KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
MATEMATINĖS SISTEMOTYROS KATEDRA

Audrius Nečiūnas

Kointegravimo principo panaudojimas sudarant investicinius portfelius

Magistro darbas

Vadovas
doc. dr. E. Valakevičius

KAUNAS, 2008

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

TVIRTINU
Katedros vedėjas
prof.habil. dr. V. Pekarskas
2008 06 09

Kointegravimo principo panaudojimas sudarant investicinius portfelius

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

Vadovas
doc. dr. E. Valakevičius

2008 06 04

Recenzentas
doc. dr. D. Makackas
2008 06 04

Atliko
FMMM-6 gr. stud.
A. Nečiūnas
2008 05 23

KAUNAS, 2008

KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

Pirmininkas: Leonas Saulis, profesorius (VGTU)

Sekretorius: Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)

Nariai: Algimantas Jonas Aksomaitis, profesorius (KTU)

Vytautas Janilionis, docentas (KTU)

Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU)

Rimantas Rudzkis, habil. dr., valdybos pirmininko pavaduotojas (DnB NORD Bankas)

Zenonas Navickas, profesorius (KTU)

Arūnas Barauskas, dr., vice-prezidentas projektams (UAB „Baltic Amadeus“)

Neciunas A. Constructing portfolios by applying cointegration relationships: Master‘s work in applied mathematics doc. dr. E.Valakevicius; Department of Mathematics Research in System, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. - Kaunas, 2008. - 82p.

SUMMARY

A substantial part of economic theory generally deals with long-run equilibrium relationships generated by market forces and behavioral rules. Correspondingly, most empirical econometric studies entailing time series can be interpreted as attempts to evaluate such relationships in a dynamic framework.

Since the seminal work of Engle and Granger (1987) cointegration has become the prevalent tool of time series econometrics. Every modern econometrics text covers the statiscal theory necessary to master the practical application of cointegration. Cointegration has emerged as a powerful technique for investigating common trends in multivariate time series, and provides a sound technology for modeling long run dynamics in a system. Although models of cointegrated financial time series are now relatively common place in the literature their importance has, until very recently, been mainly theoretical. This is because the traditional starting point for portfolio risk management in practice is a correlation analysis of returns, whereas cointegration is based on the raw price, rate or yield data. In standard risk-return models these price data are differenced before the analysis is even begun, and differencing removes a-priori any long-term trends in data. Of course these trends are implicit in the returns data, but any decision based on long-term common trends in the price data is excluded in standard risk-return modeling.

So in this study we will realize model of constructing portfolios by using mathematical programming language MathCad and explore the portfolios which are modeled to track an index If tracking portfolio and index are cointegrated together, portfolio cannot drift too far from the index because the tracking error is mean-reverting. This study should help us to decide in what way it is better to allocate our funds when choosing portfolio for tracking the index.

TURINYS

LENTELIŲ SĄRAŠAS

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

ĮVADAS

Lietuvai perėjus prie rinkos ekonomikos, atsirado poreikis investicijoms. Laikui bėgant rinkoje atsiranda vis daugiau pinigų. Todėl tikslinga kuo efektyviau išnaudoti turimus pinigus. Organizacijos kuriasi sudarydamos investicinius fondus, žmonės bando investuoti į vertybinius popierius. Dauguma pasirenka gerai žinomus lietuviškus ir užsienietiškus indeksus. Kiti bando investuoti atsitiktinai į tam tikrų įmonių akcijas. Dažnai norima sukurti tokius portfelius, kurių vertės išvien kistų kartu su biržos indekso verte, kadangi indeksas yra ekonominis rinkos indikatorius.

Darbe „Kointegravimo principo panaudojimas sudarant investicinius portfelius“ yra susipažįstama su stacionarumo ir kointegracijos sąvokomis, nagrinėjami kriterijai stacionarumui ir kointegracijai patikrinti, kadangi tai sudaro pagrindą portfelių, kurie atkartoja indeksą, konstravimui. Sukonstruoti kointegruoti su indeksu portfeliai yra palyginami tarpusavyje.

Darbo tikslas susipažinti su kointegracijos ryšiais finansų teorijoje, bendra portfelių konstravimo metodika, pagrįsta kointegracija, ir pritaikymu realių rinkos akcijų investicinių portfelių sudarymui.

Šiam tikslui panaudosime MathCad matematinę programinę įrangą, leidžiančią braižyti grafikus, spręsti tiesinius, netiesinius ir kitus programavimo uždavinius, reikalingus portfelio konstravimo realizavimui.

1. BENDROJI DALIS

1.1 STACIONARUMO SĄVOKA

Pirmiausiai apibrėžkime laiko eilutę. Tegul T- yra skaičių seka ar intervalas. Tuomet atsitiktinių dydžių visuma $\{\xi_t; t \in T\}$, apibrėžtų tikimybinėje erdvėje, vadinama atsitiktiniu procesu. Kai T – skaičių seka (diskrečios reikšmės), tuomet $\{\xi_t; t \in T\}$yra laiko elutė.

Pagrindinės proceso funkcijos yra šios:

- vidurkis $m(t) = E\xi(t)$;
- kovariacinė funkcija $R(t,s) = E(\xi_t - m(t))(\xi_s - m(s))$;
- kai $s = t$, kovariacinė funkcija tampa dispersija $D\xi(t)$.

Yra svarbu apibrėžti atsitiktinio proceso stacionarumą, kadangi stacionarumu remiasi ir pati kointegracija. Atsitiktinis procesas ξ_t vadinamas stacionariu procesu siaurąja prasme, jei jo daugiamačiai pasiskirstymai nepriklauso nuo postūmio laike, t.y.

$F_{t_1,\dots,t_k}(x_1,\dots,x_k) = F_{t_1+\tau,\dots,t_k+\tau}(x_1,\dots,x_k)$, čia $\forall t_1,\dots,t_k; t_i + \tau \in T, \forall i.$

Atsitiktinis procesas ξ_t vadinamas stacionariu plačiąja prasme, jei jo vidurkis ir kovariacinė funkcija nepriklauso nuo poslinkio laike:

- $m(t) = m(s) = m(0);$
- $R(t,s) = R(t+\tau.s+\tau)$ arba kitaip , kai $\tau = -s$, $R(t,s) = R(t+\tau, s+\tau) = R(t-s,0) = R(t-s); \forall t,s \in T.$

Kiekvienas plačiąja prasme stacionarus procesas kartu yra stacionarus ir siaurąja, tačiau ne kiekvienas siaurąja prasme stacionarus procesas yra stacionarus ir plačiąja prasme. Laiko eilutę stacionarią siaurąja prasme toliau vadinsime tiesiog stacionaria. Stacionarių procesų savybės:

- $m = E\xi_t$ - stacionaraus proceso vidurkis nepriklauso nuo t;
- $R(\tau) = \mathrm{cov}(\xi_{t+\tau}, \xi_t)$ - kovariacinė funkcija priklauso tik nuo skirtumo τ;
- $R(\tau) = R(-\tau)$, nes $R(t,s) = R(s,t)$ - simetrinė funkcija;
- $R(\tau)$ - neneigiamai apibrėžta funkcija: $\sum_{i,j=1}^{k} R(t_i - t_j)x_i x_j \geq 0; \forall t_i,\dots,t_k \in T, \forall x_1,\dots,x_k \in R, k = 1,2,\dots$

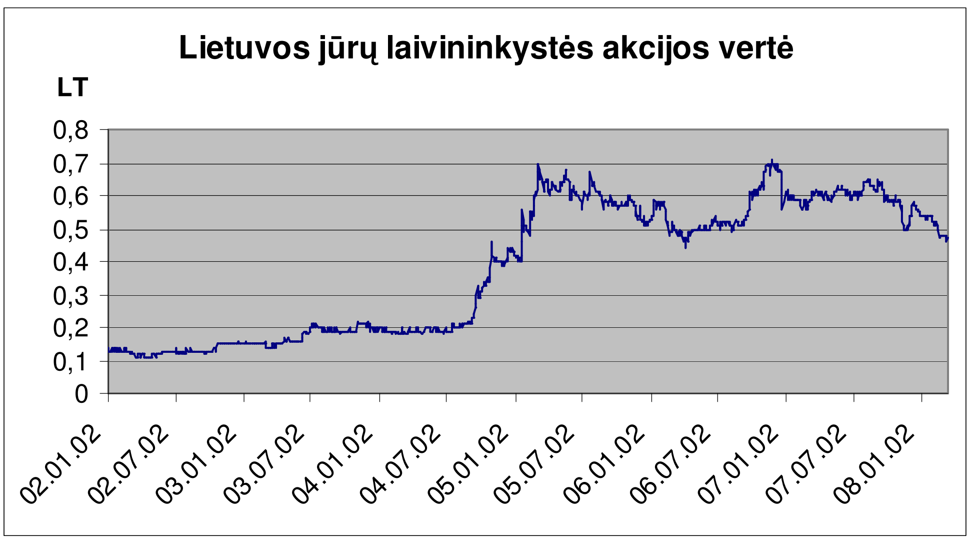
Stacionaraus proceso atveju dispersija lygi:

$$D\xi_t = \mathrm{cov}(\xi_t, \xi_t) = R(t-t) = R(0);$$

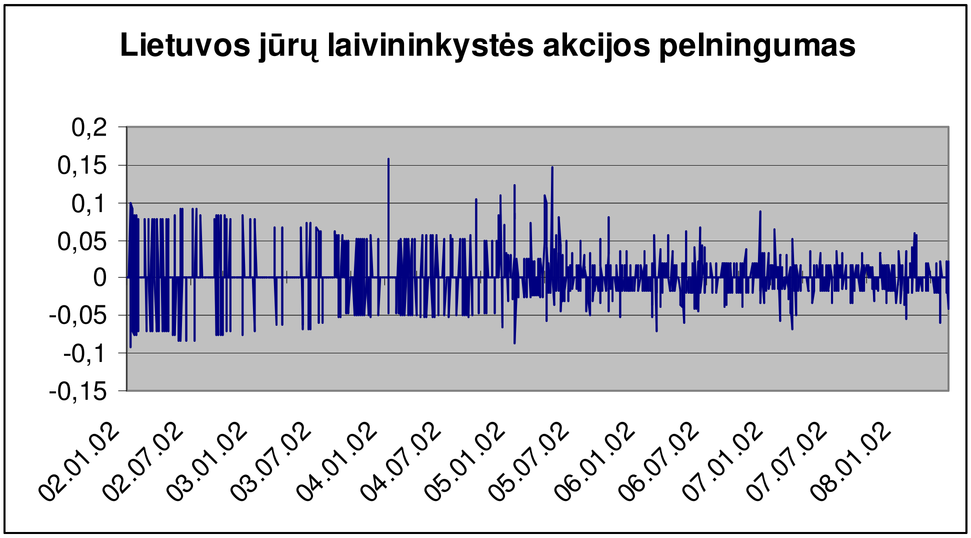
O koreliacinė funkcija:

$$r(\tau) = cor(\xi_{t+\tau}, \xi_t) = \frac{\mathrm{cov}(\xi_{t+\tau}, \xi_t)}{\sqrt{\mathrm{cov}(\xi_{t+\tau}, \xi_{t+\tau}) \cdot \mathrm{cov}(\xi_t, \xi_t)}} = \frac{R(\tau)}{\sqrt{R(0)^2}} = \frac{R(\tau)}{R(0)}.$$

Taigi, $|r(\tau)| \le 1$. Ši funkcija parodo, kaip koreliuoja proceso reikšmės, kaip greitai procesas „pamiršta“ savo praeitį. Kuo mažesnė (arčiau nulio) funkcijos reikšmė, tuo greičiau pamiršta. Todėl ši funkcija svarbi finansų teorijoje, kur aktyvų kainos, pelningumai, valiutų kursai, palūkanų normos ir pan. yra nagrinėjamos kaip laiko eilutės. Paprastai akcijų kainos yra nestacionarus procesas, o pelningumai atvirkščiai – stacionarus. Pavyzdžiui, žemiau yra pateikti Lietuvos jūrų laivininkystės akcijos kainų ir pelningumų 2002.01.02 – 2008.05.20 laikotarpiu grafikai:



1.1.1 pav. Lietuvos jūrų laivininkystės akcijos kaina



1.1.2 pav. Lietuvos jūrų laivininkystės akcijos pelningumas

Kaip matyti, nestacionarus procesas, šiuo atveju akcijos kaina, yra atsitiktinis klaidžiojimas. Tuo tarpu pelningumas svyruoja apie savo vidurkį, nesunku numanyti, kad tai nulis. Svarbu pabrėžti, kad nėra prasmės taikyti koreliacijos ar dispersijos analizės nestacionariems procesams, kadangi laikui bėgant šių procesų dispersija tik auga, o stacionarūs procesai turi baigtinę dispersiją.

1.2. AR(p) MODELIAI IR JŲ CHARAKTERISTIKOS

Stacionarumą patogu nagrinėti autoregresijos („auto-regressive“ anglų kalba) AR modelio bazėje. Jis svarbus ir tuo, jog toliau jo pagrindu bus vykdoma tolimesnė laiko eilučių analizė. Atsitiktinis procesas vadinamas p eilės AR(p) modeliu, jei procesas gali būti užrašytas tokiu pavidalu:

$$y_t = c + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \ldots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t \ . \qquad (2.1)$$

Čia ε_t yra atsitiktiniai nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę dydžiai su vidurkiu nulis ir dispersija σ^2, būtent šie dydžiai ir įneša atsitiktinumo į AR modelį. Įvedę daugianarį:

$$P(z) = 1 - a_1 z - \ldots - a_p z^p \qquad (2.2)$$

dar vadinamą AR(p) charakteristiniu polinomu, (2.1) išraišką galime perrašyti:

$$P(L)\hat{y}_t = \varepsilon_t$$

čia $\hat{y}_t$ yra centruotas procesas, t.y. iš y_t atimtas vidurkis My_t, o L postūmio laike operatorius: $Ly_t = y_{t-1}$.

Smulkiau panagrinėkime AR(1) modelį:

$$y_t = \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{2.3}$$

kuris yra stabilus, jei $|\alpha| < 1$. O tai ir yra AR(1) stacionarumo sąlyga. Įsitikinkime tuo.

►tarkime, $E(y_t) = k_1$ ir $D(y_t) = k_2$ visiems $t \in T$, čia k_1, k_2 - baigtinės konstantos. Paėmę (2.3) lygybės abiejų pusių vidurkius ir dispersijas gauname:

$k_1 = \alpha \cdot k_1$ ir $k_2 = \alpha^2 \cdot k_2 + \sigma^2$, taigi, jei $|\alpha| < 1$, tuomet visiems t, gauname, kad $E(y_t) = 0$ ir pagal begalinės mažėjančios geometrinės progresijos sumą, kai daugiklis yra α^2, $D(y_t) = \sigma^2 \dfrac{1}{(1-\alpha^2)}$.

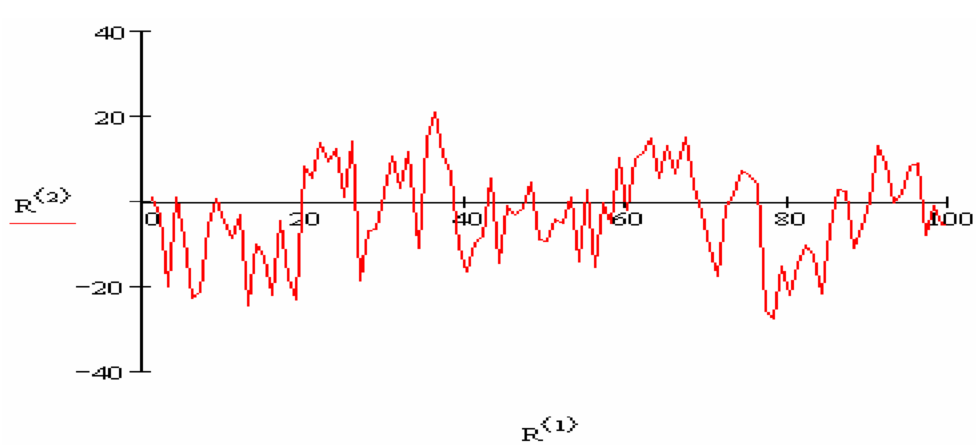
Kadangi $E(y_t) = 0$, tai autokovariacinė funkcija tarp laiko t ir s momentų bus lygi $E(y_t y_{t-s})$. O tai savo ruožtu lygu:

$$E(y_t y_{t-1}) = E((\alpha y_{t-1} + \varepsilon_t) y_{t-1}) = \alpha E(y_{t-1}{}^2) + E(\varepsilon_t y_{t-1}) = \alpha D(y_{t-1}) = \alpha \sigma^2 \frac{1}{(1-\alpha^2)}. \tag{2.4}$$

$$E(y_t y_{t-2}) = E((\alpha y_{t-1} + \varepsilon_t) y_{t-2}) = \alpha E(y_{t-1} y_{t-2}) = \alpha^2 \sigma^2 \frac{1}{(1-\alpha^2)}.$$

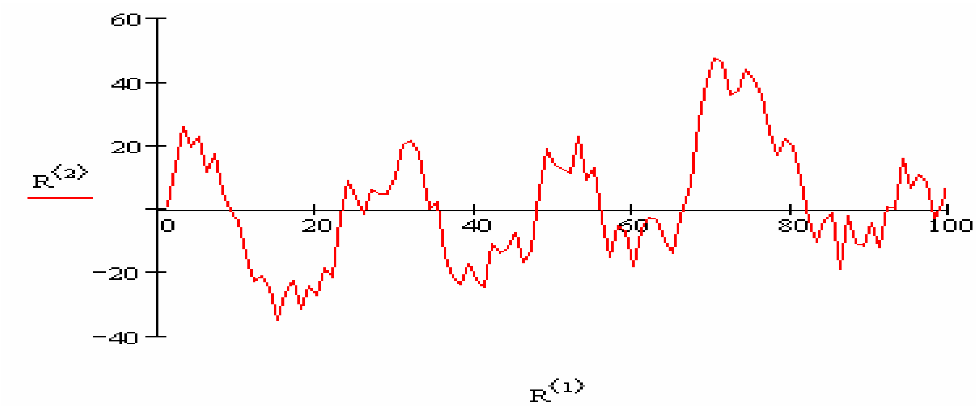
Todėl bendru atveju $E(y_t y_{t-s}) = \alpha^s \sigma^2 \dfrac{1}{(1-\alpha^2)}$, o tai reiškia, kad autokovariacinė funkcija priklauso tik nuo laiko tarpo s, todėl (2.3) modelį galime vadinti stacionariu.◄

Pabandykime sumodeliuoti AR(1) modelį (2.3) MathCado matematinės programinės įrangos pagalba. Generuojame po 100 reikšmių, parenkame atsitiktinius dydžius ε_t su vidurkiu $m = 0$ ir standartiniu nuokrypiu $\sigma = 9$ ir $y_1 = 1$, o toliau, keisime tik α reikšmes. Kai $\alpha = 0.5$ gauname 2.1 pav. pavaizduotą procesą. Kaip matyti, reikšmės gan dideliu dažniu svyruoja apie savo vidurkį, kuris, kaip matyti, yra nulis. Taigi procesas dėl baigtinės dispersijos nenutola nuo vidurkio, o jei ir nutola – tai tik trumpam.



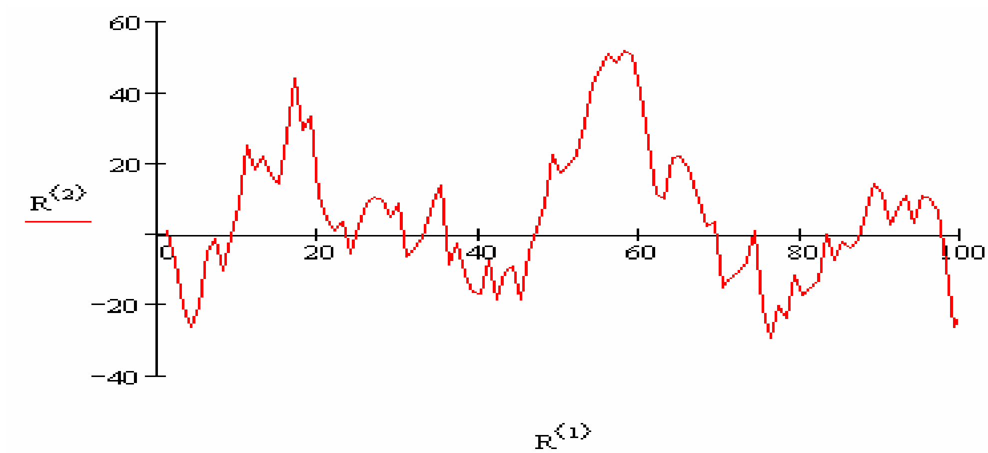
1.2.1 pav. AR(1) modelis su $\alpha = 0.5$

Kai $\alpha = 0.9$, gauname 2.2 pav. pavaizduotą procesą. Dažnis svyravimo apie savo vidurkį yra ryškiai sumažėjęs.



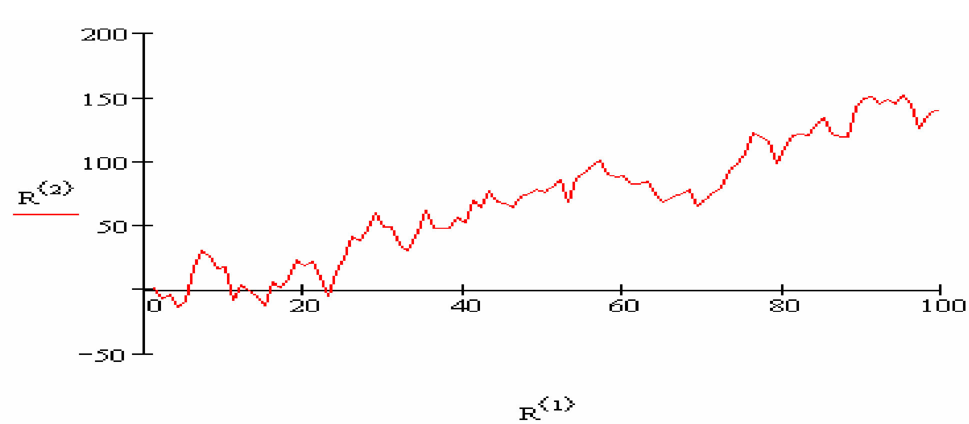
1.2.2 pav. AR(1) modelis su $\alpha = 0.9$

Kai $\alpha = 0.99$, gauname 2.3 pav. pavaizduotą sugeneruotą procesą, kuris jau labai arti nestabilaus.



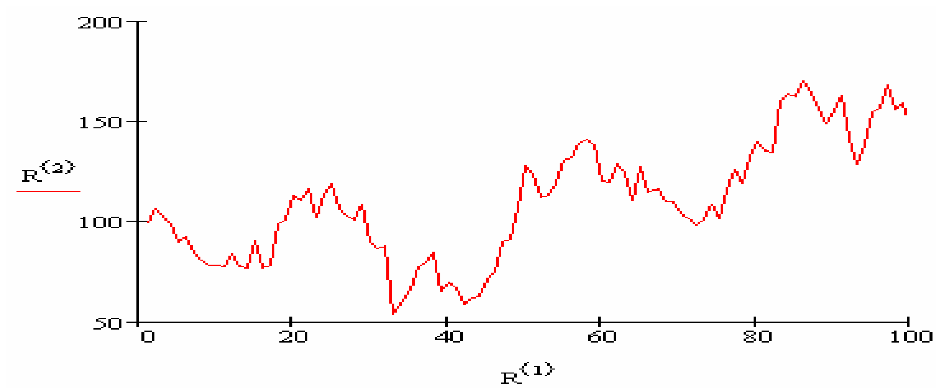
1.2.3 pav. AR(1) modelis su $\alpha = 0.99$

Kai $\alpha = 1$, gauname 2.4 pav. pavaizduotą procesą. Šiuo atveju jis turi deterministinio trendo požymį, tačiau ne visada $\alpha = 1$ atveju taip būna. Kaip matyti procesas, tolsta nuo savo pradinės reikšmės, o jo vidurkis yra nuolat didėjantis.



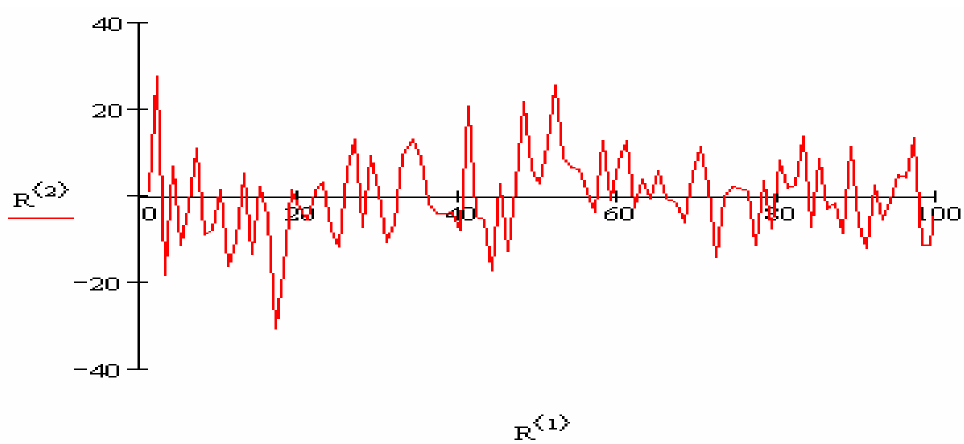
1.2.4 pav. AR(1) modelis su $\alpha = 1$

Kai $\alpha = 1$, tačiau $y_1 = 100$, gauname 2.5 pav. pavaizduotą procesą. Kaip matyti, šiuo atveju procesas jau yra atsitiktinis klaidžiojimas, nesvarbu, kur jis prasideda, jis, laikui bėgant. gali „nukeliauti“ bet kur.



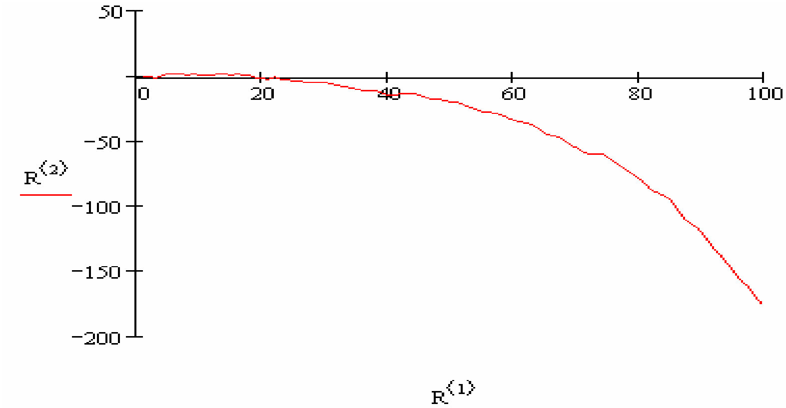
1.2.5 pav. AR(1) atsitiktinis klaidžiojimas

Kai $\alpha = 0$, gauname 2.6 pav. gautą procesą. Šiuo atveju tai jau baltasis triukšmas, t.y. $E(y_t) = 0$ ir $\mathrm{cov}(y_t, y_s) = 0; \forall s \neq t$. Taigi, galime teigti, kad α yra svyravimo apie savo vidurkį modelyje (2.3) dažnio matas.



1.2.6 pav. Baltasis triukšmas

Kai $\alpha = 1.04$, gautas 2.7 pav. pavaizduotas procesas. Jis labai nestabilus - greitai nutolsta nuo savo pradinės reikšmės, kai $t \to \infty$, tai $y_t \to \pm\infty$. Šiuo atveju sugeneruotas procesas primena kažkiek eksponentinę funkciją.



1.2.7 pav. AR(1) nestabilus modelis

Naudinga panagrinėti AR(1) modelį su konstanta:

$$y_t = c + \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{2.5}$$

Konstanta c modeliuoja trendą laiko eilutėje: jei $c > 0$, trendas yra teigiamas, jei $c < 0$, trendas yra neigiamas. Pasitelkę postūmio laike operatorių L, perrašome (2.5) lygybę:

$$(1-\alpha L)\, y_t = c + \varepsilon_t .$$

Tarkime, kad $|\alpha| < 1$. Kadangi

$$(1-\alpha L)^{-1} = 1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 + \alpha^3 L^3 + ...$$

tai AR(1) modelis gali būti užrašytas ir taip:

$$y_t = (1-\alpha L)^{-1}(c + \varepsilon_t) = (1-\alpha L)^{-1} c + (1-\alpha L)^{-1} \varepsilon_t$$

arba kadangi $(1-\alpha L)^{-1}\varepsilon_t = \varepsilon_t + \alpha\varepsilon_{t-1} + \alpha^2\varepsilon_{t-2} + \alpha^3\varepsilon_{t-3} + ...,$

tai $$y_t = \frac{c}{(1-\alpha)} + \varepsilon_t + \alpha\varepsilon_{t-1} + \alpha^2\varepsilon_{t-2} + \alpha^3\varepsilon_{t-3} + ..., \tag{2.6}$$

paimkime šios laiko eilutės vidurkį ir dispersiją:

$$E(y_t) = \frac{c}{(1-\alpha)} \text{ ir } D(y_t) = \frac{\sigma^2}{(1-\alpha^2)}. \tag{2.7}$$

AR(1) modelio autokovariacinė funkcija nepriklauso nuo konstantos :

$$E(y_t y_{t-s}) = \alpha^s \sigma^2 \frac{1}{(1-\alpha^2)}. \tag{2.8}$$

Įsitikinti tuo galime pasinaudoję (2.6) lygybe:

$\mathrm{cov}(y_t, y_{t-s}) = E(\varepsilon_t + \alpha\varepsilon_{t-1} + \alpha^2\varepsilon_{t-2} + \alpha^3\varepsilon_{t-3} + ...)\cdot(\varepsilon_{t-s} + \alpha\varepsilon_{t-s-1} + \alpha^2\varepsilon_{t-s-2} + \alpha^3\varepsilon_{t-s--3} + ...))$ ir tuomet pasinaudoję tuo faktu, kad $E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-s}) = 0$, nebent $s = 0$ ir $E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$.

