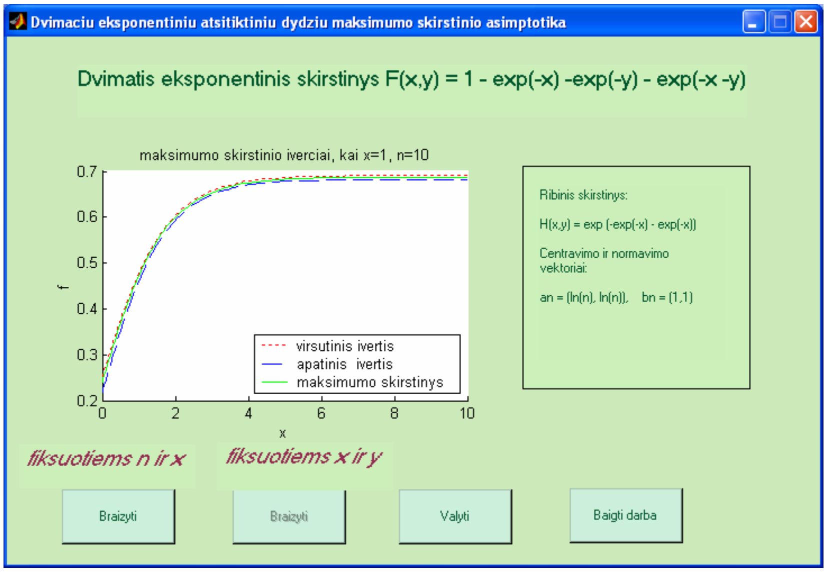


7.1 pav. Tolygiųjų atsitiktinių dydžių minimumo skirstinio konvergavimo greičio įverčiai, kai n=10, k=1

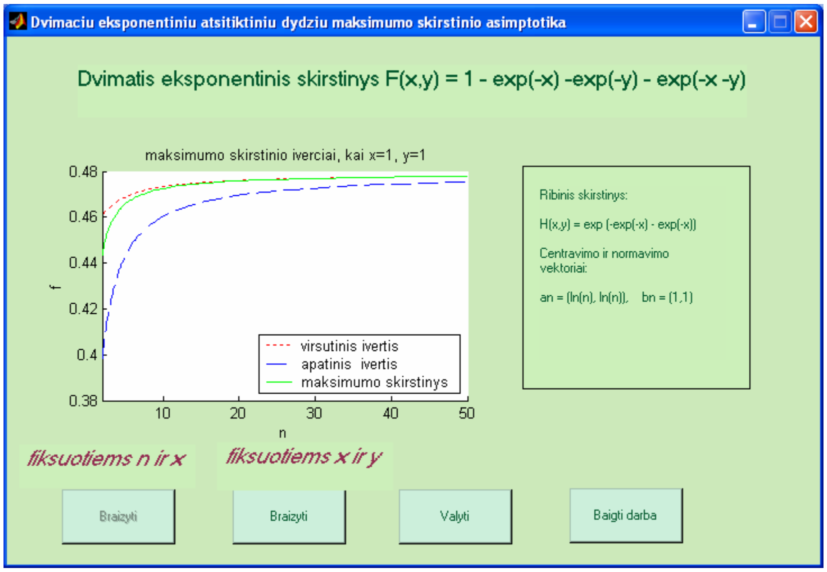


7.2 pav. Tolygiųjų atsitiktinių dydžių minimumo skirstinio konvergavimo greičio įverčiai, kai x=1, k=1

8 PRIEDAS. DVIMAČIŲ EKSPONENTINIŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMO SKIRSTINIO ASIMPTOTIKA

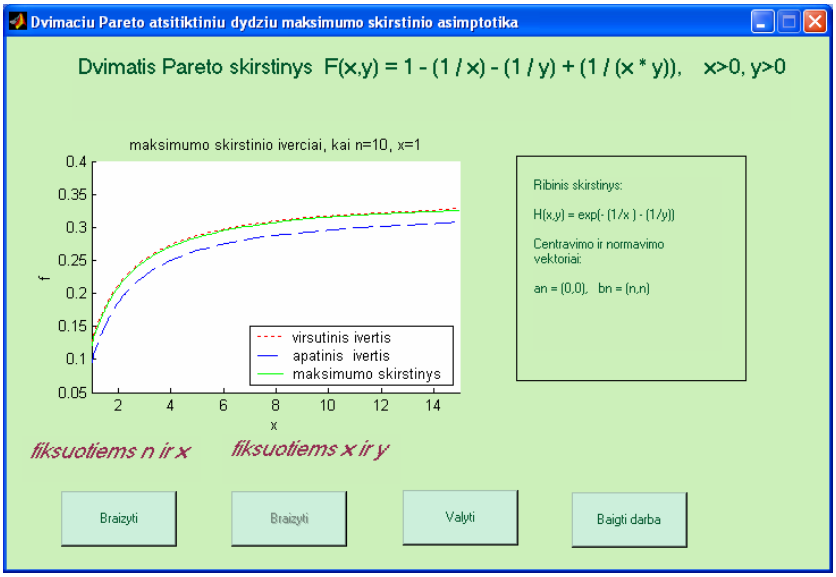


8.1 pav. Dvimačių eksponentinių atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio įverčiai, kai x=1, n=10

