



**KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS**  
**FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS**  
**TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA**

**Gintė Damijonaitienė**

**EISMO SRAUTŲ MEZOSKOPINIS**  
**MODELIAVIMAS**

Magistro darbas

**Vadovas**  
**prof. P. Ilgakojis**

**KAUNAS, 2005**



**KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS**  
**FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS**  
**TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA**

**TVIRTINU**  
**Katedros vedėjas**  
**prof. dr. J.Rimas**  
**2005 06 09**

**EISMO SRAUTŲ MEZOSKOPINIS**  
**MODELIAVIMAS**

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

**Kalbos konsultantas**  
**(parašas) dr. J. Džežulskienė**  
**2005 05 30**

**Recenzentas**  
**(parašas) doc.dr. D. Markšaitis**  
**2005 06 01**

**Vadovas**  
**(parašas) prof. P. Ilgakojis**  
**2005 06 03**

**Atliko**  
**FMMM 3 gr. stud.**  
**(parašas) G. Damijonaitienė**  
**2005 05 27**

**KAUNAS, 2005**

## KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

**Pirmininkas:** Leonas Saulis, profesorius (VGTU)

**Sekretorius:** Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)

**Nariai:** Algimantas Jonas Aksomaitis, profesorius (KTU)

Vytautas Janilionis, docentas (KTU)

Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU)

Rimantas Rudzkis, banko NORD/LB vyriausiasis analitikas

Zenonas Navickas, profesorius (KTU)

Arūnas Barauskas, UAB „Elsis“ generalinio direktoriaus pavaduotojas

Damijonaitienė G. Mesoscopic traffic flow modelling: Master's work in applied mathematics / supervisor dr. prof. P. Ilgakojis; Department of Applied mathematics, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2005. – 49 p.

## SUMMARY

In contemporary traffic flow theory, the distinction between user classes is rarely made. However, the accuracy and the descriptive power of the macroscopic traffic flow models can be improved significantly by separating user – classes and their specific flow characteristics. Additionally, the availability of a realistic multiple user – class traffic flow model enables the automated generation of user – dedicated traffic control policies by means of mathematical optimal control theory. A macroscopic multiple user – class model is derived from mesoscopic principles.

In this paper there are analysed such a multiple user – class traffic flow model. Starting point for the analysis of the macroscopic flow model is the user – class specific phase – space density, which can be considered as a generalization of the traditional density.

The gas – kinetic equations describing the dynamic of the multiclass Phase – Space Density (MUC - PSD) are governed by various interactions processes, such as accelerations towards a class – specific desired velocity, deceleration caused by vehicle interactions and the influence of lane changing. The gas – kinetic equations serve as the foundation of the proposed macroscopic traffic flow models, describing the dynamic of the class – dependent spatial density, velocity and velocity variance. These relations show competing processes: on the one hand, drivers accelerate towards their class – dependent desired velocity, while on the other hand, they need to decelerate due to interactions with vehicles from their own class, with slower vehicles. These processes can result in self-formation of apparently random local structures.

In this paper there are distinguished such user – classes: cars and trucks. There are compared their characteristics using modeling data and real data and there are visualized changes of mesoscopic characteristics.

## TURINYS

Ižanga.....	7
1. Teorinė dalis .....	8
1.1 Mezoskopinio eismo srauto modeliai .....	8
1.1.1 Priešakinio srauto pasiskirstymo modeliai .....	8
1.1.2 Klasteriniai modeliai .....	9
1.1.3 Prigogine'o ir Hermano kinetiniai dujų nenutrūkstami modeliai .....	9
1.1.4 Patobulintas Paverio – Fontanos kinetinis dujų modelis.....	11
1.1.5 Helbingo kinetinės dujų daugiajuostės lygtys .....	12
1.1.6 Bendri kinetiniai dujų modeliai ir sujungtas daugiajuostis daugiaklasis modeliavimas ....	13
1.2 Sudėtinių vartotojų klasių transporto srautų modeliavimas.....	14
1.2.1 Sudėtinės vartotojų klasės kinetinės dujų lygtys .....	14
1.2.2 Dujų kinetinė ir speciali tolydumo lygtis .....	16
1.2.3 Supaprastintos sudėtinių vartotojų klasių Paverio-Fontanos lygtys .....	19
1.2.4 Makroskopinis SVK transporto srautų modelis.....	19
1.2.5 Apytikslės, artimos viena kitai lygtys .....	23
1.2.6 Papildomi modelio patobulinimai.....	25
2. Tiriamoji dalis.....	29
2.1 Diferencialinės lygties sprendimas.....	29
2.2 Fundamentalioji eismo diagrama .....	30
2.3 Eismo tankio ir prisitaikymo laiko priklausomybė .....	33
2.4 Lengvųjų automobilių ir sunkvežimių miesto segmento eismo tankio lyginimas.....	35
2.5 Lengvųjų automobilių ir sunkvežimių užmiesčio segmento eismo tankio lyginimas.....	37
Išvados .....	38
Literatūra.....	39
1 Priedas. Pradiniai Duomenys .....	41
2 Priedas. Programų tekstai.....	41
3 Priedas. Tarptautinės konferencijos pranešimų medžiaga.....	46

## PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

1.1 pav. Pasikeitimai FET dėl transporto priemonių įsiliejimo į srautą ir išvažiavimo iš jo .....	15
2.1 pav. Modelio sudarymo schema .....	29
2.2 pav. Fundamentalios eismo diagramos (FED) padalinimas į nagrinėjamas sritis: I. $\rho < \rho_1$ , II. $\rho_1 < \rho < \rho_2$ , III. $\rho > \rho_2$ .....	31
2.3 pav. Eksponentinė funkcija .....	32
2.4 pav. Hiperbolinė funkcija .....	32
2.5 pav. Lengvųjų automobilių tankis, esant skirtingiems prisitaikymo laikams (pradiniai duomenys parinkti atsitiktinai) .....	33
2.6 pav. Lengvųjų automobilių tankis, esant skirtingiems prisitaikymo laikams (pradiniai duomenys generuoti pagal normalųjį skirstinį) .....	34
2.7 pav. Lengvųjų automobilių tankis, esant skirtingiems prisitaikymo laikams (pradiniai duomenys generuoti pagal tolygųjį skirstinį) .....	34
2.8 pav. Lengvųjų automobilių tankis, esant skirtingiems prisitaikymo laikams (pradiniai duomenys yra realūs) .....	35
2.9 pav. Lengvųjų automobilių ir sunkvežimių tankis (pradiniai duomenys parinkti atsitiktinai) .....	36
2.10 pav. Lengvųjų automobilių ir sunkvežimių tankis (pradiniai duomenys yra realūs) .....	36
2.11 pav. Lengvųjų automobilių ir sunkvežimių tankis (pradiniai duomenys parinkti atsitiktinai) .....	37

## IŽANGA

Šiuo metu, kai transporto priemonių skaičius keliuose sparčiai auga, vis aktualesnė tampa eismo srautų optimizavimo problema. Užsienio šalyse, kuriose ši problema sprendžiama jau seniai ir kuriose yra sukaupta nemaža patirties, įrodyta, jog būtina daug dėmesio skirti eismo srautų optimizavimui, kamščių gatvėse susidarymo prielaidų nustatymui ir prognozei. Eismo srautų tolygumo užtikrinimas yra viena iš miesto oro kokybės gerinimo priemonių, kadangi oro užterštumas miestuose tiesiogiai priklauso nuo automobilių susigrūdimų lygių gatvėse. Todėl daug dėmesio turi būti skiriama tokioms eismo situacijoms prognozuoti ir jų trukmei trumpinti.

Šio darbo tikslas – sudaryti mezoskopinio eismo matematinį modelį, išnagrinėti pagrindinių mezoskopinių charakteristikų pokyčių įtaką eismo tankiui, įvertinant sudėtinės vartotojų klases.

Šiame darbe nagrinėjamas mezoskopinis eismo srautas, kuriame transporto priemonės yra skirstomos į klases. Transporto priemonės į klases gali būti skirstomos pagal įvairius kriterijus, pvz.: automobilių geometrinius parametrus, pagreitėjimus bei lėtėjimus ir pan. Darbe transporto priemonės suskirstytos į tokias dvi klases: lengvieji automobiliai ir sunkvežimiai. Ištirti šių klasių charakteristikų, pageidaujamo greičio ir prisitaikymo laiko, pokyčiai, charakteristikos lygintos tarpusavyje.

Matematiniai tyrimai ir modeliavimas atlikti naudojant Maple 8, Matlab R12, Microsoft Office Excel 2003 programinius paketus.

Darbe pateikti tyrimai publikuoti tarptautinės konferencijos “Transporto priemonės - 2004” pranešimų medžiagoje.

## 1. TEORINĖ DALIS

### 1.1 MEZOSKOPINIO EISMO SRAUTO MODELIAI

Mezoskopinio eismo srauto modeliai aprašo eismo srautą smulkiai nedetalizuojant. Transporto priemonių judėjimas ir vairuotojų elgesys nėra žymimas ar aprašomas individualiai, bet labiau kaip bendras dėsnis (pvz.: naudojant tikimybinės pasiskirstymo funkcijas). Tačiau transporto priemonių judėjimo ir vairuotojų elgesio taisyklės yra apibūdinamos individualiai. Pavyzdžiui, kinetinis dujų modelis aprašo greičio pasiskirstymus apibrėžtoje vietoje ir nurodytu laiku. Paprastai šių pasiskirstymų dinamiką lemia įvairūs procesai (pvz.: pagreitis, sąveika tarp transporto priemonių), aprašantys individualią vairuotojų elgseną. Mezoskopinio eismo srauto modeliai yra trejopi:

1. priešakinio srauto pasiskirstymo modeliai;
2. klasteriniai modeliai;
3. kinetiniai dujų nenutrūkstami modeliai.

#### 1.1.1 PRIEŠAKINIO SRAUTO PASISKIRSTYMO MODELIAI

Priešakinio srauto trukmė yra apibrėžiama kaip laiko tarpas tarp dviejų vienas paskui kitą važiuojančių automobilių. Paprastai tariama, kad šios priešakinio srauto trukmės yra atsitiktiniai vienodai pasiskirstę nepriklausomi kintamieji. Priešakinio srauto modeliai yra mezoskopiniai modeliai, nes jie aprašo individualių transporto priemonių priešakinių srautų pasiskirstymą, tačiau neanalizuoja kiekvieną transporto priemonę atskirai.

Buckley'io dalinis Puasono modelis ir apibendrintas eilių modelis yra priešakinio srauto pasiskirstymo modelio pavyzdžiai. Mišrūs priešakinio srauto pasiskirstymo modeliai išskiria priešakinę ir atsiliekančią transporto priemonę: priešakinio srauto trukmės priešakinės transporto priemonės ir atsiliekančios transporto priemonės turi skirtingas tikimybinės funkcijas.

Priešakinio srauto pasiskirstymo modeliai buvo kritikuojami, nes nepakankamai atsižvelgiama į srauto dinamiką. Be to, pagal šiuos modelius visos transporto priemonės iš esmės yra tokios pat. Todėl tikimybinės pasiskirstymo funkcijos nepriklauso nuo vairuotojo tipo, transporto priemonės tipo, kelionės tikslo, vairavimo įgūdžių. Atsveriant šiuos trūkumus, Hoogendooras ir Bovis išvystė priešakinio srauto pasiskirstymo modelį daugiaklasiam eismo srautui ir daugiaklasiam daugiajuosčiam eismo srautui [2,6].



## 1.1.2 KLAŠTERINIAI MODELIAI

Klašterinių modelių pagrindinė charakteristika yra transporto priemonių klašteriai. Klašteris yra grupė transporto priemonių, kurios turi specifinę savybę. Gali būti analizuojami skirtingi klašteriu tipai. Paprastai klašterio dydis (transporto priemonių skaičius klašteryje) ir klašterio greitis yra dominuojančios svarbos kintamieji. Dažniausiai klašterio dydis yra dinaminis: klašteriai gali didėti ar mažėti. Klašterio viduje eismo sąlygos, pvz. priešakinis srautas, greičio skirtumai ir t.t., paprastai nėra detalčiai vertinamos ir neanalizuojamos atskirai. Paprastai klašteriai jungiami dėl ribotos lenkimo galimybės: dėl to, kad lenkti yra draudžiama, kad kitos transporto priemonės trukdo lenkti ar dėl vyraujančių oro sąlygų, ar supančios aplinkos sąlygų.

## 1.1.3 PRIGOGINE‘O IR HERMANO KINETINIAI DUJŲ NENUTRŪKSTAMI MODELIAI

Užuot aprašius individualių transporto priemonių eismo dinamiką, kinetiniai dujų eismo srauto modeliai aprašo transporto priemonių eismo sraute greičio pasiskirstymo funkcijos dinamiką. Šiame skyrelyje pirmiausia aptarsime pagrindinius Pigogine‘o ir Hermano modelius, po to kelis papildytus šio medelio pavyzdžius.

Kinetiniai dujų modeliai aprašo ribotos fazinės erdvės tankio (RFET)  $\tilde{\rho}(x,v,t)$  dinamiką. RFET gali būti aprašomas taip: laiko momentu  $t$  laukiamas transporto priemonių skaičius atvažiuoja į be galo mažą sritį  $[x,x+dx)$  greičiu  $[v,v+dv)$ , tankis lygus  $\tilde{\rho}(x,v,t)dx dv$ . RFET yra analogija iš statistinės fizikos, ir gali būti aprašomas kaip mezoskopinio eismo tankio apibendrinimas. RFET atspindi vienos transporto priemonės greičio pasiskirstymo funkciją. Pigogine‘as ir Hermanas taip pat pristatė ir dviejų transporto priemonių pasiskirstymo funkciją  $\tilde{\varphi}(x,v,x',v',t)$ , kuri gali būti aprašoma taip:  $\tilde{\varphi}(x,v,x',v',t)dx dv dx' dv'$  aprašo transporto priemonių porų skaičių, kur transporto priemonės nurodyta tvarka išsidėsčiusios  $[x,x+dx)$  ir  $[x',x'+dx')$  ir važiuoja greičiu  $[v,v+dv)$  ir  $[v',v'+dv')$  [4].

Pigogine‘as ir Hermanas nustatė, kad RFET dinaminis pokyčius sukelia šie procesai:

- Konvekcija. Transporto priemonės, važiuojančios greičiu  $v$ , įvažiuodamos ar išvažiuodamos iš kelio segmento  $[x,x+dx)$ , sukelia RFET  $\tilde{\rho}(x,v,t)$  pasikeitimų.
- Pagreitėjimas dėl norima greičio. Vairuotojas, važiuodamas transporto priemone mažesniu greičiu nei nori, jį didins, jei bus įmanoma.
- Sulėtėjimas dėl sąveikos tarp transporto priemonių. Transporto priemonė, kuri sąveikauja su lėtesne transporto priemone, turės sumažinti savo greitį, kol galės aplenkia.

Šie procesai aprašomi tokia dalinių išvestinių lygtimi:

$$\partial_t \tilde{\rho} + v \partial_x \tilde{\rho} = (\partial_t \tilde{\rho})_{acc} + (\partial_t \tilde{\rho})_{int}, \quad (1.1)$$

kur  $\partial_t \tilde{\rho} = \partial \tilde{\rho} / \partial t$ ,  $(\partial_t \tilde{\rho})_{acc}$  atspindi pokyčius, sukeltus pagreitėjimo dėl norimo greičio, o  $(\partial_t \tilde{\rho})_{int}$  pažymi pokyčius, sukeltus sąveikos tarp transporto priemonių [8].