Aukštesnės eilės autoregresijos modeliai turi sudėtingesnes savybes. Pavyzdžiui, AR(2) modelis:

$$y_t = c + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \varepsilon_t, \qquad (2.9)$$

panaudojus postūmio laike operatorių, gali būti užrašytas taip:

$(1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2) y_t = c + \varepsilon_t$.

Šis modelis yra stabilus, jei jo charakteristinio polinomo $1 - \alpha_1 x - \alpha^2 x^2$ šaknys yra išorėje vienetinio apskritimo kompleksinių skaičių plokštumoje. Tarkime, turime tokį AR(2) modelį: $y_t = c + 2 \cdot y_{t-1} - y_{t-2} + \varepsilon_t$. Šis modelis yra nestacionarus, kadangi šio AR(2) charakteristinio daugianario $1 - 2x + x^2$ šaknys yra $\frac{(1 \pm i\sqrt{3})}{2}$, o jų modulis yra 1, taigi jos yra ant vienetinio apskritimo. Panagrinėkime AR(p) modelį (1.1). Jo vidurkis lygus:

$E(y_t) = \frac{c}{(1 - \alpha_1 - \alpha_2 - ... - \alpha_p)}$ ir dispersija $: D(y_t) = \gamma_0 = \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 + ... + \alpha_p \gamma_p + \sigma^2$, čia $\gamma_s = \text{cov}(y_t, y_{t-s})$. Kai $s > 0$ autokovariacinė funkcija užrašoma panašiai kaip pats AR(p) procesas:

$\text{cov}(y_t, y_{t-s}) = \gamma_s = \alpha_1 \gamma_{s-1} + \alpha_2 \gamma_{s-2} + ... + \alpha_p \gamma_{s-p}$.

AR(p) modelis bus stocianarus, jei jo charakteristinio daugianario $1 - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2 - ... - \alpha_p x^p$ šaknys bus išorėje vienetinio kompleksinio apskritimo. AR(p) modeliai, turintis vieną ar daugiau $1 - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2 - ... - \alpha_p x^p$ šaknų, kurių modulis lygus 1, yra nestacionarūs.

1.3. AR(p) MODELIO PARAMETRŲ ĮVERČIAI

Tarkime, kad stebime atsitiktinį vektorių $X = (X_1, X_2, ..., X_n)^T$, o atsitiktinio dydžio Y prognozė užrašyta kaip tiesinė funkcija nuo stebėjimų:

$\hat{Y} = a + b_1 X_1 + ... + b_n X_n = a + b^T X$. Prognozės tikslumą nusako vidutinė kvadratinė paklaida:

$\Delta = \Delta(a, b) = E\varepsilon^2$, $\varepsilon = Y - \hat{Y}$.

Suformuluokime teoremą.

Minimali vidutinė kvadratinė paklaida gaunama, kai $\hat{Y}$ koeficientai parenkami taip, kad atsitiktinė paklaida ε turėtų vidurkį 0 ir būtų nekoreliuota su stebimu vektoriumi X.

Įrodymas.►

Tegul egzistuoja a^* ir b^* tokie, kad $\varepsilon^* = Y - a^* - (b^*)^T X$ tenkina teoremos sąlygas: $E\varepsilon = 0$ ir $\operatorname{cov}(\varepsilon^*, X) = 0$.

Paimkime kitus a ir b apskaičiuokime vidutinę kvadratinę paklaidą.

$\varepsilon = Y - a - b^T X$.

Pažymėkime $\delta = b^* - b$, tuomet $\varepsilon^* = Y - a^* - (b^*)^T X$, tuomet gauname

$\varepsilon = \varepsilon^* + a^* - a + \delta^T X$. Žinome, kad $E\varepsilon^2 = (E\varepsilon)^2 + D\varepsilon = (E\varepsilon)^2 + D(\varepsilon^* + \delta^T X) = (E\varepsilon)^2 + D\varepsilon^* + D\delta^T X \ge D\varepsilon^* = D\varepsilon^* + (E\varepsilon^*)^2 = E(\varepsilon^*)^2 = E(\varepsilon^*)^2$. Taigi $E\varepsilon^2 \ge E(\varepsilon^*)^2$. Gavome, kad vidutinė kvadratinė paklaida su bet kuriais a ir b yra nemažesnė nei su a^* ir b^*.◄

Dabar įvertinkime parametrus

$\operatorname{cov}(\varepsilon^*, X) = \operatorname{cov}(Y - a^* - (b^*)^T X, X) = \operatorname{cov}(Y, X) - (b^*)^T \operatorname{cov}(X, X) = R_{YX} - (b^*)^T R_{XX} \Rightarrow b^* = R_{XX}^{-1} R_{YX}$ taip apskaičiuojamas optimalus b^*, tenkinantis teoremos sąlygas. Tuomet $a^* = EY - (b^*)^T EY$.

Šią bendrą teoriją galima pritaikyti ir stacionariems procesams. Atsitiktinis procesas ξ_t vadinamas stacionariuoju procesu plačiąja prasme (tiesiog stacionariu), jei jo vidurkis ir kovariacinė funkcija nepriklauso nuo poslinkio laike, t.y. $m(t) = m(s) = m(0)$ ir $\mathrm{R(t,s)} = \mathrm{R(t+\tau, s+\tau)}$, $\forall t, s \in T$.

Taigi bendrą prognozavimo teoriją pritaikysime stocionariems procesams. Tegul ξ_t - stacionarus procesas, kurio $E\xi_t = m$ ir kovariacinė matrica $R(\tau) = \operatorname{cov}(\xi_{t+|\tau|}, \xi_t)$. Stebime imtį: $X = (\xi_1, .., \xi_n)^T$. Mūsų tikslas surasti įvertį $\hat{\xi}_s, s > n$, t.y. prognozę į priekį.. Nagrinėsime tiesinį prognozavimą, t.y. ieškosime įverčio:

$\hat{\xi}_s = \alpha + \beta_1 \xi_1 + ... + \beta_n \xi_n$. Pagal ką tik įrodytą teoremą $\beta = R_{XX}{}^{-1} R_{X\xi_s}$ ir $\alpha = m - \beta^T EX \Rightarrow \alpha = m(1 - \beta_1 - \beta_2 - ... - \beta_n)$ ir $\mathrm{EX} = (\mathrm{E}\xi_1, ..., \mathrm{E}\xi_\mathrm{n}) = (\mathrm{m}, ..., \mathrm{m})$.

$$R_{XX} = \begin{pmatrix} \operatorname{cov}(\xi_1, \xi_1) & \operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) & ... & \operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) \\ ... & ... & ... & ... \\ \operatorname{cov}(\xi_n, \xi_1) & \operatorname{cov}(\xi_n, \xi_2) & ... & \operatorname{cov}(\xi_n, \xi_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(0) & ... & R(n-1) \\ ... & ... & ... \\ R(n-1) & ... & R(0) \end{pmatrix}$$

$$R_{X\xi_s} = (\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_s), \operatorname{cov}(\xi_2, \xi_s), .., \operatorname{cov}(\xi_n, \xi_s))^T = \begin{pmatrix} R(s-1) & R(s-2) & ... & R(s-n) \end{pmatrix}^T$$

Apibrėžkime paklaidą tokiu būdu $\varepsilon_t = \xi_t - \hat{E}_{t-1}\, \xi_t$, čia $\hat{E}_{t-1}\, \xi_t$ - prognozė pagal visus stebėjimus iš praeities. Taip apibrėžtai paklaidai galioja savybės:

ε_t yra tiesinė funkcija nuo $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}...$ (turimų stebėjimų).

$E\xi_t = 0$ (nes paimama optimali tiesinė prognozė, pagal teoremą vidurkis lygus 0)

$\operatorname{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0,\ jei\ \ s \neq t$. Visa tai vadinama bendra prognozavimo teorija.

Tačiau AR(p) modelio $y_t = c + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + ... + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t$ parametrus įvertinti galime kitu būdu. Parenkame parametrus $c, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$ taip, kad minimizuotume sumas :

$$\sum_{t=p+1}^{n} (y_t - \alpha_1 y_{t-1} - ... - \alpha_p y_{t-p} - c)^2 \to \min .$$

Šis AR(p) modelis primena regresijos lygtį:

$$Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + ... + \beta_k X_k + \varepsilon . \tag{3.1}$$

Formulėje (2.1) priklausomas kintamasis yra einamoji laiko eilutės reikšmė, o regresoriai jos praeities reikšmės, būtent „auto-regressive“ ir reiškia regresiją tarp tos pačios eilutės reikšmių. Formulės (2.1) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p, c$ koeficientus galima įvertinti mažiausių kvadratų metodu (MKM), t.y. minimizuodami minėtas sumas, tačiau kintamieji $y_{t-1}, y_{t-2}, ..., y_{t-p}$ turi būti stacionarūs, kitaip MKM įverčiai bus neteisingi, taip pat šie regresoriai turi būti nepriklausomi, kitaip bus susidurta su multikolinerumo problema, kai MKM įverčiai bus paslinktieji ir neefektyvūs. Taip atsitinka dėl to, kad regresoriai labai koreliuoti tarpusavyje. MKM įverčių apskaičiavimo formulę patogu užrašyti matricinėje formulėje. Pasinaudosime (3.1) modeliu kaip pavyzdžiu. Koeficientų $\alpha, \beta_1, \beta_2, .., \beta_k$ reikšmių nežinome, todėl jas pakeiskime jų įverčiais $\hat{\alpha}, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, .., \hat{\beta}_k$:

$$Y = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + ... + \hat{\beta}_k X_k + \varepsilon . \tag{3.2}$$

Jei $X_1, X_2, ..., X_k$ yra laiko eilutės, su tam tikra reikšme laiko momentu t, tuomet galima užrašyti Y prognozę:

$$\hat{Y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 X_{1,t} + \hat{\beta}_2 X_{2,t} + ... + \hat{\beta}_k X_{k,t} . \tag{3.3}$$

Skirtumą tarp tikros Y ir prognozės $\hat{Y}$ reikšmių pažymėkime liekana ε_t, (3.2) formulę galima užrašyti taip:

$$Y_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 X_{1,t} + \hat{\beta}_2 X_{2,t} + ... + \hat{\beta}_k X_{k,t} + \varepsilon_t . \tag{3.4}$$

Pažymėkime $\beta = (\alpha, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_k)^T$, $y = (Y_1, Y_2, ..., Y_T)^T$, $X = \begin{pmatrix} 1 & X_{1,1} & X_{2,1} & ... X_{k,1} \\ 1 & X_{1,2} & X_{2,2} & ... X_{k,2} \\ ... & ... & ... & ... \; ... \\ 1 & X_{1,T} & X_{2,T} & ... X_{k,T} \end{pmatrix}$

ir $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_T)^T$. Tuomet $Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + ... + \beta_k X_k + \varepsilon$ galime užrašyti tokiu matriciniu pavidalu:

$$y = X\beta + \varepsilon . \tag{3.5}$$

Tuomet koeficientų $\alpha, \beta_1, \beta_2, .., \beta_k$ įverčiai bus lygūs:

$$b = (X^T X)^{-1} X^T y. \tag{3.6}$$

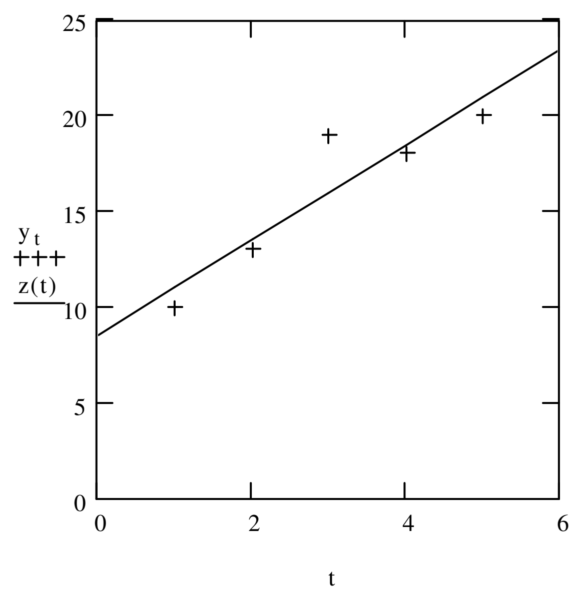
Pavyzdžiui, apskaičiuokime deterministinį trendą laiko eilutei. Todėl užrašome Y priklausomybę nuo konstantos ir laiko:

$$Y_t = \alpha + \beta \cdot t + \varepsilon_t$$

Tarkime turime Y stebėjimus: $Y_1 = 10, Y_2 = 13, Y_3 = 19, Y_4 = 18, Y_5 = 20$. Taigi $y = (10, 13, 19, 18, 20)^T$, X bus $5x2$ formato matrica, kur pirmas stulpelis bus iš vienetų, o antrame bus $1, 2, 3, 4, 5$, t.y. laiko trendas. Taigi gauname:

$b := \left(X^T X\right)^{-1} \cdot X^T \cdot y$,o tai yra lygu $b = \begin{pmatrix} 8.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$. Taigi regresijos lygtis atrodo taip:

$$\hat{Y} = 8.5 + 2.5 \cdot t$$



1.3.1 pav. MKM metodu pritaikytas trendas

Gautame 3.1 pav.grafike taškai („pliusai“) reiškia Y stebėjimus, o linija – pritaikytą šiems stebėjimams trendą.

1.4. AR(p) MODELIO PARAMETRŲ REIKŠMINGUMAS IR EILĖS NUSTATYMAS

Apskaičiavę MKM metodu AR(p) modelio $y_t = c + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + ... + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t$ koeficientus $c, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$, įvertiname jų reikšmingumą. T.y. tikriname hipotezę:

$$\begin{cases} H_0 : \alpha_j = 0 \\ H_1 : \alpha_j \neq 0; \end{cases}$$

čia $j = 1...p.$ Sukonstruojame šiai hipotezei tikrinti statistiką. Šio kriterijaus statistika yra

$$t = \frac{\hat{\alpha}_j}{\sqrt{RRS \dfrac{1}{(n-p-1)\cdot SSE_j}}}; \qquad (4.1)$$

čia $RRS = (y_t)^T (y_t) - b^T X^T (y_t)$ yra paklaidų kvadratų suma, b - koeficientų $c, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$ įverčių, gautu MKM metodu, vektorius, o matrica $X = \begin{pmatrix} 1 & y_{t-1,1} & y_{t-2,1} & ... \, y_{t-p,1} \\ 1 & y_{t-1,2} & y_{t-2,2} & ... \, y_{t-p,2} \\ ... & ... & ... & ... \; ... \\ 1 & y_{t-1,T} & y_{t-2,T} & ... \, y_{t-p,T} \end{pmatrix}$.

Apskaičiuojame regresijos modelio, kuriame y_{t-j} yra priklausomasis kintamasis, o $y_{t-1}, y_{t-j-1}, y_{t-j+1}, ..., y_{t-p}$ - nepriklausomieji kintamieji, liekamųjų paklaidų kvadratų sumą. Jos ir yra SSE_j formulėje (4.1).

Tegul reikšmingumo lygmuo α. Hipotezė H_0 atmetama (taigi $y_{t-p} \neq 0$), jeigu $|t| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-p-1)$, čia $|t_{\frac{\alpha}{2}}(n-p-1)|$ yra Stjudento skirstinio su (n-p-1) laisvės laipsnių $\dfrac{\alpha}{2}$ lygmens kvantilis. Hipotezė H_0 neatmetama, jeigu $|t| \leq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-p-1)$.

Paimkime pavyzdį – panagrinėkime, per kiek žingsnių Aprangos akcijos pelningumų einamoji vertė priklauso nuo praeities. Regresijos lygtyje negalime naudoti šios akcijos kainų, kadangi, kainos nėra stacionarūs duomenys, todėl MKM regresijos parametrų įverčiai bus neteisingi. Tačiau pradėsime nagrinėti nuo logaritminių kainų, t.y. ln(kaina), kadangi $\ln(kaina_t) - \ln(kaina_{t-1}) \approx \text{pelnas}$. Tuo galime įsitikinti, pasižymėję kainą P, o pelną r. Kai x yra mažas $\ln(1+x) \approx x.$ Tuomet pelnas

$r_t = \frac{(P_t - P_{t-1})}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$, taigi $1 + r_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}$, tad $\ln(1 + r_t) = \ln(\frac{P_t}{P_{t-1}})$ arba $r_t \approx \ln P_t - \ln P_{t-1}$. Pasirinkime tris žingsnius į praeitį ieškodami pelno einamosios vertės priklausomybės nuo praeities, t.y.:

$r_t = c + \alpha_1 \cdot r_{t-1} + \alpha_2 \cdot r_{t-2} + \alpha_3 \cdot r_{t-3} + \varepsilon_t$;

arba

$\ln y_t - \ln y_{t-1} = c + \alpha_1 \cdot (\ln y_{t-1} - \ln y_{t-2}) + \alpha_2 \cdot (\ln y_{t-2} - \ln y_{t-3}) + \alpha_3 \cdot (\ln y_{t-3} - \ln y_{t-4}) + \varepsilon_t$; ir galiausiai

$\Delta \ln y_t = c + \alpha_1 \cdot \Delta \ln y_{t-1} + \alpha_2 \cdot \Delta \ln y_{t-2} + \alpha_3 \cdot \Delta \ln y_{t-3} + \varepsilon_t$

Šiai lygčiai buvo panaudota akcijos aprangos kainų duomenys nuo 2002.01.02 iki 2006.11.29. MKM metodu išsprendę, gauname tokį modelį:

$\Delta \ln y_t = \widehat{c} + \widehat{\alpha}_1 \cdot \Delta \ln y_{t-1} + \widehat{\alpha}_2 \cdot \Delta \ln y_{t-2} + \widehat{\alpha}_3 \cdot \Delta \ln y_{t-3}$;

Lentelė 1.4.1

Aprangos akcijos regresijos lygtis su 4 regresoriais

	$\widehat{c}$	$\widehat{\alpha}_1$	$\widehat{\alpha}_2$	$\widehat{\alpha}_3$
reikšmė	0,00315	0,08557	-0,04409	-0,01318
t reikšmė	4,86474	2,95084	-1,51611	-0,4542
Pasikliovimo intervalas	apačia: 0,00188 viršus: 0,00442	apačia: 0,02868 viršus: 0,14247	apačia: -0,10114 viršus: 0,01297	apačia: -0,0701 viršus: 0,0437

Čia buvo fiksuotas reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0.05$.

Taigi gautas modelis: $\Delta \ln y_t = 0.0032 + 0.0856 \;\cdot \Delta \ln y_{t-1} - 0.0441 \;\cdot \Delta \ln y_{t-2} - 0.0132_3 \cdot \Delta \ln y_{t-3}$

Stjudento skirstinio kvantiliai yra $t_{0.025,\infty} = -1.962$ ir $t_{0.975,\infty} = 1.962$, todėl nereikšmingais galima laikyti $\Delta \ln y_{t-2}$ ir $\Delta \ln y_{t-3}$ kintamuosius, kadangi $|-1.51611| < 1.962$ ir $|-0.01318| < 1.962$. Tačiau nereiktų iškart pašalinti abiejų kintamųjų, o tik kintamąjį su didžiausių žingsniu į praeitį. Pašalinus jį reiktų perskaičiuoti visą modelį iš naujo su vienu kintamųjų mažiau, kadangi pašalinus nereikšmingą kintamąjį, kitas nereikšmingas kintamasis su mažesniu žingsnių į praeitį gali tapti reišmingas. Kintamųjų reikšmingumu pagrįstas modelio eilės p parinkimas:

- Pirmiausia parenkamas protingai didžiausias žingnis į praeitį - $p_{\max}$.
- Suskaičiuojami MKM metodu parametrai modelio $AR(p_{\max})$ su determinuotu trendu: $y_t = c + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + ... + \alpha_{p\max} y_{t-p\max} + \delta \cdot t + \varepsilon_t$. Jeigu koeficiento $\alpha_{p\max}$ įverčio t kriterijaus

statistika reikšmės modulis mažesnis už 1,962, kai fiksuotas $\alpha = 0.05$ reikšmingumo lygmuo, tuomet pašaliname $y_{t-p\max}$ kintamąjį.

- Skaičiuojame $AR(p_{\max} - 1)$ modelį: $y_t = c + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + ... + \alpha_{p\max-1} y_{t-p\max-1} + \delta \cdot t + \varepsilon_t$. Tikriname analogiškai kaip ir paskutiniame punkte $\alpha_{p\max-1}$ reikšmingumą. Jei šis koeficientas reikšmingai nesiskiria nuo nulio, pašaliname $y_{t-p\max-1}$ kintamąjį ir perskaičiuojame modelį iš naujo.
- Pažingsniui pašaliname ir perskaičiuojame AR modelį, kol jo kintamasis su didžiausiu žingsniu į praeitį tampa statistiškai reikšmingas su reikšmingumo lygmeniu α . Dažniausiai reikšmingumo lygmuo pasirenkamas 0,01, 0,05 arba 0,1. Gali nutikti ir taip, kad visi koeficientai bus nereikšmingi, tuomet priklausomais kintamasis nepriklauso nuo savo praeities.
- Kai nustatoma modelio eilė p, tikrinamas δ tiesinio trendo koeficiento reikšmingumas. Taip nustatoma, ar tiriamam modeliui galima pritaikyti trendą.

Grįžkime prie pavyzdžio. Pašalinkime kintamąjį su didžiausiu žingsniu į praeitį $\Delta \ln y_{t-3}$, kadangi jis yra modelyje nereikšmingas. Taigi gauname modelį:

$\Delta \ln y_t = \hat{c} + \hat{\alpha}_1 \cdot \Delta \ln y_{t-1} + \hat{\alpha}_2 \cdot \Delta \ln y_{t-2}$.

Raskime naujus parametrų įverčius:

Lentelė 1.4.2

Aprangos akcijos regresijos lygtis su 3 regresoriais

	$\hat{c}$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$
reikšmė	0,00311	0,086167	-0,04522
t reikšmė	4,85058	2,97547	-1,56119
Pasikliovimo intervalas	apačia: 0,00185 viršus: 0,00437	apačia: 0,02935 viršus: 0,14298	apačia: -0,10204 viršus: 0,01161

Pašalinus nereikšmingą kintamąjį, šiek tiek pakilo antrojo kintamojo t statistika, tačiau $\Delta \ln y_{t-2}$ išlieka nereikšmingas, jį atmetame ir gauname naują modelį:

$\Delta \ln y_t = \hat{c} + \hat{\alpha}_1 \cdot \Delta \ln y_{t-1}$. Jo parametrų iverčiai:

Lentelė 1.4.3

Aprangos akcijos regresijos lygtis su 2 regresoriais

	$\hat{c}$	$\hat{\alpha}_1$

reikšmė	0,002975	0,08245
t reikšmė	4,67997	2,854902
Pasikliovimo intervalas	apačia: 0,00173 viršus: 0,00422	apačia: 0,025787 viršus: 0,139103

Taigi galutinis modelis yra $\Delta \ln y_t = 0.00275 + 0.08245 \cdot \Delta \ln y_{t-1}$.

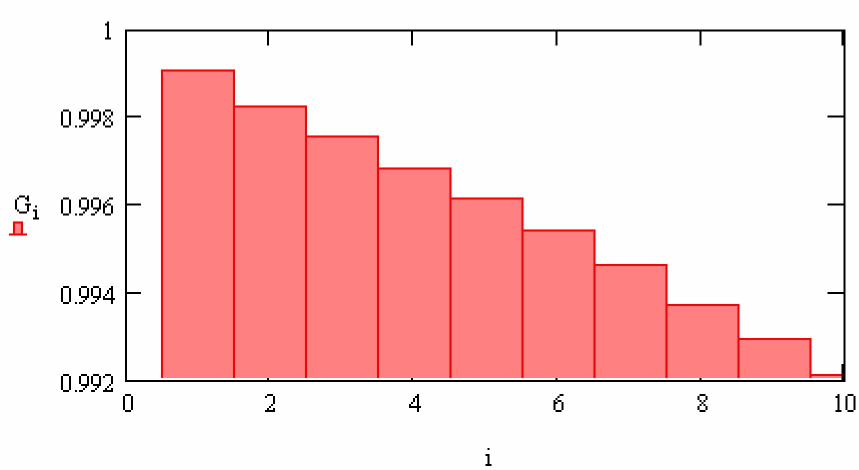
Yra ir kitų būdų nustatyti AR(p) modelių eilei. Galima pasinaudoti koreliogramomis, kuriose pavaizduoti laiko eilutės autokoreliacijos koeficientai:

$$\rho_s = \frac{\operatorname{cov}(y_t, y_{t-s})}{D(y_t)}.$$

Žinoma, $\rho_0 = 1$ visiems stacionariems procesams. Baltajam triukšmui autokorialiacinė funkcija lygi 1, nulinio žingsnio į praeitį atveju ir lygi 0 kitais atvejais, t.y. kai $s > 0$. Remiantis formule (2.4) AR(1) modelio s-eilės autokoreliacijos koeficientas lygus α^s. AR(p) autokoreliacijos funkcija užrašoma žymiai sudėtingiau. Padalinę formulę (2.8) iš formulės (2.7) gauname Julio-Walkerio lygtis AR(p) modelio autokoreliacijos funkcijoms:

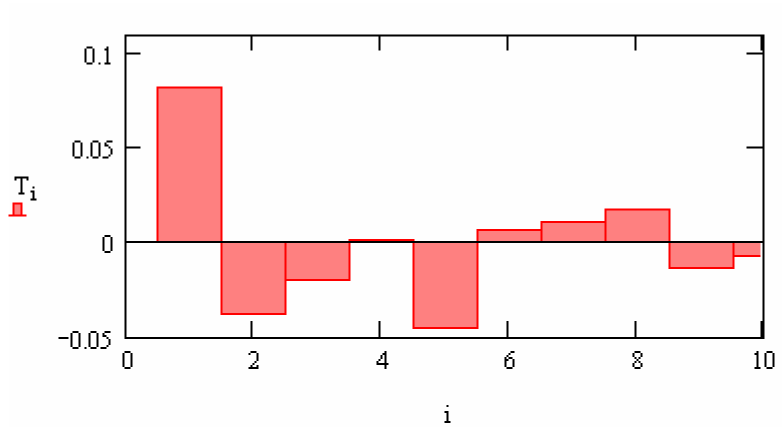
$\rho_s = \alpha_1 \rho_{s-1} + \alpha_2 \rho_{s-2} + ... + \alpha_p \rho_{s-p}$; čia $s = 1,2,3,...$

Pavyzdžiui akcijos Apranga kainos koreliograma atrodo taip:



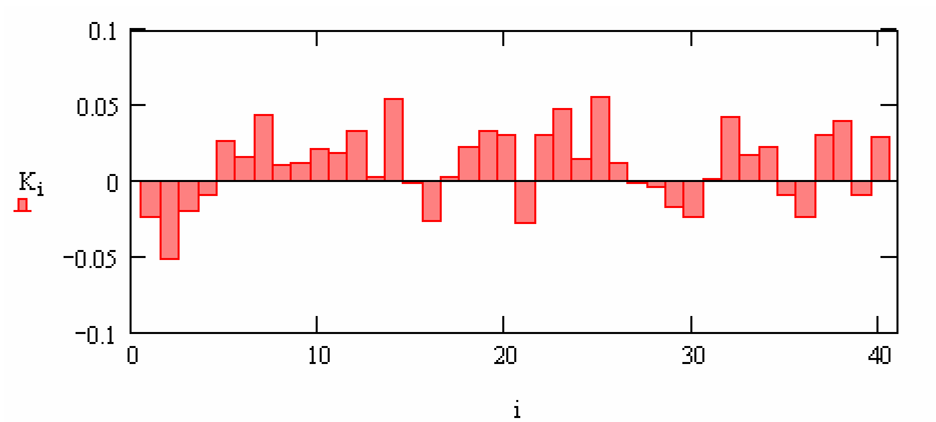
1.4.1 pav. Aprangos akcijos kainos koreliograma

Kaip matyti iš grafiko, kainos praeityje koreliuotos ir tarpusavyje ir su esamąja kaina. Ir aukšta autokoreliacija bėgant laikui gęsta labai lėtai. Dėl multikolinerumo negalima sudaryti tiesinės regresijos lygties naudojantis MKM įverčiams skaičiuoti. Turime nagrinėti stacionarius duomenis – pelną. Patyrinėkime tos pačios akcijos Apranga pelno koreliogramą, kai žingsnių į praeitį žingsnis $s = 10$



1.4.2 pav. Aprangos akcijos pelno koreliograma

Kaip matyti esamoji pelno vertė labiausia koreliuoja su vienu žingsniu į praeitį reikšme. Tačiau ši koreliacija nedidelė, nesiekia net 0.1. Taigi iš grafiko galima bandyti spręsti, jog tiktų AR(1) modelis, t.y. $\Delta \ln y_t = c + \alpha \cdot \Delta \ln y_{t-1} + \varepsilon_t$. Tačiau koreliogramos nevisada padeda nustatyti modelio AR(p) eilę. Programos tekstas matchado kalboje koreliogramoms braižyti gali būti rastas priede. Panagrinėkime akcijos Alitos pelno koreliograma su 40 žingsnių į praeitį, kai buvo panaudoti 2002.01.02 -2008.05.20 laikotarpio duomenys:



1.4.3 pav. Alitos akcijos pelno koreliograma

Šiuo atveju sunkiau apsispręsti dėl eilės, kaip matyti esamoji pelno vertė labiau neigiamai koreliuoja su dviejų žingsnių į praeitį reikšme nei su su vieno žingsnio.