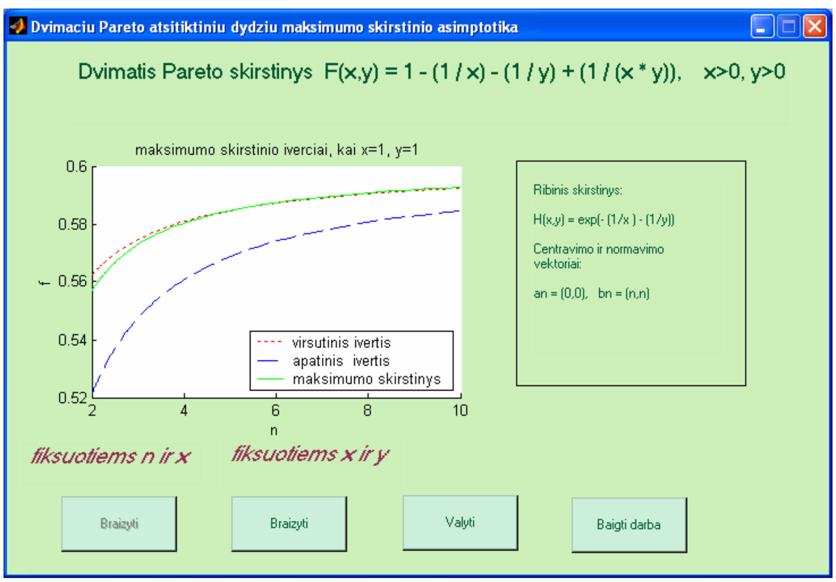


8.2 pav. Dvimačių eksponentinių atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio įverčiai, kai x=1, y=1

9 PRIEDAS. DVIMAČIŲ PARETO ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMO SKIRSTINIO ASIMPTOTIKA

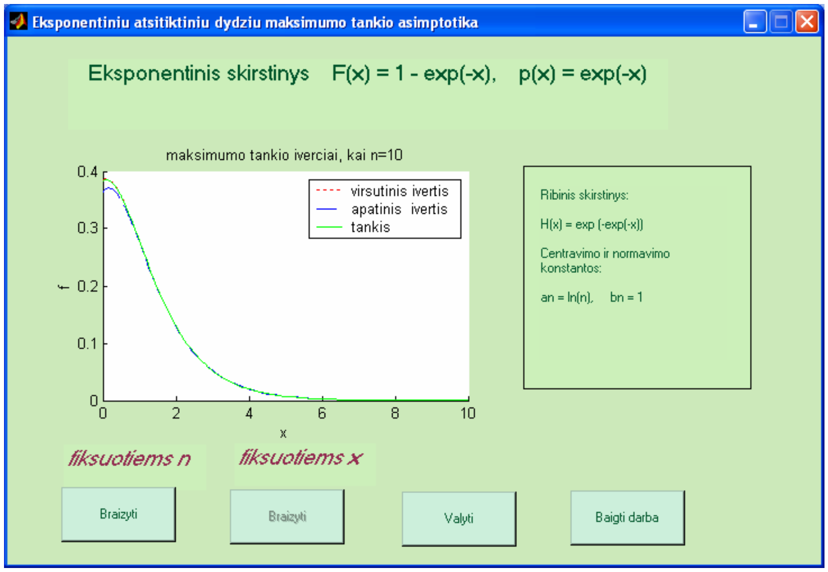


9.1 pav. Dvimačių Pareto atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio įverčiai, kai x=1, n=10

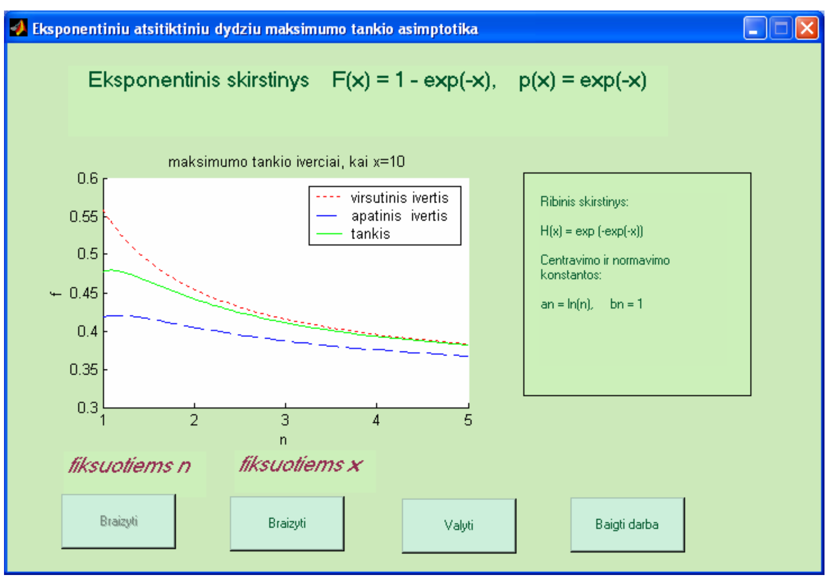


9.2 pav. Dvimačių Pareto atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio įverčiai, kai x=1, y=1