### 1.1.3.1 SAŲVEIKOS PROCESAS

Prigogine'as apibrėžė, kad kai greitai važiuojantis automobilis (greitis  $v$ ) pasiekia lėtai judančią transporto priemonę (greitis  $w < v$ ), tai jis arba aplenks, arba sulėtins greitį iki  $w$ , kuriuo važiuoja lėtai judanti transporto priemonė. Yra priimtos tokios prielaidos:

- Sulėtinimo tikimybė yra  $1 - \pi$ , kai skubaus lenkimo -  $\pi$ . Lenkimas neturi įtakos greitai važiuojančios transporto priemonės greičiui  $v$ .
- Lėtai važiuojančios transporto priemonės greitis  $w$  nepriklauso nuo eismo sąlygų.
- Transporto priemonių ilgio galima nevertinti.
- Greitai važiuojanti transporto priemonė sulėtina akimirksniu.
- Sąveikos, veikiančios daugiau kaip dvi transporto priemonės, yra nevertinamos.

Remiantis šiomis prielaidomis, sąveikos trukmė aprašoma tai vadinama automobilių priartėjimo lygtimi:

$$(\partial_t \tilde{\rho})_{int} = (1 - \pi) \int (w - v) \tilde{\varphi}(x, v, x', w, t) dw. \quad (1.2)$$

Automobilių chaoso prielaida išreiškiama:

$$\tilde{\varphi}(x, v, x', v', t) = \tilde{\rho}(x, v, t) \cdot \tilde{\rho}(x', v', t). \quad (1.3)$$

Tuomet susidūrimo lygtį (2) perrašome taip:

$$(\partial_t \tilde{\rho})_{int} = (1 - \pi) \tilde{\rho}(x, v, t) \int (w - v) \tilde{\rho}(x, w, t) dw. \quad (1.4)$$

### 1.1.3.2 PAGREITĖJIMO PROCESAS

Pagreitėjimo procesas aprašo vairavimo greičio sumažėjimą, atsižvelgiant į vidutinį eismo srauto greitį. Pigogine'as ir Hermanas pasiūlė tokią išraišką:

$$(\partial_t \tilde{\rho})_{acc} = -\partial_v (\tilde{\rho} \cdot (\tilde{V}^o(v|x, t) - v) / \tau), \quad (1.5)$$

kur  $\tau$  pažymi pagreitėjimo laiką, o  $(\tilde{V}^o(v|x, t) - v)$  - pageidaujamo greičio pasiskirstymą [8].

### 1.1.4 PATOBULINTAS PAVERIO – FONTANOS KINETINIS DUJŲ MODELIS

Sąveikos trukmė daugiausia kritikuojama dėl automobilių chaoso prielaidos pagrįstumo, argumentuojant, kad priartėjimo trukmė svarbi tik tose situacijose kur nėra transporto priemonių spūsties. Paveris – Fontana aprašė hipotetinį scenarijų, kuriame laisvai judanti transporto priemonė pasiveja lėtai judančią eilę. Jis pateikė du kraštutinius:

- atvažiuojanti transporto priemonė aplenkia visą eilę, tartum tai būtų vienas automobilis;
- ji iš eilės aplenkia kiekvieną atskirai automobilių eilėje.

Paveris – Fontana parodė, kad Prigogine'o ir Hermano formalizmas atspindi atvejį, kai tikro gyvenimo situacijos išsiskverbia tarp šių dviejų kraštutinių. Jis taip pat parodė, kad narys, atspindintis pagreitėjimo procesą, gaunamas kaip pageidaujamo greičio pasiskirstymas, kuris priklauso nuo esamo transporto priemonių skaičiaus. Tai yra prieštaravimas gerai žinomai hipotezei, kad vairuotojų elgesys yra nesvarbus atsižvelgiant į besikeičiančias eismo sąlygas. Siekiant ištaisyti šį trūkumą, Paveris – Fontana aprašė fazinės erdvės tankį (FET)  $\rho(x, v, v^o, t)$ . Pastarasis gali būti apribotos fazinės erdvės tankio apibendrinimas su nepriklausomu kintamuoju, aprašančiu pageidaujamą greitį  $v^o$ . Paveris – Fontana pasiūlė naudoti (1.1) lygtį, kurioje:

$$(\partial_t \rho)_{acc} = -\partial_v(\rho \cdot (v^o - v) / \tau) \quad (1.6)$$

ir

$$(\partial_t \rho)_{int} = -\rho(v, v^o) \int_{w < v} (1 - \pi) |w - v| \tilde{\rho}(w) dw + \tilde{\rho}(v) \int_{w > v} (1 - \pi) |w - v| \rho(w, v^o) dw, \quad (1.7)$$

kur RFET lygus:

$$\tilde{\rho}(v) = \tilde{\rho}(x, v, t) \stackrel{def}{=} \int \rho(x, v, v^o, t) dv^o. \quad (1.8)$$

Kitas būdas patikslinti sąveikos kintamąjį yra pristatytas Beylicho, kur transporto priemonių skaičius grupėje yra laikomas kaip požymis. Šis būdas yra panašus į Hoogendooro būdą (1.6), kuris eismą aprašo kaip grupių rinkinį [12,18].

Kitas klausimas iškilęs tarp Nelsono ir kt. yra tas, kad tikėtinas greičio – tankio sąryšis gali būti nustatomas tik iš Prigogine'o – Hermano modelio, grindžiamo netrivialios prielaidos, kad pageidaujamo greičio pagrindinis pasiskirstymas nėra lygus nuliui nykstamai mažiems greičiams. Nelsonas ir Sopasakis tyrė situaciją, kai šios prielaidos nėra laikomasi. Buvo nustatyta, kad koncentracija apie kai kurias kritines reikšmes yra dviejų parametrų sprendinių šeima, ir reiškia kiekvieno susitelkimo baigtinį greičio vidurkį. Šis rezultatas turi įtakos aplenkimo tikimybės ir prisitaikymo laiko konstantų reikšmėms, ir reikšmėms, kurios priklauso nuo koncentracijų, pristatytų Prigogine'o ir Hermano [5].

### 1.1.4.1 KINETINIO DUJŲ DAUGIAKLASIO EISMO SRAUTO MODELIAVIMAS

Hoogendooras ir Bovy'is išvystė kinetinio dujų daugiaklasio eismo srauto modelius, aprašančius vadinamojo sudėtinių vartotojų klasių fazinės erdvės tankio (SVR-FET)  $\rho_u(x, v, v^o, t)$  dinamiką, kur  $u$  žymi vartotojų klasę iš aibės  $U$ , tuomet:

$$\partial_t \rho_u + v \partial_x \rho_u = (\partial_t \rho_u)_{acc} + (\partial_t \rho_u)_{int}, \quad (1.9)$$

kur

$$(\partial_t \rho_u)_{acc} = -\partial_v (\rho_u \cdot (v^o - v) / \tau_u), \quad (1.10)$$

aprašo klasės  $u$  transporto priemonių pagreitėjimo procesą su pageidaujamu greičiu  $v^o$  ir prisitaikymo laiku  $\tau_u$ , bei:

$$(\partial_t \rho_u)_{int} = -(1 - \pi_u) \sum_s (I_{u,s}(x, t) - R_{u,s}(x, t)), \quad (1.11)$$

kur  $I_{u,s}(x, t)$  ir  $R_{u,s}(x, t)$  yra atitinkamai apibrėžiamo kaip:

$$I_{u,s}(x, t) = \int_{w < v} |w - v| \rho_u(x, v, v^o, t) \rho_s(x, w, w^o, t) dw dw^o \quad (1.12)$$

ir

$$R_{u,s}(x, t) = \int_{w > v} |w - v| \rho_u(x, w, v^o, t) \rho_s(x, v, w^o, t) dw dw^o. \quad (1.13)$$

Pažymėtina, kad  $I_{u,s}(x, t)$  ir  $R_{u,s}(x, t)$  aprašo klasės  $u$  automobilių sąveikų dinamikos įtaką transporto priemonėms iš tos pačios klasės ( $s = u$ ) arba kitos klasės ( $s \neq u$ ). Hoogendooro ir Bovy'io modelio pagrindinės prielaidos yra ekvivalenčios Prigogine'io prielaidoms. Palyginimui su Paverio – Fontanos modeliui, vartotojų klasių rezultatai skiriasi greitų transporto priemonių asimetriškame lėtinimo procese, t.y. santykinai greitų vartotojų klasių transporto priemonės pasiveja lėtų vartotojų klasių transporto priemones žymiai dažniau nei atvirkščiai [6].

### 1.1.5 HELBINGO KINETINĖS DUJŲ DAUGIAJUOSTĖS LYGTYS

Helbingas pristatė daugiajuosčio eismo srauto kinetinio dujų modelio veikimą. Šis yra panašus į Paverio – Fontanos modelį, nors juostos keitimas aprašytas detalčiai. Tegu  $j$  pažymi juostos indeksą. Tuomet, tegu  $\rho_j(x, v, v^o, t)$  pažymi vadinamąją daugiajuostę fazinės erdvės tankį (DJ-FET) juostoje  $j$ . Helbingas pateikė tokį sąryšį:

$$\partial_t \rho_j + v \partial_x \rho_j = (\partial_t \rho_j)_{ACC} + (\partial_t \rho_j)_{INT} + (\partial_t \rho_j)_{VC} + (\partial_t \rho_j)_{LC} + v_j^+ - v_j^-. \quad (1.14)$$

Priešingai Paverio – Fontanos modeliui ir Hoogendoorno ir Bovy'io modeliui, daugiajuostis Helbingo modelis aprašo papildomus tris narius:

- greičio išsisklaidymą aprašantis narys  $(\partial_t \rho_j)_{VC}$  įtraukiamas į individualių greičių svyravimų skaičiavimą dėl „netobulo“ vairavimo;
- juostų keitimą aprašantis narys  $(\partial_t \rho_j)_{LC}$  naudojamas modeliuojant DJ-FET pokyčius, transporto priemonei išvažiuojant iš savo juostos į juostą  $j$ ;
- transporto priemonių įvažiavimo ir išvažiavimo iš kelio segmento dažnumas  $v_j^\pm$  [1,15].

### 1.1.6 BENDRI KINETINIAI DUJŲ MODELIAI IR SUJUNGTAS DAUGIAJUOSTIS DAUGIAKLASIS MODELIAVIMAS

Hoogendoornas išvystė eismo srauto modelį, mezoskopiskai aprašantį bendrų eismo srauto sistemų dinamiką. Modelis aprašo bendro fazinės erdvės tankio (b-FET)  $\rho_a(x, v, w, t)$  dinamiką, kur  $x$  ir  $v$  yra  $n$  – matės erdvės vektoriai, atitinkamai pažymintys eismo padėtį ir greitį. Vektoriai  $w$  ir  $a$  atitinkamai pažymi tolydžius ir diskrečius eismo atributus, pvz. pageidaujamas greitis, kelionės tikslas, vartotojų klasė ar juosta. Hoogendoorno pristatytos dinaminės lygtys aprašo, kaip b-FET keičiasi dėl konvekcijos, pagreitėjimo, tolydžių atributų „sklandžių prisitaikymų“, netolydžių procesų (pvz. eismo įvykių, juostų keitimo). Pabrėžiama, kad Hoogendoorno bendras modelis vienija skirtingas Prigogine'o ir Hermano, Paverio – Fontanos, Helbingo, Hoogendoorno ir Bovy'io teorijas. Visi šie modeliai yra atskiri bendro Hoogendoorno modelio atvejai [2,16].

Hoogendoornas patikslino bendro modelio lygtis, kad gautų sujungtą daugiajuostį daugiaklasių modelį, aprašantį klasės  $u$  greičio dinamiką kelio juostoje  $j$ , kur yra netrukdomas judėjimas ( $c = 1$ ) arba spūstis ( $c = 2$ ), naudojant daugiajuosčių daugiaklasių (DJDK) FET  $\rho_{(u,j,c)}(x, v, v^o, t)$ :

$$\partial_t \rho_{(u,j,c)} + v \partial_x \rho_{(u,j,c)} = (\partial_t \rho_{(u,j,c)})_{ACC} + (\partial_t \rho_{(u,j,c)})_{INT} + (\partial_t \rho_{(u,j,c)})_{ILC} + (\partial_t \rho_{(u,j,c)})_{CLC}. \quad (1.15)$$

Eismo aprašymas, kaip grupių rinkinys yra geresnis negu daugelio atskirų nepriklausomai judančių eismo vienetų, pataiso ankstesnių kinetinių dujų modelių trūkumus. Hoogendoornas, pirmiausia, argumentavo, kad kinetiniai dujų srauto modeliai pervertina automobilių sąveiką dėl automobilių chaoso prielaidos. Antra, realiame eismo sraute grupės transporto priemonių pagreitėjimas yra pilnai aprašomas pagal grupės lyderiaujančią automobilį. Abu modeliavimo uždaviniai gali būti išspręsti atskirai aprašant netrukdomai judančio eismo srauto veikimą ir grupės transporto priemones.

## 1.2 SUDĖTINIŲ VARTOTOJŲ KLASIŲ TRANSPORTO SRAUTŲ MODELIAVIMAS

Dabartinėje transporto srautų teorijoje retai kada išskiriamos eismo vartotojų klasės. Toks sudėtinis vartotojų klasių transporto srautų modelis išvedamas iš mesoskopinių principų. Šis modelis, priešingai ankstesniems, visiškai apibrėžia eismo tankio ir greičio pusiausvyrą, kaip esamo eismo sąlygų ir priklausomai nuo vartotojų klasių pageidaujamo greičio funkciją. Be to, greičio variacijos įvairumas yra įvertinamas, apibrėžiant nukrypimus nuo vidutinio greičio vartotojų klasių ribose. Sudėtinis vartotojų klasių modelis taip pat nusako lenkimo procesus. Iš vienos pusės, vairuotojai stengiasi važiuoti laisvu keliu norimu greičiu, iš kitos pusės, jie derina savo greitį dėl sąveikos su lėčiau važiuojančiais automobiliais. Tokie procesai gali sąlygoti visiškai atsitiktinį vietinės struktūros savaiminį formavimąsi. Galiausiai, siūlomas modelis patenkina anisotropines sąlygas ir nekintamas asmenines sąlygas.

Siūlomas sudėtinis vartotojų klasių (SVK) modelis kyla iš mesoskopinių principų, t.y. iš principų, aprašančių mažų transporto priemonių grupes, kurios priklauso tam tikroms vartotojų klasėms, važiuojančioms greičiu  $v$  ir turinčioms pageidaujamą greitį  $v^0$ . Kiekvieną vartotojų klasę šios mažos grupės apjungia, atsižvelgiant į jų greitį ir pageidaujamą greitį. Šiame modelyje yra įtraukiama greičio variacija, atspindinti priklausomą vartotojų klasėms tikrinio greičio variaciją. Be to, toks modeliavimo metodas apibrėžia greičio pusiausvyros išraišką, kaip nagrinėjamo eismo sąlygų, eismo sandaros funkciją ir priklausomo vartotojų klasei pageidaujamo greičio skirstinį.