Parašykime Alitos pelnui AR(3) modelį:

$$\Delta \ln y_t = \hat{c} + \hat{\alpha}_1 \cdot \Delta \ln y_{t-1} + \hat{\alpha}_2 \cdot \Delta \ln y_{t-2} + \hat{\alpha}_3 \cdot \Delta \ln y_{t-3}$$

Lentelė 1.4.4

Alitos akcijos regresijos lygtis

	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$
reikšmė	-0,00852	-0,03471	-0,04193

t reikšmė	-0,326	-1.332	-1.608
Pasikliovimo intervalas	apačia: -0,06 viršus: 0,043	apačia: -0,09 viršus: 0,02	apačia: -0,09 viršus: 0,01

Šiame modelyje $\hat{c} = 0.00124$. Taigi pagal lentelės duomenis visi kintamieji nėra statistiškai reikšmingi. Tada šis tiesinis regresijos modelis netinka nagrinėjamiems kintamiesiems.

Panagrinėkime Bokso-Pirso (Box-Pierce) kriterijų AR(p) modelio p eilei nustatyti. Šis kriterijus autokoreliacijai reikšmingai iki p eilės remiasi statistika:

$$Q = T\sum_{n=1}^{p} \varphi(n)^2,$$

čia T yra imties dydis, o $\varphi(n)$ yra imties n-tos eilės autokoreliacija:

$$\varphi(n) = \frac{\sum_{t=n+1}^{T} y_t y_{t-n}}{\sum_{t=1}^{T} y_t^2}.$$

Bokso-Pirso kriterijaus statistika pasiskirčiusi pagal chi-kvadarato su p laisvės laipsnių skirstinį. Apskaičiuokime Q kriterijų Aprangos akcijos pelno laiko eilutei, kai reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0.01$. Ivertinsime 10 žingsnių į praeitį, t.y. 10 atsilikimų:

Lentelė 1.4.5

Bokso-Pirso kriterijus aprangos akcijos pelnui

Atilikimų sk. p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Q	18,6	19,4	19,6	20,2	20,3	20,6	21,6	21,7	21,7	24,1
$\chi^2_{p,0.01}$	6,63	9,21	11,3	13,3	15,1	16,8	18,5	20,1	21,7	23,2

Statistikos Q reikšmę laikome statistiškai reikšminga, kai $Q_p > \chi^2_{p,0.01}$. Kaip matyti iš lentelės, pradedant 2 atsilikimu, Q reikšmė pasikeičia nedaug didėjant p reikšmei. Tai reiškia , kad esminį svorį Q statistikoje sudaro pirmoji atsilikimo reikšmė, todėl tai patvirtina mūsų prielaidą, kad reikia naudoti modelį:

$$\Delta \ln y_t = \hat{c} + \hat{\alpha}_1 \cdot \Delta \ln y_{t-1}.$$

Naudinga aptarti ir Akaike kriterijų:

$$AIC = 2 \cdot k + n \cdot (\ln\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot RRS}{n}\right) + 1);$$

Šio kriterijaus modifikacija mažoms imtims yra tokia:

$$AICc = AIC + \frac{2 \cdot k(k+1)}{n-k-1};$$

Kai imties dydis yra didelis, t.y. $n \to \infty$, $AICc$ konverguoja į AIC, $AICc \xrightarrow[n\to\infty]{} AIC$.

Čia n - imties dydis, k modelyje parametrų skaičius. RRS - liekamųjų paklaidų kvadratų suma. Gauta mažiausia AIC reikšmė, reiškia, kad modeliui yra optimalus k parametrų skaičius. Aprangos pelnų eilutei pritaikykime AR(1), AR(2) ir AR(3) modelius:

Lentelė 1.4.6

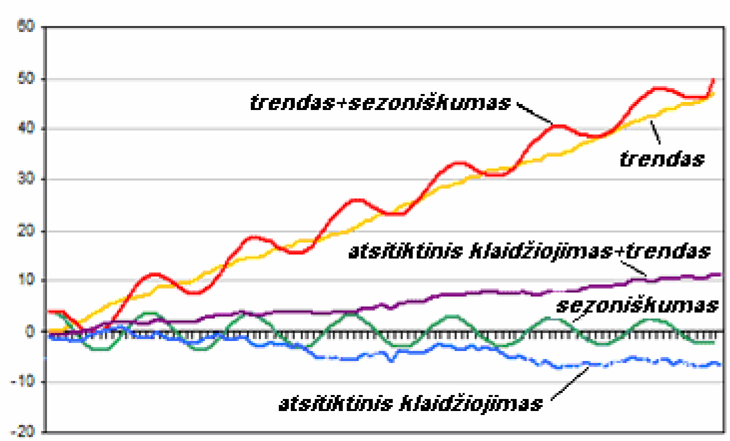
Akaike kriterijus aprangos akcijos pelnui

Parametrų skaičius k	Statistika AIC	RRS
2	$-7.12233 \cdot 10^3$	0.665
3	$-7.12207 \cdot 10^3$	0.666
4	$-7.12266 \cdot 10^3$	0.667

Čia į parametrų skaičių k įskaičiuojama ir konstanta. Taigi pagal AIC kriterijų,t.y. pagal mažiausią AIC reikšmę rekomenduojama pasirinkti modelį su $k = 3$ parametrų, t.y. modelį: $\Delta \ln y_t = \hat{c} + \hat{\alpha}_1 \cdot \Delta \ln y_{t-1} + \hat{\alpha}_2 \cdot \Delta \ln y_{t-2}$.

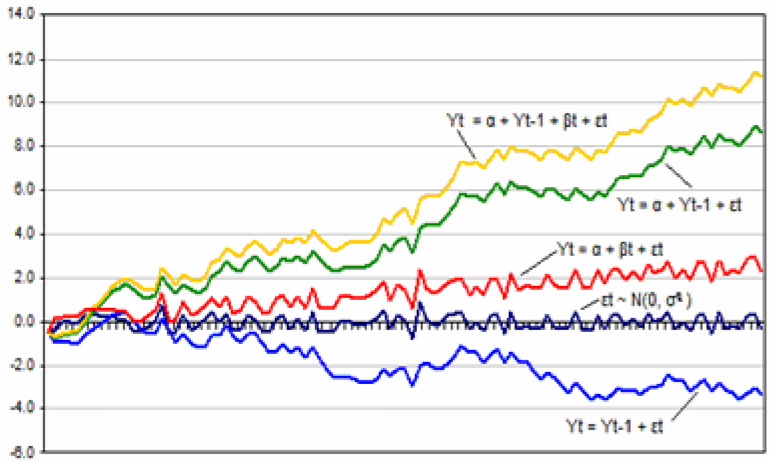
1.5. DUOMENŲ TRANSFORMACIJA IR ADF KRITERIJUS

Svarbu surasti efektyvų būdą nagrinėjamus duomenis paversti stacionariais, jei jie tokie nėra, ir suformuoti kriterijų, kuris patikrina, ar jie jau stacionarūs. Nestacionarius procesus apibendrina šie grafikai: 5.1 ir 5.2 pav.. Pirmasis apibendrina nestocionarią procesų elgseną. Taigi dažniausiai nestacionarus procesas gali būti vienas iš žemiau nurodytų ar jų kelių suma.



1.5.1 pav. Nestacionarių procesų elgsena

O šiame grafike pateikti AR(1) bazėje išreikšti nestacionarių modelių pavyzdžiai. Grafiko 0X ašyje palyginimui pateiktas stacionaraus proceso pavyzdys – baltas triukšmas.



1.5.2 pav. Nestacionarių procesų modeliai

Procesai turintys trendą nėra stacionarūs. Yra išskiriami dviejų rūšių trendai. Pavyzdžiui, šis procesas turi deterministinį tiesinį trendą:

$$y_t = c + \delta \cdot t + \varepsilon_t ,$$

tačiau gali būti ir netiesinis deterministinis trendras

$$y_t = c + \delta \cdot t^2 + \varepsilon_t .$$

Kaip jau minėjome anksčiau, šis modelis yra nestacionarus:

$$y_t = c + y_{t-1} + \varepsilon_t$$

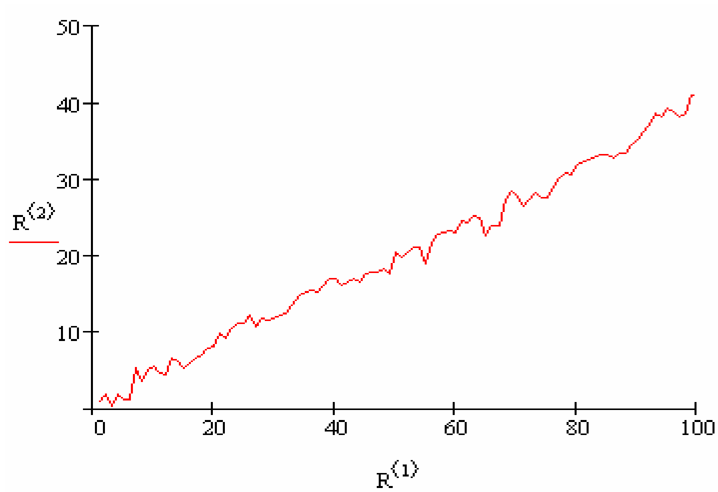
nes šiuo atveju koeficientas prie y_{t-1} yra lygus $\alpha = 1$. Tai atsitiktinis klaidžiojimas. Tuomet sakoma, kad laiko eilutė turi stochastinį trendą. Galime isitikinti tuo perrašę paskutinėje lygybėje rekurentiškai $y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3},...$ išraiškas:

$$y_t = c_0 + c \cdot t + \sum_{i=0}^{t-1} \varepsilon_{t-i} ,$$

čia $c_0 = y_0$, o dydis $\sum_{i=0}^{t-1} \varepsilon_{t-i}$ yra aiškiai nestacionarus, kadangi jo dispersija didėja su laiku. Yra procesų, kurie yra vadinami „stacionarūs su trendu“, tokio modelio pavyzdys galėtų būti toks::

$$y_t = c + \alpha \cdot y_{t-1} + \delta \cdot t + \varepsilon_t$$

Jį sudaro AR(1) stacionarus (jei yra reikalavimas, kad $|\alpha|<1$) modelis + deterministinis trendas $\delta \cdot t$. Sugeneruokime panašų modelį, kur $\alpha = 0.5$, o deterministinis trendas lygus $0.2 \cdot t$:



1.5.3 pav. Procesas „stacionarus + trendas“

Vizualiai sunku atskirti nestacionorų procesą nuo „stacionaraus su trendu“ proceso. Norėdami gauti šiuo atveju stacionarų procesą, tereikia atimti trendą. Pavyzdžiui, panagrinėkime procesą:

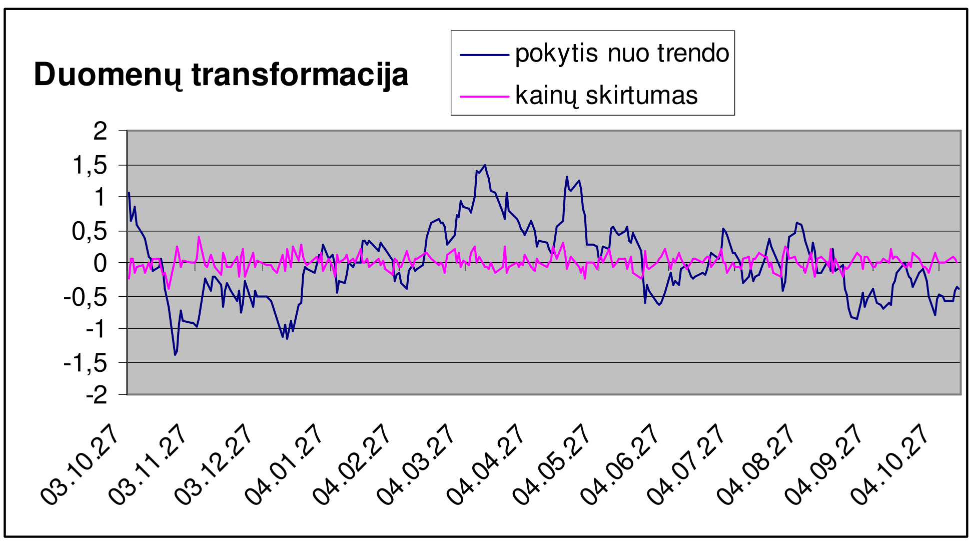
$y_t = \varepsilon_t + 0.1 \cdot t$, čia ε_t - baltasis triukšmas. Šis procesas nestacionarus kadangi $E(y_t) = 0 + 0.1 \cdot t$, t.y. vidurkis nėra pastovus. Tačiau procesas $\eta_t = y_t - 0.1 \cdot t$ jau stacionarus.

Dažniausiai nestacionarūs duomenys paverčiami stocianoriais pritaikę skirtumo operatorių, t.y. , tarkime, y_t- nestacionari laiko eilute, o jei ši laiko eilutė $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ jau yra stacionari, tada y_t vadinama integruota pirmos eilės laiko eilute. Apibendrintai y_t vadinama n eilės integruota laiko eilute, jei prireikia mažiausiai n kartų panaudoti skirtumo operatorių šiai eilutei, kol ji tampa stacionari. Tai žymima taip: $y_t \sim I(n)$. Integruotumo sąvoka labai svarbi fianasų teorijoje, kadangi kainų laiko eilutės $\ln y_t$ yra nestacionarios, tačiau jų skirtumas, kas yra apytiksliai pelnas, $\ln y_t - \ln y_{t-1}$ jau stacionarus procesas. Panagrinėkime Rytų skirstomųjų tinklų akciją, 2003.10.27 – 2004.11.05 laikotarpiui pritaikykime trendą:

$y = 0.0112 \cdot t - 425{,}12$.

1.5.4 pav. Rytų skirstomųjų tinklų akcijos kaina ir jos trendas

Transformuokime duomenis dvejopai. Paimkime pokyčius nuo trendo ir skirtumą tarp kainų, abiem atvejais tikimės iš nestacionarių duomenų, t.y. kainos, gauti stacionarias laiko eilutes. Grafike matyti, kad kainų skirtumas labiau primena stacionarų procesą nei pokyčiai nuo trendo:



1.5.5 pav. Duomenų transformacijos rezultatai

Stacionarumui įvertinti (ar procesas stacionarus, ar ne) naudojama ADF kriterijus. Pirmiausiai aptarkime AD (Dickey-Fuller) kriterijų, jis dar kitaip vadinamas „vienetinės šaknies“ kriterijumi, kadangi naudojamasi AR(p) modelio savybe: AR(p) modelis yra stacionarus, jei jo charakteristinio daugianario šaknys išorėje vienetinio apskritimo kompleksinių skaičių plokštumoje.

Pavyzdžiui, AR(1) atveju modelis yra nestacionarus, jei $\alpha = 1$. AR(1) charakteristinis daugianaris yra $1 - \alpha \cdot x$, tai jo šaknis yra $\frac{1}{\alpha}$, kuri yra ant vienetinio apskritimo, kai $\alpha = 1$. Kai $\alpha = 1$, AR(1) modelis yra atsitiktinis klaidžiojimas:

$$y_t = c + y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

čia ε_t yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su vidurkiu 0 ir dispersija σ^2. Aptarkime AD kriterijaus esmę: daroma prielaida, jog nagrinėjamas procesas yra AR(1). Tuomet sukuriamos hipotezės:

$H_0 : \text{a} = 1$ arba $H_0 : p\text{rocesas nestacionarus}$;

$H_1 : \text{a} < 1$ arba $H_0 : p\text{rocesas stacionarus}$.

Jei H_0 neatmetama, tuomet $y_t \in I(d)$, ir skaičiuojame kitą procesą: $\eta_t = \Delta y_t$ ir tikriname šio proceso stacionarumą, taikydami tą patį Dickey-Fuller testą.

Tačiau norint patikrinti hipotezę, kad $\alpha = 1$, neužtenka patikrinti α koeficiento reikšmingumą pasinaudojus Stjudento kriterijumi, kadangi MKM įverčiai yra paslinktieji, kai laiko eilutės charakteristinis daugianaris turi vienetinę šaknį. Tačiau, pasinaudojus skirtumo operatoriumi Δ, AR(1) galime perrašyti tokiu pavidalu:

$$\Delta y_t = c + (\alpha - 1) y_{t-1} + \varepsilon_t. \tag{5.1}$$

Taip pat svarbu pabrėžti, jog suformuota alternatyvi H_1 vienpusė, kadangi procesas (5.1) bus stacionarus, kai $\alpha < 1$, t.y. koeficientas prie y_{t-1} kintamojo yra mažesnis už nulį. Šio modelio atveju tikriname hipotezę, kad koeficientas greta y_{t-1} kintamojo reikšmingai skiriasi nuo nulio. DF kriterijaus statistika skiriasi nuo Stujdento statistikos kritinėmis reikšmėmis, kurios priklauso nuo imties dydžio. Lentelėje pateiktos DF kriterijaus kritinės reikšmės:

Lentelė 1.5.1

DF kriterijaus kritinės reikšmės

Stebėjimų skaičius	Reikšmingumo lygmuo	
	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
25	-3	-3,75
50	-2,93	-3,58
100	-2,89	-3,51
250	-2,88	-3,46

500	-2,87	-3,44
∞	**-2,86**	**-3,43**

Kadangi šiame darbe dirbama su didelės (~1400) apimties duomenimis, mus domina DF kritinės reikšmės -2,86, kai $\alpha = 0.05$ ir -3,43. kai $\alpha = 0.01$.

Grįžkime prie Rytų skirstomųjų tinklų akcijos analizės. Pokyčiams nuo trendo apskaičiuokime AR(1) modelį, kurio parametrus gauname MKM metodu:

$$\Delta y_t = -0.03 - 0.066 y_{t-1}.$$

Koeficiento greta y_{t-1} DF statistika lygi -2.11. Kadangi imties dydis yra apie 250, todėl šią DF statiskos reikšmę lyginame su -3,46 kritine reikšme, kai reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0.01$. Taigi -2,11<-3,46, todėl duomenų, gautų iš pokyčių nuo trendo, laiko eilutė nėra stacionari. Apskaičiuokime AR(1) modelį ir duomenims, gautiems panaudojus skirtumą tarp kainų. Pirmiausiai pasižymėkime Δy_t kaip skirtumą duomenyse, gautų taikant skirtumą tarp kainų.

$$\Delta y_t = 0.122 - 0.942 y_{t-1}.$$

Koeficiento greta y_{t-1} DF statistika lygi -15,12, o tai mažesnė reikšmė nei kritinė DF reikšmė, kai reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0.01$. Todėl skirtumo tarp eilučių reikšmių transformacijos panaudojimas paprastai nestacionarias laiko eilutes paverčia stacionariomis. Apskaičiuokime DF statitiką keliolikai akcijų kainų ir įsitinkime, kad kainos šiuo atveju nėra stacionarios. Taip pat patikrinkime hipotezę, kad šių akcijų pelnai yra stacionarūs procesai. Jei $y_t \sim I(0)$, ji yra integruota nuline eile, t.y. laiko eilutė yra stacionari.

Lentelė1.5.2

Akcijų DF kriterijaus reikšmės

Akcijos	Ln kainos: H_0 : I(1) prieš H_1 : I(0)	Pelnai: H_0 : I(1) prieš H_1 : I(0)
Alita	-0,295	-33,828
Apranga	-1,827	-31,837
Dvarčionių keramika	**-2,704**	-32,771
Klaipėdos baldai	-2,376	-34,874
Lietuvos dujos	-1,046	-34,584
Lietuvos jūrų laivininkystė	-0,688	-39,528
Panevėžio statybos trestas	0,315	-26,994

Rytų skirstomieji tinklai	-1,100	-37,900
Šiaulių bankas	-0,965	-35,255
Žemaitijos pienas	-1,556	-33,988

Kaip matome, visų akcijų pelnai yra ženkliai stacionarūs ~ I(0), ką patvirtina DF statistikos reikšmės, ženkliai neigiamesnės nei kritinės reikšmės, o akcijų logaritminės (ln) kainos yra nestacionarios, tiek $\alpha = 0.05$, tiek $\alpha = 0.01$ atveju, tačiau Dvarčionių keramikos logaritminės (ln) akcijos kainos DF statistikos reikšmė arti kritinės -2.704 reikšmės, kai $\alpha = 0.05$. Pažvelgę į šios akcijos grafiką, išvystame panašumų į stacionarų procesą:

1.5.6 pav. Dvarčionių keramikos akcijos kaina

Jei akcijų kainos nėra stacionarios, tai dar nereiškia, kad jos yra pirmos eilės integruotos laiko eilutės. Jos gali būti ir aukštesnės eilės integruotos. Norint įsitikinti, kad kainos ~ I(1), tikriname kiek kitokią hipotezę nei DF kriterijaus aprašyme:

$H_0 : \Delta y_t \sim I(1)$ ir $H_1 : \Delta y_t \sim I(0)$ arba tai ekvivalentu:

$H_0 : y_t \sim I(2)$ ir $H_1 : y_t \sim I(1)$.

Šiuo atveju atitinkamai naudojame ir kitą DF regresijos formą:

$\Delta y_t = c + (\alpha - 1) y_{t-1} + \varepsilon_t$.

Nors regresijos lygtis ir pasikeitė, tačiau integruotumui patikrinti naudojamės ta pačia DF statistika. Patikrinkime aprašytas hipotezes keletui akcijų kainų:

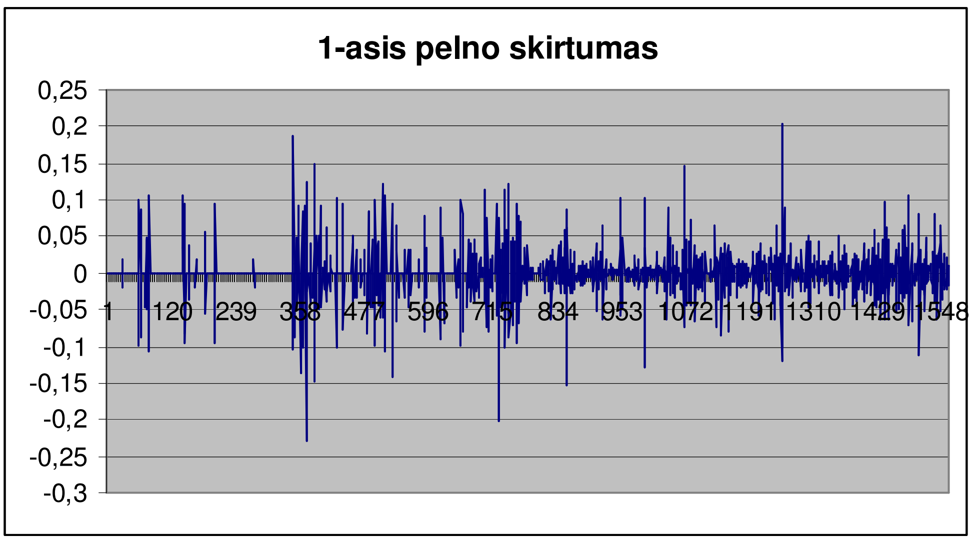
Lentelė 1.5.3

DF kriterijaus reišmės akcijų integruotumo eilei tikrinti

Akcija	$H_0 : \ln y_t \sim I(2)$ prieš $H_1 : \ln y_t \sim I(1)$
Alita	-13,82
Klaipėdos baldai	-17,23
Lietuvos dujos	-12,69
Lietuvos jūrų laivininkystė	-15,78
Šaulių bankas	-16,35

Taigi lentelėje tiriamos kainos yra pirmos eilės integruoti procesai, t.y. šių akcijų kainos ~I(1), nes hipotezę, kad $H_0 : \ln y_t \sim I(2)$, atmetame.

Taikant skirtumo operatorių dažniausiai išsprendžiame nestacionarumo problemą. Panagrinėkime atvejį, kai taikysime keletą kartų skirtumo operatorių duomenims, kurie jau yra stacionarūs. Nagrinėsime Panevėžio statybos tresto akcijos kainos duomenis 2002.01.02-2008.05.20 laikotarpyje. Skirtumo operatorių panaudosime šios akcijos pelnui, t.y. stacionariam procesui. Buvo gautas toks pirmas pelnų skirtumas:

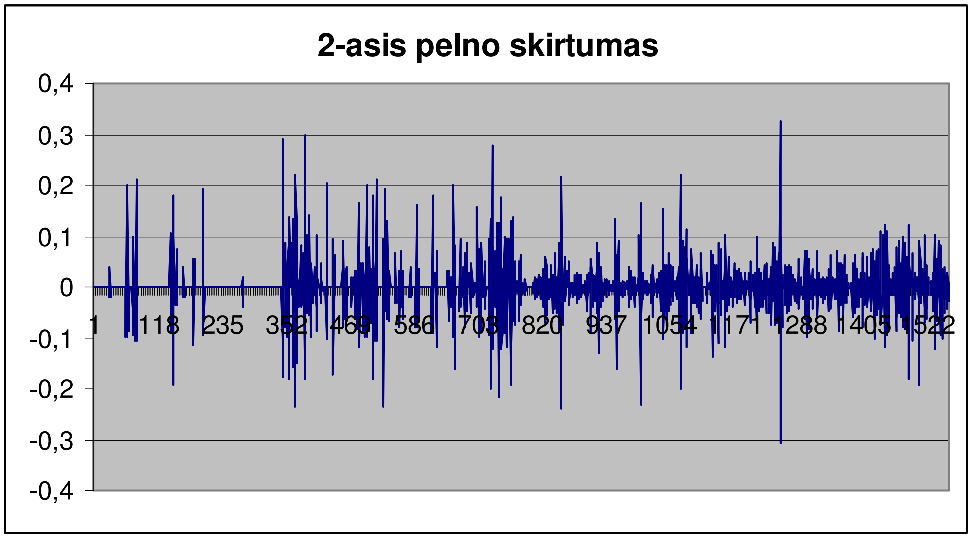


1.5.7 pav. Panevėžio statybos tresto akcijos pelno pirmasis skirtumas

Gauta DF regresijos lygtis:

$$\Delta y_t = -1.426 \cdot y_{t-1},$$

čia y_t pelno laiko eilutė. Gauta DF statistika lygi -62,133. Dabar nagrinėkime antrą pelno skirtumą:

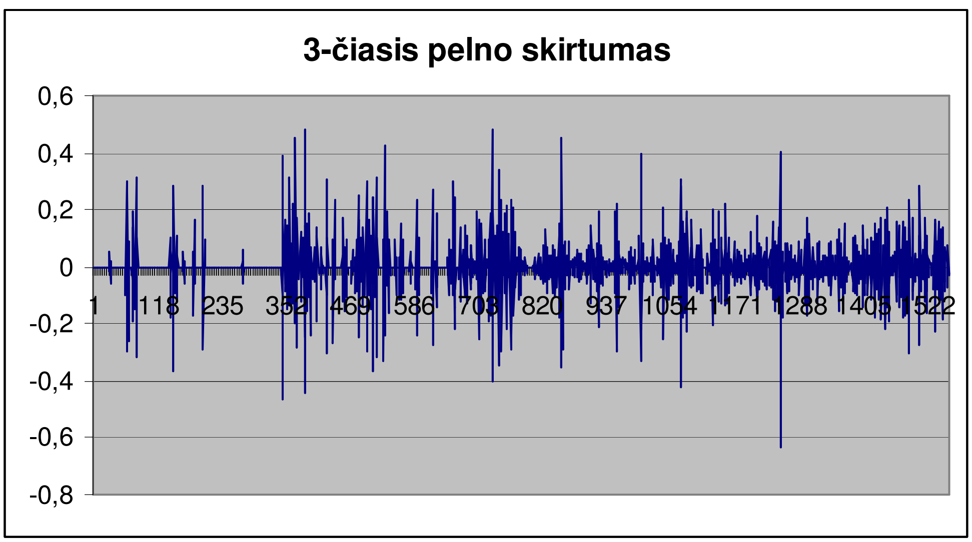


1.5.8 pav. Panevėžio statybos tresto akcijos pelno antrasis skirtumas

Pastebėtina, kad šis procesas svyruoja didesniame diapazone, t.y. turi didesnę dispersiją. Gauta DF regresija lygtis:

$$\Delta^2 y_t = -1.625 \cdot \Delta y_{t-1},$$

O gauta DF statistika lygi -82,187. Tai parodo, kad antrasis pelno skirtumas yra stacionaresnis DF prasme nei pirmojo skirtumo procesas. Panagrinėkime trečią pelno skirtumą:

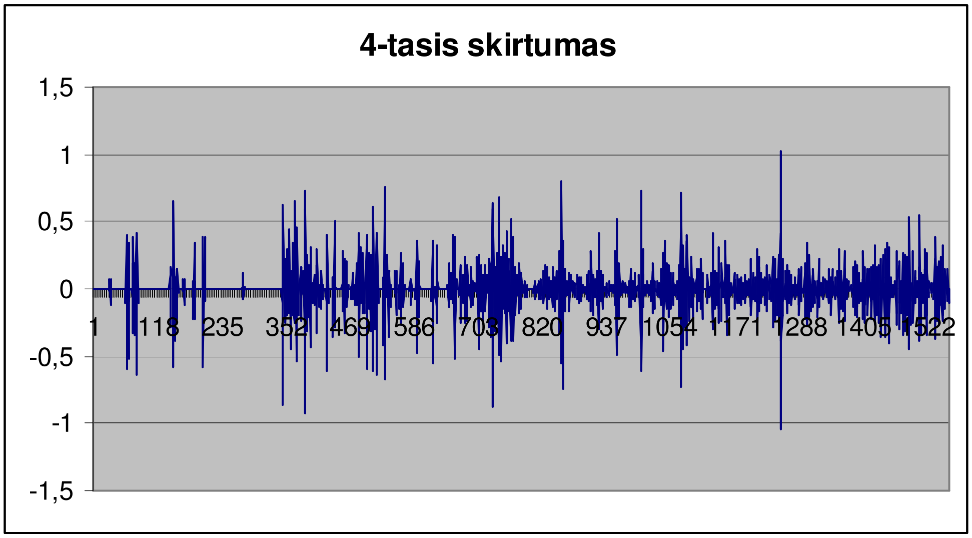


1.5.9 pav. Panevėžio statybos tresto akcijos pelno trečiasis skirtumas

Šio proceso gauta DF regresijos lygtis yra:

$$\Delta^3 y_t = -1.726 \cdot \Delta^2 y_{t-1},$$

Šio proceso gauta DF statistika lygi -99,102. Kaip matyti, proceso svyravimo diapazonas vėl kiek išaugo. Ir galiausiai panagrinėkime ketvirtą pelno skirtumo procesą:



1.5.10 pav. Panevėžio statybos tresto akcijos pelno ketvirtasis skirtumas

Jo gauta DF regresijos lygtis yra:

$\Delta^4 y_t = -1.787 \cdot \Delta^3 y_{t-1}$,

o gauta DF statistka lygi -114,266. Pagal šią statistiką ketvirto skirtumo porcesas DF prasme yra stacionariausias, tačiau matyti, kad dispersija nuolat didėja, tai natūralu, taikant iš eilės skirtumo operatorių, atstumas tarp proceso reikšmių tik didėja. Taigi nepatartina jau stacionariems duomenims taikyti skirtumo operatorių neapgalvotai daug- nes iš esmės jis stacionarumo jau nekeičia.

