KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

Birutė Narijauskaitė

EKSTREMALIŲJŲ REIKŠMIŲ KONVERGAVIMO GREIČIO TYRIMAS PERKĖLIMO TEOREMOSE

Magistro darbas

Vadovas
doc. dr. A. Jokimaitis

KAUNAS, 2005

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

TVIRTINU
Katedros vedėjas
prof. dr. J.Rimas
2005 06 03

EKSTREMALIŲJŲ REIKŠMIŲ KONVERGAVIMO GREIČIO TYRIMAS PERKĖLIMO TEOREMOSE

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

Kalbos konsultantas
J. Džežulskienė
2005 05 31

Vadovas
doc. dr. A. Jokimaitis
2005 05 25

Recenzentas
doc.dr. K. Padvelskis
2005 05 25

Atliko
FMMM 3 gr. stud.
B. Narijauskaitė
2005 05 24

KAUNAS, 2005

KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

Pirmininkas: Leonas Saulis, profesorius (VGTU)

Sekretorius: Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)

Nariai: Algimantas Jonas Aksomaitis, profesorius (KTU)

Vytautas Janilionis, docentas (KTU)

Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU)

Rimantas Rudzkis, banko NORD/LB vyriausiasis analitikas

Zenonas Navickas, profesorius (KTU)

Arūnas Barauskas, UAB „Elsis“ generalinio direktoriaus pavaduotojas

Narijauskaite B., Convergence rate analyze for extreme values in transfer theorems, master's work/supervisor doc. dr. A. Jokimaitis, Fundamental science faculty, department of Applied mathematics , Kaunas University of Technology, 2005, Kaunas, 120 p.

SUMMARY

Herein work is analyzing convergence rate in transfer theorems for extreme values of independent identically distributed random variables.

Analyzing various distributions is god nonuniform estimate of convergence rate in transfer theorems.

Transfer theorem of density of minima have been proved.

Analyzing convergence rate in transfer theorems of density for extreme.

Computation was developed using SAS and Mathcad.

TURINYS

LENTELIŲ SĄRAŠAS

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

ĮVADAS

Iš pradžių pateiksime keletą pavyzdžių , kuriuose ekstremalios reikšmės (maksimumai arba minimumai) vaidina svarbų vaidmenį.

Stichiniai gamtos reiškiniai. Potvyniai, liūtys, ekstremalios temperatūros, uraganai gali padaryti nuostolių įvairiems statiniams (bokštams, užtvankoms, gyvenamiesiems namams ir pan.). Aišku, tokių stichinių nelaimių negalima išvengti, tačiau, projektuojant šiuos statinius bei parenkant jiems statybines medžiagas, galima ir reikia atsižvelgti į minėtų stichinių nelaimių galimybę, kas padėtų sumažinti jų padarinius. Šių problemų inžineriniam sprendimui reikalinga pakankamai tiksli teorija, kuri leistų atsižvelgti į galimų ekstremalių gamtos reiškinių poveikį.

Sistemų patikimumo problema. Sakysime, sistema nustoja veikusi, jeigu sugenda bent vienas iš jos elementų. Šiuo atveju mažiausiai patikimas elementas turi lemiamos įtakos visos sistemos funkcionavimui.

Korozija. Paprastai laikoma, kad metalinė danga su dideliu korozinių dėmių skaičiumi yra pažeista korozijos, jeigu kurioje nors iš šių dėmių korozija apima visą dangos storį. Korozijos dėmių gylis yra atsitiktinis ir jis kinta laikui bėgant, priklausomai nuo aplinkos poveikio. Šiuo atveju lemiamą įtaką turi maksimali korozijos defekto gylio reikšmė.

Atmosferos užterštumas. Atmosferos užterštumas išreiškiamas procentiniu teršalų kiekiu atmosferoje (koncentracija). Šių teršalų koncentracija nuolat matuojama. Svarbu,kad maksimali koncentracijos reikšmė neviršytų nustatytos normos.

Atsparumas trūkiams. Kaip rodo eksperimentai, nėra absoliučiai vienalyčių medžiagų. Todėl ir atsparumas traukimui taip pat gali būti nevienodas, net jei medžiagos pagamintos, taikant tą patį technologinį procesą. Šį faktą galima paaiškinti tuo, kad kiekviename taške (arba mažoje srityje) medžiagos atsparumas yra atsitiktinis dydis. Todėl medžiagos atsparumą traukimui lemia minimalų atsparumą turintis taškas („grandinė trūksta silpniausioje vietoje“).

Šiame darbe tiriamas konvergavimo greitis nepriklausomų atsitiktinių dydžių ekstremaliųjų reikšmių ir jų tankių (minimumo ir maksimumo) perkėlimo teoremose. Gauti netolygieji konvergavimo greičio įverčiai atskirų nagrinėtų skirstinių atveju. Gautas ribinis skirstinys minimumo tankio perkėlimo teoremoje. Atlikta kompiuterinė skaičiuotė SAS ir Mathcad programų pagalba.