Šis modelis vaizduoja sąveiką tarp vartotojų klasių ir sudėtinių kelio juostų. Modelyje transporto srautų dinamika yra valdoma paprastų diferencialinių lygčių sistema, kelio segmente modeliuojančia transporto priemonių sulaikymą ir vidutinio greičio dinamiką konkrečioms vartotojų klasėms, pagrįstomis numatyto ir atsilaisvinimo principais. Sąveika tarp vartotojų klasių kyla iš bendro tankio ir greičio numatymo priešingos eismo krypties segmentuose. Deja, šis pusiausvyrinis greičio-tankio sąryšis gali būti nustatytas tik vienai kelio juostos daliai [7].

### 1.2.1 SUDĖTINĖS VARTOTOJŲ KLASĖS KINETINĖS DUJŲ LYGTYS

Šiame skyriuje bus pristatomos vadinamosios kinetinės dujų lygtys, aprašančios SVK eismo sąlygas. Šios lygtys atstovauja SVK apibendrintų Heblingo kinetinių dujų lygčių sistemų klasę.

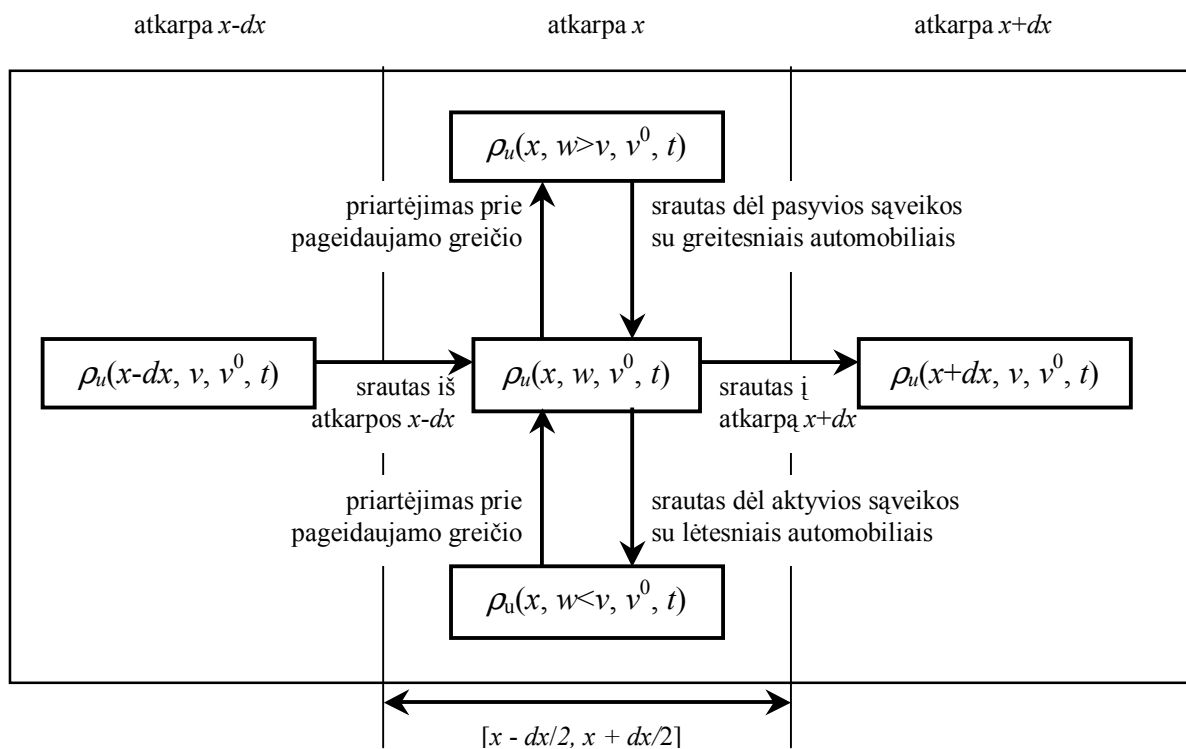
### Sudėtinis vartotojų klasės fazinės erdvės tankis

Makroskopinės SVK lygtis yra pastebimos SVK fazinės erdvės tankyje (SVK-FET). SVK-FET yra FET apibendrinimas, naudojamas vienam vartotojų klasės transporto srautui.

Įprastinis eismo tankis  $r(x, t)$  nusako transporto priemonių skaičių vienetiniame kelio ilgyje padėtyje  $x$  laiku  $t$ . Analogiškai, FET  $\rho(x, t, v, v^0)$  išreiškia transporto priemonių skaičių vienetiniame kelio ilgyje padėtyje  $x$  tuo momentu  $t$ , kai važiuojama greičiu  $v$  ir pageidaujamas greitis yra  $v^0$ . Pritaikant SVK eismą, FET yra nesujungiamas į vartotojų klases,  $u \in U$ , kur  $U$  būdingų vartotojų klasių rinkinys [17].

### Dinaminiai pasikeitimai SVK-FET

Nagrinėkime labai mažą kelio segmentą  $[x-dx/2, x+dx/2]$  (1.1 pav.). Atitinkamai įprastiniam tankiui, FET keičiasi dėl įvažiavimo ar išvažiavimo į kelio atkarpą: transporto priemonės, važiuojančios greičiu  $v$  ir turinčios pageidaujamą greitį  $v^0$ , išvažiuoja iš atkarpos  $x-dx$  į atkarpą  $x+dx$ .



1.1 pav. Pasikeitimai FET dėl transporto priemonių įsiliejimo į srautą ir išvažiavimo iš jo

Čia priimama, kad kai kurios transporto priemonės gali pagreiteti iki didesnio greičio  $w > v$ , siekdamos pageidaujamo greičio  $v^0$ . Atsižvelgiant į tai, sumažėja SVK-FET  $\rho_u(x, v, v^0, t)$ . Atitinkamai, prieš tai greičiu  $w < v$  važiavusios priemonės gali pagreiteti, sukeldamos SVK-FET padidėjimą.

SVK-FET taip pat kinta ir dėl sąveikos. Sąveika įvyksta, kai bet kuri transporto priemonė, važiuojanti greičiu  $w < v$  trukdo (stabdo) vartotojų klasės  $u$ ,  $u(x, t)$ , transporto priemonei, važiuojančiai greičiu  $v$  ir turinčiai pageidaujamą greitį  $v^0$ . Tuomet laikoma, kad automobilis, važiuojantis greičiu  $v$ , sąveikauja su jį stabdančiu automobiliu. Tokia aktyvi sąveika yra SVK-FET  $\rho_u(x, v, v^0, t)$  sumažėjimo priežastis. Atitinkamai, kada bet kuri transporto priemonė, važiuojanti greičiu  $v$  koordinatėje  $(x, t)$  sąveikauja su transporto priemone, kurios greitis  $w > v$  ir kuri turi pageidaujamą greitį  $v^0$ , - įvyksta pasyvi sąveika. Ši pasyvi sąveika sukelia SVK-FET  $\rho_u(x, v, v^0, t)$  padidėjimą. Sąveikos proceso efektas yra atspindimas SVK lygtyse.

## 1.2.2 DUJŲ KINETINĖ IR SPECIALI TOLYDUMO LYGTIS

Analogiškai, vienos vartotojų klasės transporto srautų modelių lygtims galima apibrėžti ir dujų kinetines ar specialias tolydumo lygtis, aprašančias SVK-FET. Dujų kinetinė lygtis paremta tuo faktu, kad laikinas  $\rho_u$  vystimasis yra:

$$\frac{\partial \rho_u}{\partial t} + \nabla_y \cdot \left( \rho_u \frac{dy_u}{dt} \right) = \left( \frac{\partial \rho_u}{\partial t} \right)_{nt}, \quad (1.16)$$

visiems  $u \in U$ , kur

$$y_u = \begin{pmatrix} x \\ v \\ v^0 \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

yra fazinės erdvės  $\Psi_u$  leistinių  $y_u$  reikšmių vektorius. Operatorius  $\nabla_y$  lygus:

$$\nabla_y = \begin{pmatrix} \partial & \partial x \\ \partial & \partial v \\ \partial & \partial v^0 \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

ir reiškia vidinę sandaugą, t.y.  $x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ .

Lygtis (1.16) aprašo sulaikytų automobilių skaičių fazinėje erdvėje:  $\nabla_y(\rho_u dy_u/dt)$  atspindi SVK-FET pasikeitimus dėl judėjimo fazinėje erdvėje  $\Psi_u$  greičiu  $dy/dt$ :  $(\partial \rho_u / \partial t)_u$  išreiškia fazinės erdvės tankio pasikeitimus, sukeltus nenutrūkstamų procesų.

### *Transporto priemonių tankis fazinėje erdvėje*

Kairioji lygties (1.16) pusė lygi:

$$\frac{\partial \rho_u}{\partial t} + \nabla_y \cdot \left( \rho_u \frac{dy_u}{dt} \right) = \underbrace{\left( \frac{\partial \rho_u}{\partial t} \right)}_{(a)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_u \frac{dx}{dt} \right)}_{(b)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial v} \left( \rho_u \frac{dv}{dt} \right)}_{(c)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial v^0} \left( \rho_u \frac{dv^0}{dt} \right)}_{(d)}. \quad (1.19)$$



Akivaizdu, kad išraiškoje (1.19(b)) išvestinė  $dx/dt$  aprašo greitį:

$$\frac{dx}{dt} = v. \quad (1.20)$$

Išvestinė  $dx/dt$  atspindi transporto priemonių pagreitėjimą/sulėtėjimą. Kadangi pagreitėjimo/sulėtėjimo charakteristikos reikšmingai skiriasi priklausomai nuo vartotojų klasių, todėl priimama, jog greičio adaptacija sukelia vartotojų klasėms būdingą prisitaikymo laiką  $\tau_u$ .

Išraiškoje (1.19(c)) išvestinė  $dv/dt$  yra pakeičiama vadinamuoju prisitaikymo dėsniu, nusakančiu greičio eksponentinę adaptaciją:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v^0 - v}{\tau_u}. \quad (1.21)$$

Skirtingai nei makroskopiniuose srautų modeliuose, šis periodas, vietoj kolektyvinio greičio prisitaikymo prie eismo sudėčiai būdingo balansinio greičio, aprašo individualius greičio pritaikymus (priklausomus vartotojų klasėms) prie norimo greičio.

Yra priimama, kad vairuotojai nekeičia pageidaujamo greičio visos savo kelionės metu, t.y. išraiškoje (1.19(d)) pageidaujamo greičio išvestinė, įskaitant laiką, tenkina lygtį:

$$\frac{dv^0}{dt} = 0. \quad (1.22)$$

Taigi kairiąją lygties (1.16) pusę galime perrašyti taip:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla_y \cdot \left( \rho_u \frac{dy_u}{dt} \right) = \frac{\partial \rho_u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_u v)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left[ \rho_u \left( \frac{v^0 - v}{\tau_u} \right) \right], \quad (1.23)$$

visiems  $u \in U$ .

### **Netolydūs procesai**

Netolydžius pasikeitimus SVK-FET sukelia du procesai: pageidaujamo greičio pasiskirstymo prisitaikymas prie priimtino greičio pasiskirstymo, apibrėžto  $(\partial \rho_u / \partial t)_{pr}$ , ir sulėtėjimas, sukeltas pasyvios ir aktyvios transporto priemonės sąveikos, apibrėžtos  $(\partial \rho_u / \partial t)_{sav}$ . Jeigu priimtume, jog pageidaujamas greitis pasiekiamas labai greitai, tuomet  $(\partial \rho_u / \partial t)_{pr}$  galima būtų atmesti. Tada lygties (1.16) dešinioji pusė lygi:

$$\left( \frac{\partial \rho_u}{\partial t} \right)_{nt} = \left( \frac{\partial \rho_u}{\partial t} \right)_{sav}^{pasvyvi} + \left( \frac{\partial \rho_u}{\partial t} \right)_{sav}^{aktyvi}. \quad (1.24)$$

**Transporto priemonių sąveika.** Nagrinėkime SVK-FET  $\rho_u(x, v, v^0, t)$ . Tuomet,  $\rho_u(x, v, v^0, t)$  sumažėjimas yra aktyvių sąveikų priežastis, o pasyvios sąveikos iššaukia  $\rho_u(x, v, v^0, t)$  padidėjimą.

Tegu  $\rho_{u,s}(x, v, v^0, w, w^0, t)$  yra bendras fizinės erdvės tankis, kuris parodo transporto priemonių porų vidutinį skaičių, kur viena vartotojų klasės  $u$  transporto priemonė turi greitį  $v$  ir pageidaujamą greitį  $v^0$ , o kita vartotojų klasės  $s$  transporto priemonė važiuoja greičiu  $w$ , ir jos pageidaujamas greitis

$w^0$ . Remiantis rezultatais, pasiektais Hoogendoorno ir Bovio, bendras FET įvedamas įvertinti  $\rho_u(x, v, v^0, t)$  padidėjimus, kurie yra pasyvių sąveikų priežastis:

$$\left[ \frac{\partial \rho_u(x, v, v^0, t)}{\partial t} \right]_{sav}^{pasyvi} = (1 - p_u) \sum_{s \in U} \int_{w=v}^{\infty} \int_{w^0=0}^{\infty} (w-v) \rho_{u,s}(x, v, v^0, w, w^0, t) dw^0 dw. \quad (1.25)$$

Šis sąryšis gali būti suprantamas, tariant, kad transporto priemonė važiuoja greičiu  $w$ , didesniu už  $v$ , tačiau turi tą patį pageidaujamą greitį  $v^0$ . Kuomet transporto priemonė sutinka kitą transporto priemonę, važiuojančią greičiu  $v$ , ji arba sulėtėja, prisiderindama prie greičio, arba ją aplenkia (su tikimybe  $p_u$ ), nepriklausomai nuo šios transporto priemonės pageidaujamo greičio  $w^0$ . Pirmuoju atveju, automobilių, kurie turi pageidaujamą greitį  $v^0$  ir važiuoja greičiu  $v$ , padaugėja. Antruoju atveju, automobilių, kurių pageidaujamas greitis  $v^0$  ir turimas greitis  $w > v$ , sumažėja, t.y. srautas pereina iš vieno tankio į kitą [13].

Paveris – Fontana patvirtino daugiklių aproksimacija  $\rho_{u,s} = \rho_u \rho_s$ . Iš čia išplaukia sekantis sąryšis, išreiškiantis pasyvių sąveikų vidutinį skaičių:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \rho_u(x, v, v^0, t)}{\partial t} \right]_{sav}^{pasyvi} &= (1 - p_u) \int_{w=v}^{\infty} \int_{w^0=0}^{\infty} (w-v) \rho_s(x, v, w^0, t) \rho_u(x, w, v^0, t) dw^0 dw = \\ &= (1 - p_u) \varphi_s(x, v, t) \int_{w=v}^{\infty} (w-v) \rho_u(x, w, v^0, t) dw, \end{aligned} \quad (1.26)$$

kur sumažėjęs SVK-FET yra

$$\varphi_s(x, v, t) = \int_{v^0=0}^{\infty} \rho_s(x, v, v^0, t) dv^0. \quad (1.27)$$

Pažymėtina, kad, lyginant su SVK-FET, išraiškoje sumažėjimas lemia nepriklausomumą nuo pageidaujamo greičio  $v^0$ . Į SVK-FET lygtis galima žiūrėti, kaip į supaprastintą specialiąją tolydumo lygtį.