DF kriterijus yra gana paprastas, dažniausiai yra naudojamas apjungtas Diceky-Fuller kriterijus (ADF). ADF kriterijuje yra įtraukti nagrinėjamos laiko eilutės žingsnių į praeitį kintamieji. Šie įtraukiami kintamieji turėtų leisti pašalinti autokoreliaciją regresijos paklaidose, tada MKM metodu galime gauti nepaslinktą kintamojo y_{t-1} koeficiento įvertį. Taikomos kiek kitokios kritinės reišmės ADF kriterijui, kadangi kritinės reikšmės priklauso nuo įtrauktų atsilikimo kintamųjų skaičiaus. Asimptotiškai ADF kritinės reikšmės konverguoja:

Lentelė 1.5.4

ADF kriterijaus kritinės reikšmės

Modelio tipas	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.1$
Kai nėra trendo	-3,481	-2,884	-2,574
Kai yra trendas	-4,011	-3,439	-3,139

Tačiau pagrindiniai principai išlieka kaip ir DF kriterijuje. Tikrinamos hipotezės:

$H_0 : y_t \sim I(1)$ ir $H_1 : y_t \sim I(0)$ arba tai ekvivalentu

$H_0 : \beta = 0$ ir $H_1 : \beta < 0$.

Yra nagrinėjamas toks modelis:

$$\Delta y_t = c + \beta y_{t-1} + \alpha_1 \Delta y_{t-1} + ... + \alpha_m \Delta y_{t-m} + \varepsilon_t . \tag{5.2}$$

O ADF(m) statistika apskaičiuojama analogiškai kaip ir DF statistika. Modelis (5.2) yra ekvivalentus AR(p) modeliui:

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + ... + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t , \tag{5.3}$$

kai $m = p + 1$.

Tačiau (5.2) patogesnis tikrinti stacionarumui, kadangi šioje formulėje tiek kairėje, tiek dešinėje pusėje yra stacionarūs dydžiai Δy, kai $\beta = 0$. Šiuo atveju sąryšis tiesioginis tarp (5.2) ir (5.3) $\beta = \phi_1 + ... + \phi_p - 1$. Kai $-2 < \beta < 0$, (5.2) modelis yra stacionarus.

Aptarkime bendrą modelį, taikomą ADF kriterijui:

$$\Delta y_t = c + \beta y_{t-1} + \alpha_1 \Delta y_{t-1} + ... + \alpha_m \Delta y_{t-p+1} + \delta \cdot t + \varepsilon_t . \tag{5.4}$$

Šiame modelyje, išvengiant multikolineriumo problemos, naudojami Δy kintamieji (atimant nestacionarios eilutės tampa stacionariomis) , išskyrus esminį y_{t-1} kintamąjį, kuriuo ir pagrįstas stacionarumo tikrinimas. Į šį modelį įtrauktas ir deterministinis laiko trendas $\delta \cdot t$. Aptarkime kaip nustatyti optimalų m skaičių kinatmųjų $\Delta y_{t-1}, \Delta y_{t-2}, ...$ su žingsniais į praeitį:

- Pirmiausia parenkamas protingai didžiausias kintamųjų su žingniu į praeitį $m_{\max}$ skaičius.
- Suskaičiuojami MKM metodu parametrai modelio $AR(m_{\max})$ su determinuotu trendu: $\Delta y_t = c + \beta y_{t-1} + \alpha_1 \Delta y_{t-1} + ... + \alpha_{m\max} \Delta y_{t-m\max} + \delta \cdot t + \varepsilon_t ..$ Jeigu koeficiento $\alpha_{m\max}$ įverčio t kriterijaus statistikos reikšmės modulis mažesnis už 1,962, kai fiksuotas $\alpha = 0.05$ reikšmingumo lygmuo, tuomet pašaliname $\Delta y_{t-m\max}$ kintamąjį.
- Skaičiuojame $AR(m_{\max} - 1)$ modelį: $\Delta y_t = c + \beta y_{t-1} + \alpha_1 \Delta y_{t-1} + ... + \alpha_{m\max-1} \Delta y_{t-m\max+1} + \delta \cdot t + \varepsilon_t$. Tikriname analogiškai kaip ir prieš tai buvusiame punkte $\alpha_{m\max-1}$ reikšmingumą. Jei šis koeficientas reikšmingai nesiskiria nuo nulio, pašaliname $\Delta y_{t-p\max-1}$ kintamąjį ir perskaičiuojame modelį iš naujo.
- Pažingsniui pašaliname ir perskaičiuojame AR modelį, kol jo kintamasis su didžiausiu žingsniu į praeitį tampa statistiškai reikšmingas su reikšmingumo lygmeniu α. Dažniausiai reikšmingumo lygmuo pasirenkamas 0,01, 0,05 arba 0,1. Gali nutikti ir taip, kad visi koeficientai bus nereikšmingi, tuomet priklausomais kintamasis nepriklauso nuo savo praeities.

- Kai nustatoma modelioADF(m) regresijos lygties eilė m, tikrinamas δ tiesinio trendo koeficiento reikšmingumas. Taip nustatoma, ar tiriamam modeliui galima pritaikyti trendą.

Iš tikro nėra skirtumo, kas tikrinama pirmiau ar tiesinio trendo reikšmingumas, ar atsilikimų laike kintamųjų reikšmingumas. Kai pilnai nustatyta ADF regresijos lygties struktūra, atliekama DF procedūra lygties nariui $\beta \cdot y_{t-1}$.

Nagrinėkime Panevėžio statybos tresto logartiminės (ln) akcijos kainą 2002.01.02 -2007.12.28 laikotarpiu. Pirmiausiai apskaičiuokime ADF(3) regresijos lygtį:

$$\Delta \ln y_t = \hat{c} + \hat{\beta} \cdot y_{t-1} + \hat{\alpha}_1 \cdot \Delta \ln y_{t-1} + \hat{\alpha}_2 \cdot \Delta \ln y_{t-2} + \hat{\alpha}_3 \cdot \Delta \ln y_{t-3}$$

Lentelė 1.5.5

Panevėžio statybos tresto akcijos kainos ADF(3) regresijos lygtis

	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$
Įvertis	-2.88568E-4	0.2054	0.03841	0.06513
t statistika	-0.646	7.867	1.442	2.495

Šiame modelyje $\hat{c} = 1.92865\text{E-}3$. Kaip matyti ADF(3) = -0.646, o visi kintamieji su atsilikimu laike yra statistiškai reikšmingi, išskyrus $\hat{\alpha}_2$, kadangi 1,442<1,962. Tačiau pašalinkime $\Delta \ln y_{t-3}$ ir perskaičiuokime modelį:

$$\Delta \ln y_t = \hat{c} + \hat{\beta} \cdot y_{t-1} + \hat{\alpha}_1 \cdot \Delta \ln y_{t-1} + \hat{\alpha}_2 \cdot \Delta \ln y_{t-2}.$$

Lentelė 1.5.6

Panevėžio statybos tresto akcijos kainos ADF(2) regresijos lygtis

	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$
Įvertis	-2.82028E-4	0.20877	0.05201
t statistika	-0.63	7.993	1.991

Šiame modelyje $\hat{c} = 2.03006 \cdot 10^{-3}$. Kaip matyti, $\hat{\alpha}_2$ koeficientas jau statistiškai reikšmingas, o ADF(2)=-0.63 statistika kiek sumažėjo. Pabandykime pašalinti dabar $\Delta \ln y_{t-2}$ kintamąjį ir gauname naują modelį:

$$\Delta \ln y_t = \hat{c} + \hat{\beta} \cdot y_{t-1} + \hat{\alpha}_1 \cdot \Delta \ln y_{t-1}.$$

Lentelė 1.5.7

Panevėžio statybos tresto akcijos kainos ADF(1) regresijos lygtis

	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}_1$
Įvertis	-2.77515E-4	0.22022
t statistika	-0.62	8.635

Šiame modelyje $\hat{c} = 2.11686\text{E-3}$. Kaip matyti ADF(1) = -0.62 ir vėl sumažėjo.

Kai pašaliname $\Delta \ln y_{t-1}$, gauname DF kriterijaus regresijos lygtį:

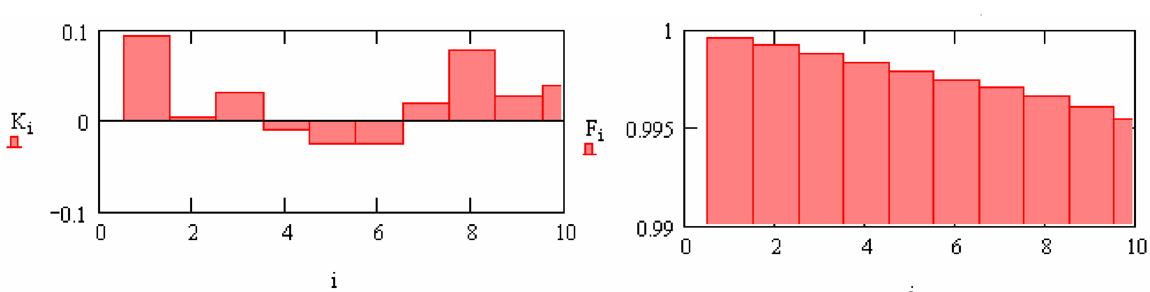
$\Delta \ln y_t = \hat{c} + \hat{\beta} \cdot y_{t-1}$,

čia $\hat{c} = 2.61152\text{E-3}$, $\hat{\beta} = -2.72918\text{E-4}$ ir ADF = -0.595. Taigi mažindami ADF(3) statistiškai reikšmingus kitamuosius su atsilikimu laike, sumažinome ADF reikšmę nuo -0.646 iki -0.595. Jei šalintume statistiškai nereikšmingus kintamuosius, ADF reikšmė turėtų nesikeisti ženkliai.

1.6. KOINTEGRACIJOS SĄVOKA IR APIBRĖŽIMAS

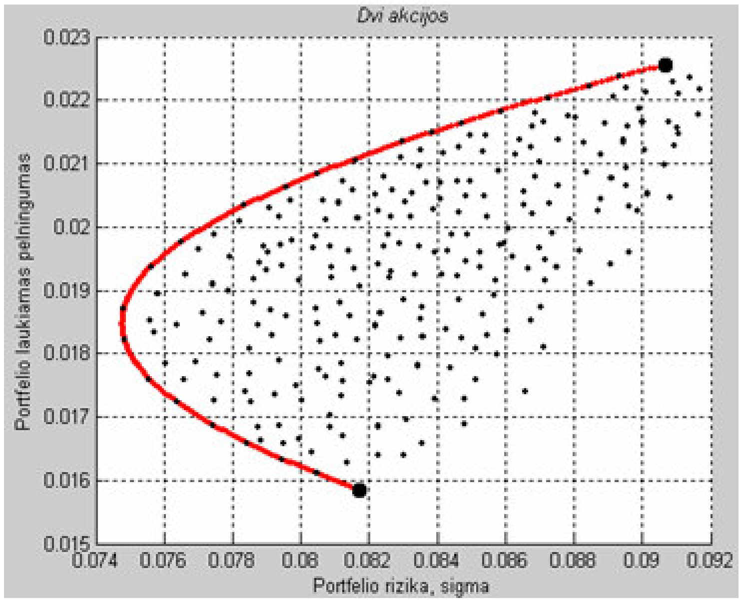
Kointegracija remiasi bendra kitimo tendencija ne aktyvų pelnuose, tačiau jų kainose. Jei skirtumai tarp skirtingų kainų svyruoja apie pastovų vidurkį, t.y. skirtumai per daug nenutola, o kaskart grįžta prie savo vidurkio, („mean – reverting“), tuomet kainos yra susietos tarpusavyje ilgajame laikotarpyje („long term“) bendru stochastiniu trendu, ir sakome, kad kainos yra „kointegruotos“. Kointegracija yra dviejų žingsnių procesas: pirmiausiai nustatomi tam tikra ilgojo laikotarpio („long run“) pusiausvyros ryšiai tarp aktyvo kainų, ir tuomet dinaminis pelnų koreliacijos modelis yra apskaičiuojamas.

Ryšys tarp portfelio pelnų vidurkio ir dispersijos yra klasikinis portfelio teorijos pagrindas. Tačiau pelnai yra „trumpos atminties“, ir investiciniai sprendimai, pagrįsti tik pelnų charakteristikomis, negali atspindėti ilgojo laikotarpio kointegracijos ryšio tarp kainų. Žemiau pateiktos pelno ir kainos koreliogramos 6.1 pav. Kaip matyti, kainos turi „ilgalaikę atmintį“.



1.6.1 pav. Akcijos kainos ir pelno koreliacijos palyginimas

Standartiniame (klasikiniame) pelnų-rizikos modelyje kainų skirtumai apskaičiuojami dar iki prasidedant analizei, o kainų skirtumų skaičiavimai nebeleidžia ieškoti ilgojo laikotarpio kainų trendo. Esminis kointegracijos tikslas yra rasti tam tikrą bendrą stochastinį trendą kainose ir panaudoti jį pelnų koreliacijos dinaminei analizei. Koreliacija remiasi tik pelnų duomenimis, o kointegracinė analizė – neapdorotais kainų duomenimis, taip pat ir pelnais. Žemiau pateiktas efektyvus dviejų akcijų portfelio kraštas – 6.2 pav. Šiam portfeliui sukurti remtasi tik pelnų vidurkio ir dispersijos analize.



1.6.2 pav. Efektyvus dviejų akcijų portfelio kraštas

Apibrėžkime kointegraciją. Tarkime, turime stochastinį p eilės integruotą procesą ~ I(p), t.y. kuriam reikia pritaikyti p kartų skirtumo operatorių, kad procesas taptų stacionarus. Laiko eilutės x_t ir y_t yra vadinamos kointegruotos eile CI(d,p), jei abi eilutės x_t ir y_t yra integruotos d eile, ir egzistuoja tokia reikšmė α, kad $y_t - \alpha \cdot x_t \sim I(d-p)$, t.y. šis tiesinis darinys yra d-p eilės integruotas.

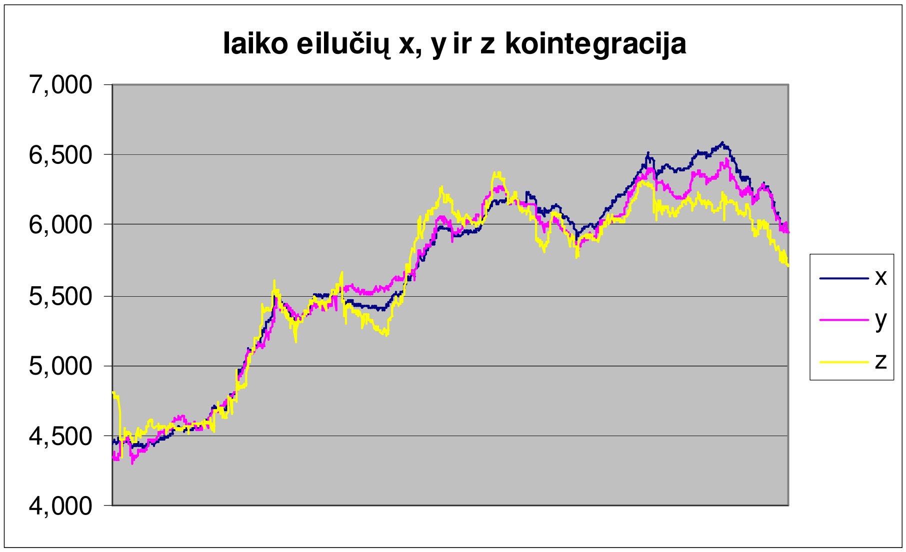
Gali egzistuoti ir netiesinis nagrinėjamų laiko eilučių darinys, kuris yra integruotas d-p eile, tuomet turėtume netiesinę kointegraciją, tačiau jos darbe nenagrinėsime. Šiame darbe nagrinėsime tik eilės CI(1,1) kointegraciją. Susipažinkime su daugialypės kointegracijos apibrėžimu.

I(1) kintamųjų vekrorius y_t yra vadinamas kointegruotas , jei egzistuoja toks vektorius β_i, kad $\beta_i^T \cdot y_t$ yra „stacionarus + trendas“ procesas. Jeigu egzistuoja r tiesinių nepriklausomų vektorių β_i, čia $i = 1,2,...,r$, tai sakoma, kad y_t kointegruotas su kointegracijos rangu r. Matrica $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r)$ vadinama kointegracijos matrica.

Paminėkime, kad $\beta^T \cdot y_t$ yra r -matis „stacionarus + trendas“ laiko eilučių kintamųjų vektorius.

Kiek paprasčiau galime apibrėžti kointegraciją. Tarkim turime dvi eilutes x ir y, jos bus kointegruotos, jei $x, y \sim I(1)$, kai egzistuoja toks α, kad $y - \alpha \cdot x \sim I(0)$.

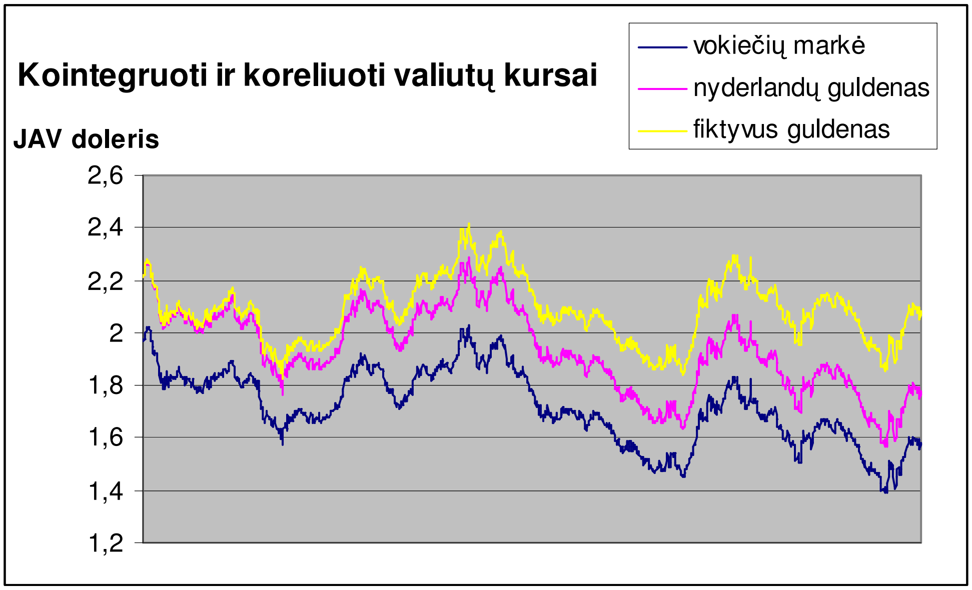
Jei turime tris ar daugiau eilutes, kurios kointegruotos, pavyzdžiui, $z - \beta \cdot y - \alpha \cdot x \sim I(0)$, tuomet tai jau daugialypė kointegracija. Žemiau pateiktas trijų eilučių kointegracijos pavyzdys 6.3 pav.



1.6.3 pav. Kointegracija tarp trijų laiko eilučių

Kointegracija ir koreliacija yra susijusios, tačiau didelė koreliacija nereiškia didelės kointegracijos ir atvirkščiai. Koreliacinė analizė tinka trumpo laikotarpio analizei, kai kointegracija – ilgo laikotarpio analizei.

Pavyzdžiui, panagrinėkime vokiškos markės – dolerio ir nyderlandų guldeno – dolerio keitimo kursus 1986-1992 laikotarpiu. Šių kursų pelningumai yra labai koreliuoti tarpusavyje ir lygus $\rho = 0.9642$. Tačiau panašu, kad ir patys valiutų kursai laike juda išvien. Skirtumas tarp ši kursų bėgant laikui išlieka stabilus, t.y. faktiškai laikosi toks pats - 6.4 pav.. Paprastai kointegracija nebūdinga tarp valiutų kursų. Sukurkime fiktyvų guldeną, t.y. prie nyderlandų guldeno kasdien pridėkime mažos dispersijos dydį, t.y. prisumuokime tiesinį mažą trendą. Taigi ši nauja valiuta jau nebus kointegruota tiek su vokiečių marke, tiek su nyderlandų guldenu, kadangi su laiku tolsta nuo jų, o kointegracija pagrįsta bendru trendu. Tačiau tarp fiktyvaus guldeno ir markės koreliacijos koeficientas išlieka aukštas $\rho = 0.9620$. Taigi kointegruotos laiko eilutės gali būti labai koreliuotos ir ne, ir atvirkščiai.



1.6.4 pav. Kointegracija ir koreliacija

Kai akcijų kainų laiko eilutės yra atsitiktinės, po tam tikro laikotarpio, kainų reikšmės gali būti praktiškai bet kokios dėl begalinės dispersijos, išskyrus, žinoma, neigiamas reikšmes. Mažai prasmės yra modeliuoti ir prognozuoti atskiras kainas, kadangi geriausia prognozė – šiandieninė kaina pridėta su nežinomu atsitiktiniu dydžiu. Kai kelios ar daugiau kainų yra kointegruotos nagrinėjamame modelyje, tuomet jis atskleižia ilgojo laikotarpio kainų pusiausvyrą sistemoje. Pavyzdžiui, jei skirtumas tarp dviejų akcijų yra svyruojantis apie savo pastovų vidurkį, tuomet po kelių metų, kur bus viena kainos laiko eilutė, ten pat bus ir kita eilutė.

Kointegruotos aktyvų logaritminės kainos taip pat turi bendrą stochastinį trendą.. Jos yra susietos ilguoju periodu, nors jos gali išsiskirti trumpajame laikotarpyje dėl to, kad kainų skirtumas ar kita tiesinė kombinacija svyruoja apie savo pastovų vidurkį.

Tiesinė $I(1)$ kintamųjų kombinacija, kuri yra stacionari, žymima z. Vidurkis E(z) išreiškia ilgojo laikotarpio pusiausvyros ryšį tarp laiko eilučių x ir y. Kointegracijos vektorius yra sudarytas iš svorių vektoriuje z. Taigi dviejų $I(1)$ kintamųju x ir y atveju, kai $x - \alpha \cdot y \sim I(0)$, kointegracijos vektorius yra $(1, -\alpha)$. Šis vektorius gaunamas MKM metodu išsprendus šią regresijos lygtį: $y_t = \alpha \cdot x_t$. Kai tik dvi laiko eilutės yra kointegruotos, tegali būti vienas kointegracijos vektorius, kadangi, jei būtų du vektoriai, tos laiko eilutės turėtų būti stacionarios. Kointegracija egzistuoja tarp n laiko eilučių, jeigu egzistuoja bent viena tiesinė kombinacija iš n $I(1)$ eilučių, kuri yra stacionari. Kuo daugiau tokių tiesinių kombinacijų egzistuoja, tuo daugiau ir vektorių galima sudaryti, tuo didesnė kointegracija procese.

Svarbu susipažinti su kointegracijos patikrinimo metodika**.** Kointegravimo egzistavimo patikrinimas dažnai pagrįstas dviejų žingsnių schema. Pirmuoju apskaičiuojama $I(1)$ eilučių regresija mažiausių kvadratų metodu, o antruoju žingsniu ADF kriterijumi tikrinama hipotezė apie regresijos liekanų stacionarumą. Jei liekanos gautos yra stacionarios, tuomet egzistuoja kointegracija tarp tiriamų laiko eilučių. Kai turime tik du $I(1)$ kintamuosius x ir y, Engle-Granger regresija užrašoma taip:

$$x_t = c + \alpha y_t + \varepsilon_t$$

x ir y bus kointegruoti tarpusavyje tada ir tik tada, kai ε_t yra stacionari, tuomet kointegracijos vektorius $(1,-\alpha)$, ir ilgojo laikotarpio pusiausvyros ryšys tarp šių kintamųjų užrašomas: $x = c + \alpha y$.

Tikrinama hipotezės yra:

$H_0 : x_t - c - \alpha \cdot y_t = \varepsilon_t \sim I(1)$ ir $H_1 : x_t - c - \alpha \cdot y_t = \varepsilon_t \sim I(0)$

Arba tai ekvivalentu:

H_0 :regresijos lygties liekanos nestacionarios ir H_1 : regresijos lygties liekanos stacionarios.

Hipotezės tikrinti nerekomenduojama, jei regresijos lygties laiko eilutėse yra pasirinkta per trumpo laikotarpio duomenys. Duomenys turi būti parinkti iš gan ilgo laikotarpio, norint „pastebėti“ bendrą stochastinį trendą.

Bendru atveju mažiausių kvadratų metodu regresija tarp n skirtingų $I(1)$ kintamųjų įvertins tiesinę tų kintamųjų kombinaciją, kuri bus stacionari. Kointegracijos vektorius yra $(1,-\beta_1,...,-\beta_{n-1})$, kur $\beta_1,...,\beta_{n-1}$ koeficientai šalia $n-1$ $I(1)$ kintamųjų, kurie yra aiškinamieji kintamieji, o likę $I(1)$ kintamieji yra priklausomi kintamieji Engle-Granger regresijoje. Vektorius z yra apibūdinamas liekanomis iš šios regresijos. Kai $n = 2$, nesvarbu, kuris kintamasis pasirenkamas kaip nepriklausomas. Tačiau, kai laiko eilučių daugiau nei dvi, pasirenkant skirtingus nepriklausomus kintamuosius, gaunami skirtingi kointegracijos vektoriai. Todėl Engle-Granger metodas gali įgyti reikšmingų paklaidų, kai kintamųjų daugiau nei du.

Dėl šios priežasties kointegravimui patikrinti naudojamas dažnai Johanseno metodas, kuriuo gaunamos mažesnės paklaidos, kai kintamųjų daugiau nei du. Johanseno patikrinimas paremtas stochastinės matricos tikrinių reikšmių apskaičiavimu. Šiuo metodu siekiama rasti tiesinę kombinaciją, kuri daugiausiai yra stacionari, kai Engle – Granger metodas, pagrįstas mažiausių kvadratų metodu, siekia rasti tiesinę kombinaciją su mažiausia dispersija. Engel –Grangerio metode naudojamos kitos ADF kriterijaus kritinės reikšmės, priklausančios nuo kointegruotų regresorių skaičiaus:

Lentelė 1.6.1

Engle-Grangerio regresijos lygties ADF kritinės reikšmės

Kointegruotų kintamųjų sk.	10% reikšmingumo lygmuo	5% reikšmingumo lygmuo	1% reikšmingumo lygmuo
1	-3.12	-3.41	-3.96
2	-3.52	-3.80	-4.36
3	-3.84	-4.16	-4.73
4	-4.20	-4.49	-5.07

Kai priklausomų kintamųjų daugiau nei du, galima kalbėti apie daugiamatį AR(p) modelį – VAR(p) („vector autoregression“). Pavyzdžiui, dvimatis VAR(1) modelis atrodo taip:

$$y_{1,t} = \alpha_{10} + \alpha_{11} y_{1,t-1} + \alpha_{12} y_{2,t-1} + \varepsilon_{1,t},$$

$$y_{2,t} = \alpha_{20} + \alpha_{21} y_{1,t-1} + \alpha_{22} y_{2,t-1} + \varepsilon_{2,t};$$

Matricinėje formoje tai užrašoma taip:

$$y_t = \alpha_0 + A y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

čia $y_t = (y_{1,t}, y_{2,t})^T$, $\alpha_0 = (\alpha_{10}, \alpha_{20})^T$, $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1,t}, \varepsilon_{2,t})^T$ ir $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$.