Pagrindinai etapai būtų tokie :

1) ribinio skirstinio radimas;
2) konvergavimo greičio įverčio skaičiavimas ir konvergavimo greičio kompiuterinė analizė;
3) tankių paklaidos skirtumų skaičiavimas ir kompiuterinė analizė.

Padarytas pranešimas „Atsitiktinių dydžių minimumo tankio perkėlimo teorema“ mokslo konferencijoje „Matematika ir matematikos dėstymas“. Šio pranešimo medžiaga bus spausdinama konferencijos darbuose.

1. BENDROJI DALIS

1.1 EKSTREMALIŲJŲ REIKŠMIŲ SCHEMOS SĄVOKA

Sakykime, kad $X_1, X_2, \ldots, X_n$ - atsitiktinių dydžių (a.d) seka. Sudarykime n pirmųjų sekos narių variacinę eilutę

$$X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \ldots \leq X_{n:n}.$$

Fiksuokime $k \in N$. Kai $n \to \infty$, a.d. $X_{k:n}$ ir $X_{n-k+1:n}$ vadinsime k-tosiomis ekstremaliosiomis reikšmėmis. Didžiausią ir mažiausią variacinės eilutės narius pažymėsime

$$Z_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n),$$
$$W_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

A.d Z_n ir W_n vadinsime ekstremaliosiomis reikšmėmis arba tiesiog maksimumu ir minimumu.

Tarkime, $u_n = u_n(x)$ − tokia realaus kintamojo funkcijų seka, kad pasiskirstymo funkcijų seka

$$H_n(u_n(x)) = P(Z_n < u_n(x))$$

silpnai konverguoja į neišsigimusią pasiskirstymo funkciją H(x). Taip apibrėžta struktūra Z_n kartu su prielaidomis apie a.d. seką $\{X_n\ ,\ n \geq 1\}$ bei funkcijų seką $\{\ u_n,\ n \geq 1\}$ sudaro maksimumų schemą.

Analogiškai apibrėžiame minimumų schemą. Tarkime, $v_n = v_n(x)$ − tokia realaus kintamojo funkcijų seka, kad pasiskirstymo funkcijų seka

$$L_n(v_n(x)) = P(W_n < v_n(x))$$

silpnai konverguoja į neišsigimusią pasiskirstymo funkciją L(x). Struktūrą W_n kartu su prielaidomis apie a.d. seką $\{X_n,\ n \geq 1\}$ ir funkcijų seką $\{\ v_n,\ n \geq 1\ \}$ sudaro minimumų schemą.

Jei a.d. $\{X_n,\ n \geq 1\}$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę su pasiskirstymo funkcija F(x) , o normavimo funkcijos u_n ir v_n tiesinės, t.y.

$$u_n(x) = a_n + b_n x, \quad a_n \in \Re, \qquad b_n > 0,$$

$$v_n(x) = c_n + d_n x, \quad c_n \in \Re, \qquad d_n > 0,$$

tai tokia ekstremaliųjų reikšmių (maksimumų ir minimumų) schema vadinama klasikine.

1.2 KAI KURIE VIENMAČIŲ EKSTREMALIŲJŲ REIKŠMIŲ TEORIJOS FAKTAI

Nagrinėsime maksimumų schemą, pažymėdami, kad analogišką rezultatai buvo gauti ir minimumų schemoje.

Sakykime, $\{\ X_j,\ j \geq 1\ \}$ – nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių a.d. seka. Tarkime,

$$F(x) = P(X_j < x) \qquad \forall j \geq 1.$$

Pažymėkime

$$Z_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Tarkime, kad egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantų sekos $\{a_n, \ \ n \geq 1 \ \}$ ir $\{ \ b_n > 0, \ \ n \geq 1 \ \}$, kad

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n < a_n + b_n x) = H(x) \tag{1.1}$$

kiekviename funkcijos H(x) tolydumo taške (čia H(x) – neišsigimusi pasiskirstymo funkcija). Tokį konvergavimą vadinsime silpnuoju pasiskirstymo funkcijų arba a.d. konvergavimu.

Sakysime, kad skirstinys F priklauso ribinio skirstinio H traukos sričiai (žymėsime $F \in D(H)$), jei egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantų sekos, kad tenkinama lygybė (1.1).

Pažymėkime

$$\alpha(F) = \inf\{x: \ \ F(x) > 0\},$$

$$\omega(F) = \sup\{x: \ \ F(x) < 1\}.$$

Suformuluosime sąlygas, kurias turi tenkinti skirstinys F, kad jis priklausytų kurio nors neišsigimusio skirstinio traukos sričiai. Taip pat pateiksime konstantų parinkimo būdą.