Analogiškai vartotojų klasės  $u$  transporto priemonių, važiuojančių greičiu  $v$  ir turinčių pageidaujamą greitį  $v^0$ , tankis sumažėja dėl greičio sumažinimo prie greičio, mažesnio už  $v$ , šioje grupėje. Hoogendoornas ir Bovis parodo, kad

$$\left[ \frac{\partial \rho_u(x, v, v^0, t)}{\partial t} \right]_{sav}^{aktyvi} = (1 - p_u) \rho_u(x, v, v^0, t) \sum_{s \in U} \int_{w=0}^v (w-v) \varphi_s(x, w, t) dw. \quad (1.28)$$

Iš (1.23), (1.25) ir (1.28) išvedama speciali SVK sulaikymo lygtis

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_u(v, v^0) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_u(v, v^0) \cdot v) + \frac{\partial}{\partial v} \left[ \rho_u(v, v^0) \left( \frac{v^0 - v}{\tau_u} \right) \right] = \\ = (1 - p_u) \sum_s \varphi_s(v) \left\{ \int_{w=v}^{\infty} [(w-v) \rho_u(w, v^0)] dw + \rho_u(v, v^0) \int_{w=0}^v [(w-v) \varphi_s(w)] dw \right\}, \end{aligned} \quad (1.29)$$

kuri taikoma vartotojų klasei  $u$  momentu  $(x, t)$ , kai transporto priemonė važiuoja greičiu  $v$  ir turi pageidaujamą greitį  $v^0$  [5,18].

### 1.2.3 SUPAPRASTINTOS SUDĖTINIŲ VARTOTOJŲ KLASIŲ PAVERIO-FONTANOS LYGTYS

Supaprastintų SVK Paverio – Fontanos (supaprastintų SVK-PF) lygčių išvedimas analogiškas Helbingo analizei. Galutinės lygtys išreiškia SVK apibendrinimą vienos vartotojų klasės lygtims, kurias pasiūlė Paveris – Fontana. Supaprastintos SVK-PF lygtys yra kaip tarpinis žingsnis tarp specialių tolydžių lygčių.

Norint išvesti supaprastintas SVK-PF lygtis, (1.29) lygtis yra integruojama, atsižvelgiant į pageidaujamą greitį  $v^0$ . Hoogendoornas ir Bovis nustatė sąryšį:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \varphi_u(x, v, t) + \frac{\partial}{\partial x} [\varphi_u(x, v, t) \cdot v] + \frac{\partial}{\partial v} \left[ \varphi_u \left( \frac{\Omega_u(v, x, t) - v}{\tau_u} \right) \right] = & (1.30) \\ & = (1 - p) \sum_s \varphi_s(x, v, t) \left[ \int_v^\infty (w - v) \varphi_u(x, w, t) dw \right] + \varphi_u(x, v, t) \left[ \int_0^v (w - v) \varphi_s(x, w, t) dw \right], \end{aligned}$$

visiems  $u \in U$ , kai vartotojų klasės  $u$  transporto priemonių greitis momentu  $(x, t)$  yra  $v$ , o pageidaujamas greitis  $\Omega_u(v, x, t)$  turi išraišką:

$$\Omega_u(v, x, t) = \int_{w=0}^\infty \left[ v^0 \frac{\rho_u(x, v, v^0, t)}{\varphi_u(x, v, v^0, t)} \right] dx^0. \quad (1.31)$$

Supaprastintos SVK-PF lygtys nusako dinaminis pasikeitimus SVK-RFET  $\varphi_u(x, v, t)$ , kuri iš vienos pusės įtakoja prisitaikymas prie norimo vidutinio greičio  $\Omega_u(v, x, t)$ , iš kitos pusės – sąveika tarp tos pačios vartotojų klasės ( $s=u$ ) transporto priemonių ir skirtingų vartotojų klasių ( $s \neq u$ ). Šią sąveiką atspindi lygties (1.30) dešinioji pusė [5].

### 1.2.4 MAKROSKOPINIS SVK TRANSPORTO SRAUTŲ MODELIS

Makroskoppinio modelio pagrindas yra supaprastintos SVK-PF lygtys. Šio skyriaus tikslas – išvesti makroskoppinį transporto srautų modelį, aprašantį vartotojų klasėms būdingą vidutinio tankio bei greičio variacijos laike ir erdvėje dinamiškumą. Helbingo momentų metodas, pritaikytas vienos vartotojų klasės supaprastintoms PF lygtims, taikytinas ir supaprastintoms SVK-PF lygtims, norint išvesti lygčių sistemą, kuri aprašytų transporto priemonių greičio pokyčių bei greičio variacijos dinamiką.

### SVK greičio-momento lygtis

Pritaikant momentų metodą, supaprastintos Paverio – Fontanos lygtys (1.30) yra dauginamos iš  $v^k$ , kur  $k$  yra sveikas kintamasis, parodantis  $k$ -tąjį momentą ir integruojamas, atsižvelgiant į turimą greitį. Todėl kairiąją lygties (1.30) pusę galima perrašyti taip:

$$\int_0^{\infty} v^k \left\{ \frac{\partial \varphi_u}{\partial t} + \frac{\partial v \varphi_u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left[ \varphi_u \left( \frac{\Omega_u(v) - v}{\tau_u} \right) \right] \right\} dv = \quad (1.32)$$

$$= \frac{\partial (r_u \langle v^k \rangle_u)}{\partial t} + \frac{\partial (r_u \langle v^{k+1} \rangle_u)}{\partial x} - \frac{k}{\tau_u} r_u (\langle v^{k-1}, v^0 \rangle_u - \langle v^k \rangle_u),$$

kai greičio momentai yra

$$\langle v^k \rangle_u = \int_{v=0}^{\infty} v^k \frac{\varphi_u(x, v, t)}{r_u(x, t)} dv, \quad (1.33)$$

$$\langle v^k, v^0 \rangle_u = \int_{v=0}^{\infty} \int_{v^0=0}^{\infty} v^0 v^k \frac{\rho_u(x, v, v^0, y)}{r_u(x, t)} dv^0 dv.$$

Vartotojų klasės  $u$  erdvinis tankis yra išreikštas vartotojų klasės  $u$  momento  $(x, t)$  vidutiniu tankiu, nepriklausomai nuo greičio  $v$ :

$$r_u(x, t) = \int_{v=0}^{\infty} \varphi_u(x, v, t) dv. \quad (1.34)$$

Pažymėtina, kad pirmasis greičio momentas  $\langle v \rangle_u$  lygus vidutiniam visų vartotojų klasės  $u$  momento  $(x, t)$  transporto priemonių greičiui  $V_u(x, t)$ . Greičio pasiskirstymo variacija  $\Theta_u(x, t)$  ir asimetrijos koeficientas  $\Gamma_u(x, t)$  randami atitinkamai iš greičio antro ir trečio momento, t.y.  $\Theta_u(x, t) = \langle v^2 - \langle v \rangle_u^2 \rangle_u$  ir  $\Gamma_u(x, t) = \langle v^3 - \langle v \rangle_u^3 \rangle_u$ . Nulinis kovariacijos momentas  $\langle 1, v^0 \rangle$  lygus vartotojų klasės  $u$  vidutiniam pageidaujamaam greičiui  $V_u^0$ . Kovariacija  $C_u(x, t)$  tarp turimo ir pageidaujamo greičio gali būti nustatyta iš pirmojo kovariacijos momento, vidutinio turimo greičio ir vidutinio pageidaujamo greičio, t.y.  $C_u(x, t) = \langle v, v^0 \rangle_u - \langle v \rangle_u \langle v^0 \rangle_u$ .

Atsižvelgiant į supaprastintos SVK-PF lygties (1.30) dešiniąją pusę, galima konstatuoti, kad

$$\int_{w=v}^{\infty} (w-v) \varphi_u(x, w, t) dw = r_u(x, t) \int_{w=v}^{\infty} (w-v) \frac{\varphi_u(x, w, t)}{r_u(x, t)} dw \quad (1.35)$$

ir

$$\int_{w=0}^v (w-v) \varphi_s(x, w, t) dw = r_s(x, t) \int_{w=0}^v (w-v) \frac{\varphi_s(x, w, t)}{r_s(x, t)} dw. \quad (1.36)$$

Pažymėtina, jog santykis  $\varphi_s(x, v, t)/r_s(x, t)$  lygus tikimybei, kad vartotojų klasės srautų transporto priemonė koordinatėje  $x$  einamuju laiku  $t$  važiuos greičiu  $v$ . Šią tankio funkciją pažymėkime  $f_s(v, x, t)$ .

Sujungus lygtis (1.32) ir (1.35), gaunama greičio momento dinamikos lygtis:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( r_u \langle v^k \rangle_u \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( r_u \langle v^{k-1} \rangle_u \right) - \frac{k}{\tau_u} r_u \left( \langle v^{k-1}, v^0 \rangle_u - \langle v^k \rangle_u \right) = \\ = (1-p) \sum_{s \in U} r_s r_u \left[ \langle v \rangle_u \langle v^k \rangle_s - \langle v^{k+1} \rangle_s - \Lambda_{u,s}^k \right], \end{aligned} \quad (1.37)$$

kur  $k$ -tasis sąveikos momentas  $\Lambda_{u,s}^k(x, t)$  yra:

$$\Lambda_{u,s}^k(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} v^k (f_u(v, x, t) D_s(v, x, t) - f_s(v, x, t) D_u(v, x, t)) dv, \quad (1.38)$$

kai

$$D_u(v, x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_u(w, x, t) dw, \quad F_u(v, x, t) = \int_{w=0}^v f_u(w, x, t). \quad (1.39)$$

Lygties (1.37) detalesnį išvedimą yra aprašę Hoogendoornas ir Bovis.

Pažymėtina, kad

$$\Lambda_{u,u}^k(x, t) = 0. \quad (1.40)$$

Dešinioji lygties (1.37) pusė išreiškia tiek vartotojų klasės  $u$  ( $s=u$ ) transporto priemonių tarpusavio sąveiką, tiek sąveiką su kitos klasės ( $s \neq u$ ) transporto priemonėmis. Yra ištirta, kad transporto priemonių tarpusavio sąveika vienoje vartotojų klasėje tiksliai atitinka Heblingo išvestą vienos vartotojų klasės modelį.

*Transporto priemonių sulaikymo lygtis ( $k = 0$ )*

Jei nagrinėtume nulinio momento ( $k = 0$ ) sąveika, surastume, kad

$$\Lambda_{u,s}^0 = V_s - V_u \Rightarrow \sum_{s \in U} r_s r_u [V_s - V_u - \Lambda_{u,s}^0] = 0. \quad (1.41)$$

Akivaizdu, jog automobilių sąveika nesibaigia laikiniais erdvinio tankio  $r_u(x, t)$  pasikeitimais, t.y. vartotojų klasės  $u$  transporto priemonių vidutiniam skaičiui neturi įtakos sąveika su kitomis transporto priemonėmis. Jis nustatomas iš srauto, kurio transporto priemonių greitis yra  $V_u$ , koeficiento  $r_u V_u$ . Todėl SVK transporto priemonių sulaikymo lygtis yra lygi vartotojų klasei išvedamai lygčių sistemai:

$$\frac{\partial r_u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [r_u V_u] = 0. \quad (1.42)$$

*Inertinės lygties ( $k = 1$ ) išvedimas*

Kitu žingsniu lygtis (1.37) skaičiuojama, kai  $k = 1$ :

$$\frac{\partial V_u}{\partial t} + V_u \frac{\partial V_u}{\partial x} = \frac{1}{r_u} \frac{\partial P_u}{\partial x} + \frac{V_u^b - V_u}{\tau_u}, \quad (1.43)$$

kur eismo suspaudimas  $P_u = r_u \Theta_u$ , ir balansinis greitis  $V_u^b$ :

$$V_u^b = V_u^0 - (1-p)\tau_u \left\{ \sum_{s \in U} P_s + r_s [(V_s - V_u)V_s + \Lambda_{u,s}^1] \right\}, \quad (1.44)$$

čia  $V_u^0$  nusako vartotojų klasės  $u$  vidutinį pageidaujamą greitį.

Lygtis (1.44) tiksliai apibrėžia greičio pusiausvyrą pagal Paverio – Fontanos eismo lygtį. Tai gali būti interpretuojama, kaip teoriniai rezultatai, atžvelgiant į priklausomybę nuo greičio pusiausvyros transporto srautų mikroskopiniuose procesuose. Lygtyje (1.44) balansinis greitis yra vidutinis vartotojų klasei priklausantis pageidaujamas greitis, sumažintas vėlinimo, kuris atsiranda dėl neišvengiamų lėtinimo manevrų, atsirandančių sąveikaujant vienos klasės transporto priemonėms tarpusavyje bei su kitų klasių transporto priemonėmis.

*Greičio variacijos lygtis ( $k = 2$ )*

Galiausiai išvedama lygtis, aprašanti greičio variacijos  $\Theta_u$  dinamiką. Iš esmės tai yra lygties (1.37) įvertinimas, kai  $k = 2$ . Pakeitus transporto priemonių išvedimo lygtį, randamas toks sąryšis:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta_u}{\partial t} + V_u \frac{\partial \Theta_u}{\partial x} = & -\frac{2P_u}{r_u} \frac{\partial V_u}{\partial x} - \frac{1}{r_u} \frac{\partial J_u}{\partial x} + \frac{2}{\tau_u} [(C_u - \Theta_u) + V_u(V_u^0 - V_u^b)] - \\ & - (1-p_u) \sum_{s \in U} [J_s + 2V_s P_s + (V_s + V_u)(P_s + r_s V_s^2) + r_s \Lambda_{u,s}^2], \end{aligned} \quad (1.45)$$

kur  $J_u = r_u \Gamma_u$  (vadinamoji greičio variacijos nuolatinė kaita (flusas)). Ši nuolatinė kaita nusako variacijos erdvinį tolygumą, kuri sukelia ribotas sąveikos bei stabdymo laikas, iššaukiantis prie atitinkamos situacijos greičio priderinimo vėlinimą. Kovariacija  $C_u$  parodo turimo vidutinio greičio ir pageidaujamo greičio skirstinių tarpusavio priklausomybę, t.y. ji taikoma vartotojų klasės  $u$  momentu  $(x, t)$  pageidaujamo greičio dinaminės įtakos turimam vidutiniam greičiui paskaičiavimui [5].

Naudojantis balansinio greičio išvedimu (lygtis (1.44)), lygtis (1.45) gali būti perrašyta:

$$\frac{\partial \Theta_u}{\partial t} + V_u \frac{\partial \Theta_u}{\partial x} = -\frac{2P_u}{r_u} \frac{\partial V_u}{\partial x} - \frac{1}{r_u} \frac{\partial J_u}{\partial x} + \frac{2}{\tau_u} [\Theta_u^b - \Theta_u], \quad (1.46)$$

kai balansinio greičio variacija:

$$\Theta_u^b = C_u - \frac{\tau_u}{2} (1-p) \sum_{s \in U} [J_s + (3P_s + r_s V_s^2 - 2r_s V_u V_s)(V_s - V_u) + r_s (\Lambda_{u,s}^2 - 2V_u \Lambda_{u,s}^1)]. \quad (1.47)$$

*Vartotojų klasių sąveika*

Sąveika tarp vartotojų klasių yra nusakyta balansinio greičio ir jo variacijos lygtyse.