10 PRIEDAS. VIENODAI PASISKIRSČIUSIŲ EKSPONENTINIŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMO TANKIO ASIMPTOTIKA

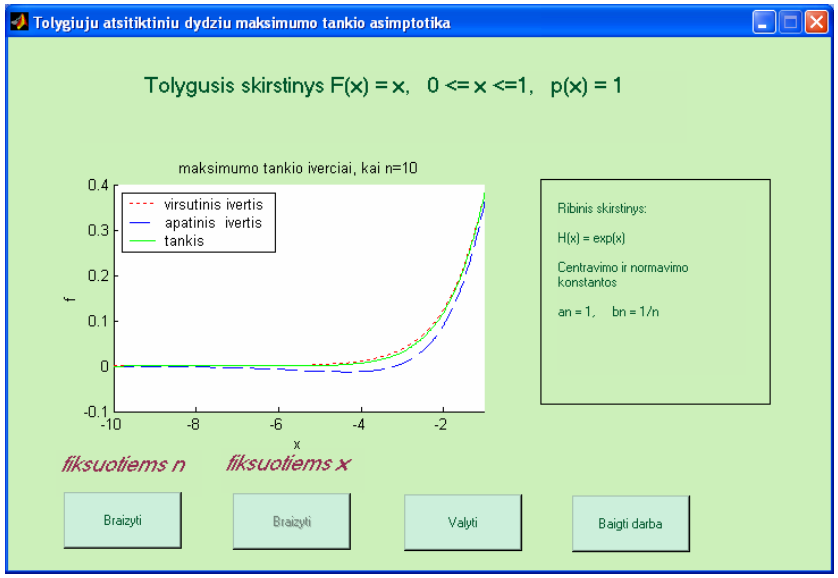


10.1 pav. Eksponentinių atsitiktinių dydžių maksimumo tankio įverčiai, kai n=10

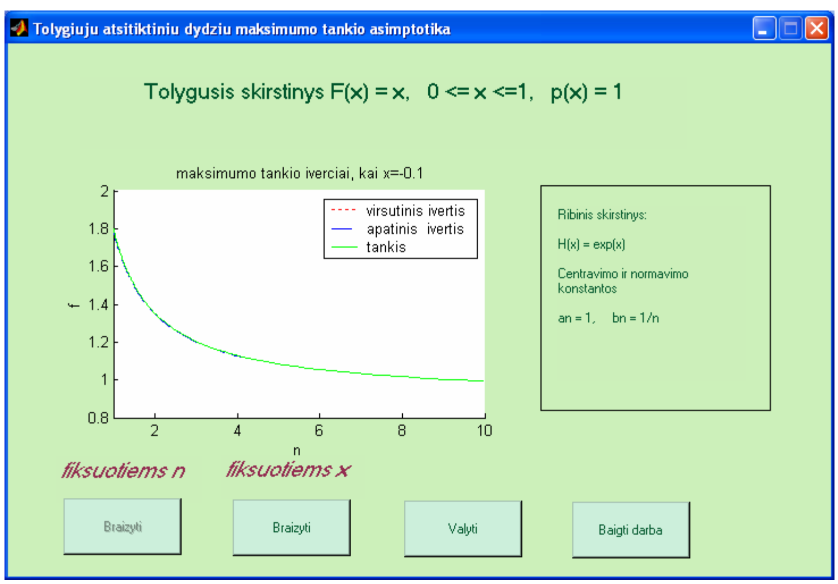


10.2 pav. Eksponentinių atsitiktinių dydžių maksimumo tankio įverčiai, kai x=10

11 PRIEDAS. VIENODAI PASISKIRSČIUSIŲ TOLYGIŲJŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMO ASIMPTOTIKA

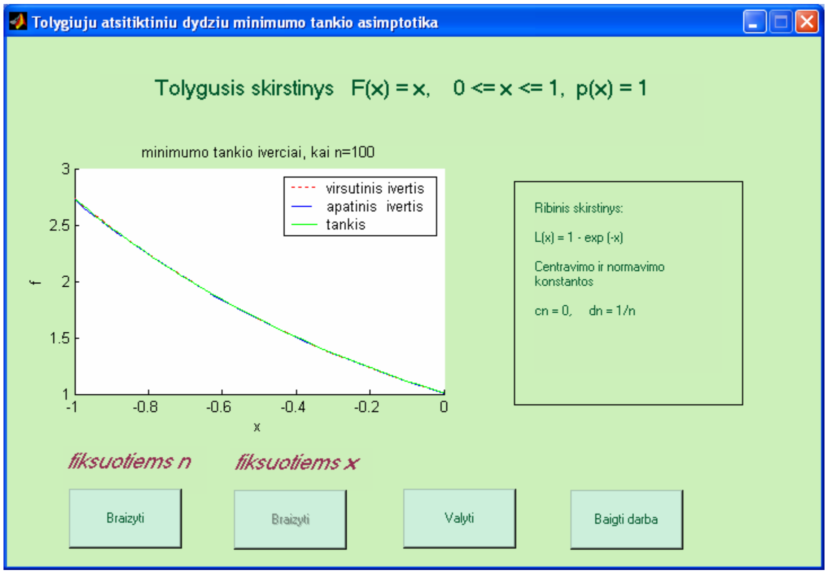


11.1 pav. Tolygiųjų atsitiktinių dydžių maksimumo tankio įverčiai, kai n=10