1.1 teorema. Tarkime, $\omega(F) = \infty,$ ir egzistuoja tokia teigiama konstanta α , kad

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-\alpha} \tag{1.2}$$

visiems x > 0. Tuomet $F \in D(H_{1,\alpha}).$ Čia

$$H_{1,\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0. \end{cases}$$

Normavimo konstantas b_n galima parinkti tokiu būdu:

$$b_n = \inf\{x: \ \ 1 - F(x) \leq 1/n\},$$

o $a_n = 0.$

1.2 teorema. Tarkime, $\omega(F) < \infty,$ o pasiskirstymo funkcija

$$F^*(x) = F(\omega(F) - 1/x)$$

tenkina sąlygą (1.2). Tuomet $F \in D(H_{2,\alpha}).$ Čia

$$H_{2,\alpha}(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^{\alpha}), & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$a_n = \omega(F),$$

$$b_n = \omega(F) - \inf\{x:\ 1 - F(x) \leq 1/n\}.$$

1.3 teorema. Tarkime, su bet kokia baigtine konstanta a integralas

$$\int_a^{\omega(F)} (1 - F(y))dy \tag{1.3}$$

yra baigtinis. Intervale $(\alpha(F), \omega(F))$ apibrėžkime funkciją

$$R(t) = \frac{1}{1 - F(t)} \int_a^{\omega(F)} (1 - F(y))dy.$$

Jei visiems realiems x egzistuoja riba

$$\lim_{t \to \omega(F)} \frac{1 - F(t + xR(t))}{1 - F(t)} = e^{-x}, \tag{1.4}$$

tai $F \in D(H_{3,0})$. Čia

$$H_{3,0}(x) = \exp(-e^{-x}), \quad x \in \Re.$$

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$a_n = \inf\{x:\ 1 - F(x) \leq 1/n\},$$
$$b_n = R(a_n).$$

Pastaba. Šiose teoremose pateiktas centravimo ir normavimo konstantų α_n ir b_n parinkimo būdas nėra vienintelis. Mes net negalime teigti, kad tai yra pats paprasčiausias konstantų parinkimo būdas ir kad taip parinktos konstantos yra geriausios, tačiau jis yra geras tuo, kad paprastas ir konstruktyvus.

1.4 teorema. Klasikinėje maksimumų schemoje egzistuoja tik trys $(H_{1,\alpha}, H_{2,\alpha}, H_{3,0})$ neišsigimusio ribinio skirstinio tipai.

1.1 – 1.4 teoremų įrodymas pateiktas [2].

Tarkime, kad egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantų sekos $\{c_n \ \ n \geq 1\}$ ir $\{d_n > 0, \ \ n \geq 1\}$, kad

$$\lim_{n\to\infty} P\left(W_n < c_n + d_n x\right) = L(x) \qquad \textbf{(1.5)}$$

kiekviename funkcijos L(x) tolydumo taške (čia L(x) − neišsigimusi skirstinio funkcija). Sakysime, kad skirstinys F priklauso neišsigimusio ribinio skirstinio L traukos sričiai (žymėsime $F \in D(L)$), jei tenkinama (1.5) lygybė.

Suformuluosime sąlygas, kad skirstinio funkcija F priklausytų ribinio skirstinio L traukos sričiai.

1.5 teorema. Tegu $\alpha(F) = \infty$, ir tegu egzistuoja tokia konstanta $\gamma > 0$, kad su visais x>0 teisinga lygybė

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{F(tx)}{F(t)} = x^{-\gamma} . \qquad \textbf{(1.6)}$$

Tada $F \in D(L_{1,\gamma})$, čia

$$L_{1,\gamma}(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-(-x)^{-\gamma}), & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$\begin{aligned} c_n &= 0, \\ d_n &= \sup\{x : F(x) \le 1/n\}. \end{aligned}$$

1.6 teorema. Tegu $-\infty < \alpha(F)$. Jei funkcija $F^*(x) = F(\alpha(F) - 1/x)$ $(x < 0)$ tenkina (1.6) sąlygą, tai $F \in D(L_{2,\gamma})$, čia

$$L_{2,\gamma}(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-x^{\gamma}), & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu :

$$\begin{aligned} c_n &= \alpha(F), \\ d_n &= \sup\{x : F(x) \le 1/n\} - \alpha(F). \end{aligned}$$

1.7 teorema. Tegu

$$\int_{\alpha(F)}^{a} F(y)dy < \infty$$

su bet kokia baigtine konstanta a. Apibrėžkime funkciją

$$r(t) = \frac{1}{F(t)} \int_{\alpha(F)}^{t} F(y)dy , \; t > \alpha(F) .$$

Jei su visais x egzistuoja riba

$$\lim_{t\to\alpha(F)} \frac{F(t+xr(t))}{F(t)} = e^x ,$$

tai $F \in D(L_{3,\gamma})$, čia

$$L_{3,0}(x) = 1 - \exp(-e^x) \quad (-\infty < x < \infty).$$

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu

$$c_n = \sup\{x : F(x) \le 1/n\},$$
$$d_n = r(c_n).$$

1.8 teorema. Klasikinėje maksimumų schemoje egzistuoja tik trys $(L_{1,\alpha}, L_{2,\alpha}, L_{3,0})$ neišsigimusio ribinio skirstinio tipai.