### Lenktyniavimo veiksmas

Kerneris ir Konhäuseris ištyrė ir aprašė vienos vartotojų klasės lenktyniavimo procesus transporto srautų vyksme. Panagrinėkime šiuos lenktyniavimo veiksmus SVK plotmėje. Imkime lygtį (1.43). Tuomet išraiška:

$$\frac{V_u^b - V_u}{\tau_u} = \frac{1}{\tau_u} \left[ V_u^0 - V_u - (1 - p_u) \tau_u \left\{ \sum_{s \in U} P_s + r_s [(V_s - V_u) V_s + \Lambda_{u,s}^1] \right\} \right] \quad (1.48)$$

aprašo atsilaisvinimo procesą prie nekontroliuojamo greičio  $V_u^b$ .

Gali būti apibrėžti du lenktyniavimo procesai: iš vienos pusės, vairuotojai laisvu keliu siekia važiuoti pageidaujamu greičiu. Toks individualus prisitaikymo procesas gali būti interpretuojamas kaip aktyvinimo procesas. Šiuos aktyvinimo procesus atvaizduoja santykis:

$$\frac{V_u^b - V_u}{\tau_u} \quad (1.49)$$

Iš kitos pusės, išraiška

$$-(1 - p_u) \tau_u \left\{ \sum_{s \in U} P_s + r_s [(V_s - V_u) V_s + \Lambda_{u,s}^1] \right\} \quad (1.50)$$

kyla iš sąveikos tiek tarp tos pačios vartotojų klasės, tiek tarp skirtingų vartotojų klasių. Ši išraiška vaizduoja lėtinimo procesus, kurių priežastis yra transporto priemonių tarpusavio sąveika. Greičio variacijos lygtyje (1.46) gali būti nustatyti lyginami aktyvinimo ir lėtinimo procesai.

Šie aktyvinimo ir lėtinimo procesai gali sukelti eismo veikimo nestabilumą; net ir maži sutrikimai iššaukia vadinamuosius vietinius susigrupavimus ar priešingų polių susidarymą.

## 1.2.5 APYTIKSLĖS, ARTIMOS VIENA KITAI LYGTYS

Ankstesniame skyriuje buvo išnagrinėtas ne artimų viena kitai diferencialinių lygčių su dalinėmis išvestinėmis rinkinys, aprašantis SVK srauto kitimus. Norint aprašyti modelį, reikalinga uždara vieninga sistema. Tuo tikslu yra pasiūlyta daugybę aproksimacijų. Priimama, kad prisitaikymo laikas  $\tau_u$  yra pastovus (konstanta).

### Turimo ir pageidaujamo greičio kovariacija

Norint išvesti artimų viena kitai lygčių sistemą, kovariacija aproksimuojama balansiniu sąryšiu, t.y.:

$$C_u(x, t) = C_u^b [r_u^{ef}(x, t)], \quad (1.51)$$

su  $C_u^b(0) = 1$ ,  $C_u^b(r_{\max}) = 0$ . Efektyvus tankis  $r_u^{ef}$  yra:

$$r_u^{ef}(x,t) = \sum_s \alpha_{u,s}(x,t) r_s(x,t), \quad (1.52)$$

kai  $0 \leq \alpha_{u,s} \leq 1$ . Sąveikos koeficientas  $\alpha_s$  nurodo vartotojų klasės  $s$  tankio tą dalį, kuri nagrinėjamu momentu sąveikauja su vartotojų klasės  $u$  transporto priemonėmis. Šie koeficientai gali būti detalčiau apibrėžiami, įvedus susidūrimų normą:

$$\chi_{u,s}(x,t) = \int_{v=0}^{\infty} \int_{w=0}^v (w-v) f_u(x,v,t) f_s(x,w,t) dw dv, \quad (1.53)$$

kuri išreiškia vartotojų klasės  $s$  transporto priemonių aktyvios sąveikos su vartotojų klasės  $u$  transporto priemonėmis santykį per laiko intervalą.

Priimant, kad rasti iš empirinių rezultatų greičiai pasiskirstę pagal Gauso skirstinį, galimas sąveikos normos supaprastinimas (čia dviejų minučių trukmės bandymų modeliai, sudaryti iš individualių transporto priemonių duomenų, yra suklasifikuoti, atsižvelgiant į vidutinį tankį, apskaičiuotą per bandymo trukmę; individualūs transporto priemonės išmatavimai naudojami empirinio greičio pasiskirstymams apibrėžti, esant skirtingiems tankiams. Ištirta, jog greičio pasiskirstymas yra artimas Gauso skirstiniui):

$$\chi_{u,s}(x,t) = \int_{v=-\infty}^{\infty} [(v-V_s)F_s(v) + \Theta_s f_s(v)] f_u(v) dv. \quad (1.54)$$

Susidūrimų norma vartotojų klasės viduje yra lengvai nustatoma:

$$\chi_{u,s}(x,t) = \frac{\bar{\Theta}_u}{\sqrt{\pi}}. \quad (1.55)$$

Susidūrimų norma ir sąveikos koeficientas yra susiejami tokia lygtimi:

$$\alpha_{u,s}(x,t) = \min \left\{ \chi_{u,s}(x,t) \sqrt{\frac{\pi}{\Theta_u(x,t)}}, 1 \right\}. \quad (1.56)$$

1.56 - sąryšis apriboja sąveikos koeficiento reikšmę, kuri gali būti mažesnė ar lygi 1. Pažymėtina, kad vartotojų klasėje transporto priemonių tarpusavio sąveikos koeficientas lygus 1.

### *Nuolatinė kaita (fliusas) arba greičio variacija*

Papildomai reikalinga funkcinė išraiška greičio variacijos nuolatinei kaitai  $J_u$  nusakyti:

$$J_u = -\kappa_u \frac{\partial \Theta_u}{\partial x}, \quad (1.57)$$

čia  $\kappa_u \geq 0$  yra kinetinis koeficientas, susiejantis erdvinius greičio variacijos pasikeitimus su greičio variacijos fliusu. Koeficientas „priešinasi“ transporto priemonės vairuotojo derinių ribotai sąveikai, stabdymo trukmei ir užtikrina greičio variacijos erdvinį tolygumą.



### Betarpiško lenkimo tikimybė

Šio proceso empiriniai duomenys persirikiavimo galimybės atžvilgiu kelio juostose nėra gaunami. Todėl siūloma betarpiško lenkimo tikimybės balansinė aproksimacija:

$$p_u(x, t) = p_u^b[r_u^{ef}(x, t)]. \quad (1.58)$$

## 1.2.6 PAPILDOMI MODELIO PATOBULINIMAI

Tikslinant tiek kovariaciją  $C_u$ , tiek greičio variacijos flusą  $J_u$ , tiek betarpiško lenkimo tikimybę  $p_u$ , yra sudaryta uždara diferencialinių lygčių su dalinėmis išvestinėmis sistema. Tačiau modelis tenkina ne visas eismo sąlygas. Taigi reikalingos papildomos modelio modifikacijos.

### Eismo „klampumas“

Eismo „klampumas“ matematiškai apibrėžiamas, aprašant prisitaikantį vairuotojo elgesį atžvilgiu kaitos eismo sąlygose, kurios aprašomos pagrindiniais „klampumo“ nariais:

$$\tilde{P}_u = P_u - \eta_u \frac{\partial V_u}{\partial x}, \quad (1.59)$$

kur  $\eta_u$  yra „klampumas“:

$$\eta_u = r_{u, nauji} \left. \frac{\partial P_u}{\partial R_u} \right|_{R_u=0}, \quad (1.60)$$

čia  $r_{u, nauji}$  yra naujų vairuotojų tankis vartotojų klasėje  $u$ . Įvertinus eismo „klampumą“, vairuotojai numato, ne tik eismo suspaudimo  $P_u$  ar greičio variacijos  $\Theta_u$  sumažėjimą, bet ir erdvinis vidutinio greičio pasikeitimus.

### Ribotos erdvės sąlygų prijungimas

Yra ginčijamasi, jog makroskopiniuose modeliuose gali būti viršytas automobilis-prie-automobilio tankis. Kad įvertintume galimus netikslumus, įvedamas vidutinis kelio ilgis  $l_u(v)$ , būtinas saugiam laisvo kelio, važiuojant greičiu  $v$ , kirtimui:

$$l_u(v) = L_u + vT_u, \quad (1.61)$$

kur  $L_u$  – vidutinis vartotojų klasės  $u$  transporto priemonės ilgis,  $T_u$  – vidutinis vartotojų klasės  $u$  vairuotojų reakcijos laikas.

Modifikuotas tankis yra apibrėžiamas, kaip skaičius transporto priemonių, užimančių laisvo kelio  $\Delta x$  ilgio segmentą, kuris padalintas į likusias šiame segmente laisvas erdves. Vartotojų klasės  $u$  transporto priemonių bendras užimtos erdvės kiekis apytiksliai yra lygus:

$$\Delta x \cdot r_u(x, t) \cdot l_u(V_u(x, t)) = \Delta x \cdot r_u(x, t) \cdot (L_u + V_u(x, t) \cdot T_u). \quad (1.62)$$

Laisva erdvė, likusi segmente, lygi:

$$\Delta x \cdot \left\{ 1 - \sum_s [r_s(x, t) \cdot (L_s + V_s(x, t) \cdot T_s)] \right\}, \quad (1.63)$$

kuri modifikuoja tankį:

$$r'_u(x, t) = \frac{r_u(x, t)}{\Delta x \cdot \left\{ 1 - \sum_s [r_s(x, t) \cdot (L_s + V_s(x, t) \cdot T_s)] \right\}} = \gamma \cdot r_u(x, t). \quad (1.64)$$

Kadangi, didėjant tankiui, laisvos erdvės plotas mažėja, tuo pačiu atitinkamai didėja modifikuotas tankis. Modifikuoto tankio įvedimas iššaukia sąveikos koeficiento padidėjimą, kuris pakeičia Helbingo eismo susigrūdimo ir greičio variacijos flusio išraiškas:

$$\tilde{P}_u \rightarrow \tilde{P}'_u \text{ ir } J_u \rightarrow J'_u. \quad (1.65)$$

Tuomet

$$\tilde{P}'_u = r'_u \Theta_u - \eta'_u \frac{\partial V_u}{\partial x} = \gamma \tilde{P}_u, \quad (1.66)$$

kur

$$\eta'_u = \gamma \eta_u, \quad (1.67)$$

$$J'_u = \frac{J_u}{1 - l_u s_u(V_u)} = -\kappa'_u \frac{\partial \Theta_u}{\partial x}, \quad (1.68)$$

kai

$$\kappa'_u = \gamma \kappa_u. \quad (1.69)$$

### ***Išvestasis makroskopinis SVK modelis***

Atsižvelgiant į ribotos erdvės reikalavimus, pakeičiamos SVK transporto srautą aprašančios lygtys.

Transporto priemonių sulaikymas:

$$\frac{\partial r_u}{\partial t} + \frac{\partial (r_u V_u)}{\partial x} = 0. \quad (1.70)$$

Greičio dinamika:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_u}{\partial t} + V_u \frac{\partial V_u}{\partial x} = & -\gamma \left( \frac{1}{r_u} \frac{\partial P_u}{\partial x} - \frac{\eta_u}{r_u} \frac{\partial^2 V_u}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{r_u} \frac{\partial \gamma}{\partial x} \left( P_u - \eta_u \frac{\partial V_u}{\partial x} \right) + \frac{V_u^b - V_u}{\tau_u} + \\ & + (1 - p_u) \gamma \sum_s \eta_s \frac{\partial V_s}{\partial x}, \end{aligned} \quad (1.71)$$

kai „grynas“ eismo suspaudimas (slėgis)  $P_u$  lygus  $r_u \Theta_u$  ir

$$V_u^b = V_u^0 - (1-p)\tau_u \gamma \left\{ \sum_s [P_s + r_s (V_s - V_u) V_s + \Lambda_{u,s}^1] \right\}. \quad (1.72)$$

Greičio variacijos dinamika:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta_u}{\partial t} + V_u \frac{\partial \Theta_u}{\partial x} = & -\gamma \left[ \frac{2P_u}{r_u} \frac{\partial V_u}{\partial x} - \eta_u \frac{2}{r_u} \left( \frac{\partial V_u}{\partial x} \right)^2 \right] + \gamma \frac{\kappa_u}{r_u} \frac{\partial^2 \Theta_u}{\partial x^2} + \kappa_u \frac{\partial \gamma}{\partial x} \frac{\partial \Theta_u}{\partial x} + \\ & + \frac{2}{\tau_u} [\Theta_u^b - \Theta_u] - (1-p) \gamma \sum_s \left[ \kappa_s \frac{\partial \Theta_s}{\partial x} - 3\eta_s \frac{\partial V_s}{\partial x} (V_s - V_u) \right], \end{aligned} \quad (1.73)$$

čia

$$\Theta_u^b = C_u - \frac{\tau_u}{2} (1-p) \gamma \sum_s \left[ (3P_s + r_s V_s^2 - 2r_s V_u V_s) (V_s - V_u) + r_s (\Lambda_{u,s}^2 - 2V_u \Lambda_{u,s}^1) \right]. \quad (1.74)$$

### *Vartotojų klasės sąveika SVK modelyje*

Norint atvaizduoti vartotojų klasės sąveiką modelyje, priimama, jog vartotojų klasės važiuoja vienodu greičiu  $V_u$ , greičio variacija lygi 0. Tuomet  $k$ -tasis sąveikos momentas yra:

$$\begin{aligned} \Lambda_{u,s}^k &= \int_{-\infty}^{\infty} v^k [\delta(v - V_u) \cdot (v - V_s) - \delta(v - V_s)] dv = \\ &= V_u^k \cdot \max\{0, V_u - V_s\} + V_s^k \cdot \min\{0, V_u - V_s\}. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Šiuo atveju atitinkamai perrašomas balansinis greitis (lygtis (1.72)):

$$V_u^b = V_u^0 - (1-p_u) \tau_u \gamma \left[ \sum_s r_s (V_s - V_u) (V_s - \max\{V_u, V_s\}) \right]. \quad (1.76)$$

Taigi, kai vartotojų klasė  $u$  transporto priemonės važiuoja lėčiau nei vartotojų klasė  $s$  (kadangi  $V_s - \max\{V_u, V_s\} = 0$ ), tuomet vartotojų klasės  $s$  transporto priemonės neįtakoja vartotojų klasės  $u$  balansinio greičio. Vadinasi, jei vartotojų klasė  $u$  turi didesnę greitį už vartotojų klasę  $s$ , tai  $r_s (V_s - V_u) (V_s - \max\{V_u, V_s\}) = r_s (V_s - V_u)$ . Dėl sąveikos su lėtesne vartotojų klase  $s$ , vartotojų klasės  $u$  balansinis greitis sumažėja iki  $(1-p_u) \tau_u \gamma_s (V_s - V_u)^2$  [17].