Kai yra n-matis VAR(1) modelis, $y_t, \alpha_0, \varepsilon_t$ yra $n \times 1$ vektoriai, o A yra $n \times n$ koeficientų matrica. Bendras VAR(p) modelis matricinėje formoje užrašomas taip:

$$y_t = \alpha_0 + A_1 y_{t-1} + \ldots + A_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Johanseno kriterijuje tikrinama, ar eilutės turi vienetines šaknis VAR modelyje. Šiame kriterijuje VAR(1) atveju apskaičiuojama tokia regresijos lygtis matricinėje formoje:

$$\Delta y_t = \alpha_0 + (A - I) y_{t-1} + \varepsilon_t \ . \qquad (6.1)$$

Kai DF kriterijuje buvo tikrinama, ar koeficientas šalia kintamojo su žingsniu į praeitį lygus nuliui, šiame kriterijuje daroma analogiškai. Tikrinama hipotezė, ar yra bendras stochastinis trendas laiko eilutėse. Jei (6.1) modelyje kiekvienas kintamasis y vektoriuje yra integruotas pirmos eilės ~I(1), tada kairėje lygybės pusėje kiekviena lygtis turės stacionarų kintamąjį. Paklaidos ε yra stacionarios, todėl kiekvienas narys $(A - I) y_{t-1}$ dalyje turi būti stacionarus, tam kad lygybė būtų pusiausvyra stacionarumo prasme. Jei matricos $A - I$ rangas yra nulis, tuomet ji yra ekvivalenti nulinei matricai ir todėl nenusako y vektoriaus kintamųjų tarpusavio ryšių.. Jei $A - I$ matricos rangas $r > 0$, tuomet yra r nepriklausomų tiesinių ryšių tarp y vekotriaus kintamųjų, kurie turi būti stacionarūs. Dėl to y vektoriaus kintamieji, kurie ~ I(1), turės bendrą stochastinį trendą, t.y. jie bus kointegruoti, jei rangas r nelygus nuliui. Kointegracijos vektorių skaičius lygus matricos A-I rangui. Johanseno kriterijus pagrįstas nenulinių tikrinių matricos A-I modelyje (6.1) reikšmių radimu, nes rangas ir yra lygus nenulinių tikrinių reikšmių skaičiui.

Kaip ir ADF kriterijuje Johanseno kriterijuje (6.1) modelis gali būti išplėstas, įtraukiant daugiau vektorių su kintamaisiais su didesniais žingsniais į praeitį:

$$\Delta y_t = \alpha_0 + (A_1 - I)y_{t-1} + (A_1 + A_2 - I)\Delta y_{t-2} + \ldots + (A_1 + A_2 + \ldots + A_{p-1} - I)\Delta y_{t-p-1} +$$

$$(A_1 + A_2 + \ldots + A_p - I)y_{t-p} + \varepsilon_t .$$

Ir Johanseno metode bus tikrinama hipotezė apie nenulinių tikrinių reikšmių skaičių matricoje:

$$\Pi = A_1 + A_2 + \ldots + A_p - I .$$

Johansenas ir Juseliusas (1990) rekomendavo naudoti matricos „pėdsako“ kriterijų patikrinti hipotezę apie r nenulinių tikrinių reikšmių skaičių matricoje Π. Hipotezės yra šios:

$H_0 : r \le R$ ir $H_1 : r > R$.

Suformuojama tokia statistika:

$$Tr = -T \sum_{i=R+1}^{n} \ln(1 - \hat{\lambda}_i) , \qquad (6.5)$$

čia T yra imties dydis, n yra kintamųjų skaičius sistemoje ir tikrinės matricos Π reikšmės λ tokios, kad $0 \le \lambda < 1$. Statistikoje (6.5) tikrinių reikšmių įverčiai išdėstomi didėjimo tvarka : $\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > \ldots > \hat{\lambda}_n$. Taigi Tr statistikos reikšmė mažėja, kai didėja R.

Šiame darbe vis dėlto remiamasi Engle-Grangerio kointegracijos tikrinimo kriterijumi dėl kelių priežasčių:

- Įgyvendinti šį kriterijų nėra sudėtinga palyginus su Johanseno kriterijumi.
- Finansų teorijos ir praktikos atžvilgiu Engle-Granger kriterijus, kuriuo randami minimalios dispersijos sprendiniai, dažnai svarbesnis nei Johanseno kriterijus maksimaliam stacionarumui.
- Dažnai iš anksto žinomas priklausomas kintamasis kointegracijos regresijos lygtyje, todėl ne visada svarbu surasti visus įmanomus kointegracijos ryšius, kai keičiamas priklausomas kintamasis.
- Engle-Grangerio sprendiniai yra asimptotiškai nepaslinktieji, o finansų praktikoje nesunkiai prieinami didelės imties duomenys.

Mechanizmas, kuris sieja kointegruotas laiko eilutes kartu yra „priežastingumas“, bet ne ta prasme, kad, jei mes padarytume struktūrinius pakeitimus vienoje iš eilučių, kitos pasikeis taip pat, o ta prasme, kad kritinis taškas vienoje eilutėje įvyksta anksčiau nei kiti kritiniai taškai kitoje eilutėje. Įvedama „paklaidų korekcija“ , dviejų kointegrotų eilučių x ir y atveju turinti pavidalą:

$$\Delta x_t = \alpha_1 + \sum_{i=1}^{m_1} \beta_{1i} \Delta x_{t-i} + \sum_{i=1}^{m_2} \beta_{2i} \Delta y_{t-i} + \gamma_1 z_{t-1} + \varepsilon_{1t},$$

$$\Delta y_t = \alpha_2 + \sum_{i=1}^{m3} \beta_{3i} \Delta x_{t-i} + \sum_{i=1}^{m_2} \beta_{4i} \Delta y_{t-i} + \gamma_2 z_{t-1} + \varepsilon_{2t},$$

čia Δ eilučių skirtumo operatorius, $z = x - \alpha y$ - vadinamasis išėjimo iš pusiausvyros ilguoju laikotarpiu terminas. Pasirinkim $\alpha > 0$. Šis modelis „pataisys paklaidas“, kai koeficientai $\gamma_1 < 0$ ir $\gamma_2 > 0$, kadangi tuomet x tolydžio mažės, o y didės, o z, tarkime, yra didelis ir teigiamas, kai parinkti $\gamma_1 < 0$ ir $\gamma_2 > 0$, z mažės, o kai $\alpha > 0$, tuomet koeficientai turi būti $\gamma_1 < 0$ ir $\gamma_2 < 0$. Koeficientų γ_1 ir γ_2 reikšmės apibūdina greitį pataisos, kuri grąžina sistemą ilgo laikotarpio pusiausvyrą po žymių pokyčių rinkoje. Kai šie koeficientai dideli, pataisa bus greita, todėl z labai stacionarus ir grįžimas į ilgo laikotarpio pusiausvyrą $E(z) = E(x) - \alpha E(y)$ bus spartus. ECM modelis skirtas trumpo laikotarpio analizei, tačiau mus domina ilgojo laikotarpio ryšiai, todėl toliau naudosimės tik kointegracijos ilgojo laikotarpio pusiausvyros nariu z.

2.TIRIAMOJI DALIS

2.1 INDEKSAS IR JO KONSTRAVIMAS

Prieš nagrinėdami kointegracijos ryšių pritaikymą portfeliams konstruoti, aptarkime akcijų biržos indeksą. Vertybinių popierių biržos indeksas yra metodas įvertinti visą akcijų rinką, priemonė, skirta atspindėti bendrą vertybinių popierių kainų lygį bei tų kainų kitimo tendencijas tam tikroje rinkoje arba vertybinių popierių grupėje. Ši priemonė leidžia investuotojams įvertinti VP rinkos būklę. Rinka gali būti Lietuvos įmonių akcijos, Amerikos įmonių akcijos, biotechnologijas vystančių įmonių akcijos, ir pan. Akcijų indeksas apibūdina bendras tam tikros akcijų rinkos ar biržos tendencijas. Skaičiuojant akcijų rinkų indeksus, yra įvertinamos didžiausių toje biržoje prekiaujamų įmonių akcijų kainos. Jei indekso vertė kilo, tai reiškia, kad didžiausių biržos įmonių akcijos brango.

Pavyzdžiui, Baltijos biržų indeksas skaičiuojamas pagal tokią formulę:

$$I_t = \frac{\sum_{i=1}^{n} (q_{i,t} \times p_{i,t})}{\sum_{i=1}^{n} (q_{i,t} \times (p_{i,t-1} - d_{i,t}) \times a_{i,t})} \times I_{t-1}$$

čia I indekso reikšmė, t - skaičiavimo data, q_i akcijų i - skaičius, p_i - akcijų i kaina, n - akcijų skaičius indekse, d_i - akcijų i dividendai, a_i - akcijų i akcijinių įvykių koregavimo koeficientas.

Sukonstruokime savo indeksą, kuris bus tiesiog į jį įeinančių akcijų kainų svorinė suma. Kiekvienai akcijai svorį suteikime pagal akcinį kapitalą. Akcijas pasirinksime iš Vilniaus vertybinių poperių biržos:

Lentelė 2.1.1

Vilniaus vertybinių popierių biržoje prekiaujamos akcijos

Alita	Lietuvos dujos	Sanitas
Anykščių vynas	Lietuvos elektrinė	Snaigė
Apranga	Lietuvos energija	Snoras
Agrowill Group	Lifosa	Snoras
City Service AB	Lietuvos jūrų laivininkystė	Stumbras
Dvarčionių keramika	Limarko laivininkystės kompanija	TEO LT
Grigiškės	Linas	Ūkio bankas
Gubernija	DnB NORD bankas	Utenos trikotažas
Invalda	Pramprojektas	Vilniaus baldai
Klaipėdos baldai	Panevėžio statybos trestas	Vilniaus degtinė
Klaipėdos jūrų krovinių kompanija	Pieno žvaigždės	Vilkyškių pieninė
Klaipėdos nafta	Rytų skirstomieji tinklai	Vilniaus Vingis
Kauno energija	Rokiškio sūris	VST
Kauno tiekimas	Šiaulių bankas	Žemaitijos pienas

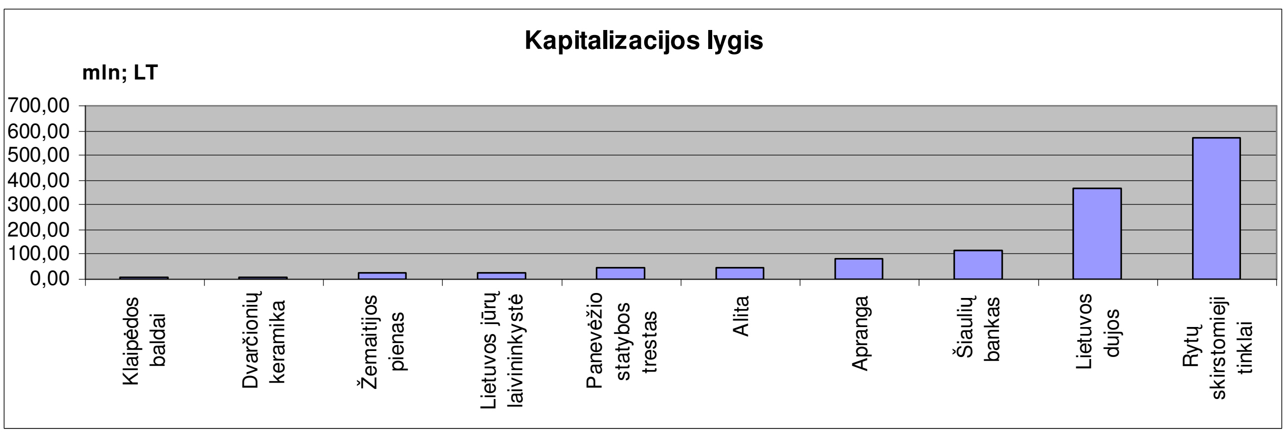
Išsirinkime savo nuožiūra 10 akcijų ir iš jų sukonstruokime indeksą. Indeksas šiuo atveju bus svorinė išsirinktų 10 akcijų kainų suma. Akcijų svorius šiame indekse pasirinksime atsižvelgę į įmonių kapitalizacijos dydį 2008.05.20 dieną. Kapitalizacija - tai suma, kurią investuotojas turėtų sumokėti, norėdamas rinkoje įsigyti bendrovę. Kapitalizacija apskaičiuojama vertybinių popierių skaičių dauginant iš šių vertybinių popierių rinkos kainos. Šalia akcijų pavadinimų užrašykime jų kodinius pavadinimus Xi, čia i =1,…,10

Lentelė 2.1.2

Sukonstruoto indekso akcijų kapitalizacija

Akcija	Kapitalizacija; LT
Alita X1	46369818,45
Apranga X2	84427592,41
Dvarčionių keramika X3	7258113,39
Klaipėdos baldai X4	5203280,38
Lietuvos dujos X5	364082173,04
Lietuvos jūrų laivininkystė X6	26765117,19
Panevėžio statybos trestas X7	44511700,87
Rytų skirstomieji tinklai X8	571867084,25
Šiaulių bankas X9	114394983,57
Žemaitijos pienas X10	22977004,29

Pavaizduokime grafiškai pasirinktų akcijų kapitalizaciją. Suteikiame įmonių akcijoms svorius, atsižvelgę į jų kapitalą akcijose:



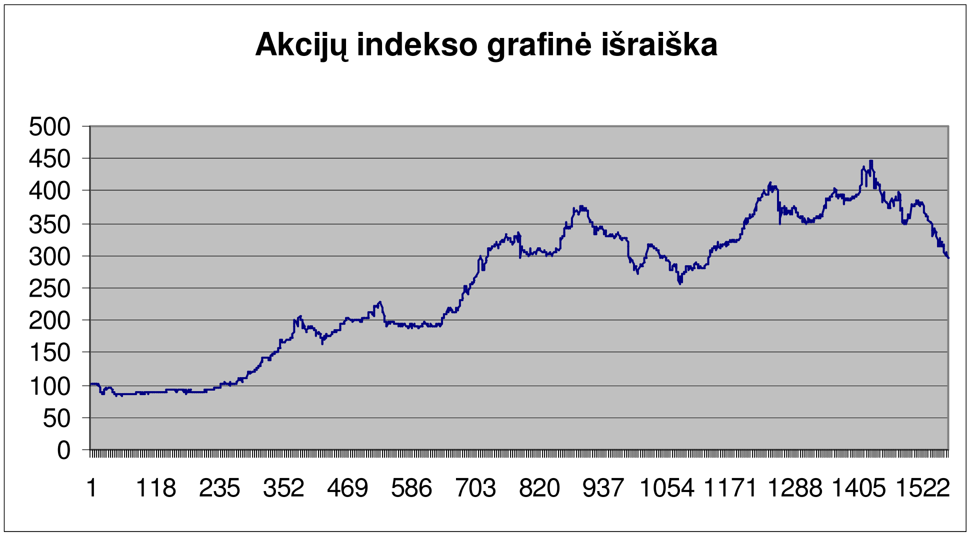
2.1.1 pav. Sukonstruoto indekso akcijų kapitalizacija

Akcijų indeksą sukonstruosime pagal indeksą S&P500, kuris skaičiuojamas taip:

$$S\ \&\ P500 = \frac{p_{1,t}q_{1,t} + p_{2,t}q_{2,t} + \ldots + p_{500,t}q_{500,t}}{p_{1,0}q_{1,0} + p_{2,0}q_{2,0} + \ldots + p_{500,0}q_{500,0}} \cdot 10$$

čia $p_{i,t}$ ir $q_{i,t}$, $i = 1,2,\ldots,500$ yra atitinkamai akcijos kaina ir išleistų i-tos rūšies kiekis rinkoje t-uoju momentu,o $p_{i,0}$ ir $q_{i,0}$ yra laiko momentu, kai pradėtas skaičiuoti indeksas, akcijos kaina ir jos kiekis rinkoje. Mūsų modelyje mes laikysime, kad akcijų skaičius rinkoje nesikeitė.

Pasinaudoję akcijų kainų duomenimis 2002.01.02 – 2008.05.20 laikotarpiu, gauname sukonstruotą indeksą:



2.1.2 pav. Sukonstruotas indeksas

2.2. PORTFELIO KONSTRAVIMAS

Mūsų tikslas sukonstruoti portfelį iš akcijų tokį, kurio vertė ilgu laikotarpiu sektų tos vertybinių popierių biržos, iš kurios akcijų ir sudarytas portfelis, indeksu. Tam panaudosime kointegracijos ryšį. Kointegracija leidžia paskirstyti svorius taip, kad paklaidos tarp sukonstruoto ir sekamo indekso būtų svyruojančios apie savo pastovų vidurkį. Kai portfelio ir indekso skirtumo paklaidos yra stacionarios, tuomet portfelis negali per daug nutolti nuo indekso, kadangi paklaidos svyruoja apie savo vidurkį. Taigi, norime sukurti tokį protfelį, kurio akcijų tiesinis darinys būtų kointegruotas su tam tikros biržos indeksu, o konkrečiu atveju su mūsų sukonstruotu indeksu.

Portfelio, atkartojančio indeksą, konstravimas pagrįstas sudarant kointegracijos tiesinės regresijos lygtį, kurioje priklausomas kintamasis yra indekso paprastai logaritminė reikšmė, o regresoriai yra sekančio indeksą portfelio logaritminės kainos. Šios regresijos lygties paklaidos ir bus skirtumo tarp indekso ir jį atkartojančio portfelio paklaidos.

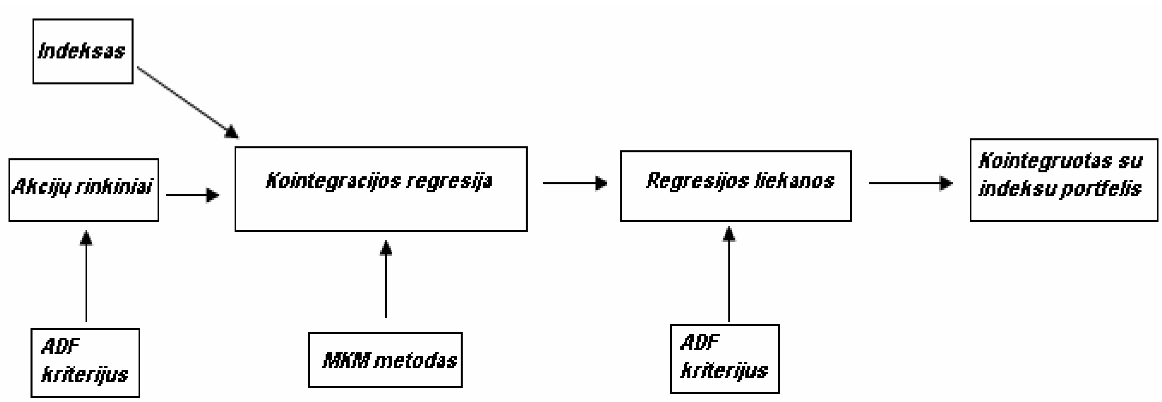
Pirma problema yra parinkti akcijų skaičių, o parinkus jų skaičių, antra problema yra jų svoriai portfelyje.

Optimalius akcijų svorius portfelyje rasime MKM metodu apskaičiavę kointegracijos regresijos parametrus. Nors MKM metodas netinka regresijos lygtims, kuriose regresoriai yra nestacionarūs, tačiau išimtis yra kointegracijos atveju, t.y. kai priklausomas kintamasis yra kointegruotas su regresoriais. Jei pasižymėsime indeksą y, o portfelio akcijų kainas $x_1, x_2, ..., x_n$, tuomet kointegracijos regresijos lygtį galima užrašyti taip:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n + \varepsilon_t \ .$$

Koeficientai $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ yra akcijų svoriai portfelyje. MKM metodu išprendus minėtą regresijos lygtį, svorių koeficientai yra sunormuojami, kad jų suma būtų lygi 1 tam, kad būtų aiškus investicijų paskirstymas į akcijas.

Jei indeksą sudaro N akcijų, o mes norime sukonstruoti portfelį iš n akcijų, mums tektų patikrinti tiek galimų akcijų derinių portfelyje: $C_N^n = \dfrac{N!}{n!(N-n)!}$. Konstruojant portfelius galima įvesti ir apribojimų. Pavyzdžiui, 60 % investicijų skirti informacinių technologijų sektoriaus akcijoms ir 40 % energetikos sektoriaus akcijoms. Arba gali būti reikalavimas parinkti tokį akcijų skaičių ir svorių kombinacijas, kad vienos įmonės akcijoms tektų ne daugiau kaip 20 % visų investicijų. Svarbu paskirstyti investicijas po keletą ir daugiau akcijų, norint diversifikuoti riziką. Pateikime schemą, kurioje išdėstyta bendra portfelio konstravimo metodika:



2.2.1 pav. Portfelio kosntravimas

Prieš parinkdami akcijų rinkinius portfeliui, turime įsitikinti, kad visos akcijų kainos ~ I(1), t.y. yra integruotos pirma eile. Šį patikrinimą visoms akcijoms, iš kurių ir konstravome indeksą, jau atlikome, o jo rezultatai yra 5.1 lentelėje. Kai pasirinktas n akcijų rinkinys, sudaroma kointegracijos regresijos lygtis:

$$\ln(indeksas_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln(X_{i,t}) + \varepsilon_t \qquad (2.2.1)$$

MKM metodu apskaičiuojami $\widehat{\alpha}_0, \widehat{\alpha}_1, ..., \widehat{\alpha}_n$ įverčiai. Turėdami šiuos įverčius galime apskaičiuoti portfelio vertę, o todėl ir skirtumų su sekamu indeksų laiko eilutę ε_t. Šiai paklaidų eilutei taikomas ADF, šiame darbe konkrečiai ADF(1), kriterijus patikrinti stacionarumui. Jei paklaidos yra stacionarios, tai sudarytas portfelis yra kointegruotas su indeksu. Iš gautų kointegruotų su indeksu portfelių optimalų laikykime tą, kurio kointegracijos rergresijos lygties liekamųjų liekanų kvadratų suma RRS mažiausia.

2.3 DVIEJŲ AKCIJŲ KOINTEGRUOTAS SU INDEKSU PORTFELIS

Pirmiausiai ieškosime, t.y. konstruosime, dviejų akcijų portfelius, kurie bus kointegruoti su sukurtu indeksu. Pats indeksas yra sukonstruotas iš 10 akcijų pagal S&P500 pavyzdį. Kainos duomenys apima laikotarpį 2002.01.02 – 2007.12.28, ir yra iš viso šiame laikotarpyje 1471 kiekvienos kainos stebėjimai. Reikalingas pakankamai ilgas laikotarpis, norint aptikti kointegracijos ryšius, nes jie atspindi sąryšį ilguoju laikotarpiu, tačiau nepaaiškina trumpalaikių nuokrypių nuo bendro trendo. Kadangi portfelyje bus tik dvi akcijos, iš viso galimų portfelių yra :

$$C_{10}^{2} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = 45$$

Jokių apribojimų neteiksime nei akcijų pasirinkimui nei jų svoriams. Tiesiog patikrinsime visas galimas 45 kombinacijas. Buvo suprogramuota procedūra sugeneruoti visiems galimiems portfelių rinkiniams ir buvo gauti tik 6 konintegruoti portfeliai su indeksu iš 45 galimų portfelių. Buvo naudojamos MacKinnon empiriškai suskaičiuotos ADF kritinės reikšmės. Kai integruotų ~I(1) kintamųjų skaičius yra 2, MacKinnon ADF kritinė reikšmė yra -3,3377 su reikšmingumo lygmeniu $\alpha = 0.05$. Rezultatai pateikti lentelėje žemiau:

Lentelė 2.3.1

Dviejų akcijų kointegruoti su indeksu portfeliai

Nr.	Portfelis iš akcijų	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	ADF(1)	RRS	Liekanų dispersija
1	X8 X 9	4.875	0,509	0,292	-3.614	4,586	3,12E-03
2	X4 X 8	4.614	0,105	0,876	-4.274	6,833	4,65E-03
3	X3 X8	4.683	0,166	0,779	-4.147	7,304	4,97E-03
4	X2 X10	4.764	0,321	0,359	-3.848	10,448	7,10E-03

Šiame darbe nagrinėsime tik teigiamų svorių portfelius, t.y. kai neleidžiamas nepadengtasis pardavimas. Akciją su neigiamu svoriu reiktų pasiskolinus lėšų parduoti, ir sutarto laikotarpio gale už ją atsiskaityti. Jei šios akcijos kaina ateityje kris, mes patirsim pelną, jei kils – nuostolių. Tačiau nagrinėsime akcijų pirkimo ir laikymo portfelyje strategiją, todėl analizuosim tik visų teigiamų svorių portfelius. Su mažiausia RRS (kointegracijos regresijos lygties liekamųjų paklaidų kvadratų suma) yra pirmasis portfelis, kuris yra optimalus ir regresijos lygtyje atrodo taip:

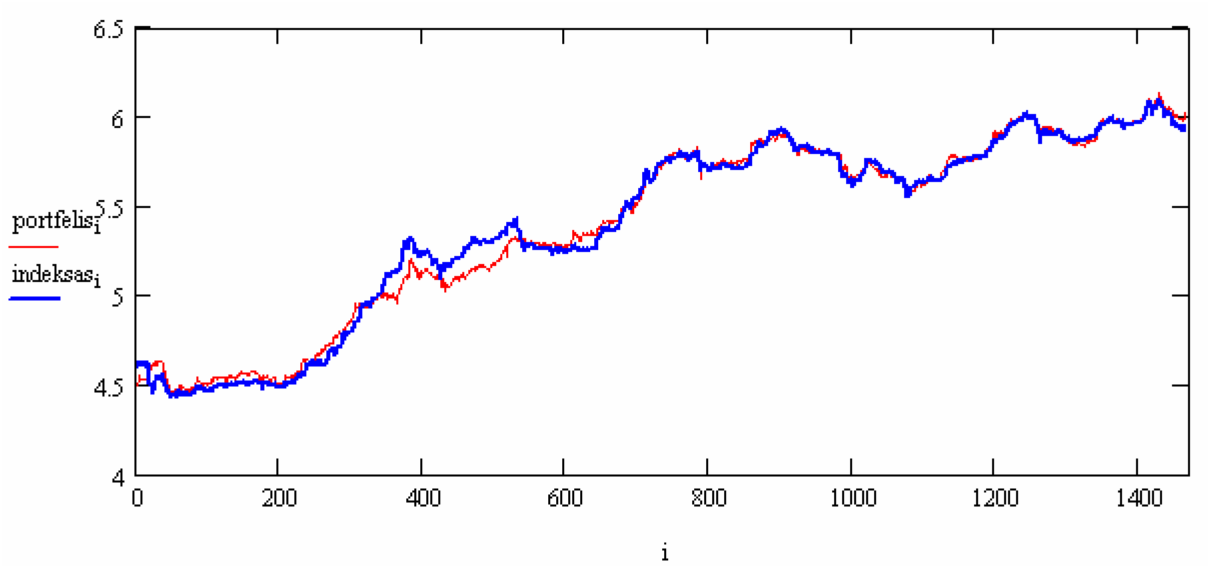
$$portfelis1 = 4.875 + 0.509 \ln X8 + 0.292 \ln X9$$

Sunormuokime svorius:

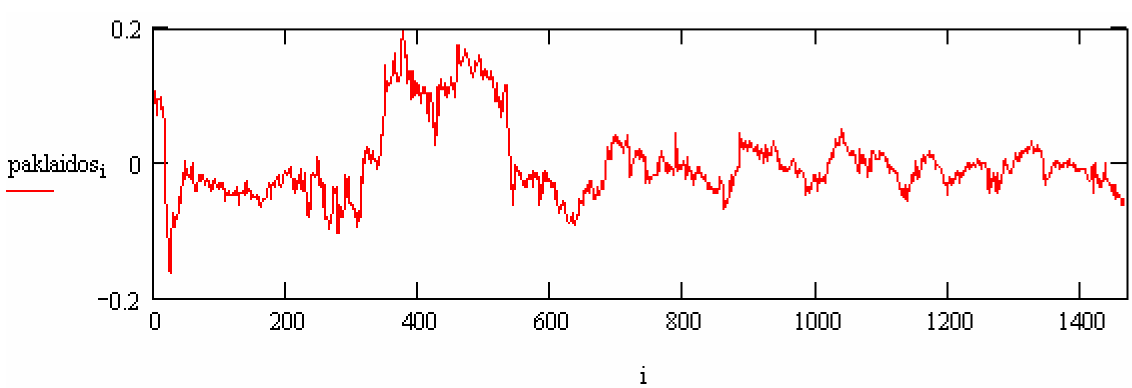
Akcijos X8 svoris portfelyje bus lygus $\frac{0.509}{0.509 + 0.292} = 0.64$,

ir akcijos X9 svoris bus lygus $\frac{0.292}{0.509 + 0.292} = 0.64$.

Todėl optimalus portfelis bus lygus : X8 64% ir X9 36%. Grafiškai pavaizduokime šį portfelį greta indekso paveikslėlyje žemiau. Paklaidas pavaizduokime atskirame grafike. Kaip matyti, paklaidos išties primena stacionarų procesą su vidurkiu 0. X ašyje nurodyti akcijų kainų ir indekso stebėjimų skaičius.