1.5 – 1.8 teoremų įrodymas pateiktas [2] darbe.

1.3 PERKĖLIMO TEOREMOS

Tarkime, kad egzistuoja tokios konstantos $\{\ a_n,\ n \ge 1\ \}$ ir $\{\ b_n > 0,\ n \ge 1\ \}$, kad

$$\lim_{n\to\infty} P\big(Z_n < a_n + b_n x\big) = H(x), \qquad \textbf{(1.7)}$$

čia H(x)- neišsigimusi skirstinio funkcija.

Tarkime, kad $\{N_n\}$ - sveikaskaitiniai a.d., nepriklausantys nuo $\{X_j\}$. Tarkime, kad tenkinama sąlyga

$$P\left(\frac{N_n}{n} < x\right) = A_n(nz) \underset{n\to\infty}{\to} A(z) = 1 - e^{-z}, z > 0. \qquad \textbf{(1.8)}$$

1.9 teorema. Tarkime, kad teisinga (1.7) lygybė. Jei tenkinama (1.8) sąlyga, tai

$$P\big(Z_{N_n} < a_n + b_n x\big) \underset{n\to\infty}{\to} \Psi(x), \qquad \textbf{(1.9)}$$

čia skirstinio funkcija apibrėžiama formule

$$\Psi(x) = \int_0^\infty H^z(x) dA(z). \qquad \textbf{(1.10)}$$

Teoremos įrodymas pateiktas [3].

Tarkime, kad egzistuoja tokios konstantos $\{c_n \quad n \ge 1\}$ ir $\{d_n > 0,\ \ n \ge 0\}$, kad

$$\lim_{n\to\infty} P\big(W_n < c_n + d_n x\big) = L(x), \qquad \textbf{(1.11)}$$

čia L(x)- neišsigimusi skirstinio funkcija.

Tarkime, kad $\{N_n\}$ - sveikaskaitiniai a.d., nepriklausantys nuo $\{X_j\}$. Tarkime, kad tenkinama sąlyga (1.8).

1.10 teorema. Tarkime, kad teisinga (1.11) lygybė. Jei tenkinama (1.8) sąlyga, tai

$$P\left(W_{N_n} < c_n + d_n x\right) \underset{n\to\infty}{\to} \psi(x), \qquad \textbf{(1.12)}$$

čia skirstinio funkcija apibrėžiama formule

$$\psi(x) = 1 - \int_0^\infty (1 - L(x))^z \, dA(z). \qquad \textbf{(1.13)}$$

Teoremos įrodymas pateiktas [1] .

1.4 KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTIS PERKĖLIMO TEOREMOSE

Pažymėkime:

$$\begin{aligned} \delta_n(x) &= \max\left(1, e^{-v_n(x)}\right) \\ u_n(x) &= n\left(1 - F(a_n + b_n x)\right) \\ v_n(x) &= u_n(x) + \ln H(x). \end{aligned}$$

1.11 teorema. Tarkime tenkinama (1.9) lygybė. Tada su visais x, su kuriais $\frac{u_n(x)}{n} < \frac{1}{2}$ ir H(x)>0 teisingas įvertis :

$$\left|P\left(Z_{N_n} < a_n x + b_n\right) - \Psi(x)\right| \le \Delta_{N_n}(x) = \Delta_n(x)\int_0^\infty z\left(\delta_n(x)H(x)\right)^{z-1} dA_n(nz) + \left|\int_0^\infty \left(A_n(nz) - A(z)\right) dH^z(x)\right|. \qquad \textbf{(1.14)}$$

Čia :

$$\Delta_n(x) = H(x)\left(\Gamma_{1,n}(x) + \Gamma_{2,n}(x) + \Gamma_{1,n}(x)\cdot\Gamma_{2,n}(x)\right);$$

$$\Gamma_{1,n}(x) = \frac{2u_n^2(x)}{n} + \frac{2u_n^4(x)}{n^2}\cdot\frac{1}{1-q},$$

$$\Gamma_{2,n}(x) = \left|v_n(x)\right| + \frac{v_n^2(x)}{2}\cdot\frac{1}{1-s};$$

Čia 0<q<1, 0<s<1 parenkami taip, kad

$$\frac{2u_n^2(x)}{3n} \le q,$$

$$\frac{\left|v_n(x)\right|}{3} \le s.$$

Pažymėkime:

$$\delta_n(x) = \max(1, e^{-T_n(x)})$$
$$w_n(x) = nF(xd_n + c_n)$$
$$T_n(x) = w_n(x) + \ln(1 - L(x))$$