### *Ekvivalencija su kitais (vienos vartotojų klasės) makroskopiniais modeliais*

#### *Helbingo patobulintas aukštesnės eilės transporto srautų modelis*

Jei priimtume, kad yra tikrai viena vartotojų klasė  $u$ , tuomet pasikeistų lygčių išraiškos:

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial(rV)}{\partial x} = 0, \quad (1.77)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = -\gamma \left( \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\eta}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma}{\partial x} \left( P - \eta \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{V^b - V}{\tau} + (1-p)\gamma \eta \frac{\partial V}{\partial x}, \quad (1.78)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + V \frac{\partial \Theta}{\partial x} = -\gamma \left[ \frac{2P}{r} \frac{\partial V}{\partial x} - \eta \frac{2}{r} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{2}{\tau} [\Theta^b - \Theta], \quad (1.79)$$

su balansiniu greičiu:

$$V^b = V^0 - (1-p)\tau\gamma P \quad (1.80)$$

ir balansine greičio variacija:

$$\Theta_u^b = C_u - \frac{\tau_u}{2} (1-p)\gamma P. \quad (1.81)$$

Šios lygtys yra Heblingo patobulintas vienos vartotojų klasės modelis.

### *Payne'o aukštesnės eilės transporto srauto modelis*

Nagrinėjant vienos vartotojų klasės atvejį,  $\Theta(x,t) = c_0^2$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\kappa = 0$ ,  $\eta = 0$ , ir tinkamai parinkus  $p(r)$ , modelis susiveda į paprastą Payne'o modelį:

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial(rV)}{\partial x} = 0, \quad (1.82)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V^b - V}{\tau} - \frac{1}{r} c_0^2 \frac{\partial r}{\partial x}, \quad (1.83)$$

$$V^b(r) = V^0 - c_0^2 \tau [1 - p(r)]. \quad (1.84)$$

Payne'o tipo eismo modelyje, balansinis greitis  $V^b(r)$  yra prioritetinis. Staigaus aplenkimo tikimybė yra:

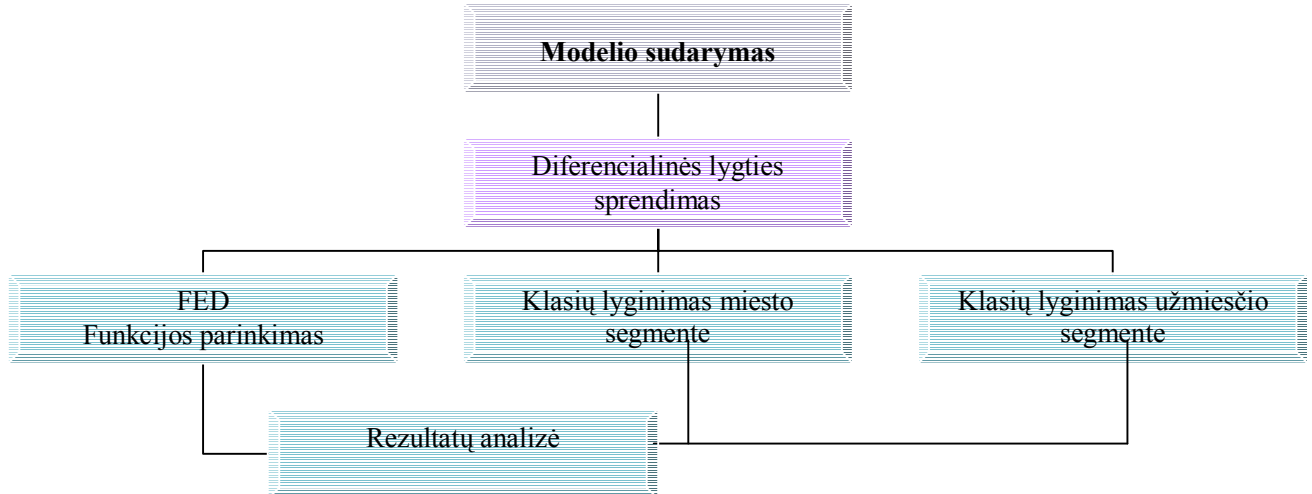
$$p(r) = \frac{c_0^2 \tau r - [V^0 - V^b(r)]}{c_0^2 \tau}. \quad (1.85)$$

Kadangi  $p(0) = 1$ , balansiniam greičiui yra taikoma sąlyga:

$$V^b(r) = V^0 - c_0^2 \tau r + O(r^2). \quad (1.86)$$

## 2. TIRIAMOJI DALIS

Tiriamoji dalis buvo atliekama kelias etapus. Etapai ir jų eiliškumas pavaizduotas 2.1 pav.



2.1 pav. Modelio sudarymo schema

Pagrindinę darbo esmę sudaro diferencialinės lygties sprendimas. Po šio etapo įgyvendinimo toliau lygiagrečiai sekė FED tyrimas ir klasių charakteristikų lyginimas.

### 2.1 DIFERENCIALINĖS LYGTIES SPRENDIMAS

Kompiuterinis eksperimentas yra atliktas pagal 1.2 skyrelio matematinius modelius. Spręsta dalinių išvestinių diferencialinė lygtis (1.16):

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla_y \cdot \left( \rho_u \frac{dy_u}{dt} \right) = \left( \frac{\partial \rho_u}{\partial t} \right)_{nt}$$

Šios lygties dešinė pusė nusako į kelio segmentą įvažiuojančių transporto priemonių skaičių. Jei dešinė pusė yra prilyginta konstantai, tai įvažiuojančių transporto priemonių skaičius yra pastovus. Jei transporto priemonės įvažiuoja nepastoviai, tai dešinėje lygties pusėje nusakomas dėsnis, pagal kurį automobiliai įsilieja į eismo srautą. Šiame darbe lygties dešinė pusė yra prilyginta nuliui priimant prielaidą, kad kelio segmentas yra uždaras, t.y. nėra papildomų įvažiavimų į šį segmentą. Tuomet (1.16) lygtį galime perrašyti taip:

$$\frac{\partial \rho_u}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_u v)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left[ \rho_u \left( \frac{v^0 - v}{\tau_u} \right) \right] = 0.$$

Pagal šios lygties sprendimo rezultatus atlikti tolesni skaičiavimai, t.y. lyginti skirtingų transporto priemonių klasių eismo tankiai.

1.23 lygtis spręsta naudojant matematinį paketą Maple 8. Šis paketas pasirinktas dėlto, kad su juo sudėtingas diferencialines lygtis spręsti yra patogiau.

1.23 lygčiai išspręsti naudota standartinė funkcija pdsolve(). Ji skirta diferencialinėms lygtims su dalinėmis išvestinėmis, bet rezultata pateikia abstraktų, su neapibrėžta funkcija \_F1:

$$f(t, x, v) = -a t + \_F1\left(v - t, x + \frac{1}{2} t^2 - t v\right),$$

čia  $f(t,x,v)$  pažymėtas tankis  $\rho_u$ ,  $t$  – laikas,  $x$  – kelio segmento ilgis,  $v$  – greitis.

Norint gauti tikslesnį atsakymą, buvo konkretizuota nežinoma tankio funkciją  $f(t,x,v)$ . Tam naudotos funkcijos pdetest() ir factor():

```
> ans_1 := pdetest(ansatz,PDE);
```

```
> factor(ans_1);
```

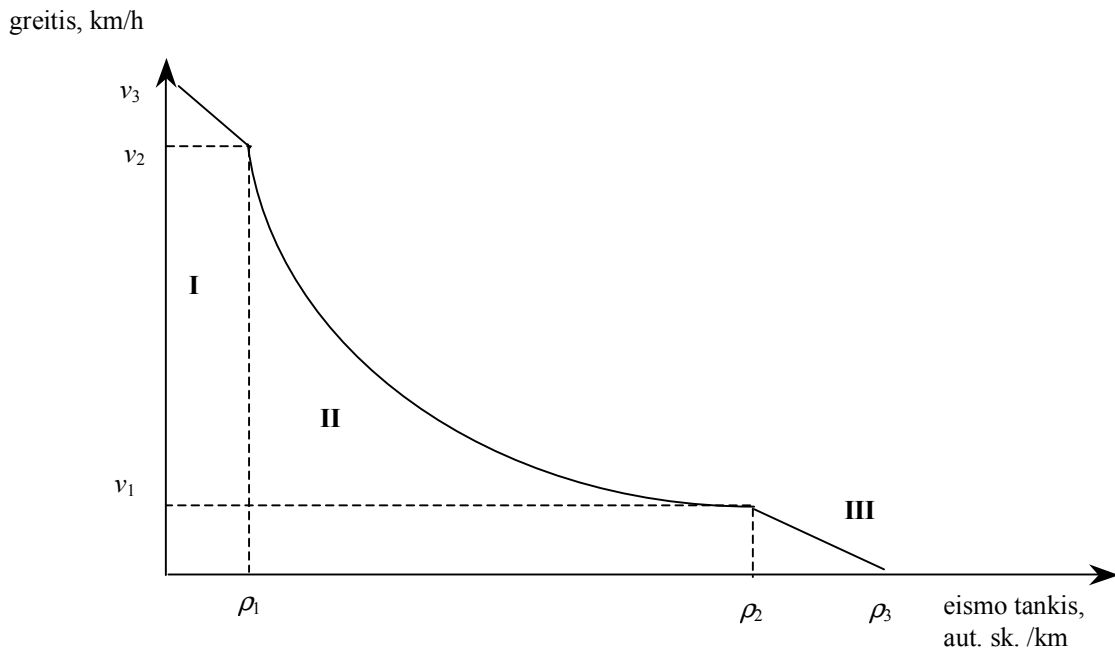
Galiausiai, turint funkciją su pilnosiomis išvestinėmis, buvo taikyta diferencialinių lygčių sprendimo funkcija dsolve() ir gauta tankio funkcijos išraiška. Esant skirtingoms pradinės sąlygoms, kiekvieną kartą gaunama ir skirtinga funkcijos išraiška. Jei pageidaujamas greitis yra 10 km/h, o prisitaikymo laikas – 2,6 s, tai funkcija yra:

$$ans := F(t, x, v) = \frac{e^t e^x - C1 e^{\left(\frac{v}{1385}\right)}}{(-10 + v)^{\left(\frac{1374}{1385}\right)}}$$

Diferencialinė lygtis su pilnosiomis išvestinėmis yra išspręsta taikant atskyrimo metodą. Šios lygties pilnas sprendimas yra pateiktas antrame priede [9,10].

## 2.2 FUNDAMENTALIOJI EISMO DIAGRAMA

Eismo srauto tankio ir greičio sąryšiui nustatyti naudotasi fundamentaliąja eismo diagrama. Fundamentaliąji eismo diagrama (FED) – tai funkcija, vaizduojanti eismo tankio ir automobilių greičio sąryšį (2.1 pav.). Ji sudaryta, remiantis eismo srauto analiziniais duomenimis. FED nagrinėjama kaip trijų dalių diagrama.



**2.2 pav. Fundamentalios eismo diagramos (FED) padalinimas į nagrinėjamas sritis:**

**I.  $\rho < \rho_1$ , II.  $\rho_1 < \rho < \rho_2$ , III.  $\rho > \rho_2$**

**I.  $\rho < \rho_1$**

Tiriant FED iš kairės į dešinę, matyti, kad eismo tankis yra mažesnis nei greitis. Tankio padidėjimas greičiui turi mažai įtakos. Tai eismo srauto greičio minimumo ir maksimumo (atitinkamai  $v_3$  ir  $v_2$ ) santykinė funkcija:

$$v = v_3 - \left( \frac{v_3 - v_2}{\rho_1} \right) \cdot \rho \quad (2.1)$$

Ši lygtis gaunama išvedus tiesės lygtį per du taškus  $(0, v_3)$  ir  $(\rho_1, v_2)$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_3 - v_2}{\rho_1} \Rightarrow v = v_3 - \frac{v_3 - v_2}{\rho_1} \cdot \rho \quad (2.2)$$

**II.  $\rho_1 < \rho < \rho_2$**

Net ir nedidelis automobilių greičio sumažėjimas tankio kritiniame taške  $\rho_1$  gali žymiai keisti transporto eismo srautą. Šiai sričiai aprašyti funkcija nėra tiksliai nusakyta. Šiuo atveju pasirinkime eksponentinę funkciją, vėliau aptarsime ir kitus variantus. Funkcija, aprašanti eksponentinę kreivę, naudojama FED daliai tarp kritinio tankio ir greičio minimumo aprašyti, atrodo taip:

$$v = m \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_3} \right), \quad m = \frac{v_2}{\left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_3} \right)} \quad (2.3)$$

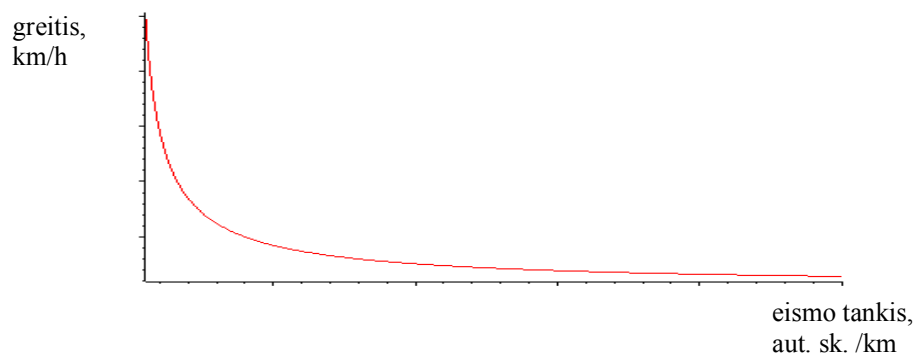
### III. $\rho > \rho_2$

Nuo taško  $\rho_2$  greitis nusistovi, ir gaunama trečioji galutinė funkcija:

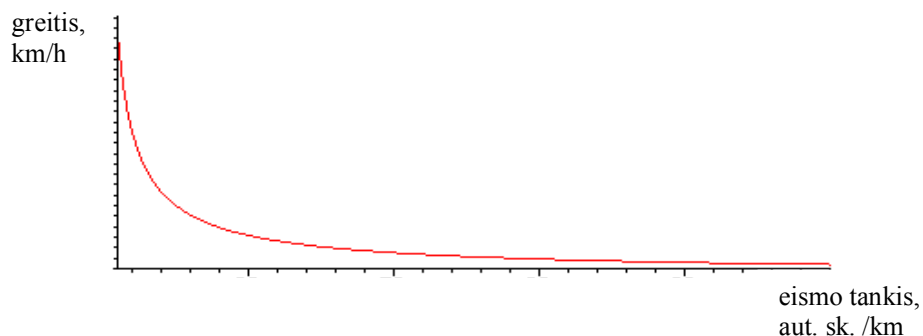
$$v = v_1 \quad (2.4)$$

Šios trys lygtys sudaro vieną FED aprašančią struktūrą, kuri gali būti naudojama realiam transporto eismo srautui modeliuoti.

Antrajai pagrindinei nagrinėjamai sričiai aprašyti nėra tiksliai nurodyta funkcija. Tik iš gauto funkcijos pobūdžio galime sakyti, kad tai eksponentinė ar hiperbolinė funkcija. Šiame darbe tyrėme, kuri funkcija, eksponentinė ar hiperbolinė, geriau aprašo antrąją sritį. Gautus rezultatus pavaizdavome grafiškai: 2.3 pav. – eksponentinę funkciją, o 2.4 pav. – hiperbolinę.