2.3.1 pav. Kointegruotas su indeksu dviejų akcijų optimalus portfelis1



Sunormuokime ir likusių portfelių akcijų svorius. Rezultatus pateikime lentele:

Lentelė 2.3.2

Dviejų akcijų su normuotais svoriais kointegruoti su indeksu portfeliai

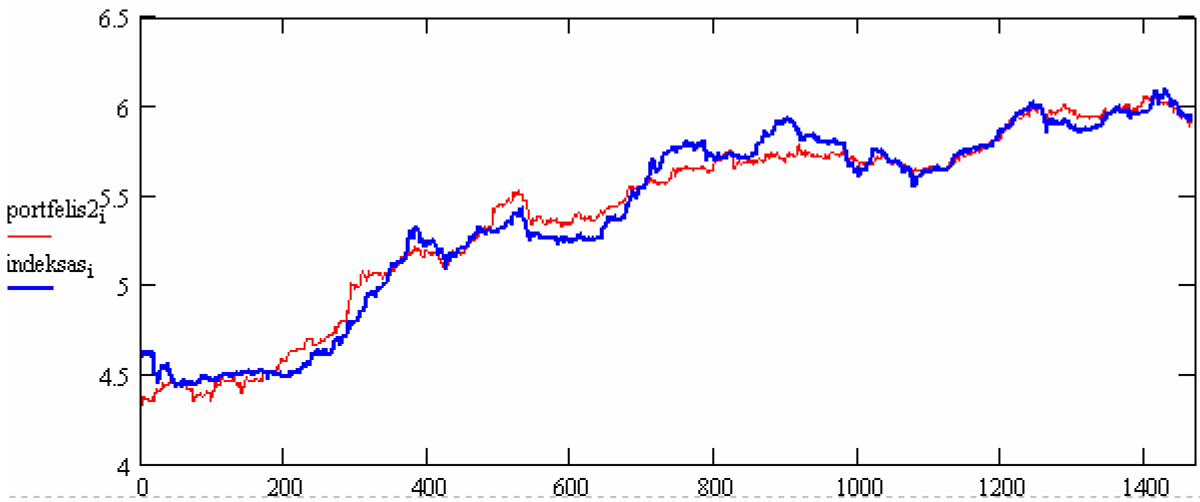
Nr.	Portfelis iš akcijų	Svoriai	
1	X8 X 9	64%	36%
2	X4 X 8	11%	89%
3	X3 X8	18%	82%
4	X2 X10	47%	53%

Panagrinėkime bet kurį kitą portfelį su mažesne RRS reikšme. Pavyzdžiui, 4 portfelį, kuris regresijos lygtyje atrodo taip:

$$portfelis4 = 4.764 + 0.321 \ln X2 + 0.359 \ln X10$$

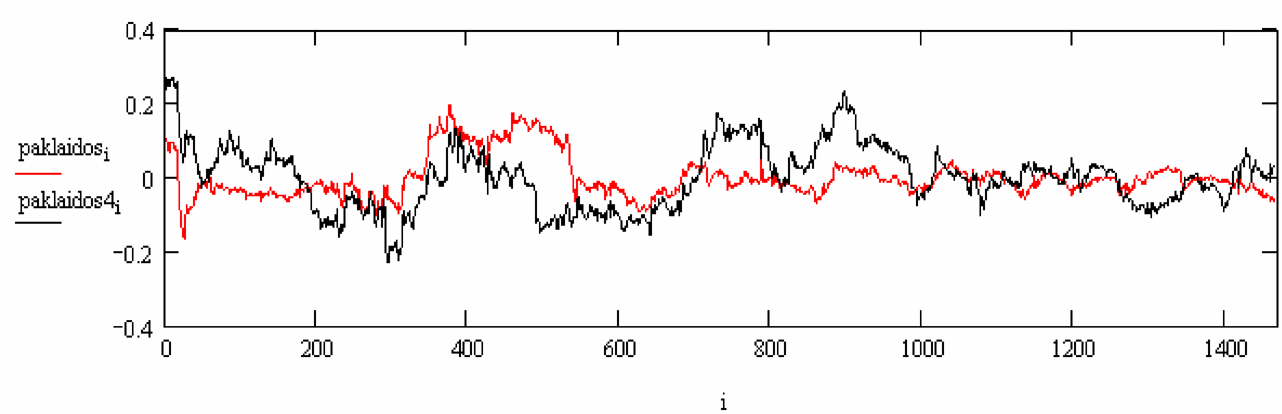
Šiame portfelyje normuoti akcijų svoriai bus tokie: akcijos X2 svoris 47%, o X10 yra 53%.

Šis portfelis atrodo taip:



2.3.2 pav. Kointegruotas su indeksu dviejų akcijų portfelis4

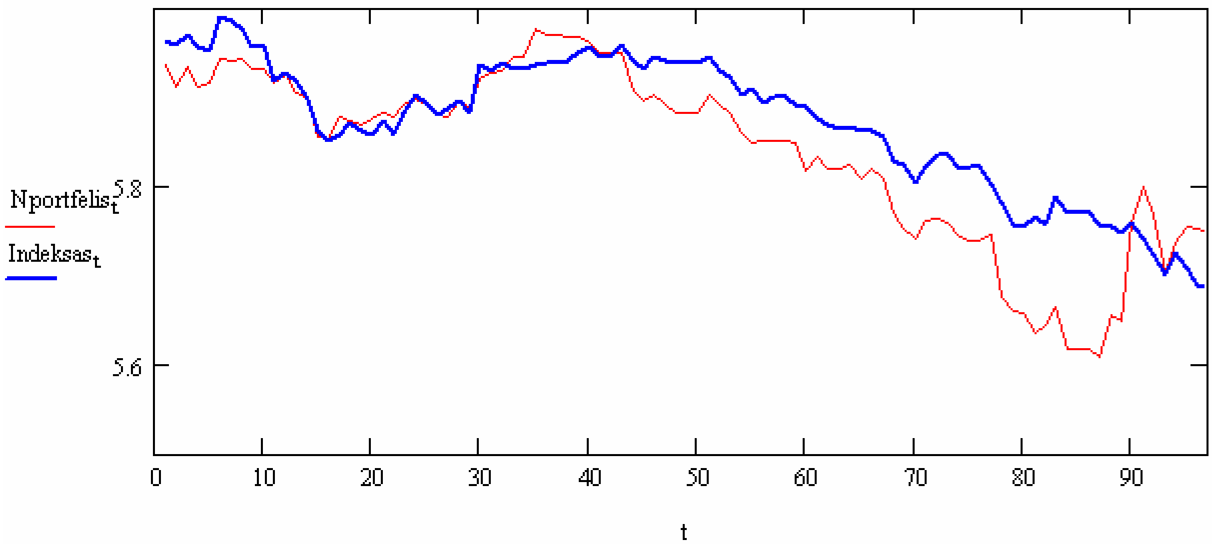
Grafiškai pavaizduokime portfelio1 (optimalaus) ir portfelio4 paklaidų grafikus:



2.3.3 pav. portfelio4 ir portfelio1 paklaidos

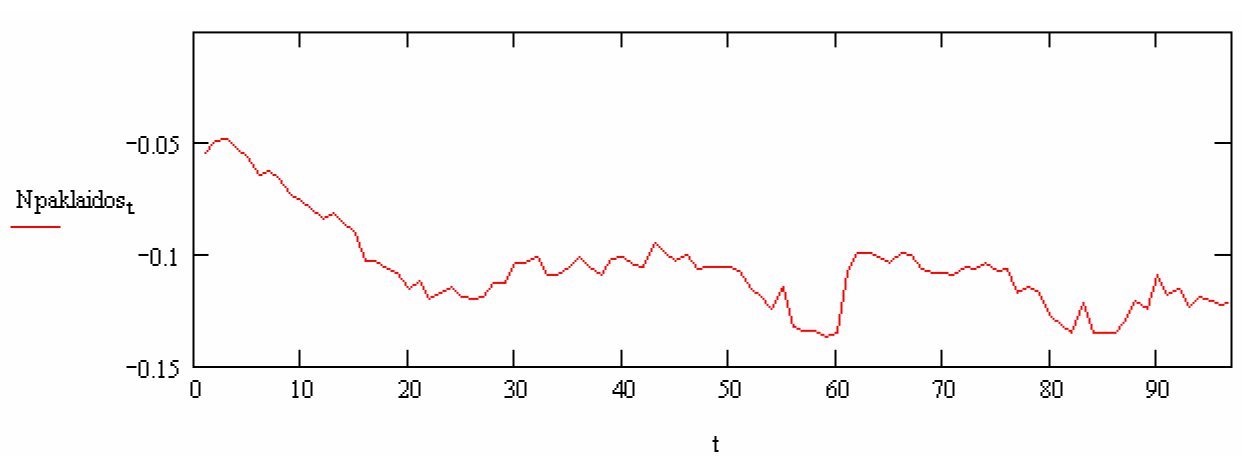
Kaip matyti optimalaus portfelio paklaidos svyruoja mažesne amplitude, t.y. turi mažesnę dispersiją.

Įvertinę optimalų portfelio modelį, atlikime jam diagnostiką. T.y. pasinaudokime 2008.01.02 - 2008.05.20 duomenimis naujoms indekso reikšmėms gauti, o apskaičiuoto modelio parametrų nekeiskime. Šiuo laikotarpiu yra 97 stebėjimai.



2.3.4 pav. Optimalaus kointegruoto su indeksu dviejų akcijų portfelio diagnostika

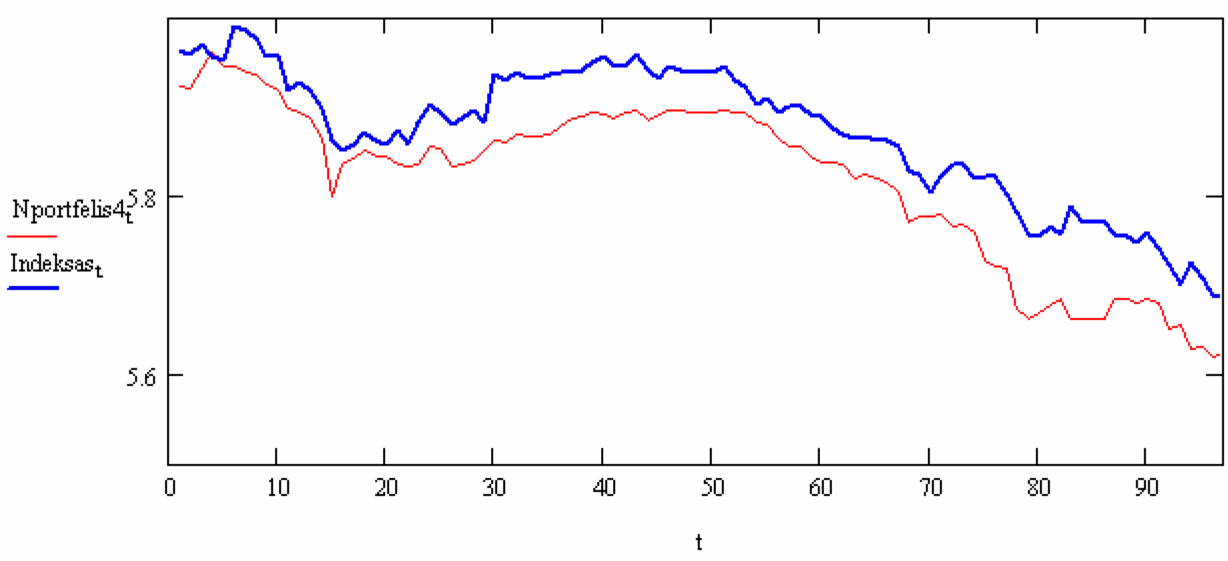
Gautos paklaidos pavaizduotos žemiau. Kaip matyti, paklaidų eilutė jau nėra stacionari, kadangi jos ADF(1)=-3,219, kai kritinė reikšmė šio kriterijaus, kai $\alpha = 0.05$, lygi -2,86.



2.3.5 pav. Optimalaus portfelio diagnostikos paklaidos

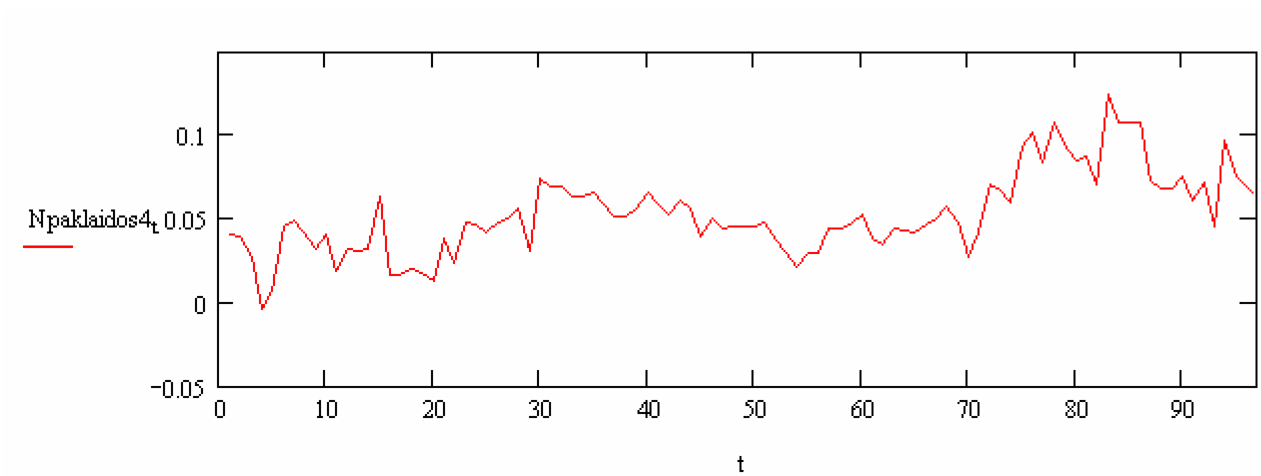
Kaip matyti bandomuoju laikotarpiu kointegruoto portfelio paklaidos nėra stacionarios, bet dėl kointegracijos portfelis nenutola nuo indekso daug, nes RRS=1,134.

Panagrinėkime diagnostiką portfeliui4, kuris nėra optimalus, tačiau kointegruotas su indeksu.



2.3.6 pav. Portfelio4 diagnostika

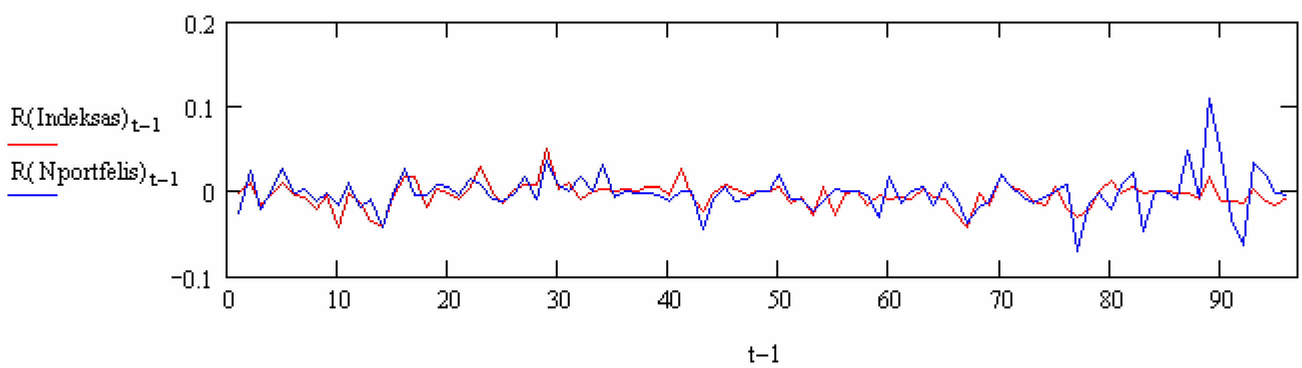
O paklaidų eilutė, gauta atėmus naująsias indekso reikšmes iš portfelio4 su naujais kainų duomenimis, pavaizduota žemiau.



2.3.7 pav. Portfelio4 diagnostikos paklaidos

Šių paklaidų eilutės ADF(1)=-2,859, tai indikuoja, kad paklaidos tikrai panašios į stacionarias, o RRS=0,327, kas netikėtai žymiai mažiau nei optimalaus portfelio RRS.

Panagrinėkime optimalaus portfelio pelningumą su indekso pelningumu testuojamame periode:



2.3.8 pav. Optimalaus portfelio ir indekos pelningumai

Kaip matyti, portfelis kiek pelningesnis nei akcijų indeksas, o bendras pelnas optimalaus portfelio yra -0,187, kai indekso pelnas yra daugiau neigiamas -0,275. Optimalus portfelis ir akcijų indeksas yra labai koreliuoti, koreliacijos koeficientas lygus 0,909

2.4 TRIJŲ AKCIJŲ KOINTEGRUOTAS SU INDEKSU PORTFELIS

Ieškodami trijų akcijų portfelių, kurie galėtų būti kointegruoti su indeksu, tikriname

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$$

visų įmanomų portfelių, sudarytų iš 3 akcijų. Kointegracijos regresijos liekanoms buvo taikoma MacKinnon ADF kritinė reikšmė -3,743 su reikšmingumo lygmeniu $\alpha = 0.05$. Buvo rasti iš viso 33 kointegruoti su indeksu portfeliai ir 21 portfelis su teigiamais akcijų svoriais:

Lentelė 2.4.1

Trijų akcijų kointegruoti su indeksu portfeliai

Nr.	Portfelis iš akcijų	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	ADF(1)	RRS	Liekanų dispersija
1	X1 X2 X4	4.581	0,31	0,24	0,18	-3.773	12,19	8,29E-03
2	X1 X2 X10	4.734	0,209	0,217	0,409	-4.481	6,631	4,51E-03
3	X2 X3 X8	4,72	0,059	0,124	0,68	-3.926	6,914	4,70E-03
4	X3 X4 X8	4.585	0,116	0,079	0,801	-5.318	5,33	3,62E-03
5	X8 X9 X10	4,84	0,502	0,262	0,092	-3.831	4,044	2,75E-03
6	X1 X3 X10	4.533	0,447	0,252	0,495	-4.778	9,726	6,61E-03
7	X2 X4 X8	4.646	0,115	0,1	0,63	-5.137	4,527	3,08E-03

8	X3 X5 X8	4.458	0,075	0,4	0,615	-3.902	2,231	1,52E-03
9	X4 X6 X8	4.908	0,124	0,171	0,691	-4.358	5,066	3,44E-03
10	X1 X4 X8	4.569	0,128	0,138	0,739	-4.352	6,035	4,10E-03
11	X3 X6 X8	4.882	0,17	0,107	0,664	-4.002	6,57	4,47E-03
12	X3 X6 X10	5.454	0,235	0,479	0,395	-4,05	10,74	7,30E-03
13	X4 X7 X8	4.573	0,165	0,127	0,57	-6.287	2,347	1,60E-03
14	X2 X6 X10	5.18	0,212	0,234	0,355	-4.502	5,949	4,04E-03
15	X3 X7X8	4.703	0,159	0,035	0,703	-3.897	6,872	4,67E-03
16	X4 X8 X9	4.758	0,061	0,574	0,235	-4.673	3,434	2,34E-03
17	X4 X8 X10	4.622	0,092	0,855	0,048	-4.154	6,735	4,58E-03
18	X2 X7 X10	4.777	0,226	0,088	0,371	-3.834	7,947	5,40E-03
19	X3 X8 X9	4.794	0,108	0,494	0,247	-5.135	3,206	2,18E-03
20	X3 X8 X10	4.642	0,156	0,707	0,162	-4.789	5,449	3,71E-03
21	X2 X8 X10	4.752	0,152	0,457	0,224	-4.176	4,739	3,22E-03

Kaip matyti, 8 –tas portfelis yra optimalus, kadangi jo RRS yra mžiausia ir lygi 2,231. Portfelis kointegracijos regresijos lygtyje atrodo taip:

$$portfelis8 = 4.458 + 0.075 \ln X3 + 0.4 \ln X5 + 0.615 \ln X8$$

O akcijų svoriai yra X3 7%, X5 37% ir X8 56%. O visų kointegruotų portfelių sunormuoti akcijų svoriai pateikti lentelėje žemiau.

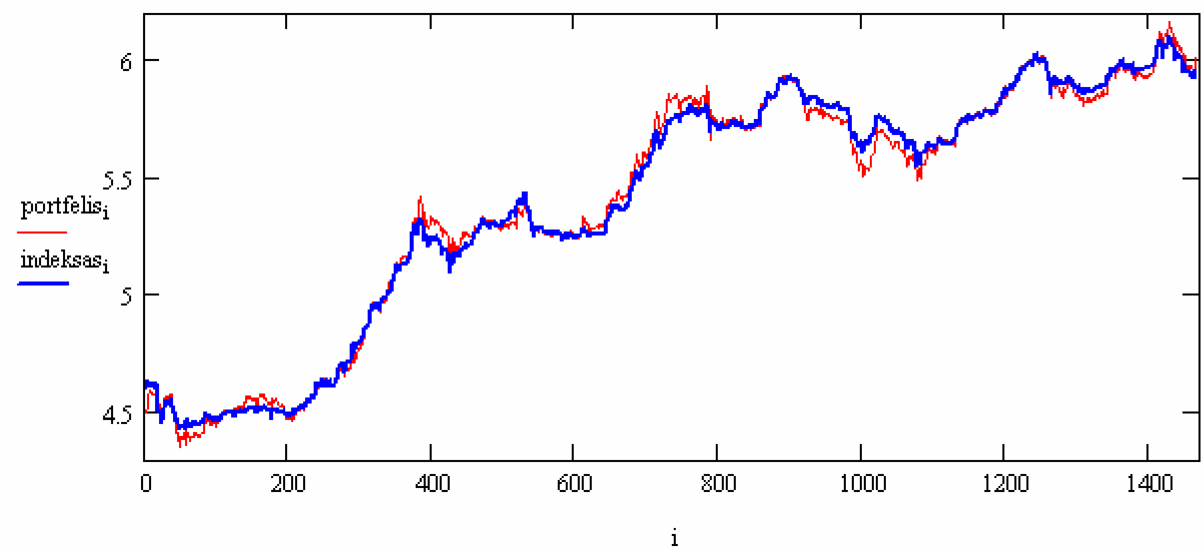
Lentelė 2.4.2

Trijų normuotų svorių akcijų kointegruoti su indeksu portfeliai

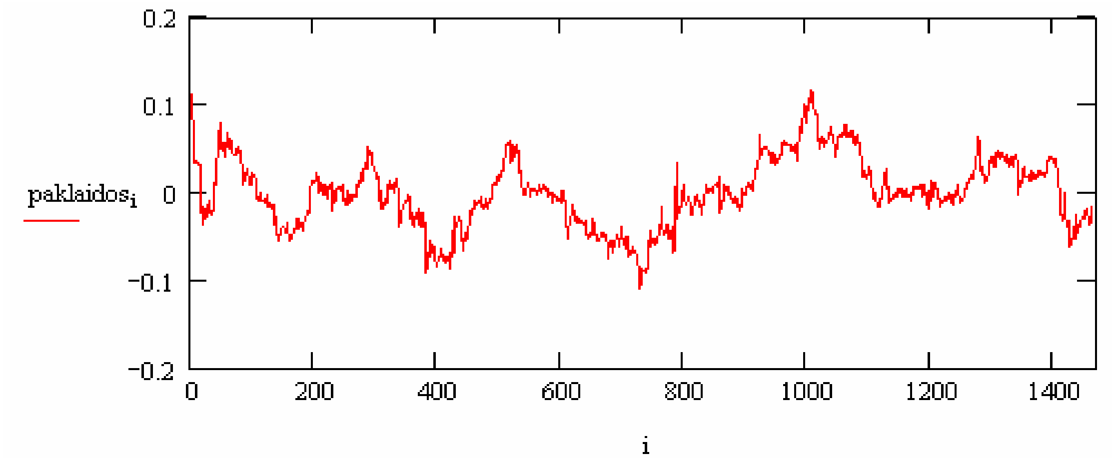
Nr.	Portfelis iš akcijų	Svoriai		
1	X1 X2 X4	42%	33%	25%
2	X1 X2 X10	25%	26%	49%
3	X2 X3 X8	7%	14%	79%
4	X3 X4 X8	12%	8%	80%
5	X8 X9 X10	59%	31%	11%
6	X1 X3 X10	37%	21%	41%
7	X2 X4 X8	14%	12%	75%
8	X3 X5 X8	7%	37%	56%
9	X4 X6 X8	13%	17%	70%

10	X1 X4 X8	13%	14%	74%
11	X3 X6 X8	18%	11%	71%
12	X3 X6 X10	21%	43%	36%
13	X4 X7 X8	19%	15%	66%
14	X2 X6 X10	26%	29%	44%
15	X3 X7X8	18%	4%	78%
16	X4 X8 X9	7%	66%	27%
17	X4 X8 X10	9%	86%	5%
18	X2 X7 X10	33%	13%	54%
19	X3 X8 X9	13%	58%	29%
20	X3 X8 X10	15%	69%	16%
21	X2 X8 X10	18%	55%	27%

Pavaizduokime optimalų portfelį iš trijų akcijų greta indekso,o paklaidas įtrauksim į atskirą grafiką.

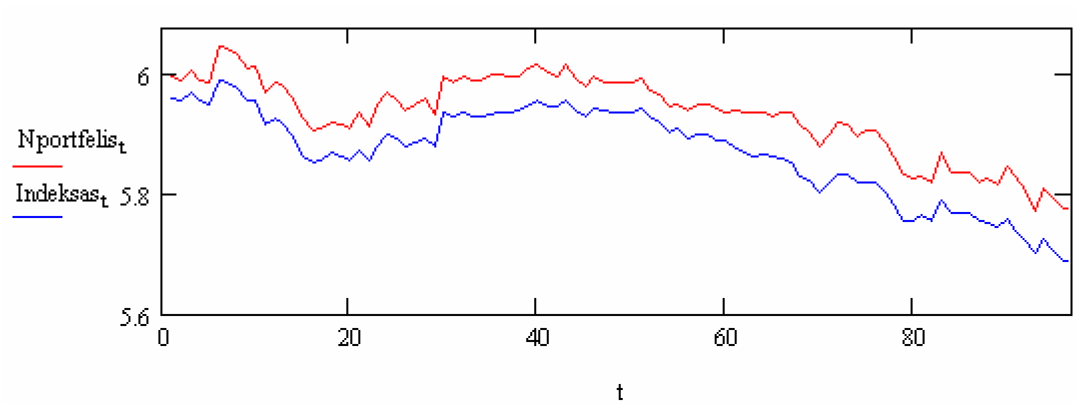


2.4.1 pav. Kointegruotas su indeksu trijų akcijų portfelis



2.4.2 pav. Kointegruoto su indeksu trijų akcijų portfelio paklaidos

Optimaliam portfeliui pritaikykime diagnostiką 2008.01.02-2008.05.20 duomenimis:



2.4.2 pav. Kointegruoto su indeksu trijų akcijų portfelio diagnostika

Gautos paklaidos ADF(-1) =-2,24, todėl paklaidos nėra stacionarios, o RRS= 0,407. Tačiau tarp portfelio ir akcijų indekso aukšta koreliacija, kuri lygi 0,99. Portfelio pelningumas bandomajame laikotarpyje yra -0,225, kai indekso yra -0,275.

2.5 KETURIŲ AKCIJŲ KOINTEGRUOTAS SU INDEKSU PORTFELIS

Ieškodami keturių akcijų portfelių, kurie galėtų būti kointegruoti su indeksu, tikriname

$$C_{10}^{4} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210$$

visų įmanomų portfelių, sudarytų iš 4 akcijų. Kointegracijos regresijos liekanoms buvo taikoma MacKinnon ADF kritinė reikšmė -4,1 su reikšmingumo lygmeniu $\alpha = 0.05$. Buvo rasti iš viso 64 kointegruoti su indeksu portfeliai ir iš jų 39 su visais teigiamais svoriais. Visus rezultatus galima rasti priede, o čia pateikia tik kelis pavyzdžius

Lentelė 2.5.1

Keturių akcijų kointegruoti su indeksu portfeliai

Nr.	Portfelis iš akcijų	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	ADF(1)	RRS	Liekanų dispersija
4	X1 X2 X5 X10	4,461	0,22	0,143	0,46	0,182	-4.171	2,03	1,38E-03
27	X3 X5 X8 X9	4,585	0,062	0,298	0,479	0,154	-5,11	0,97	6,58E-01
17	X1 X3 X4 X10	4,462	0,491	0,217	0,071	0,426	-4.954	8,87	6,03E-03

Taigi optimalus portfelis iš 4 akcijų kointegracijos regresijoje yra $portfelis27 = 4.585 + \ln 0.062 \ln X3 + 0.298 \ln X5 + 0.479 \ln X8 + 0.154 \ln X10$, o šio portfelio akcijų sovriai yra X3 6%, X5 30%, X8 48% ir X9 16%.

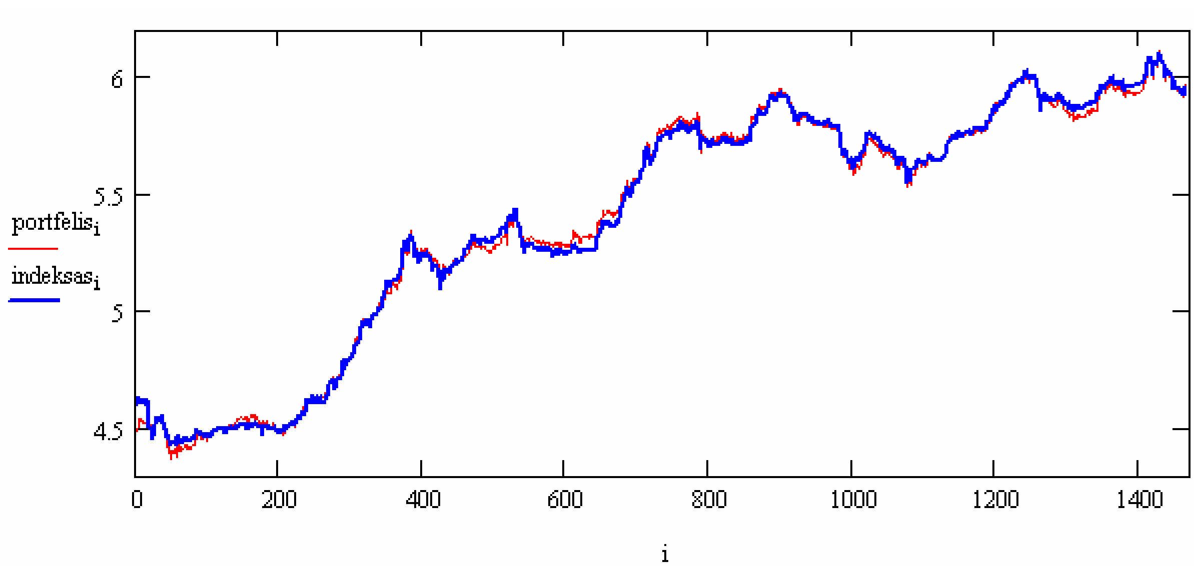
Pilną sunormuotų svorių portfelių lentelę galima rasti priede.