1.12 teorema. Tarkime tenkinama 1.12 lygybė. Tada su visais x, su kuriais $\frac{w_n(x)}{n} < \frac{1}{2}$ teisingas įvertis:

$$\Delta_{N_n}(x) = \Delta_n(x)\int_0^\infty z\left(\delta_n(x)(1-L(x))\right)^{z-1} dA_n(nz) + \left|\int_0^\infty (A_n(nz) - A(z))d(1-L(x))^z\right|. \qquad \textbf{(1.15)}$$

Čia :

$$\Delta_n(x) = (1 - L(x))(r_{1,n}(x) + r_{2,n}(x) + r_{1,n}(x)\cdot r_{2,n}(x)),$$
$$r_{1,n}(x) = \frac{2w_n(x)}{n} + \frac{2w_n^2(x)}{n^2}\cdot\frac{1}{1-q},$$
$$r_{2,n}(x) = |T_n(x)| + \frac{T_n^2(x)}{2}\frac{1}{1-s}.$$

1.11 – 1.12 teoremų įrodymai pateikti [1] darbe.

1.5 EKSTREMALIŲJŲ REIKŠMIŲ LOKALINĖS TANKIŲ TEOREMOS

Sakykime $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ − nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su pasiskirstymo funkciją $F(x) = P\left(X_j < x\right)$ ir tankio funkcija $p(x)$.

Pažymėkime

$$Z_n = \max\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right).$$

Tarkime, kad egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantų sekos $\{a_n,\, n \ge 1\}$ ir $\{b_n > 0,\ n \ge 1\}$, kad

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n < a_n + b_n x) = H(x)$$

visuose funkcijos H tolydumo taškuose. Čia H – neišsigimusi pasiskirstymo funkcija.

Kaip žinome, yra trys ribinio skirstinio $H(x)$ tipai:

$$H_{1,\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0, \alpha >; \end{cases}$$

$$H_{2,\alpha}(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^{\alpha}), & x < 0,\ \alpha > 0, \\ 1, & x \ge 0; \end{cases}$$

$$H_{3,0}(x) = \exp(-e^{-x}),\quad x \in \Re.$$

Kai atsitiktinis dydis X_j turi tankį $p(x)$, tai:

$$p_{Z_n}(x) = nb_n p(a_n + b_n x) F^{n-1}(a_n + b_n x),$$

čia $p_{Z_n}(x)$ − tiesiškai normuoto maksimumo $(Z_n - a_n)/b_n$ tankio funkcija.

Suformuluosime sąlygas, kurias turi tenkinti pasiskirstymo funkcija $F(x)$, kad tiesiškai normuoto maksimumo tankis konverguotų į ribinio skirstinio H tankį, t.y.

$$\lim_{n\to\infty} p_{Z_n}(x) = H'(x) \qquad \textbf{(1.16)}$$

1.13 teorema. Jeigu $F \in D(H)$ ir

a) $H = H_{1,\alpha}$, tai lygybė (1.16) bus tenkinama intervale $(0,\infty)$ tada ir tik tada, kai tankis $p(x)$ yra teigiamas pakankamai dideliems x, ir $\alpha > 0$ tenkinama sąlyga

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xp(x)}{1 - F(x)} = \alpha;$$

b) $H = H_{2,\alpha}$, tai lygybė (1.16) bus tenkinama intervale $(-\infty,0)$ tada ir tik tada, kai $\alpha > 0$ tenkinama sąlyga

$$\lim_{x\to\omega(F)} \frac{(\omega(F) - x)p(x)}{1 - F(x)} = \alpha;$$

čia $\omega(x) = \sup\{x : F(x) < 1\}$;

c) $H = H_{3,0}$, tai lygybė (1.16) yra tenkinama visiems realiesiems x tada ir tik tada, kai tenkinama sąlyga

$$\lim_{x\to\omega(F)} \frac{p(x)\int_x^{\omega(F)} (1 - F(t))dt}{(1 - F(x))^2} = 1.$$

Šios sąlygos dar yra vadinamos Mizeso sąlygomis. Jos suformuluotos ir įrodytos [4] darbe.

Sakykime, kad $\{N_n, n \ge 1\}$ - sveikareikšmių teigiamų a.d., nepriklausančių nuo $\{X_j, j \ge 1\}$, seka.

Apibrėžkime a.d.

$$Z_{N_n} = \min(X_1, X_2, \ldots X_{N_n}). \qquad \textbf{(1.17)}$$

Tarkime, kad tenkinama sąlyga

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{N_n}{n} < z\right) = A(z), \qquad \textbf{(1.18)}$$

visuose funkcijos A(z) tolydumo taškuose. Kaip žinoma (žr.[3]), jei tenkinamos lygybės (1.17) ir (1.18), tai

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_{N_n} < c_n + d_n x) = \Psi(x) = \int_0^\infty H^z(x)dA(z).$$

1.14 teorema. Jei tenkinamos (1.16) - (1.18) sąlygos, tai

$$\lim_{n\to\infty} p_{Z_{N_n}}(x) = \frac{H'(x)}{H(x)}\int_0^\infty zH^z(x)dA(z) = \Psi'(x).$$

Šios teoremos įrodymas pateiktas [5] darbe.