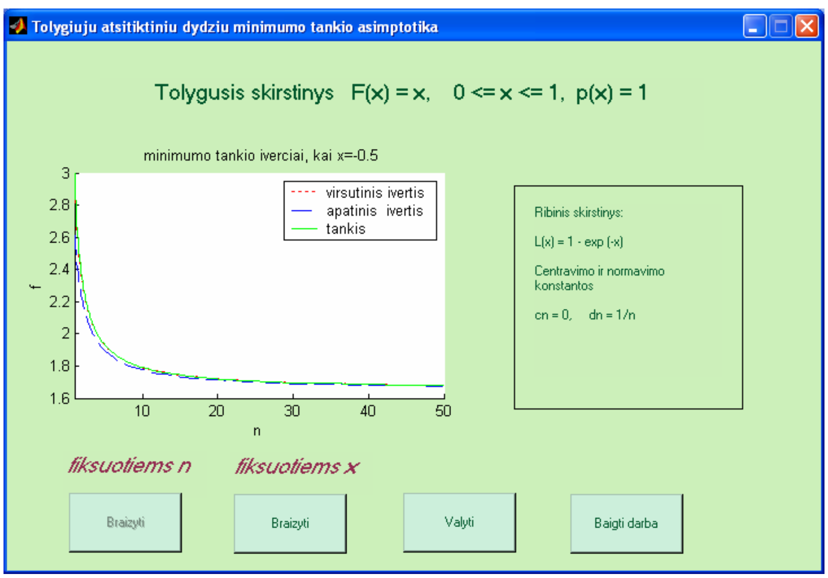


11.2 pav. Tolygiųjų atsitiktinių dydžių maksimumo tankio įverčiai, kai x=-0.1

12 PRIEDAS. VIENODAI PASISKIRSČIUSIŲ TOLYGIŲJŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MINIMUMO TANKIO ASIMPTOTIKA

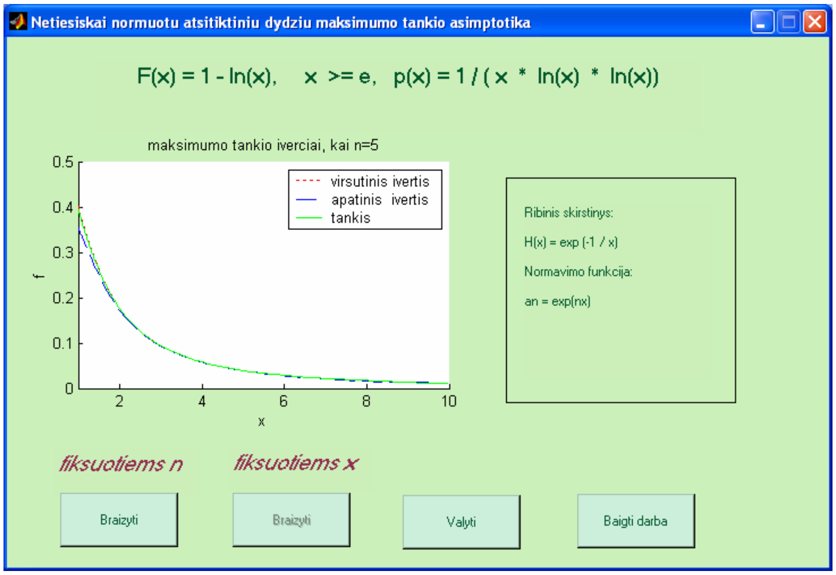


12.1 pav. Tolygiųjų atsitiktinių dydžių minimumo tankio įverčiai, kai n=100

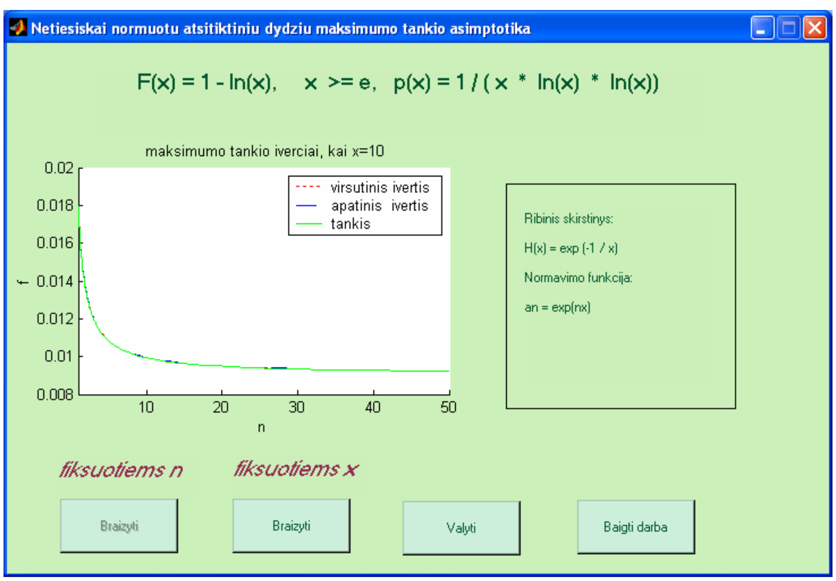


12.2 pav. Tolygiųjų atsitiktinių dydžių minimumo tankio įverčiai, kai x=-0.5

13 PRIEDAS. VIENODAI PASISKIRSČIUSIŲ NETIESIŠKAI NORMUOTŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMO TANKIO ASIMPTOTIKA