2.3 pav. Eksponentinė funkcija



2.4 pav. Hiperbolinė funkcija

Atlikus tyrimą ir gautus abiejų funkcijų rezultatus palyginus tarpusavyje, pastebėtas nežymus apie 0,03 tikslumo skirtumas, todėl funkcijos pasirinkimas tarp eksponentinės ir hiperbolinės rezultatams reikšmingos įtakos neturi. Tolesniuose tyrimuose naudosime eksponentinę funkciją.



## 2.3 EISMO TANKIO IR PRISITAIKYMO LAIKO PRIKLAUSOMYBĖ

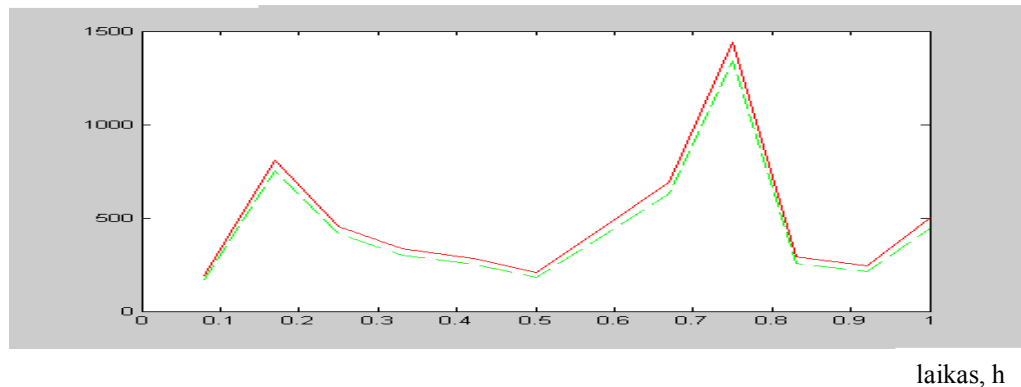
Mezoskopiniame eismo srautų modeliavime transporto priemonės yra suskirstomos į grupes. Kriterijai, pagal kuriuos yra sudaromos grupės, gali būti įvairūs, pvz.: transporto priemonių ilgiai, važiavimo greičiai ir pan. Šiame darbe mes išskyrėme dvi transporto priemonių grupes: lengvieji automobiliai ir sunkvežimiai. Tyrimuose tarpusavyje lyginome šioms grupėms priklausančių transporto priemonių tankius, keičiant tam tikras charakteristikas.

Transporto priemonių vairuotojai, prisitaikydami prie eismo sąlygų, tai padidina greitį, tai jį sumažina. Pagreitėjimo/sulėtėjimo charakteristikos skiriasi priklausomai nuo vartotojų klasių, todėl priimama, jog greičio adaptacija sukelia vartotojų klasėms būdingą prisitaikymo laiką  $\tau_u$ . Šis prisitaikymo laikas ir pageidaujamas greitis yra pagrindinės charakteristikos, kurias keičiant vertinsime transporto priemonių tankio pokyčius.

Pradiniai duomenys – transporto priemonių greičiai. Aptarsime kelis variantus, kai pradiniai duomenys yra parinkti atsitikti, generuoti pagal tam tikrą skirstinį ar yra realūs.

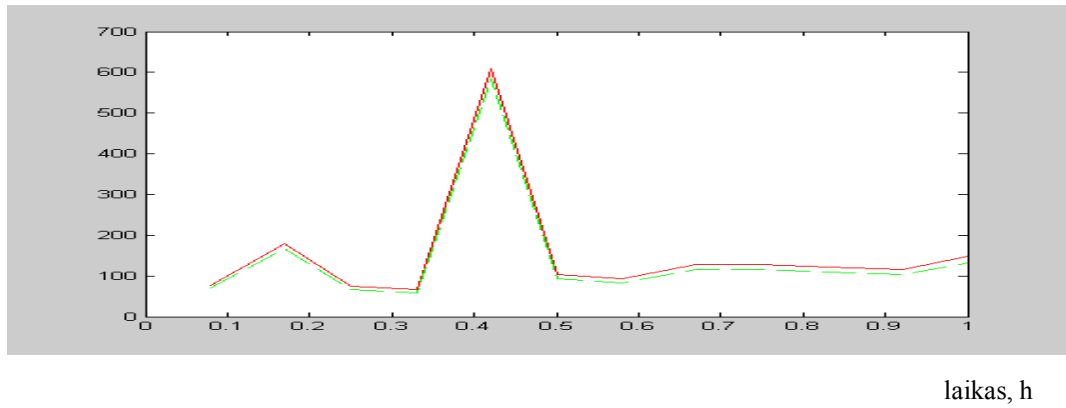
Nagrinėkime, kaip lengvųjų automobilių tankis kinta esant skirtingiems prisitaikymo laikams.

eismo tankis, aut. sk. /km



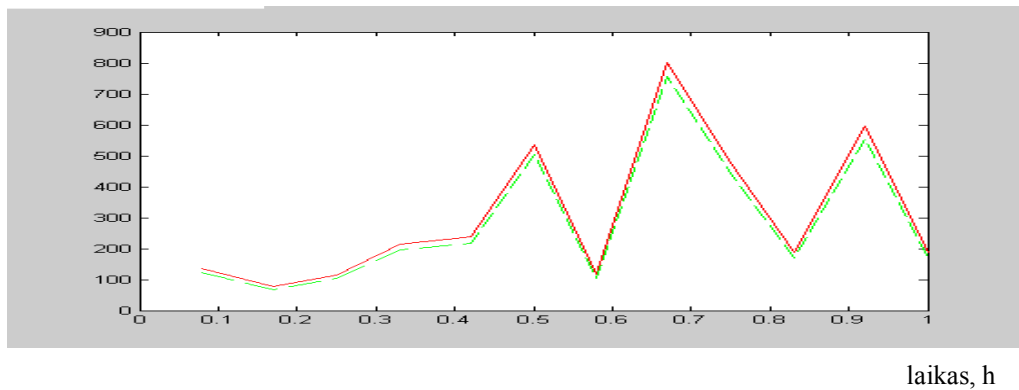
2.5 pav. Lengvųjų automobilių tankis, esant skirtingiems prisitaikymo laikams (pradiniai duomenys parinkti atsitiktinai)

eismo tankis, aut. sk. /km



**2.6 pav. Lengvųjų automobilių tankis, esant skirtingiems prisitaikymo laikams (pradiniai duomenys generuoti pagal normalųjį skirstinį)**

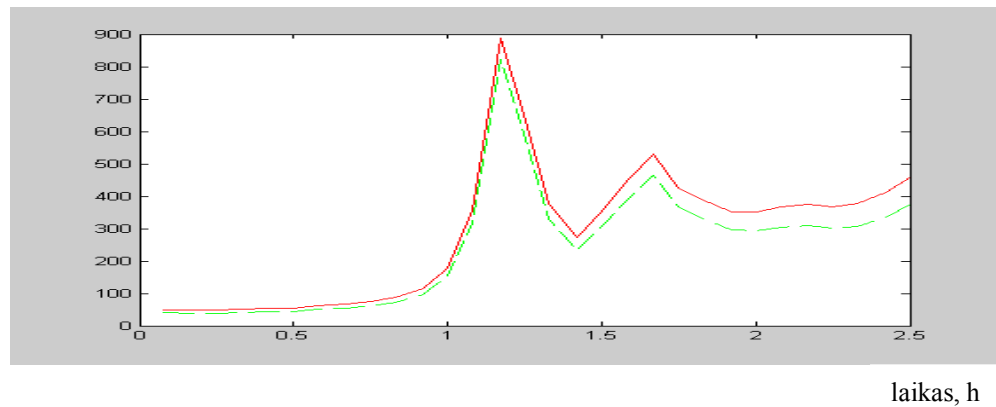
eismo tankis, aut. sk. /km



**2.7 pav. Lengvųjų automobilių tankis, esant skirtingiems prisitaikymo laikams (pradiniai duomenys generuoti pagal tolygųjį skirstinį)**

Šiuose trijuose grafikuose ištisinė linija atspindi 3,5 s prisitaikymo laiką, o brūkšniuota – 1,6 s. Kelio segmento ilgiai yra parinkti skirtingai: 2.4 pav. - 8 km, 2.5 pav. – 6,5 km, 2.6 pav. – 7 km. Iš gautų rezultatų matome, kad didėjant prisitaikymo laikui, eismo tankis didėja.

eismo tankis, aut. sk. /km



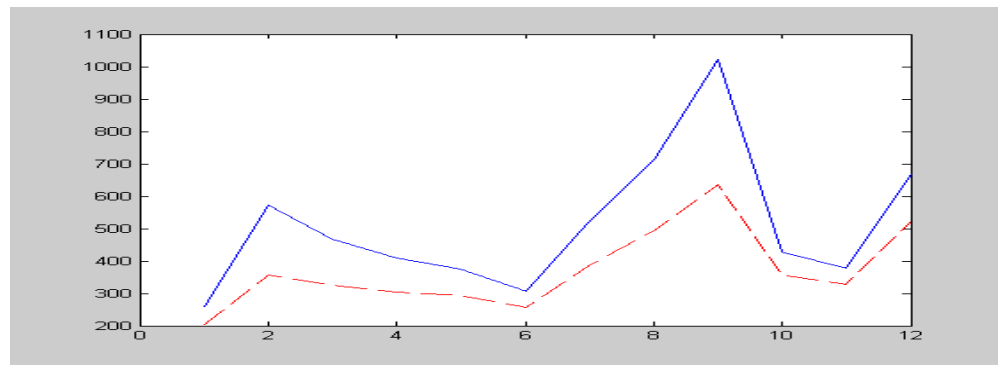
**2.8 pav. Lengvųjų automobilių tankis, esant skirtingiems prisitaikymo laikams (pradiniai duomenys yra realūs)**

Šiame grafike ištisinė linija atspindi 10 s prisitaikymo laiką, o brūkšniuota – 1,6 s, kelio segmento ilgis yra 6,5 km. Iš gautų rezultatų matome, kad didėjant prisitaikymo laikui, eismo tankis didėja. Skirtumas tarp ištisinės ir brūkšniuotos linijų yra didesnis lyginant realius duomenis ir generuotus. Tam įtakos turi prisitaikymo laiko pasirinktos reikšmės. Realiesiems duomenims skirtumas tarp pasirinktų prisitaikymo laikų yra žymiai didesnis nei generuotiems duomenims.

## **2.4 LENGVŪJŲ AUTOMOBILIŲ IR SUNKVEŽIMIŲ MIESTO SEGMENTO EISMO TANKIO LYGINIMAS**

Kaip jau buvo minėta, transporto priemonės mes suskirstome į dvi klases, t.y. lengvieji automobiliai ir sunkvežimiai. Šiame darbe tyrėme kiekvienos klases eismo tankį, priklausomai nuo pageidaujamo greičio, ir gautus rezultatus lyginome tarpusavyje. Mieste ir užmiestyje prisitaikymo laikai yra skirtingi. Šiame skyrelyje aptarsime skirtingų klasių tankius miesto segmente, o užmiėsčio segmentą nagrinėsime 2.4 skyrelyje.

eismo tankis, aut. sk. /m

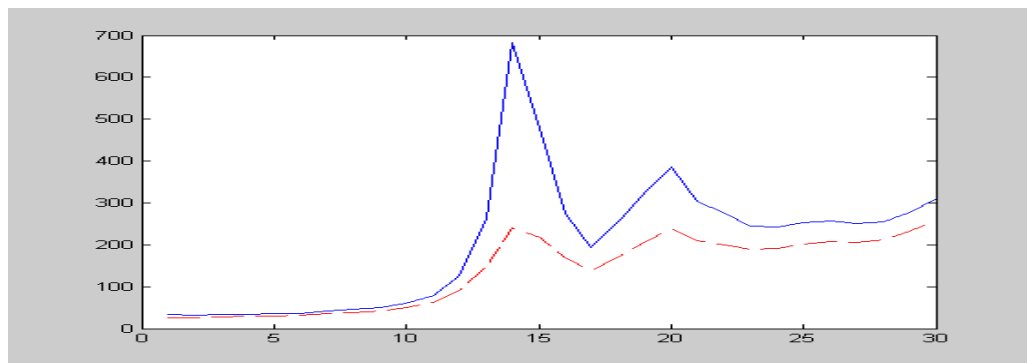


laikas, min

### 2.9 pav. Lengvųjų automobilių ir sunkvežimių tankis (pradiniai duomenys parinkti atsitiktinai)

Šiame grafike ištisinė linija atspindi lengvuosius automobilius, kurių pageidaujamas greitis yra 40 km/h, o brūkšniuota linija – sunkvežimius, kurių pageidaujamas greitis yra 30 km/h, kelio segmento ilgis yra 6 km. 2.8 pav. matyti, kad lengvųjų automobilių tankis yra didesnis už sunkvežimių, tai atspindi realią situaciją, nes lengvųjų automobilių ilgis yra mažesnis už sunkvežimių, tai ir kilometre jų telpa daugiau negu sunkvežimių.

eismo tankis, aut. sk. /m



laikas, min

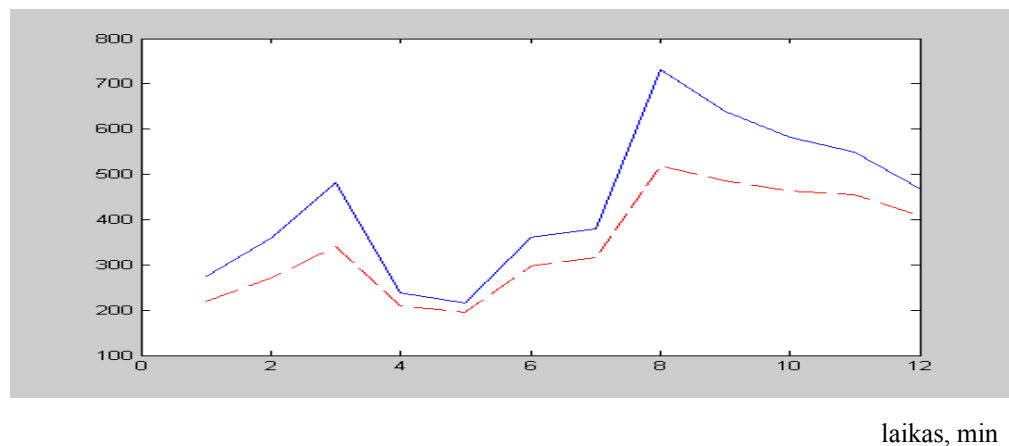
### 2.10 pav. Lengvųjų automobilių ir sunkvežimių tankis (pradiniai duomenys yra realūs)

2.9 pav. ištisinė linija atspindi lengvuosius automobilius, kurių pageidaujamas greitis yra 15 km/h, o brūkšniuota linija – sunkvežimius, kurių pageidaujamas greitis yra 10 km/h, kelio segmento ilgis yra 3,5 km. Šiame grafike, kaip ir anksčiau aptartame, lengvųjų automobilių tankis yra didesnis už sunkvežimių.