1.6 ATSITIKTINIO SKAIČIAUS ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ EKSTREMUMŲ SKIRSTINIŲ SKAIČIAVIMAS

Maksimumų atveju:

$$P\left(Z_{N_n} < a_n + b_n x\right) = \sum_{j\ge 1} P\left(Z_j < a_n + b_n x\right)P\left(N_n = j\right) = \sum_{j\ge 1} F^j\left(a_n + b_n x\right)\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{j-1} =$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\sum_{j\ge 1}\left(F\left(a_n + b_n x\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^j = \frac{1}{n-1}\frac{F\left(a_n + b_n x\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1-F\left(a_n + b_n x\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)}. \qquad \textbf{(1.16)}$$

Minimumų atveju:

$$P\left(W_{N_n} < c_n + d_n x\right) = \sum_{j\ge 1} P\left(W_j < c_n + d_n x\right)P\left(N_n = j\right) = \sum_{j\ge 1}\left(1-\left(1-F\left(c_n + d_n x\right)\right)^j\right)\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{j-1} =$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\sum_{j\ge 1}\left(1-\left(1-F\left(c_n + d_n x\right)\right)^j\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^j = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j\ge 1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^j - \sum_{j\ge 1}\left(1-F\left(c_n + d_n x\right)\right)^j\left(1-\frac{1}{n}\right)^j\right) =$$

$$= 1-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\left(1-F\left(c_n + d_n x\right)\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1-\left(1-F\left(c_n + d_n x\right)\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)}. \qquad \textbf{(1.17)}$$

1.7 ATSITIKTINIO SKAIČIAUS ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ EKSTREMUMŲ TANKIŲ SKAIČIAVIMAS

Maksimumų atveju:

$$\sum_{j\geq 1} jb_n p(a_n + b_n x) F^{j-1}(a_n + b_n x) P(N_n = j) = \frac{b_n p(a_n + b_n x)}{n} \sum_{j\geq 1} jF^{j-1}(a_n + b_n x)\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{j-1} =$$

$$= \frac{b_n p(a_n + b_n x)}{n} \cdot \frac{1}{\left(1 - F(a_n + b_n x)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)^2}.$$

Minimumų atveju:

$$\sum_{j\geq 1} jd_n p(c_n + d_n x)(1 - F(c_n + d_n x))^{j-1} P(N_n = j) = \frac{d_n p(c_n + d_n x)}{n} \sum_{j\geq 1} j\big(1 - F(c_n + d_n x)\big)^{j-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{j-1} =$$

$$= \frac{d_n p(c_n + d_n x)}{n} \cdot \frac{1}{\left(1 - (1 - F(c_n + d_n x))\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)^2}$$

1.8 PROGRAMINĖS ĮRANGOS PASIRINKIMAS

Šiame darbe kompiuteriniams skaičiavimams atlikti, naudojama sistema SAS. Vieno uždavinio papildomiems skaičiavimams atlikti, naudojama sistema Mathcad.

Darbo analizei atlikti, SAS pasirinkimą lėmė tai, kad ji gali dirbti su pakankamai dideliu kiekiu duomenų. Taip pat ji patogi tuo, kad yra atskiras rezultatų langas (Output), sisteminių pranešimų langas (Log), grafikų langas (GRAPH), o taip pat yra galimybė kurti programos ir vartotojo sąsają.

Mathcad sistema patogi tuo, kad galima nesunkiai nubraižyti tos pačios funkcijos grafiką su skirtingais parametrais tame pačiame grafike.

2.TIRIAMOJI DALIS

Tarkime, kad $\{X_j, j \geq 1\}$ nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su skirstinio funkcija F(x), o $\{N_n, n \geq 1\}$ − sveikaskaitiniai teigiami a.d., nepriklausantys nuo a.d. $\{X_j\}$ ir turintys geometrinį skirstinį su parametru $p_n = \frac{1}{n}$, t.y.

$$P(N_n = k) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}.$$

Tada

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{N_n}{n} < z\right) = \lim_{n\to\infty} A_z(nz) = A(z) = 1 - e^{-z}, z > 0.$$

2.1 KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTIS MAKSIMUMO PERKĖLIMO TEOREMOJE, KAI ATSITIKTINIAI DYDŽIAI TURI PARETO SKIRSTINĮ

Tarkime, kad F(x)=1-$\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta}$, x≥α>0, β>0. Kadangi $\omega(F) = \infty$, tai taikome 1.1 teoremą. Tikriname 1.1 teoremos (1.1)sąlygą

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1 - 1 + \left(\frac{\alpha}{x \cdot t}\right)^{\beta}}{1 - 1 + \left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\beta}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\alpha^{\beta} \cdot t^{\beta}}{x^{\beta} \cdot t^{\beta}} = x^{-\beta}$$

Kadangi teoremos sąlyga tenkinama, tai ribinis skirstinys bus $H(x) = e^{-x^{-\beta}}$, x>0. Taikydami 1.1 teoremą randame centravimo ir normavimo konstantas :

$a_n = 0$.