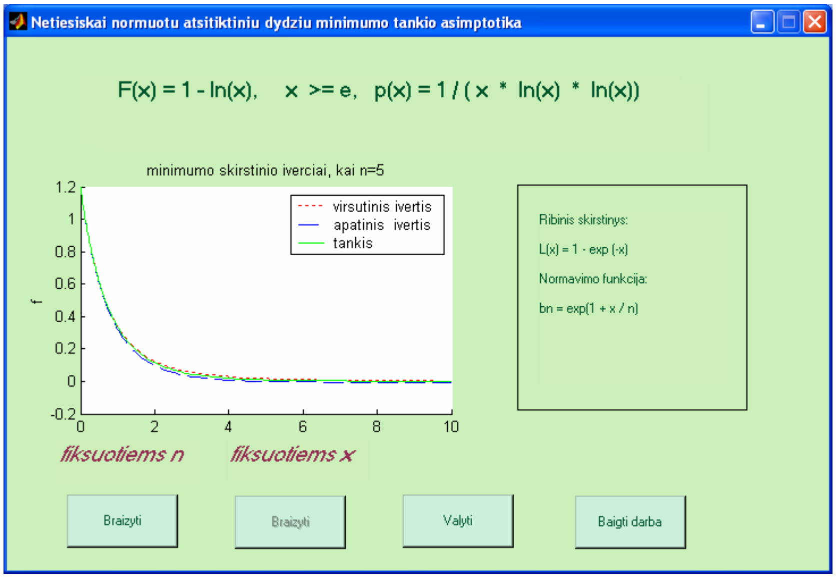


13.1 pav. Netiesiškai normuotų atsitiktinių dydžių maksimumo tankio įverčiai, kai n=5

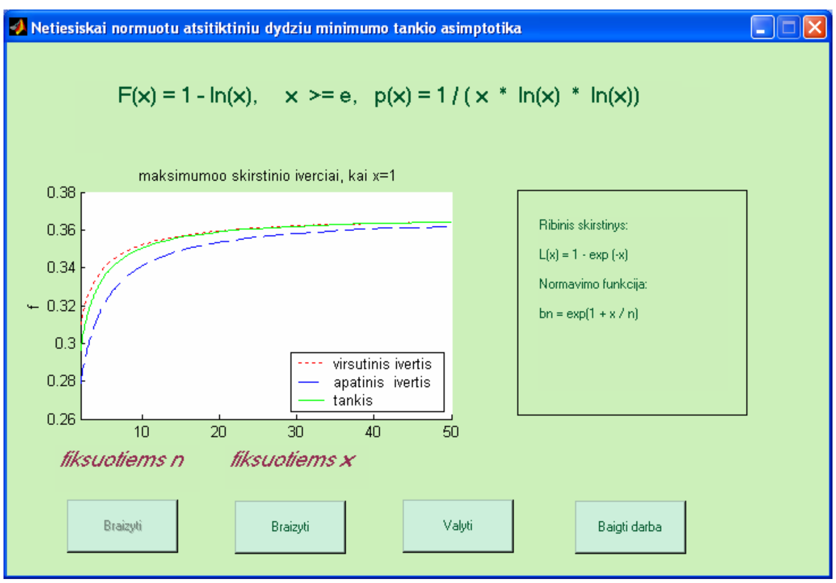


13.2 pav. Netiesiškai normuotų atsitiktinių dydžių maksimumo tankio įverčiai, kai x=10

14 PRIEDAS. VIENODAI PASISKIRSČIUSIŲ NETIESIŠKAI NORMUOTŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MINIMUMO TANKIO ASIMPTOTIKA



14.1 pav. Netiesiškai normuotų atsitiktinių dydžių minimumo tankio įverčiai, kai n=5



14.2 pav. Netiesiškai normuotų atsitiktinių dydžių minimumo tankio įverčiai, kai x=1