## 2.5 LENGVŪJŲ AUTOMOBILIŲ IR SUNKVEŽIMIŲ UŽMIESČIO SEGMENTO EISMO TANKIO LYGINIMAS

2.4 skyrelyje aptarėme lengvųjų automobilių ir sunkvežimių miesto segmento eismo tankio skirtumus. Dabar nagrinėsime užmiesčio segmentą, kuriame pageidaujami greičiai yra didesni lyginant su miesto segmentu. Prisitaikymo laikai ir miesto ir užmiesčio segmentuose lieka nepakitę, t.y. 1,6 s lengviesiems automobiliams ir 2,6 s sunkvežimiams.

eismo tankis, aut. sk. /m



**2.112 pav. Lengvųjų automobilių ir sunkvežimių tankis (pradiniai duomenys parinkti atsitiktinai)**

Šiame grafike ištisinė linija atspindi lengvuosius automobilius, kurių pageidaujamas greitis yra 55 km/h, o brūkšniuota linija – sunkvežimius, kurių pageidaujamas greitis yra 45 km/h, kelio segmento ilgis yra 6 km. 2.10 pav. matyti, kad lengvųjų automobilių tankis yra didesnis už sunkvežimių.

## IŠVADOS

1. Sudarytas matematinis modelis mezoskopiniam eismo srautui modeliuoti, išnaginėjus FED pagrindinę sritį ir nustatčius, kad funkcijos pasirinkimas tarp eksponentinės ir hiperbolinės, prašant šią sritį, rezultatams reikšmingos įtakos neturi. Modeliavimas atliktas su teoriniais ir realiais duomenimis naudojant Maple 8, Matlab R12 ir Microsoft Office Excel 2003 paketus.
2. Sudėtinių vartotojų klasių modelis taikytas analizuojant dvi transporto priemonių klases - lengvuosius automobilius ir sunkvežimius – ir nagrinėjant pagrindinę mezoskopinio eismo srauto charakteristiką – eismo tankį. Nustatyta, kad lengvųjų automobilių tankis yra didesnis nei sunkvežimių tiek imant kelio segmentą mieste, tiek užmiestyje.
3. Išnaginėta prisitaikymo laiko įtaka mezoskopinio eismo tankiui. Įrodyta, kad eismo tankis yra didesnis, esant didesniam prisitaikymo laikui.

## LITERATŪRA

1. Helbing, D. (1997b). Modeling Multi-lane Traffic Flow with Queuing Effects. *Physica A* 242, 175-194.
2. Hoogendoorn, S.P., and P.H.L. Bovy. (2000b). Modeling Multiple User-Class Traffic Flow. *Transportation Research B* (34)2, 123-146.
3. Lyrintzis, A.D., G. Liu, P.G. Michalopoulos. (1994). Development and comparative evaluation of high-order traffic flow models. *Transportation Research Record* 1547, 174-183.
4. Prigogine, I., and Herman R. *Kinetic Theory of Vehicular Traffic*. American Elsevier Publishing Co., New York, 1971.
5. Pavari – Fontana, L. S. On Boltzmann – like Treatments for Traffic Flow: A Critical Review of the Basic Bodel and an Alternative Proposal for Dilute Traffic Analysis. *Transportation Research b. Part B. Vol. 9. 1975*, 225-235
6. Hoogendoorn, S.P., and P.H.L. Bovy. (2000b). Modeling Multiple User-Class Traffic. *Transportation Research Record* 1644, 57-69.
7. Haberman R. *Mathematical models*. Prentice-Hall, Inc. New Jersey, 1977, p. 257-395.
8. Transportation Research Board (TRB) Special Report 165, “Traffic Flow Theory”, published in 1975. Traffic Stream characteristic by Fred L. Hall – 2 dalis. <http://www.tfhrc.gov/its/tft/tft.htm>
9. Janušauskaitė N. ir kt. Tiesinė algebra ir diferencialinis skaičiavimas. Kaunas: Technologija, 2004, 139 – 247 p.
10. Coombes K.R. *Differential Equations with Maple*. John Wiley&Sons, Inc, 1996, p. 232.
11. Andrews, F. C. (1973a) A statistical theory of traffic flow on highways-III. Distributions of desired speeds. *Transportation Research* 7, 223-232.
12. Beylich, A. E. (1979) Elements of a kinetic theory of traffic flow. *Rarefied Gas Dynamics*, Vol.1, ed. R. Campargue, pp. 129-138. Commissariat a l'Energie Atomique, Paris.
13. Bovy, P. H. L., ed. (1998) *Motorway Traffic Flow Analysis. New Methodologies and Recent Empirical Findings*. Delft University Press, Delft.
14. Gerlough, D. L. and Huber, M. J. (1975) Special Report 165: Traffic Flow Theory. Transportation Research Board, Washington, D.C.
15. Helbing, D. (1997c) Fundamentals of traffic flow. *Physical Review E* 55, 3735-3738.
16. Helbing, D. (1997d) Modeling multi-lane traffic flow with queuing effects. *Physica A* 242, 175-194 (1997).
17. Helbing, D. and Greiner, A. (1997) Modeling and simulation of multilane traffic flow. *Physical Review E* 55, 5498-5507.

18. Hoogendoorn, S. and Bovy, P. H. L. (1998) A macroscopic multi-lane multi-class traffic flow model. Paper submitted for presentation and publication to the 79th TRB Annual Meeting 1999 in Washington.



## 1 PRIEDAS. PRADINIAI DUOMENYS

Pradinių duomenų pavyzdys:

Greičiai, km/h	Laikai, h
33,8181696	0.08
36,0237024	0.17
37,4940576	0.25
38,2292352	0.33
39,6995904	0.42
41,1699456	0.5
39,6995904	0.58
39,6995904	0.67
38,9644128	0.75
36,75888	0.83
33,082992	0.92
27,2015712	1
21,3201504	1.08
17,6442624	1.17
19,1146176	1.25
22,7905056	1.33
27,2015712	1.42
24,9960384	1.5
23,5256832	1.58
22,7905056	1.67
25,731216	1.75
27,9367488	1.83
30,8774592	1.92
32,3478144	2
33,082992	2.08
34,5533472	2.17
36,75888	2.25
38,2292352	2.33
38,2292352	2.42
37,4940576	2.5

## 2 PRIEDAS. PROGRAMŲ TEKSTAI

Maple 8:

```
> PDE := Diff(F(t,x,v),t)+Diff(F(t,x,v)*v,x)+Diff(((50-
v)*2250)*F(t,x,v),v)=0;
>
```

$$PDE := \left( \frac{\partial}{\partial t} F(t, x, v) \right) + \left( \frac{\partial}{\partial x} (F(t, x, v) v) \right) + \left( \frac{\partial}{\partial v} (2250 (50 - v) F(t, x, v)) \right) = 0$$

> **ansatz := F(t,x,v)=exp(t)\*exp(x)\*f(v);**

$$\text{ansatz} := F(t, x, v) = e^t e^x f(v)$$

> **ans\_1 := pdetest(ansatz,PDE);**

$$\text{ans}_1 := e^{(t+x)} \left( -2249 f(v) + f(v) v + 112500 \left( \frac{d}{dv} f(v) \right) - 2250 \left( \frac{d}{dv} f(v) \right) v \right)$$

> **factor(ans\_1);**

$$e^{(t+x)} \left( -2249 f(v) + f(v) v + 112500 \left( \frac{d}{dv} f(v) \right) - 2250 \left( \frac{d}{dv} f(v) \right) v \right)$$

> **ans\_f := dsolve(ans\_1,f(v));**

$$\text{ans}_f := f(v) = \frac{-C1 e^{\left(\frac{v}{2250}\right)}}{(-50+v)^{\left(\frac{733}{750}\right)}}$$

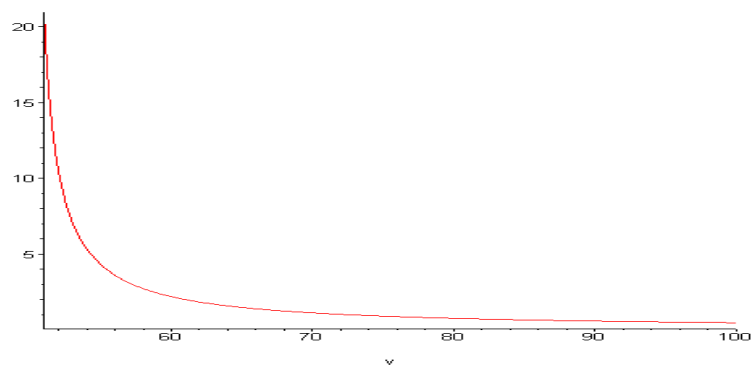
> **ans := subs(ans\_f,ansatz);**

$$\text{ans} := F(t, x, v) = \frac{e^t e^x - C1 e^{\left(\frac{v}{2250}\right)}}{(-50+v)^{\left(\frac{733}{750}\right)}}$$

> **pdetest(ans,PDE);**

0

> **plot(exp(2)\*exp(1)\*exp(1/2250\*v)/(-50+v)^(733/750), v=51..100);**



> **with(DEtools): odeadvisor(ans\_1);**

**[\_separable]**

> **PDE := Diff(F(t,x,v),t)+Diff(F(t,x,v)\*v,x)+Diff(((50-v)\*240)\*F(t,x,v),v)=0;**

>

$$PDE := \left( \frac{\partial}{\partial t} F(t, x, v) \right) + \left( \frac{\partial}{\partial x} (F(t, x, v) v) \right) + \left( \frac{\partial}{\partial v} (240 (50 - v) F(t, x, v)) \right) = 0$$

> **ansatz := F(t,x,v)=(1/t)\*(1/x)\*f(v);**

$$\text{ansatz} := F(t, x, v) = \frac{f(v)}{t x}$$

> ans\_1 := pdetest(ansatz,PDE);

$$ans\_1 := -\frac{x f(v) + t f(v) v + 240 t x f(v) - 12000 t x \left(\frac{d}{dv} f(v)\right) + 240 t x \left(\frac{d}{dv} f(v)\right) v}{t^2 x^2}$$

> factor(ans\_1);

$$-\frac{x f(v) + t f(v) v + 240 t x f(v) - 12000 t x \left(\frac{d}{dv} f(v)\right) + 240 t x \left(\frac{d}{dv} f(v)\right) v}{t^2 x^2}$$

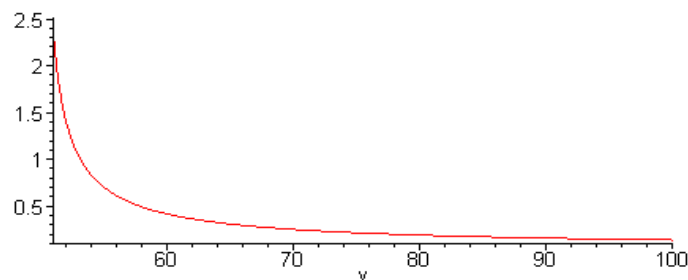
> ans\_f := dsolve(ans\_1,f(v));

$$ans\_f := f(v) = (-50 + v)^{\left(-\frac{1}{240t} - 1 - \frac{5}{24x}\right)} \_CI e^{\left(-\frac{v}{240x}\right)}$$

> ans := subs(ans\_f,ansatz);

$$ans := F(t, x, v) = t x (-50 + v)^{\left(\frac{1}{240t} - 1 + \frac{5}{24x}\right)} \_CI e^{\left(\frac{v}{240x}\right)}$$

> plot(2\*1\*(-50+v)^((1/(240\*2))-1+(5/(24\*1)))\*exp(v/(240\*1)),  
v=51..100);



>

> PDE := Diff(F(t,x,v),t)+Diff(F(t,x,v)\*v,x)+Diff(((30-v)\*1385)\*F(t,x,v),v)=0;

>

$$PDE := \left(\frac{\partial}{\partial t} F(t, x, v)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} (F(t, x, v) v)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial v} (1385 (30 - v) F(t, x, v))\right) = 0$$

> ansatz := F(t,x,v)=exp(t)\*exp(x)\*f(v);

$$ansatz := F(t, x, v) = e^t e^x f(v)$$

> ans\_1 := pdetest(ansatz,PDE);

$$ans\_1 := e^{(t+x)} \left(-1384 f(v) + f(v) v + 41550 \left(\frac{d}{dv} f(v)\right) - 1385 \left(\frac{d}{dv} f(v)\right) v\right)$$

> factor(ans\_1);

$$e^{(t+x)} \left(-1384 f(v) + f(v) v + 41550 \left(\frac{d}{dv} f(v)\right) - 1385 \left(\frac{d}{dv} f(v)\right) v\right)$$

> ans\_f := dsolve(ans\_1,f(v));

$$ans\_f := f(v) = \frac{\_CI e^{\left(\frac{v}{1385}\right)}}{(-30 + v)^{\left(\frac{1354}{1385}\right)}}$$

```
> ans := subs(ans_f, ansatz);
```

$$ans := F(t, x, v) = \frac{e^t e^x - C1 e^{\left(\frac{v}{1385}\right)}}{(-30 + v)^{\left(\frac{1354}{1385}\right)}}$$

```
> pdetest(ans, PDE);
```

```
0
```

```
< ... >
```

### MATLAB R12:

```
function grafvalandos;
```

```
x=8;
```

```
greiciai=importdata('greiciai-km.h.txt');
```

```
laikas=importdata('laikas-h.txt');
```

```
[n m]=size(greiciai);
```

```
for i=1:n
```

```
    f(i)=(exp(x)*exp(laikas(i))*exp(greiciai(i)/1029))/((-50+greiciai(i))^(326/343)); % 3.5s
```

```
    fl(i)=(exp(x)*exp(laikas(i))*exp(greiciai(i)/2250))/((-50+greiciai(i))^(733/750)); % 1.6s
```

```
end
```

```
plot(laikas,f,'r-')
```

```
hold on
```

```
plot(laikas,fl,'g--')
```

```
function pirmas;
```

```
x=6.5;
```

```
greiciai=importdata('1.txt');
```

```
laikas=importdata('11.txt');
```

```
[n m]=size(greiciai);
```

```
for i=1:n
```

```
    fl(i)=(exp(x)*exp(laikas(i))*exp(greiciai(i)/360))/((-15+greiciai(i))^(43/45)); % 10 s
```

```
    f(i)=(exp(x)*exp(laikas(i))*exp(greiciai(i)/2250))/((-15+greiciai(i))^(1117/1125)); % 1.6s
```

```
end
```

```
laikas
```

```
greiciai
```

```
plot(laikas,fl,'r-')
```

```
hold on
```

```
plot(laikas,f,'g--')
```

```
function SeptyniODEvyniO;
```

```
x=6;
```

```
greiciai=importdata('ggg.txt');
```

```
laikas=importdata('laikas-h.txt');
```

```
laikasM=importdata('laikas-min.txt');
```

```
[n m]=size(greiciai);
```

```
for i=1:n
    fc(i)=(exp(x)*exp(laikas(i))*exp(greiciai(i)/2250))/((-55+greiciai(i))^(1097/1125)); % car 55 1.6s
    ft(i)=(exp(x)*exp(laikas(i))*exp(greiciai(i)/1385))/((-45+greiciai(i))^(1339/1385)); % truck 45 2.6s
end
```

< ... >

```
plot(laikasM, fcm, 'b-')
hold on
plot(laikasM, ftm, 'r--')
```

< ... >