Norėdami rasti konstantą b_n, sprendžiame lygtį

$$\frac{\alpha^{\beta}}{x^{\beta}} = \frac{1}{n}.$$

Gauname

$$b_n = \alpha \cdot \sqrt[\beta]{n}.$$

Taigi gauname

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n < \alpha \cdot \sqrt[\beta]{n} \cdot x) = H(x) = e^{-x^{-\beta}}, \text{ x>0}.$$

Taikydami perkėlimo teoremą 1.10, randame ribinį skirstinį maksimumo perkėlimo teoremoje:

$$\Psi(x)=\int_0^\infty (e^{-x^{\beta}})^z\, d(1-e^{-z})=\int_0^\infty e^{-zx^{-\beta}}\cdot e^{-z}dz=\int_0^\infty e^{-z(x^{-\beta}+1)}dz=-\frac{e^{-z(x^{-\beta}+1)}}{x^{-\beta}+1}\Big|_0^\infty=\frac{1}{x^{-\beta}+1}.$$

Taigi

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_{N_n}<\alpha\sqrt[\beta]{n}x)=\Psi(x)=\frac{1}{x^{-\beta}+1},x>0. \qquad \textbf{(2.1)}$$

Taikydami teoremos 1.11 įvertį (1.14), įvertinsime konvergavimo greitį (2.1) lygybėje. Skaičiuojame dydžius, įeinančius į konvergavimo greičio įverčio išraišką:

$$\int_0^\infty z(\delta_n(x)H(x))^{z-1}dA_n(nz),$$

$$\delta_n(x)=\max(1,e^{-v_n(x)})=1,$$

$$u_n(x)=n\cdot(1-F(a_n+b_nx))=n\cdot\left(\frac{\alpha}{\alpha\sqrt[\beta]{n}}\right)^{\beta}=n\cdot\frac{1}{n\cdot x^{-\beta}}=\frac{1}{x^{-\beta}},$$

$$v_n(x)=u_n(x)+\ln H(x)=\frac{1}{x^{-\beta}}-\ln(e^{-x^{\beta}})=0.$$

$$\int_0^\infty z\cdot(e^{-x^{-\beta}})^{z-1}d\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)=-\int_0^\infty z\cdot\left(e^{-x^{-\beta}}\right)^{z-1}\cdot n\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\cdot\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)dz=$$

$$=-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-x^{-\beta}}}\int_0^\infty z\left(e^{-x^{-\beta}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z dz=-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-x^{-\beta}}\cdot\ln\left(e^{-x^{\beta}}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)}\int_0^\infty zd\left(e^{-x^{\beta}}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z=$$

$$=-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-x^{-\beta}}\cdot\left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-x^{-\beta}\right)}z\cdot\left(e^{-x^{-\beta}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z\Big|_0^\infty+$$

$$+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-x^{-\beta}}\cdot\left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-x^{-\beta}\right)}\int_0^\infty\left(e^{-x^{-\beta}}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z dz=\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-x^{-\beta}}\cdot\left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-x^{-\beta}\right)^2}\int_0^\infty d\left(e^{-x^{\beta}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z=$$

$$=-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-x^{-\beta}}\cdot\left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-x^{-\beta}\right)^2}.$$

Kadangi 1<- $\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\le\ln 4$, tai, kai n≥2, gauname

$$\int_0^\infty z\cdot(e^{-x^{-\beta}})^{z-1}d\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)\le\frac{\ln 4}{e^{-x^{-\beta}}(1+x^{-\beta})^2}. \qquad (2.2)$$

Įvertinsime antrąjį įverčio $\Delta_{N_n}(x)$ narį. Kadangi

$$\left|1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}-(1-e^{-z})\right|\le\frac{\sqrt{e}}{n}e^{-z}(1+z), \text{tai}$$

$$\left|\int_0^\infty\left(A_n(nz)-A(z)\right)dH^z(x)\right|=\left|\int_0^\infty\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)-(1-e^{-z})d(e^{-x^{-\beta}})^z\right|\le\frac{\sqrt{e}}{n}\int_0^\infty e^{-z}(1+z)d(e^{-x^{\beta}})^z=$$

$$=-\frac{\sqrt{e}}{n}x^{-\beta}\int_0^\infty e^{-z}(1+z)e^{-zx}\ln(e^{-x^{-\beta}})dz=\frac{\sqrt{e}}{n}x^{-\beta}\int_0^\infty e^{-z(1+x^{-\beta})}(1+z)dz=$$

$$=-\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x^{-\beta}}{(1+x^{-\beta})}\int_0^\infty(1+z)d(e^{-z(1+x^{-\beta})})=-\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x^{-\beta}}{(1+x^{-\beta})}\cdot(1+z)\cdot e^{-z(1+x^{-\beta})}\Big|_0^\infty+$$