15 PRIEDAS. PROGRAMOS TEKSTAS

Pateikiame programos teksto fragmentą, kuriuo yra aprašomas sąsajos su vartotoju langas (vienodai pasiskirsčiusių eksponentinių atsitiktinių dydžių maksimumo atvejis). Analogiškai aprašomi visi programos langai, tik naudojami skirtingi M-failai, kuriuose nurodytos skirstinių funkcijos. Kitų sąsajos su vartotoju langų aprašymai pateikti kompaktiniame diske.

```
%| Mag8 apraso sasajos su vartotoju langa, kuriame pateikiami
%| vienodai pasiskirsciusiu eksponentiniu atsitiktiniu dydziu
%| maksimumo skirstinio asimptotinio tyrimo grafiniai
%| rezultatai


function varargout = mag8(varargin)


if nargin == 0  % paleidziamas modulis GUI

      fig = openfig(mfilename,'reuse');

      handles = guihandles(fig);
      guidata(fig, handles);

      if nargout > 0
            varargout{1} = fig;
      end

elseif ischar(varargin{1})

      try
            if (nargout)
                  [varargout{1:nargout}] = feval(varargin{:}); % FEVAL
paskirstymas
            else
                  feval(varargin{:});                          % FEVAL
paskirstymas
            end
      catch
            disp(lasterr);
      end

end


% -------realizuoja mygtuko "Braizyti", kai n fiksuoti, paspaudima--------

function varargout = pushbutton1_Callback(h, eventdata, handles, varargin)

hold on;

fplot('f1(x)',[1,5],'r');   % braizomas virsutinis konvergavimo greicio ivertis
fplot('f2(x)',[1,5],'b');   % braizomas apatinis konvergavimo greicio ivertis
fplot('f(x)',[1,5],'g');    % braizomas konvergavimo greitis

hold off;
```

```
xlabel('x');
ylabel('f');
title('maksimumo konvergavimo greicio iverciai kai n=2');
legend('virsutinis ivertis', 'apatinis  ivertis', 'konvergavimo greitis',4 );

% mygtuko "Valyti" aktyvavimas

HbtnClear=findobj('Tag', 'pushbutton3');
set(HbtnClear, 'Enable', 'on')
set(gcbo, 'Enable', 'off')

% mygtuko "Braizyti", kai x fiksuoti, blokavimas

HbtnClear=findobj('Tag', 'pushbutton2');
set(HbtnClear, 'Enable', 'off')
set(gcbo, 'Enable', 'on')




% -------realizuoja mygtuko "Braizyti", kai x fiksuoti, paspaudima--------

function varargout = pushbutton2_Callback(h, eventdata, handles, varargin)

hold on;

fplot('f11(n)',[1,15],'r');   % braizomas virsutinis konvergavimo greicio ivertis
fplot('f22(n)',[1,15],'b');   % braizomas apatinis konvergavimo greicio ivertis
fplot('ff(n)',[1,15],'g');    % braizomas konvergavomo greitis

hold off;

xlabel('n');
ylabel('f');
title('maksimumo konvergavimo greicio iverciai kai x=2');
legend('virsutinis ivertis', 'apatinis  ivertis', 'konvergavimo greitis',4 );

% mygtuko "Valyti" aktyvavimas

HbtnClear=findobj('Tag', 'pushbutton3'); %
set(HbtnClear, 'Enable', 'on')
set(gcbo, 'Enable', 'off')

% mygtuko "Braizyti", kai n fiksuoti, blokavimas

HbtnClear=findobj('Tag', 'pushbutton1');
set(HbtnClear, 'Enable', 'off')
set(gcbo, 'Enable', 'on')




% -------realizuoja mygtuko "Valyti" paspaudima---------------------------

function varargout = pushbutton3_Callback(h, eventdata, handles, varargin)

cla                   % valomi grafiniai duomenys
title(' ');           % valoma grafiniu duomenu antraste


% mygtuko "Braizyti", kai n fiksuoti, aktyvavimas

HbtnPlot = findobj('Tag', 'pushbutton1');
set(HbtnPlot, 'Enable', 'on')
```

```
set(gcbo,'Enable', 'off')

% mygtuko "Braizyti", kai x fiksuoti, aktyvavimas

HbtnPlot = findobj('Tag', 'pushbutton2');
set(HbtnPlot, 'Enable', 'on')
set(gcbo,'Enable', 'off')



% -------realizuoja mygtuko "Baigti darba " paspaudima-------------------

function varargout = pushbutton4_Callback(h, eventdata, handles, varargin)

delete(gcf);  % uzdaromas langas mag8
mag3;         % atidaromas langas mag3
```

16 PRIEDAS. FUNKCIJŲ APRAŠYMAS

Pateiksime funkcijų, kurias naudojame eksponentinių atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio konvergavimo greičiui įvertini, aprašymą. Funkcijos kituose uždaviniuose aprašomos analogiškai. Visų funkcijų aprašymai pateikti kompaktiniame diske.

1)

```
% vienodai pasiskirsciusiu eksponentiu atsitiktiniu dydziu
% maksimumo skirstinio konvergavimo greitis,
% kai n fiksuoti

function f = f(x);

n = 2;
h = exp(-exp(-x));                    % ribinis skirstinys
f = (1 - (exp(-x)) / n) ^ n - h;      % konvergavimo greicio ivertis
```

2)

```
% vienodai pasiskirsciusiu eksponentiniu atsitiktiniu dydziu
% maksimumo skirstinio konvergavimo greicio virsutinis ivertis,
% kai n fiksuoti

function f1 = f1(x);

n = 2;
h = exp(-exp(-x));                  % ribinis skirstinys
z = exp(-x);
c1 = z. ^ 2 / (2 * n + z.^ 2);      % virsutinis liekamojo nario ivertis
f1 = -h * c1;                       % virsutinis konvergavimo greicio ivertis
```

3)

```
% vienodai pasiskirsciusiu eksponentiniu atsitiktiniu dydziu
% maksimumo skirstinio konvergavimo greicio apatinis ivertis,
% kai n fiksuoti

function f2 = f2(x);

n = 2;
h = exp(-exp(-x));       % ribinis skirstinys
z = exp(-x);
c2 = (z ^ 2) / n;        % liekamojo nario apatinis ivertis
f2 = -h * c2;            % konvergavimo greicio apatinis ivertis
```