Lentelė 2.5.2

Keturių normuotų svorių akcijų kointegruoti su indeksu portfeliai

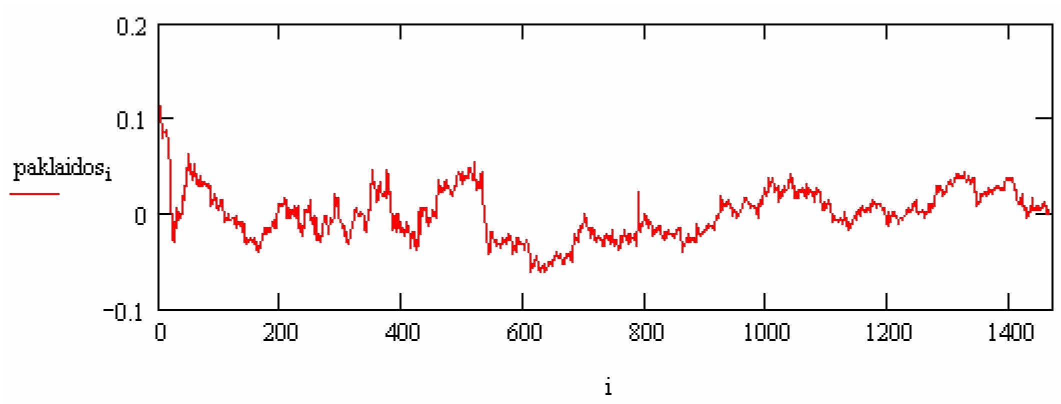
4	X1 X2 X5 X10	22%	14%	46%	18%
27	X3 X5 X8 X9	6%	30%	48%	16%
17	X1 X3 X4 X10	41%	18%	6%	35%

Pavaizduokime optimalų portfelį kartu su jo paklaidomis:



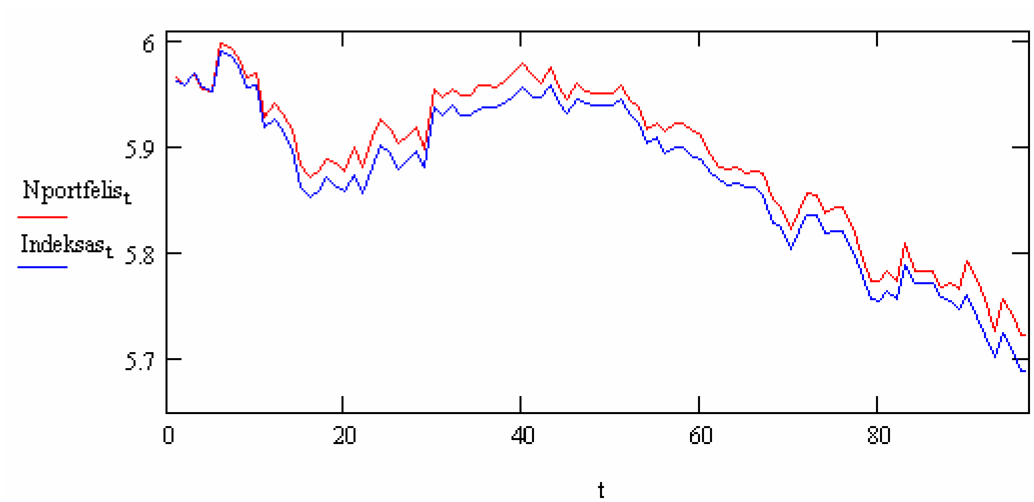
2.5.1 pav. Kointegruotas su indeksu keturių akcijų portfelis

Šio optimalaus portfelio paklaidos pavaizduotos grafike žemiau:



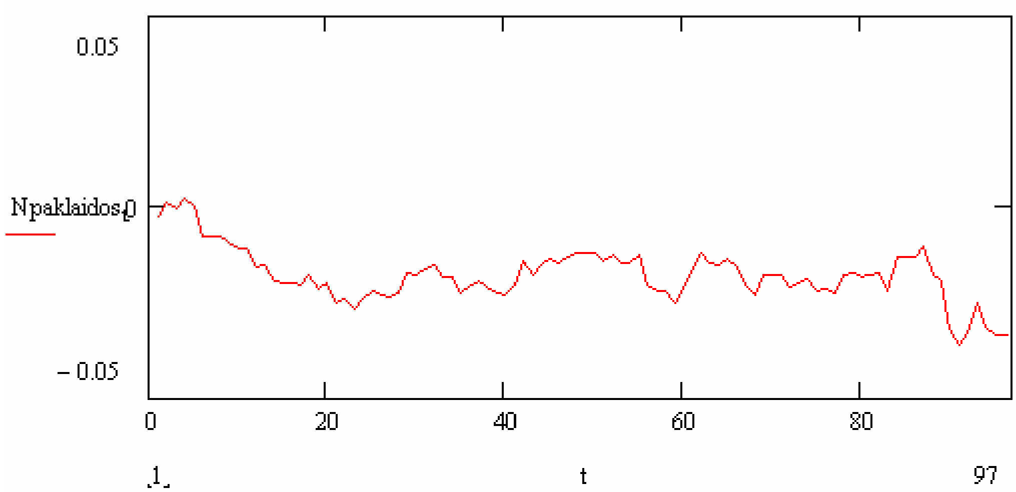
2.5.2 pav. Kointegruoto su indeksu keturių akcijų portfelio paklaidos

Pritaikykime 4 akcijų optimaliam portfeliui diagnostiką. Grafiškai pavaizduokime rezultatus:



2.5.3 pav. Kointegruoto su indeksu keturių akcijų portfelio diagnostika

Paklaidas pateikime atskirame grafike:



2.5.4 pav. Kointegruoto su indeksu keturių akcijų portfelio diagnostikos paklaidos

Gautų paklaidų RRS maža reikšmė 0,036, o ADF(1)=-3.014, todėl paklaidos stacionarios. Indekso pelningumas nagrinėjamame laikotarpyje yra -0,275, o optimalaus portfelio -0,244.

2.6 PENKIŲ AKCIJŲ KOINTEGRUOTAS SU INDEKSU PORTFELIS

Ieškodami penkių akcijų portfelių, kurie galėtų būti kointegruoti su indeksu, tikriname

$$C_{10}^{5} = \frac{10!}{5!\cdot 5!} = 252$$

visų įmanomų portfelių, sudarytų iš 5 akcijų. Kointegracijos regresijos liekanoms buvo taikoma MacKinnon ADF kritinė reikšmė -4,4185 su reikšmingumo lygmeniu $\alpha = 0.05$. Buvo rasti iš viso 54 kointegruoti su indeksu portfeliai su teigiamais svoriais:

Lentelė 2.6.1

Penkių akcijų kointegruoti su indeksu portfeliai

Nr.	Portfelis iš akcijų	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	ADF(1)	RRS	Liekanų dispersija
45	X3X5X6X8X9	4,659	0,066	0,319	0,053	0,447	0,124	-4,818	0,83	0,001
46	X3X5X7X8X9	4,533	0,050	0,382	0,046	0,424	0,083	-4,600	0,51	0,000
47	X4X6X8X9X10	4,844	0,064	0,060	0,540	0,196	0,041	-4,514	3,29	0,002

Pilną lentelę galima rasti prieduose.

Taigi optimalus portfelis kointegracijos regresijos lygtyje atrodo taip:

$$portfelis46 = 4.533 + 0.05\ln X3 + 0.382\ln X5 + 0.046\ln X7 + 0.424\ln X8 + 0.083\ln X9$$

Šio portfelio akcijų sunormuoti svoriai yra:

X3 5%, X5 39%, X7 5%, X8 43% ir X9 8%

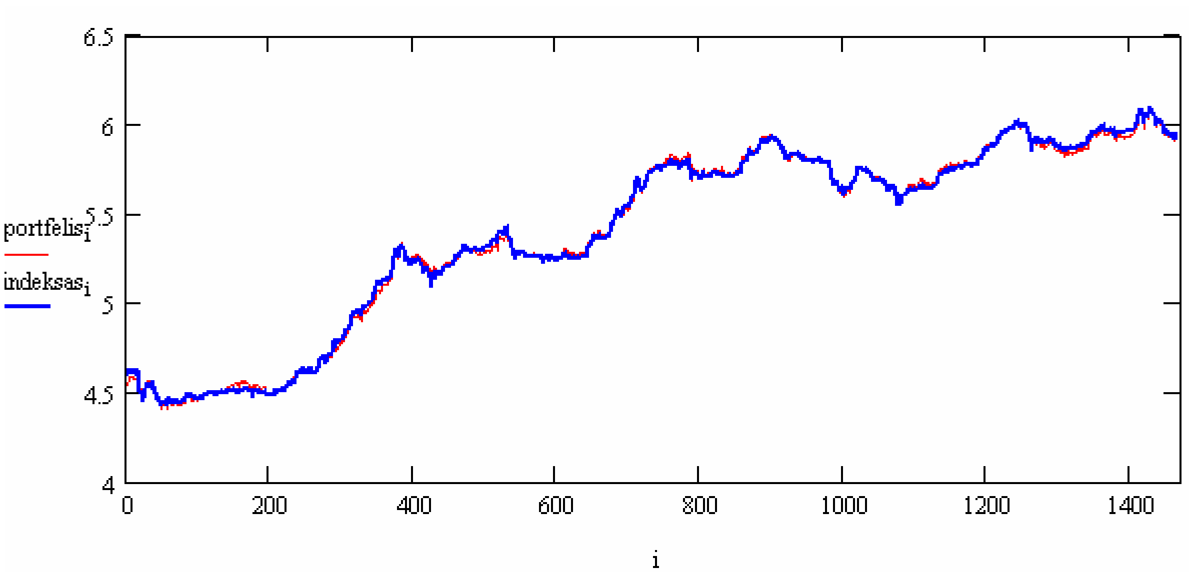
Kointegruotų portfelių akijų normuoti svoriai yra pateikti žemiau lentelėje:

Lentelė 2.6.2

Penkių normuotų svorių akcijų kointegruoti su indeksu portfeliai

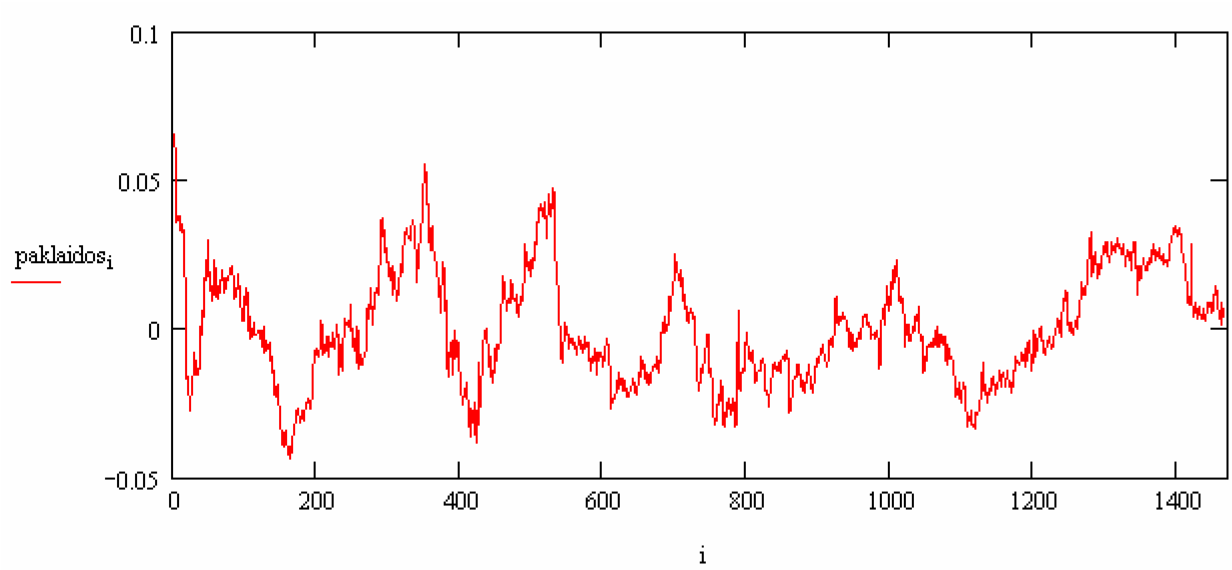
Nr.	Portfelis iš akcijų	Svoriai				
45	X3X5X6X8X9	7%	32%	5%	44%	12%
46	X3X5X7X8X9	5%	39%	5%	43%	8%
47	X4X6X8X9X10	7%	7%	60%	22%	5%

Pilną lentelę galima rasti priede. Pavaizduokime optimalų portfelį:



2.6.1 pav. Kointegruotas su indeksu penkių akcijų portfelis

O paklaidas atskirame grafike:



2.6.2 pav. Kointegruotas su indeksu penkių akcijų portfelio paklaidos

2.7 ŠEŠIŲ AKCIJŲ KOINTEGRUOTAS SU INDEKSU PORTFELIS

Ieškodami šešių akcijų portfelių, kurie galėtų būti kointegruoti su indeksu, tikriname

$$C_{10}^{5}=\frac{10!}{6!\cdot 4!}=210$$

visų įmanomų portfelių, sudarytų iš 6 akcijų. Kointegracijos regresijos liekanoms buvo taikoma MacKinnon ADF kritinė reikšmė -4,7048 su reikšmingumo lygmeniu $\alpha = 0.05$. Buvo rastas iš viso 41 kointegruotas su indeksu portfelis, kurio akcijų svoriai visi teigiami:

Lentelė 2.7.1

Šešių akcijų kointegruoti su indeksu portfeliai

Nr.	Portfelis iš akcijų	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$	ADF(1)	RRS	Liekanų dispersija
21	X2X3X5X6X8X10	4,698	0,082	0,026	0,362	0,098	0,356	0,068	-4,750	0,72	4,9E-04
22	X2X3X5X7X8X10	4,508	0,060	0,015	0,415	0,055	0,364	0,049	-4,744	0,39	2,7E-04
23	X2X3X5X8X9X10	4,574	0,049	0,028	0,338	0,427	0,112	0,003	-4,762	0,80	5,5E-04

Pilną lentelę galima rasti priede

Taigi optimalus portfelis kointegracijos regresijos lygtyje yra:

$$portfelis22 = 4.508 + 0.06\ln X2 + 0.015\ln X3 + 0.415\ln X5 + 0.055\ln X7 + 0.364\ln X8 + 0.049\ln X10$$

O šio portfelio akcijų normuoti svoriai yra:

X2 6%, X3 2%, X5 43%, X7 6%, X8 38%, X10 5%.

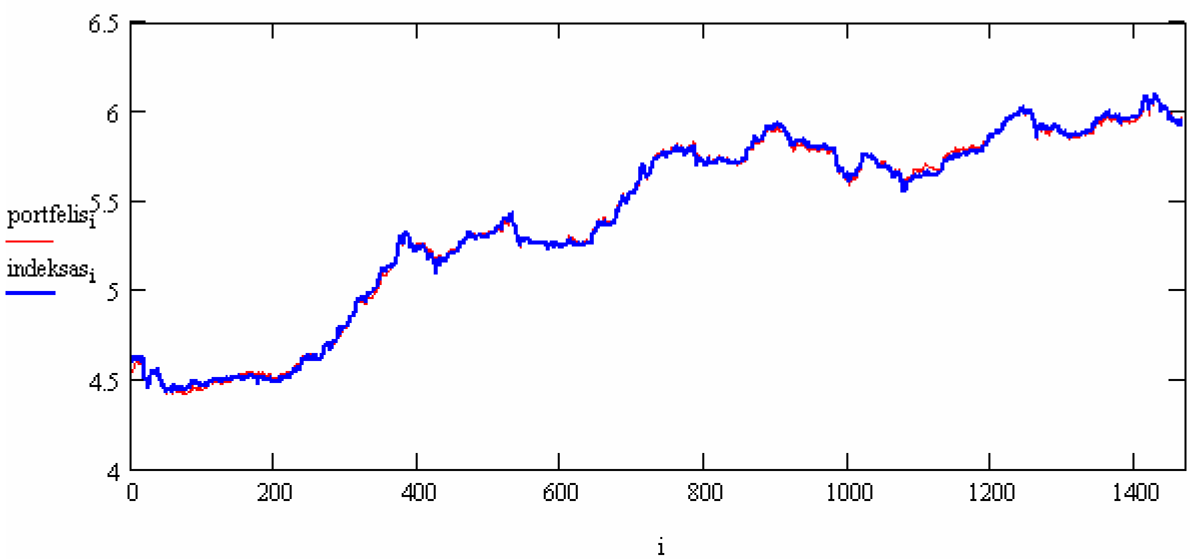
Pateikime kointegruotų portfelių akcijų normuotus svorius lentele:

Lentelė 2.7.2

Šešių normuotų svorių akcijų kointegruoti su indeksu portfeliai

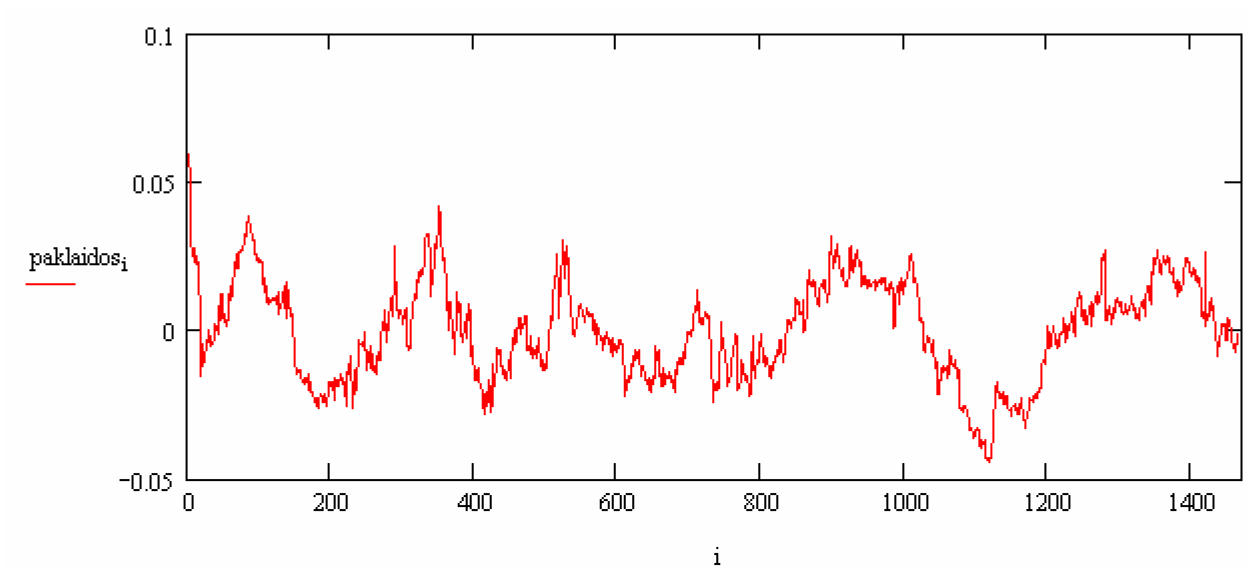
Nr.	Portfelis iš akcijų	Svoriai					
21	X2X3X5X6X8X10	8%	3%	36%	10%	36%	7%
22	X2X3X5X7X8X10	6%	2%	43%	6%	38%	5%
23	X2X3X5X8X9X10	5%	3%	35%	45%	12%	0%

Pavaizduokime grafiškai optimalų portfelį:



2.7.1 pav. Kointegruotas su indeksu penkių akcijų portfelis

O paklaidas pateikime atskirame grafike:



2.7.2 pav. Kointegruotas su indeksu penkių akcijų portfelio paklaidos

Sumodeliavę 2, 3, 4, 5 ir 6 akcijų kointegruotus su indeksu portfelius ir parinkę iš kiekvieno atvejo po optimalų teigiamų svorių portfelį, palyginkime liekamųjų paklaidų kvadratų sumas:

Lentelė 2.7.3

Kointegruotų su indeksu portfelių liekamųjų paklaidų kvadratų suma

Kointegruotame portfelyje akcijų skaičius	2	3	4	5	6
Liekamųju paklaidų kvadratų suma	4,586	2,231	0,97	0,51	0,39

Kaip matyti iš lentelės, kuo daugiau akcijų yra kointegruotame su indeksu portfelyje, tuo mažesnės paklaidos susidaro. Natūralu, kad didesnis portfelis tiksliau atkartoja indeksą.

IŠVADOS

- Investuotojui buvo sukurtas techninis įrankis, padedantis sukonstruoti kointegruotus su akcijų indeksu portfelius.
- Juo daugiau akcijų yra kointegruotame portfelyje, tuo mažesnės kointegracijos regresijos lygties paklaidos.
- Kointegruotuose su indeksu portfeliuose dominuoja didžiausių kapitalų akcijos, nebent jų svoriai portfelyje yra sąlyginai maži. Tačiau egzistuoja ir tokie kointegruoti portfeliai, kuriuose nėra dominuojančio kapitalo akcijų.
- Šiame darbe įsitikinta, kad kuo daugiau egzistuoja galimų portfelių kombinacijų, tuo daugiau tarp jų gali būti aptikta kointegruotų su akcijos indeksu portfelių.
- Kointegruojančio portfelio diagnostika realiais duomenimis patvirtina, kad indeksas susietas su indeksu bendru stochastiniu trendu, nors optimalių portfelių bandomajame laikotarpyje paklaidos nėra stacionarios, tačiau portfeliai išlieka su indeksu labai koreliuoti, $\rho>0,9$.

LITERATŪRA

1. Carol Alexander, Market models, John Wiley & Sons, LTD, 2001-494 p.
2. Gary Koop Analysis of financial data, John Wiley & Sons, LTD, 2006 - 240 p.
3. Valakevičius E. Investiciju mokslas. Kaunas, 2002 - 324 p.
4. Vydas Čekanavičius, Gediminas Murauskas, leidykla Tev, Vilnius, 2004 -273 p.
5. Kanceriavičius Gitanas. Finansai ir investicijos. Vilnius, 2003 - 880 p.
6. Statistinė NVPB informacija / Lietuvos nacionalinė vertybinių popierių birža. www.lt.omxgroup.com

1PRIEDAS

Keturių akcijų kointegruoti su indeksu portfeliai

Nr.	Portfelis iš akcijų	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	ADF(1)	RRS	Liekanų dispersija
1	X1 X2 X3 X10	4,673	0,249	0,169	0,087	0,412	-4.993	6,09	4,14E-03
2	X1 X2 X4 X8	4,616	0,075	0,104	0,12	0,573	-5.256	4,27	2,91E-03
3	X1 X2 X4 X10	4,629	0,276	0,195	0,078	0,335	-5.077	5,50	3,74E-03
4	X1 X2 X5 X10	4,461	0,22	0,143	0,46	0,182	-4.171	2,03	1,38E-03
5	X1 X2 X6 X10	5,066	0,069	0,205	0,176	0,373	-4.505	5,82	3,95E-03
6	X1 X2 X7 X10	4,744	0,171	0,202	0,031	0,404	-4.359	6,45	4,38E-03
7	X1 X2 X8 X10	4,745	0,063	0,149	0,38	0,262	-4.214	4,56	3,10E-03
8	X1 X2 X9 X10	4,790	0,167	0,167	0,144	0,325	-4.265	5,94	4,04E-03
9	X2 X3 X4 X8	4,629	0,093	0,042	0,091	0,648	-5.425	4,41	3,00E-03
10	X2 X3 X6 X10	5,180	0,182	0,062	0,257	0,35	-4.759	5,65	3,84E-03
11	X2 X3 X8 X10	4,701	0,108	0,078	0,508	0,202	-4.881	4,27	2,90E-03
12	X3 X4 X6 X8	4,867	0,109	0,098	0,163	0,629	-5.707	3,72	2,53E-03
13	X3 X4 X7 X8	4,565	0,047	0,149	0,115	0,567	-6.985	2,14	1,45E-03
14	X3 X4 X8 X9	4,722	0,087	0,046	0,546	0,213	-6.058	2,62	1,78E-03
15	X3 X4 X8 X10	4,597	0,128	0,051	0,752	0,093	-5.272	4,98	3,38E-03
16	X1 X3 X4 X8	4,543	0,121	0,112	0,111	0,674	-5.623	4,62	3,14E-03
17	X1 X3 X4 X10	4,462	0,491	0,217	0,071	0,426	-4.954	8,87	6,03E-03
18	X1 X3 X6 X10	4,941	0,264	0,235	0,21	0,445	-4,5	8,55	5,81E-03
19	X1 X3 X7 X10	4,584	0,322	0,218	0,07	0,468	-4.445	8,67	5,89E-03
20	X1 X3 X8 X10	4,619	0,137	0,171	0,516	0,245	-5.076	4,61	3,13E-03
21	X1 X3 X9 X10	4,703	0,269	0,171	0,255	0,3	-4.534	6,48	4,41E-03
22	X2 X4 X6 X8	4,863	0,095	0,115	0,129	0,532	-5.307	3,58	2,43E-03
23	X2 X4 X6 X10	5,170	0,208	0,043	0,259	0,305	-4.651	5,54	3,77E-03
24	X2 X4 X7 X8	4,589	0,039	0,155	0,11	0,526	-6.672	2,16	1,47E-03
25	X2 X4 X8 X9	4,742	0,054	0,068	0,523	0,184	-5.151	3,08	2,09E-03
26	X2 X4 X8 X10	4,672	0,134	0,064	0,532	0,128	-5.159	3,88	2,64E-03

27	X3 X5 X8 X9	4,585	0,062	0,298	0,479	0,154	-5,11	0,97	6,58E-01
28	X4 X6 X8 X9	4,821	0,071	0,047	0,559	0,207	-4.622	3,35	2,28E-03
29	X4 X6 X8 X10	4,950	0,1	0,187	0,634	0,092	-4.205	4,72	3,21E-03
30	X1 X4 X8 X9	4,748	0,016	0,067	0,565	0,229	-4.669	3,42	2,33E-03
31	X1 X4 X8 X10	4,573	0,171	0,117	0,641	0,117	-4.173	5,53	3,76E-03
32	X3 X6 X8 X10	4,959	0,16	0,176	0,492	0,214	-5.315	3,63	2,47E-03
33	X4 X7 X8 X9	4,615	0,144	0,105	0,547	0,057	-6.053	2,27	1,54E-03
34	X4 X7 X8 X10	4,582	0,15	0,127	0,544	0,054	-6.191	2,22	1,51E-03
35	X2 X6 X8 X10	4,980	0,138	0,127	0,335	0,258	-4.436	3,83	2,61E-03
36	X2 X6 X9 X10	5,149	0,19	0,202	0,076	0,316	-4.305	5,80	3,94E-03
37	X3 X7 X8 X10	4,668	0,14	0,065	0,542	0,21	-4.787	4,09	2,78E-03
38	X4 X8 X9 X10	4,760	0,055	0,566	0,233	0,023	-4.614	3,41	2,32E-03
39	X3 X8 X9 X10	4,756	0,109	0,487	0,216	0,095	-5.759	2,62	1,78E-03
40	X2 X8 X9 X10	4,817	0,079	0,414	0,182	0,142	-4.326	3,42	2,33E-03

Keturių akcijų kointegruoti su indeksu portfeliai

Nr.	Portfelis iš akcijų	Svoriai			
1	X1 X2 X3 X10	27%	18%	9%	45%
2	X1 X2 X4 X8	9%	12%	14%	66%
3	X1 X2 X4 X10	31%	22%	9%	38%
4	X1 X2 X5 X10	22%	14%	46%	18%
5	X1 X2 X6 X10	8%	25%	21%	45%
6	X1 X2 X7 X10	21%	25%	4%	50%
7	X1 X2 X8 X10	7%	17%	44%	31%
8	X1 X2 X9 X10	21%	21%	18%	40%
9	X2 X3 X4 X8	11%	5%	10%	74%
10	X2 X3 X6 X10	21%	7%	30%	41%
11	X2 X3 X8 X10	12%	9%	57%	23%
12	X3 X4 X6 X8	11%	10%	16%	63%
13	X3 X4 X7 X8	5%	17%	13%	65%
14	X3 X4 X8 X9	10%	5%	61%	24%

15	X3 X4 X8 X10	13%	5%	73%	9%
16	X1 X3 X4 X8	12%	11%	11%	66%
17	X1 X3 X4 X10	41%	18%	6%	35%
18	X1 X3 X6 X10	23%	20%	18%	39%
19	X1 X3 X7 X10	30%	20%	6%	43%
20	X1 X3 X8 X10	13%	16%	48%	23%
21	X1 X3 X9 X10	27%	17%	26%	30%
22	X2 X4 X6 X8	11%	13%	15%	61%
23	X2 X4 X6 X10	26%	5%	32%	37%
24	X2 X4 X7 X8	5%	19%	13%	63%
25	X2 X4 X8 X9	7%	8%	63%	22%
26	X2 X4 X8 X10	16%	7%	62%	15%
27	X3 X5 X8 X9	6%	30%	48%	16%
28	X4 X6 X8 X9	8%	5%	63%	23%
29	X4 X6 X8 X10	10%	18%	63%	9%
30	X1 X4 X8 X9	2%	8%	64%	26%
31	X1 X4 X8 X10	16%	11%	61%	11%
32	X3 X6 X8 X10	15%	17%	47%	21%
33	X4 X7 X8 X9	17%	12%	64%	7%
34	X4 X7 X8 X10	17%	15%	62%	6%
35	X2 X6 X8 X10	16%	15%	39%	30%
36	X2 X6 X9 X10	24%	26%	10%	40%
37	X3 X7 X8 X10	15%	7%	57%	22%
38	X4 X8 X9 X10	6%	65%	27%	3%
39	X3 X8 X9 X10	12%	54%	24%	10%
40	X2 X8 X9 X10	10%	51%	22%	17%