4)

```
% vienodai pasiskirsciusiu eksponentiu atsitiktiniu dydziu
% maksimumo skirstinio konvergavimo greitis,
% kai x fiksuoti

function ff = ff(n);
```

```
x = 2;
h = exp(-exp(-x));                    % ribinis skirstinys
ff = (1 - (exp(-x)) / n) ^ n - h;     % konvergavimo greicio ivertis
```

5)

```
% vienodai pasiskirsciusiu eksponentiniu atsitiktiniu dydziu
% maksimumo skirstinio konvergavimo greicio virsutinis ivertis,
% kai x fiksuoti

function f11 = f11(n);

x = 2;
h = exp(-exp(-x));                 % ribinis skirstinys
z = exp(-x);
c1 = z. ^ 2 / (2 * n + z.^2);      % liekamojo nario virsutinis ivertis
f11 = -h * c1;                     % konvergavimo greicio virsutinis ivertis
```

6)

```
% vienodai pasiskirsciusiu eksponentiniu atsitiktiniu dydziu
% maksimumo skirstinio konvergavimo greicio apatinis ivertis,
% kai x fiksuoti

function f22 = f22(n);

x = 2;
h = exp(-exp(-x));       % ribinis skirstinys
z = exp(-x);
c2 = (z ^ 2) / n;        % liekamojo nario apatinis ivertis
f22 = -h * c2;           % konvergavimo greicio apatinis ivertis
```

17 PRIEDAS. SĄSAJOS SU VARTOTOJU LANGŲ IR FUNKCIJŲ SĄRAŠAS

17.1 lentelė

Sąsajos su vartotoju langai

Lango pavadinimas	Sprendžiami uždaviniai
mag1	Pagrindinis programos langas
mag2	Pateikiami sprendžiami uždaviniai
mag3	Vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių ekstremaliųjų reikšmių skirstinių asimptotika
mag4	Nevienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių ekstremaliųjų reikšmių skirstinių asimptotika
mag5	Vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių ekstremaliųjų reikšmių tankių asimptotika
mag6	Daugiamačių atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio asimptotika
mag8	Vienodai pasiskirsčiusių eksponentinių atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio asimptotika
mag9	Vienodai pasiskirsčiusių tolygiųjų atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio asimptotika
mag11	Vienodai pasiskirsčiusių tolygiųjų atsitiktinių dydžių minimumo skirstinio asimptotika
mag12	Vienodai pasiskirsčiusių netiesiškai normuotų atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio asimptotika
mag13	Vienodai pasiskirsčiusių netiesiškai normuotų atsitiktinių dydžių minimumo skirstinio asimptotika
mag14	Nevienodai pasiskirsčiusių Pareto atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio asimptotika
mag15	Nevienodai pasiskirsčiusių tolygiųjų atsitiktinių dydžių minimumo skirstinio asimptotika
mag16	Dvimačių Pareto atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio asimptotika
mag17	Vienodai pasiskirsčiusių eksponentinių atsitiktinių dydžių maksimumo tankio asimptotika
mag18	Vienodai pasiskirsčiusių tolygiųjų atsitiktinių dydžių maksimumo tankio asimptotika
mag20	Vienodai pasiskirsčiusių tolygiųjų atsitiktinių dydžių minimumo tankio asimptotika
mag21	Vienodai pasiskirsčiusių netiesiškai normuotų atsitiktinių dydžių maksimumo tankio asimptotika
mag22	Dvimačių eksponentinių atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio asimptotika
mag23	Vienodai pasiskirsčiusių netiesiškai normuotų atsitiktinių dydžių minimumo tankio asimptotika

17.2 lentelė

Funkcijų sąrašas

Vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio asimptotika		
f(x)	konvergavimo greitis	
f1(x)	viršutinis konvergavimo greičio įvertis	
f2(x)	apatinis konvergavimo greičio įvertis	**fiksuotiems n**
ff(n)	konvergavimo greitis	
f11(n)	viršutinis konvergavimo greičio įvertis	
f22(n)	apatinis konvergavimo greičio įvertis	**fiksuotiems x**
Vienodai pasiskirsčiusių tolygiųjų atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio asimptotika		
tol(x)	konvergavimo greitis	
tol1(x)	viršutinis konvergavimo greičio įvertis	
tol2(x)	apatinis konvergavimo greičio įvertis	**fiksuotiems n**
ttol(n)	konvergavimo greitis	
tol11(n)	viršutinis konvergavimo greičio įvertis	
tol22(n)	apatinis konvergavimo greičio įvertis	**fiksuotiems x**
Vienodai pasiskirsčiusių tolygiųjų atsitiktinių dydžių minimumo skirstinio asimptotika		
mtol(x)	konvergavimo greitis	
mtol1(x)	viršutinis konvergavimo greičio įvertis	
mtol2(x)	apatinis konvergavimo greičio įvertis	**fiksuotiems n**
mmtol(n)	konvergavimo greitis	
mtol11(n)	viršutinis konvergavimo greičio įvertis	
mtol22(n)	apatinis konvergavimo greičio įvertis	**fiksuotiems x**
Vienodai pasiskirsčiusių netiesiškai normuotų atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio asimptotika		
net(x)	konvergavimo greitis	
net1(x)	viršutinis konvergavimo greičio įvertis	
net2(x)	apatinis konvergavimo greičio įvertis	**fiksuotiems n**
nnet(n)	konvergavimo greitis	
net11(n)	viršutinis konvergavimo greičio įvertis	
net22(n)	apatinis konvergavimo greičio įvertis	**fiksuotiems x**
Vienodai pasiskirsčiusių netiesiškai normuotų atsitiktinių dydžių minimumo skirstinio asimptotika		
mnet(x)	skirstinio funkcija	
mnet1(x)	viršutinis skirstinio įvertis	
mnet2(x)	apatinis skirstinio įvertis	**fiksuotiems n**
mnnet(n)	skirstinio funkcija	
mnet11(n)	viršutinis skirstinio įvertis	
mnet22(n)	apatinis skirstinio įvertis	**fiksuotiems x**
Nevienodai pasiskirsčiusių Pareto atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio asimptotika		
par(x)	konvergavimo greitis	
par1(x)	viršutinis konvergavimo greičio įvertis	
par2(x)	apatinis konvergavimo greičio įvertis	**fiksuotiems n**
ppar(n)	konvergavimo greitis	
par11(n)	viršutinis konvergavimo greičio įvertis	
par22(n)	apatinis konvergavimo greičio įvertis	**fiksuotiems x**

17.2 lentelės tęsinys kitame puslapyje

17.2 lentelės tęsinys

Nevienodai pasiskirsčiusių tolygiųjų atsitiktinių dydžių minimumo skirstinio asimptotika		
ntol(x)	konvergavimo greitis	
ntol1(x)	viršutinis konvergavimo greičio įvertis	
ntol2(x)	apatinis konvergavimo greičio įvertis	**fiksuotiems n**
nntol(x)	konvergavimo greitis	
ntol11(n)	viršutinis konvergavimo greičio įvertis	
ntol22(n)	apatinis konvergavimo greičio įvertis	**fiksuotiems x**
Vienodai pasiskirsčiusių dvimačių Pareto atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio asimptotika		
dad(y)	skirstinio funkcija	
dad1(x)	viršutinis skirstinio įvertis	
dad2(x)	apatinis skirstinio įvertis	**fiksuotiems n**
ddad(n)	skirstinio funkcija	
dad11(n)	viršutinis skirstinio įvertis	
dad22(n)	apatinis skirstinio įvertis	**fiksuotiems x**
Vienodai pasiskirsčiusių dvimačių eksponentinių atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio asimptotika		
dad3(x)	skirstinio funkcija	
dad31(x)	viršutinis skirstinio įvertis	
dad32(x)	apatinis skirstinio įvertis	**fiksuotiems n**
ddad3(n)	skirstinio funkcija	
dad311(n)	viršutinis skirstinio įvertis	
dad322(n)	apatinis skirstinio įvertis	**fiksuotiems x**
Vienodai pasiskirsčiusių eksponentinių atsitiktinių dydžių maksimumo tankio asimptotika		
texp(x)	tankio funkcija	
texp1(x)	viršutinis tankio įvertis	
texp2(x)	apatinis tankio įvertis	**fiksuotiems n**
ttexp(n)	tankio funkcija	
texp11(n)	viršutinis tankio įvertis	
texp22(n)	apatinis tankio įvertis	**fiksuotiems x**
Vienodai pasiskirsčiusių tolygiųjų atsitiktinių dydžių maksimumo tankio asimptotika		
tolt(x)	tankio funkcija	
tolt1(x)	viršutinis tankio įvertis	
tolt2(x)	apatinis tankio įvertis	**fiksuotiems n**
ttolt(n)	tankio funkcija	
tolt11(n)	viršutinis tankio įvertis	
tolt22(n)	apatinis tankio įvertis	**fiksuotiems x**
Vienodai pasiskirsčiusių tolygiųjų atsitiktinių dydžių minimumo tankio asimptotika		
nmtol(x)	tankio funkcija	
nmtol1(x)	viršutinis tankio įvertis	
nmtol2(x)	apatinis tankio įvertis	**fiksuotiems n**
nnmtol(n)	tankio funkcija	
nmtol11(n)	viršutinis tankio įvertis	
nmtol22(n)	apatinis tankio įvertis	**fiksuotiems x**

17.2 lentelės tęsinys kitame puslapyje

17.2 lentelės tęsinys

Vienodai pasiskirsčiusių netiesiškai normuotų atsitiktinių dydžių maksimumo tankio asimptotika		
tnet(x)	tankio funkcija	
tnet1(x)	viršutinis tankio įvertis	
tnet2(x)	apatinis tankio įvertis	**fiksuotiems n**
ttnet(n)	tankio funkcija	
tnet11(n)	viršutinis tankio įvertis	
tnet22(n)	apatinis tankio įvertis	**fiksuotiems x**
Vienodai pasiskirsčiusių netiesiškai normuotų atsitiktinių minimumo tankio asimptotika		
net3(x)	tankio funkcija	
net31(x)	viršutinis tankio įvertis	
net32(x)	apatinis tankio įvertis	**fiksuotiems n**
nnet3(n)	tankio funkcija	
net311(n)	viršutinis tankio įvertis	
net322(n)	apatinis tankio įvertis	**fiksuotiems x**