Penkių akcijų kointegruoti su indeksu portfeliai

Nr.	Portfelis iš akcijų	$\widehat{\alpha}_0$	$\widehat{\alpha}_1$	$\widehat{\alpha}_2$	$\widehat{\alpha}_3$	$\widehat{\alpha}_4$	$\widehat{\alpha}_5$	ADF(1)	RRS	Liekanų dispersija
1	X1X2X3X4X8	4,591	0,086	0,075	0,054	0,112	0,588	-5,690	4,08	0,003
2	X1X2X3X4X10	4,603	0,294	0,168	0,056	0,068	0,346	-5,384	5,30	0,004

3	X1X2X3X6X10	4,996	0,112	0,160	0,083	0,170	0,376	-4,934	5,33	0,004
4	X1X2X3X7X10	4,683	0,212	0,156	0,086	0,029	0,407	-4,846	5,93	0,004
5	X1X2X3X8X10	4,674	0,102	0,091	0,101	0,398	0,258	-5,217	3,83	0,003
6	X1X2X3X9X10	4,728	0,208	0,116	0,092	0,150	0,324	-4,814	5,34	0,004
7	X1X2X4X6X10	4,908	0,155	0,189	0,068	0,141	0,316	-4,897	5,00	0,003
8	X1X2X4X7X10	4,607	0,208	0,148	0,114	0,080	0,288	-5,034	4,51	0,003
9	X1X2X4X8X9	4,734	0,013	0,054	0,072	0,516	0,180	-5,160	3,07	0,002
10	X1X2X4X8X10	4,630	0,129	0,122	0,085	0,399	0,173	-5,612	3,22	0,002
11	X1X2X4X9X10	4,681	0,239	0,170	0,064	0,085	0,299	-4,787	5,29	0,004
12	X2X3X4X6X8	4,855	0,063	0,060	0,104	0,139	0,551	-5,822	3,34	0,002
13	X2X3X4X6X10	5,172	0,189	0,040	0,034	0,268	0,312	-4,787	5,43	0,004
14	X2X3X4X7X8	4,577	0,024	0,032	0,148	0,109	0,541	-7,012	2,09	0,001
15	X2X3X4X8X9	4,722	0,002	0,085	0,046	0,544	0,212	-6,055	2,62	0,002
16	X2X3X4X8X10	4,654	0,111	0,046	0,054	0,551	0,130	-5,506	3,74	0,003
17	X2X3X5X8X9	4,574	0,048	0,028	0,340	0,428	0,113	-4,738	0,80	0,001
18	X2X3X6X8X10	4,954	0,078	0,102	0,150	0,380	0,236	-5,534	3,05	0,002
19	X2X3X6X9X10	5,148	0,158	0,063	0,224	0,079	0,309	-4,553	5,48	0,004
20	X2X3X7X8X10	4,701	0,073	0,091	0,049	0,450	0,225	-4,914	3,64	0,002
21	X2X3X8X9X10	4,758	0,011	0,104	0,476	0,208	0,102	-5,735	2,62	0,002
22	X3X4X6X8X9	4,799	0,089	0,058	0,057	0,526	0,179	-6,112	2,49	0,002
23	X3X4X6X8X10	4,922	0,127	0,059	0,185	0,534	0,136	-6,006	2,99	0,002
24	X3X4X7X8X9	4,622	0,055	0,117	0,084	0,535	0,080	-6,856	2,00	0,001
25	X3X4X7X8X10	4,574	0,058	0,125	0,113	0,532	0,074	-7,115	1,91	0,001
26	X3X4X8X9X10	4,726	0,096	0,029	0,522	0,207	0,059	-6,110	2,48	0,002
27	X1X3X4X6X10	4,830	0,324	0,210	0,057	0,182	0,397	-4,594	8,02	0,005
28	X1X3X4X7X8	4,563	0,004	0,047	0,150	0,115	0,564	-6,988	2,14	0,001
29	X1X3X4X7X10	4,489	0,315	0,132	0,129	0,120	0,323	-4,562	6,36	0,004
30	X1X3X4X8X9	4,709	0,022	0,087	0,053	0,533	0,205	-6,101	2,60	0,002
31	X1X3X4X8X10	4,543	0,181	0,133	0,076	0,522	0,168	-6,013	3,63	0,002
32	X1X3X4X9X10	4,666	0,296	0,164	0,025	0,239	0,288	-4,590	6,39	0,004
33	X1X3X5X8X9	4,540	0,065	0,065	0,355	0,415	0,126	-4,705	0,76	0,001
34	X1X3X6X9X10	4,809	0,230	0,173	0,062	0,234	0,302	-4,423	6,40	0,004
35	X1X3X7X8X10	4,654	0,054	0,149	0,054	0,496	0,234	-4,908	4,00	0,003
36	X1X3X7X9X10	4,705	0,248	0,167	0,019	0,238	0,306	-4,449	6,42	0,004
37	X1X3X8X9X10	4,745	0,031	0,115	0,457	0,204	0,118	-5,785	2,59	0,002
38	X2X4X6X7X10	5,048	0,187	0,065	0,201	0,046	0,287	-4,481	5,35	0,004
39	X2X4X6X8X9	4,819	0,058	0,081	0,058	0,501	0,147	-5,187	2,95	0,002
40	X2X4X6X8X10	4,922	0,115	0,074	0,147	0,404	0,151	-5,667	2,69	0,002

41	X2X4X6X9X10	5,157	0,198	0,038	0,241	0,035	0,292	-4,529	5,51	0,004
42	X2X4X7X8X9	4,615	0,035	0,143	0,097	0,516	0,038	-6,481	2,13	0,001
43	X2X4X7X8X10	4,611	0,057	0,127	0,103	0,466	0,087	-6,818	1,87	0,001
44	X2X4X8X9X10	4,745	0,073	0,051	0,480	0,161	0,074	-5,189	2,88	0,002
45	X3X5X6X8X9	4,659	0,066	0,319	0,053	0,447	0,124	-4,818	0,83	0,001
46	X3X5X7X8X9	4,533	0,050	0,382	0,046	0,424	0,083	-4,600	0,51	0,000
47	X4X6X8X9X10	4,844	0,064	0,060	0,540	0,196	0,041	-4,514	3,29	0,002
48	X1X4X7X8X10	4,577	0,021	0,152	0,123	0,528	0,062	-6,155	2,21	0,001
49	X1X4X8X9X10	4,741	0,035	0,063	0,541	0,218	0,039	-4,572	3,37	0,002
50	X3X6X7X8X10	4,898	0,153	0,137	0,023	0,480	0,220	-5,195	3,55	0,002
51	X3X6X8X9X10	4,855	0,120	0,067	0,446	0,176	0,128	-5,804	2,46	0,002
52	X4X7X8X9X10	4,614	0,135	0,110	0,529	0,046	0,049	-6,010	2,17	0,001
53	X2X6X7X8X10	4,974	0,137	0,124	0,002	0,335	0,258	-4,424	3,83	0,003
54	X3X7X8X9X10	4,751	0,110	0,016	0,468	0,194	0,114	-5,678	2,57	0,002

Penkių normuotų svorių akcijų kointegruoti su indeksu portfeliai

Nr.	Portfelis iš akcijų	Svoriai				
1	X1X2X3X4X8	9%	8%	6%	12%	64%
2	X1X2X3X4X10	32%	18%	6%	7%	37%
3	X1X2X3X6X10	12%	18%	9%	19%	42%
4	X1X2X3X7X10	24%	18%	10%	3%	46%
5	X1X2X3X8X10	11%	10%	11%	42%	27%
6	X1X2X3X9X10	23%	13%	10%	17%	36%
7	X1X2X4X6X10	18%	22%	8%	16%	36%
8	X1X2X4X7X10	25%	18%	14%	10%	34%
9	X1X2X4X8X9	1%	6%	9%	62%	22%
10	X1X2X4X8X10	14%	13%	9%	44%	19%
11	X1X2X4X9X10	28%	20%	7%	10%	35%
12	X2X3X4X6X8	7%	7%	11%	15%	60%
13	X2X3X4X6X10	22%	5%	4%	32%	37%
14	X2X3X4X7X8	3%	4%	17%	13%	63%
15	X2X3X4X8X9	0%	10%	5%	61%	24%
16	X2X3X4X8X10	12%	5%	6%	62%	15%
17	X2X3X5X8X9	5%	3%	35%	45%	12%

18	X2X3X6X8X10	8%	11%	16%	40%	25%
19	X2X3X6X9X10	19%	8%	27%	10%	37%
20	X2X3X7X8X10	8%	10%	5%	51%	25%
21	X2X3X8X9X10	1%	12%	53%	23%	11%
22	X3X4X6X8X9	10%	6%	6%	58%	20%
23	X3X4X6X8X10	12%	6%	18%	51%	13%
24	X3X4X7X8X9	6%	13%	10%	61%	9%
25	X3X4X7X8X10	6%	14%	13%	59%	8%
26	X3X4X8X9X10	10%	3%	57%	23%	6%
27	X1X3X4X6X10	28%	18%	5%	16%	34%
28	X1X3X4X7X8	0%	5%	17%	13%	64%
29	X1X3X4X7X10	31%	13%	13%	12%	32%
30	X1X3X4X8X9	2%	10%	6%	59%	23%
31	X1X3X4X8X10	17%	12%	7%	48%	16%
32	X1X3X4X9X10	29%	16%	2%	24%	28%
33	X1X3X5X8X9	6%	6%	35%	40%	12%
34	X1X3X6X9X10	23%	17%	6%	23%	30%
35	X1X3X7X8X10	6%	15%	5%	50%	24%
36	X1X3X7X9X10	25%	17%	2%	24%	31%
37	X1X3X8X9X10	3%	12%	49%	22%	13%
38	X2X4X6X7X10	24%	8%	26%	6%	36%
39	X2X4X6X8X9	7%	10%	7%	59%	17%
40	X2X4X6X8X10	13%	8%	16%	45%	17%
41	X2X4X6X9X10	25%	5%	30%	4%	36%
42	X2X4X7X8X9	4%	17%	12%	62%	5%
43	X2X4X7X8X10	7%	15%	12%	55%	10%
44	X2X4X8X9X10	9%	6%	57%	19%	9%
45	X3X5X6X8X9	7%	32%	5%	44%	12%
46	X3X5X7X8X9	5%	39%	5%	43%	8%
47	X4X6X8X9X10	7%	7%	60%	22%	5%
48	X1X4X7X8X10	2%	17%	14%	60%	7%

49	X1X4X8X9X10	4%	7%	60%	24%	4%
50	X3X6X7X8X10	15%	14%	2%	47%	22%
51	X3X6X8X9X10	13%	7%	48%	19%	14%
52	X4X7X8X9X10	16%	13%	61%	5%	6%
53	X2X6X7X8X10	16%	14%	0%	39%	30%

Šešių akcijų kointegruoti su indeksu portfeliai

Nr.	Portfelis iš akcijų	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$	ADF(1)	RRS	Liekanų dispersija
1	X1X2X3X4X 6X10	4,884	0,172	0,161	0,057	0,057	0,142	0,327	-5,190	4,79	3,3E-03
2	X1X2X3X4X7X10	4,591	0,222	0,133	0,035	0,106	0,076	0,297	-5,226	4,44	3,0E-03
3	X1X2X3X4X8X9	4,709	0,022	0,000	0,087	0,053	0,533	0,204	-6,100	2,60	1,8E-03
4	X1X2X3X4X8X10	4,599	0,146	0,087	0,068	0,073	0,409	0,183	-6,346	2,92	2,0E-03
5	X1X2X3X4X9X10	4,661	0,252	0,131	0,068	0,049	0,104	0,304	-5,108	5,00	3,4E-03
6	X1X2X3X5X8X10	4,482	0,112	0,081	0,027	0,407	0,311	0,087	-4,812	0,69	4,7E-04
7	X1X2X3X6X9X10	4,928	0,128	0,127	0,087	0,115	0,100	0,329	-4,772	5,08	3,5E-03
8	X1X2X3X7X8X10	4,687	0,051	0,072	0,100	0,038	0,408	0,247	-5,071	3,56	2,4E-03
9	X1X2X3X7X9X10	4,729	0,198	0,114	0,091	0,010	0,142	0,327	-4,770	5,32	3,6E-03
10	X1X2X3X8X9X10	4,746	0,031	0,011	0,109	0,445	0,195	0,125	-5,766	2,58	1,8E-03
11	X1X2X4X6X7X10	4,623	0,203	0,149	0,112	0,008	0,078	0,288	-5,016	4,51	3,1E-03
12	X1X2X4X6X8X10	4,916	0,004	0,115	0,075	0,144	0,402	0,152	-5,669	2,69	1,8E-03
13	X1X2X4X6X9X10	4,897	0,155	0,180	0,063	0,125	0,032	0,304	-4,791	4,98	3,4E-03
14	X1X2X4X7X8X10	4,604	0,034	0,059	0,128	0,096	0,436	0,102	-6,851	1,83	1,2E-03
15	X1X2X4X8X9X10	4,709	0,064	0,080	0,065	0,425	0,127	0,108	-5,354	2,76	1,9E-03
16	X2X3X4X6X8X9	4,800	0,005	0,085	0,059	0,058	0,522	0,175	-6,110	2,49	1,7E-03
17	X2X3X4X6X8X10	4,915	0,080	0,068	0,060	0,158	0,421	0,157	-6,420	2,39	1,6E-03
18	X2X3X4X7X8X9	4,621	0,008	0,049	0,120	0,084	0,529	0,074	-6,872	1,99	1,4E-03
19	X2X3X4X7X 8X10	4,598	0,040	0,035	0,119	0,101	0,481	0,090	-7,247	1,78	1,2E-03
20	X2X3X4X8X9X10	4,726	0,021	0,083	0,031	0,504	0,190	0,069	-6,101	2,45	1,7E-03
21	X2X3X5X6X8X10	4,698	0,082	0,026	0,362	0,098	0,356	0,068	-4,750	0,72	4,9E-04
22	X2X3X5X7X8X10	4,508	0,060	0,015	0,415	0,055	0,364	0,049	-4,744	0,39	2,7E-04
23	X2X3X5X8X9X10	4,574	0,049	0,028	0,338	0,427	0,112	0,003	-4,762	0,80	5,5E-04
24	X2X3X6X7X8X10	4,945	0,077	0,102	0,144	0,003	0,380	0,236	-5,510	3,05	2,1E-03
25	X2X3X6X8X9X10	4,865	0,020	0,109	0,072	0,423	0,157	0,142	-5,792	2,43	1,7E-03
26	X2X3X7X8X9X10	4,752	0,008	0,106	0,016	0,460	0,189	0,119	-5,664	2,56	1,7E-03
27	X3X4X6X7X8X10	4,598	0,061	0,123	0,013	0,108	0,526	0,078	-7,081	1,91	1,3E-03

28	X3X4X6X8X9X10	4,846	0,104	0,039	0,089	0,480	0,150	0,089	-6,313	2,21	1,5E-03
29	X3X4X7X8X9X10	4,622	0,064	0,101	0,087	0,508	0,068	0,067	-7,014	1,81	1,2E-03
30	X1X3X4X6X8X10	4,868	0,039	0,128	0,063	0,161	0,513	0,146	-6,048	2,96	2,0E-03
31	X1X3X4X7X8X10	4,562	0,052	0,066	0,125	0,102	0,488	0,097	-7,275	1,83	1,2E-03
32	X1X3X4X8X9X10	4,686	0,069	0,102	0,042	0,469	0,176	0,093	-6,355	2,34	1,6E-03
33	X1X3X5X8X9X10	4,536	0,080	0,070	0,341	0,399	0,119	0,029	-4,983	0,73	5,0E-04
34	X1X3X7X8X9X10	4,746	0,016	0,113	0,013	0,455	0,192	0,122	-5,706	2,56	1,7E-03
35	X2X4X6X7X8X10	4,623	0,058	0,126	0,006	0,100	0,462	0,089	-6,791	1,86	1,3E-03
36	X2X4X6X8X9X10	4,884	0,090	0,065	0,103	0,415	0,082	0,117	-5,464	2,54	1,7E-03
37	X2X4X7X8X9X10	4,614	0,056	0,126	0,101	0,466	0,006	0,086	-6,785	1,86	1,3E-03
38	X3X5X6X8X9X10	4,667	0,068	0,312	0,058	0,444	0,121	0,009	-4,899	0,83	5,6E-04
39	X3X5X7X8X9X10	4,535	0,052	0,371	0,049	0,421	0,079	0,016	-4,756	0,49	3,4E-04
40	X1X4X7X8X9X10	4,609	0,011	0,137	0,109	0,521	0,042	0,054	-6,002	2,17	1,5E-03
41	X3X6X7X8X9X10	4,853	0,119	0,066	0,001	0,446	0,175	0,128	-5,798	2,46	1,7E-03

Šešių akcijų kointegruoti su indeksu portfeliai

Nr.	Portfelis iš akcijų	Svoriai					
1	X1X2X3X4X6X10	19%	18%	6%	6%	15%	36%
2	X1X2X3X4X7X10	26%	15%	4%	12%	9%	34%
3	X1X2X3X4X8X9	2%	0%	10%	6%	59%	23%
4	X1X2X3X4X8X10	15%	9%	7%	8%	42%	19%
5	X1X2X3X4X9X10	28%	14%	7%	5%	11%	34%
6	X1X2X3X5X8X10	11%	8%	3%	40%	30%	9%
7	X1X2X3X6X9X10	14%	14%	10%	13%	11%	37%
8	X1X2X3X7X8X10	6%	8%	11%	4%	45%	27%
9	X1X2X3X7X9X10	22%	13%	10%	1%	16%	37%
10	X1X2X3X8X9X10	3%	1%	12%	49%	21%	14%
11	X1X2X4X6X7X10	24%	18%	13%	1%	9%	34%
12	X1X2X4X6X8X10	0%	13%	8%	16%	45%	17%
13	X1X2X4X6X9X10	18%	21%	7%	15%	4%	35%
14	X1X2X4X7X8X10	4%	7%	15%	11%	51%	12%
15	X1X2X4X8X9X10	7%	9%	7%	49%	15%	12%
16	X2X3X4X6X8X9	1%	9%	7%	6%	58%	19%
17	X2X3X4X6X8X10	8%	7%	6%	17%	45%	17%

18	X2X3X4X7X8X9	1%	6%	14%	10%	61%	9%
19	X2X3X4X7X8X10	5%	4%	14%	12%	56%	10%
20	X2X3X4X8X9X10	2%	9%	3%	56%	21%	8%
21	X2X3X5X6X8X10	8%	3%	36%	10%	36%	7%
22	X2X3X5X7X8X10	6%	2%	43%	6%	38%	5%
23	X2X3X5X8X9X10	5%	3%	35%	45%	12%	0%
24	X2X3X6X7X8X10	8%	11%	15%	0%	40%	25%
25	X2X3X6X8X9X10	2%	12%	8%	46%	17%	15%
26	X2X3X7X8X9X10	1%	12%	2%	51%	21%	13%
27	X3X4X6X7X8X10	7%	13%	1%	12%	58%	9%
28	X3X4X6X8X9X10	11%	4%	9%	51%	16%	9%
29	X3X4X7X8X9X10	7%	11%	10%	57%	8%	8%
30	X1X3X4X6X8X10	4%	12%	6%	15%	49%	14%
31	X1X3X4X7X8X10	6%	7%	13%	11%	52%	10%
32	X1X3X4X8X9X10	7%	11%	4%	49%	18%	10%
33	X1X3X5X8X9X10	8%	7%	33%	38%	11%	3%
34	X1X3X7X8X9X10	2%	12%	1%	50%	21%	13%
35	X2X4X6X7X8X10	7%	15%	1%	12%	55%	11%
36	X2X4X6X8X9X10	10%	7%	12%	48%	9%	13%
37	X2X4X7X8X9X10	7%	15%	12%	55%	1%	10%
38	X3X5X6X8X9X10	7%	31%	6%	44%	12%	1%
39	X3X5X7X8X9X10	5%	38%	5%	43%	8%	2%
40	X1X4X7X8X9X10	1%	16%	12%	60%	5%	6%
41	X3X6X7X8X9X10	13%	7%	0%	48%	19%	14%

2PRIEDAS:

Dviejų akcijų kointegruoto su indeksu portfelio radimo programos tekstas

$ORIGIN := 1$

Nuskaitomos akciju logaritminiu kainu ir indekso bylos:

```
indeksas := READFILE("LNindeksas.txt" ,"delimited")
X1 := READFILE("LNalita.txt" ,"delimited")
X2 := READFILE("LNapranga.txt" ,"delimited")
X3 := READFILE("LNdkeramika.txt" ,"delimited")
X4 := READFILE("LNkbaldai.txt" ,"delimited")
X5 := READFILE("LN1dujos.txt" ,"delimited")
X6 := READFILE("LNljlaivininkyste.txt" ,"delimited")
X7 := READFILE("LNpstrestas.txt" ,"delimited")
X8 := READFILE("LNrstinklai.txt" ,"delimited")
X9 := READFILE("LNsbankas.txt" ,"delimited")
X10 := READFILE("LNzpienas.txt" ,"delimited")
```

$$X := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$$

masyvas reikalingas akciju kombinacijoms portfelyje skaiciuoti

Sukariama visu akciju matrica

$F := augment(X1, X2, X3, X4, X5, X6, X7, X8, X9, X10)$

Procedura visiems deriniams is 10 po du sudaryti

```
du(n, X) := | sk ← 0
            | s ← 0
            | k ← 0
            | for  j ∈ 1..n − 1
            |     | for  i ∈ 1..n − 1 − sk
            |     |     | M[s+i,1] ← X[i]
            |     |     | M[s+i,2] ← X[i+j]
            |     |     | k ← k + 1
            |     | s ← s + k
            |     | sk ← sk + 1
            |     | k ← 0
            | M
```

$du := du(10, X)$

Pagalbine matrica, reikalinga sprendziant MKM metodu

$$
\mathrm{MATRICA}(X) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..\mathrm{length}(\mathrm{indeksas}) \\ \quad \mathrm{matrica}_i \leftarrow 1 \\ \mathrm{matrica} \leftarrow \mathrm{augment}(\mathrm{matrica}, X) \end{array} \right.
$$

MKM procedura

$$
\mathrm{MKM}(y, X) := \left(X^T \cdot X\right)^{-1} X^T \cdot y
$$

Liekamuju regresijos liekanu kvadratu sumos peocedura

$$
\mathrm{RRS}(y, X, b) := y^T y - b^T X^T y
$$

Procedura sukurianti liekanu matrica, reikalinga skaiciuojant ADFkriteriju

$$
D(F, n) := \left| \begin{array}{l} \text{for } t \in 1..1 \\ \quad \text{for } i \in 1..\mathrm{length}(F) - n \\ \quad\quad \left| \begin{array}{l} D_{t,i} \leftarrow F_{i+2} - F_{i+1} \\ D_{t+1,i} \leftarrow F_{n+i-1} \\ D_{t+2,i} \leftarrow F_{i+1} - F_i \end{array} \right. \\ D \end{array} \right.
$$

Procedura regresoriu dispersijos iverciu skaiciavimu tiek vienalypes, tiek daugialypes regresijos atveju

$$
SB(n,m,RRS) := \left[\begin{array}{l}
SB \leftarrow \sqrt{\dfrac{RRS}{\left(\mathrm{length}\left(m^{\langle 1\rangle}\right)-2\right)\cdot\left(\mathrm{length}\left(m^{\langle 1\rangle}\right)-1\right)\cdot \mathrm{Var}\left(m^{\langle 2\rangle}\right)}} \quad \text{if } n = 1 \\
\text{otherwise} \\
\quad \text{for } i \in 1..n-1 \\
\quad\quad Y \leftarrow m^{\langle i+1\rangle} \\
\quad\quad X \leftarrow \mathrm{augment}\left[\mathrm{submatrix}\left(m,1,\mathrm{length}\left(m^{\langle 1\rangle}\right),1,i\right),\mathrm{submatrix}\left[m,1,\mathrm{length}\left(m^{\langle 1\rangle}\right),i+2,\mathrm{length}\left[\left(m^{T}\right)^{\langle 1\rangle}\right]\right]\right] \\
\quad\quad b \leftarrow \left((X)^{T}\cdot X\right)^{-1}\cdot(X)^{T}\cdot Y \\
\quad\quad rrs \leftarrow (Y)^{T}\cdot Y-(b)^{T}\cdot(X)^{T}\cdot Y \\
\quad\quad SB_{i} \leftarrow \sqrt{\dfrac{RRS}{\left(\mathrm{length}\left(m^{\langle 1\rangle}\right)-n-1\right)\cdot rrs}} \\
\quad YY \leftarrow m^{\langle i+2\rangle} \\
\quad XX \leftarrow \mathrm{submatrix}\left(m,1,\mathrm{length}\left(m^{\langle 1\rangle}\right),1,i+1\right) \\
\quad bb \leftarrow \left((XX)^{T}\cdot XX\right)^{-1}\cdot(XX)^{T}\cdot YY \\
\quad rrrrss \leftarrow (YY)^{T}\cdot YY-(bb)^{T}\cdot(XX)^{T}\cdot YY \\
\quad SB_{i+1} \leftarrow \sqrt{\dfrac{RRS}{\left(\mathrm{length}\left(m^{\langle 1\rangle}\right)-n-1\right)\cdot rrrrss}} \\
SB
\end{array}\right]
$$

Procedura regresoriu reiksmingumo statistikai, turinciai Stjudento pasiskirstyma, skaiciuoti

$$
T(n,sb,b) := \left(\begin{array}{l}
t \leftarrow \dfrac{b_{2}}{sb} \quad \text{if } n = 1 \\
\text{for } i \in 1..n \quad \text{otherwise} \\
\quad t_{i} \leftarrow \dfrac{b_{i+1}}{sb_{i}} \\
t
\end{array}\right)
$$

```
programa := | ss ← 1
            | min ← 999
            | for p ∈ 1..length(du⟨1⟩)
            |   | DU ← augment(F⟨du_{p,1}⟩, F⟨du_{p,2}⟩)
            |   | B ← MKM(indeksas, MATRICA(DU))
            |   | if B_1 > 0 ∧ B_2 > 0
            |   |   | R ← RRS(indeksas, MATRICA(DU), B)
            |   |   | edu ← | for i ∈ 1..length(indeksas)
            |   |   |       |   e_i ← indeksas_i − B_1 − DU_{i,1}·B_2 − B_3·DU_{i,2}
            |   |   |       | e
            |   |   | paklaidos ← edu
            |   |   | Duomenys ← D(paklaidos, 2)^T
            |   |   | y ← Duomenys⟨1⟩
            |   |   | X1 ← Duomenys⟨2⟩
            |   |   | X2 ← Duomenys⟨3⟩
            |   |   | matrix(y) ← | for i ∈ 1..length(y)
            |   |   |             |   matrica_i ← 1
            |   |   |             | matrica ← augment(matrica, augment(X1, X2))
            |   |   | m ← matrix(y)
            |   |   | b ← MKM(y, m)
            |   |   | r ← RRS(y, m, b)
            |   |   | sb ← SB(2, m, r)
            |   |   | t ← T(2, sb, b)
            |   |   | if t_1 < −3.3377
```

Dvieju akciju kombinaciju taikymas kointegracijos regresijos lygtyje

Kointegracijos regresijos lygties paklaidu skaiciavimas

ADF kriterijaus liekanoms skaiciavimas

Kritine ADF reiksme, kai integruotu kintamuju skaicius du, yra -3,3377

$$
\begin{aligned}
&ss \leftarrow ss + 1\\
&S_{ss,1} \leftarrow p\\
&S_{ss,2} \leftarrow B_1\\
&S_{ss,3} \leftarrow B_2\\
&S_{ss,4} \leftarrow B_3\\
&S_{ss,5} \leftarrow t_1\\
&S_{ss,6} \leftarrow R\\
&\text{if } S_{ss,6} < \min\\
&\quad S_{1,1} \leftarrow S_{ss,6}\\
&\quad S_{1,2} \leftarrow p\\
&\quad S_{1,3} \leftarrow ss\\
&\quad \min \leftarrow S_{ss,6}\\
&S_{ss,7} \leftarrow \mathrm{var}(edu)\\
&S
\end{aligned}
$$

Uzpildoma programos sprendinio matrica. Joje nurodomas optimalaus portfelio adresas dvieju akciju visu kombinaciju matricoje,kointegracijos regresijos lygties parametrai, ADF kriterijaus reiksme, liekamuju regresijos paklaidu kvadratu suma ir paklaidu dispersija

$$
programa = \begin{pmatrix}
4.586 & 8 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
8 & 4.875 & 0.509 & 0.292 & -3.614 & 4.586 & 3.117 \times 10^{-3}\\
28 & 4.614 & 0.105 & 0.876 & -4.274 & 6.833 & 4.645 \times 10^{-3}\\
33 & 4.683 & 0.166 & 0.779 & -4.147 & 7.304 & 4.965 \times 10^{-3}\\
44 & 4.764 & 0.321 & 0.359 & -3.848 & 10.448 & 7.102 \times 10^{-3}
\end{pmatrix}
$$