$$+\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x^{-\beta}}{(1+x^{-\beta})}\int_0^\infty e^{-z(1+x^{-\beta})}dz=\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x^{-\beta}}{(1+x^{-\beta})}-\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x^{-\beta}}{(1+x^{-\beta})^2}e^{-z(1+x^{-\beta})}\Big|_0^\infty=$$

$$=\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x^{-\beta}}{(1+x^{-\beta})}+\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x^{-\beta}}{(1+x^{-\beta})^2}e^{-z(1+x^{-\beta})}\Big|_0^\infty=\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x^{-\beta}}{(1+x^{-\beta})}+\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x^{-\beta}}{(1+x^{-\beta})^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x^{-\beta}}{(1+x^{-\beta})}\left(1+\frac{1}{1+x^{-\beta}}\right). \qquad (2.3)$$

Apskaičiuosime įvertį $\Delta_n(x)$:

$$\Delta_n(x)=H(x)\cdot(\Gamma_{1,n}(x)+\Gamma_{2,n}(x)+\Gamma_{1,n}(x)\cdot\Gamma_{2,n}(x));$$

$$H(x)=e^{-x^{-\beta}}$$

$$\Gamma_{1,n}(x)=\frac{2u_n^2(x)}{n}+\frac{2u_n^4(x)}{n^2}\cdot\frac{1}{1-q}=\frac{2\cdot x^{-2\beta}}{n}+\frac{2\cdot x^{-4\beta}}{n^2}\cdot\frac{1}{1-q},$$

$$\Gamma_{2,n}(x)=\left|v_n(x)\right|+\frac{v_n^2(x)}{2}\cdot\frac{1}{1-s}=0.$$

$$\Delta_n(x)=e^{-x^{-\beta}}\cdot\left(\frac{2\cdot x^{-2\beta}}{n}+\frac{2\cdot x^{-4\beta}}{n^2}\cdot\frac{1}{1-q}\right) \qquad (2.4)$$

Čia q 0<q<1 parinktas taip, kad

$$\frac{2x^{-2\beta}}{3\cdot n}\le q$$

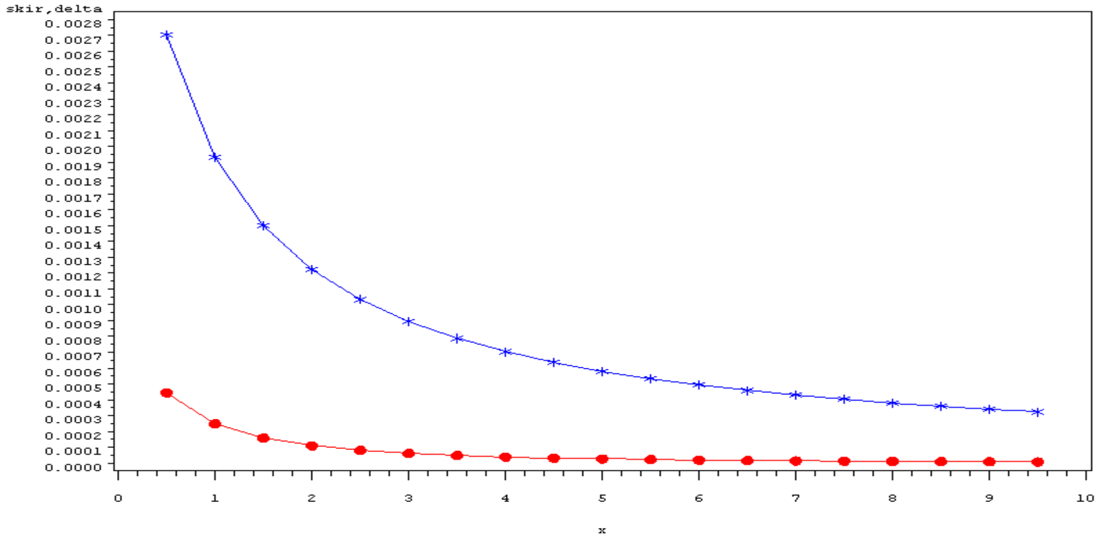
Atsižvelgę į (2.2), (2.3), (2.4) galutinai gauname

$$\left|P(Z_{N_n}<\alpha\cdot\sqrt[\beta]{n}x)-\frac{1}{1+x^{-\beta}}\right|\le\frac{e^{-x^{-\beta}}\cdot\left(\frac{2\cdot x^{-2\beta}}{n}+\frac{2\cdot x^{-4\beta}}{n^2}\cdot\frac{1}{1-q}\right)\cdot\ln 4}{e^{-x^{-\beta}}(1+x^{-\beta})^2}+\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x^{-\beta}}{(1+x^{-\beta})}\left(1+\frac{1}{1+x^{-\beta}}\right)=$$

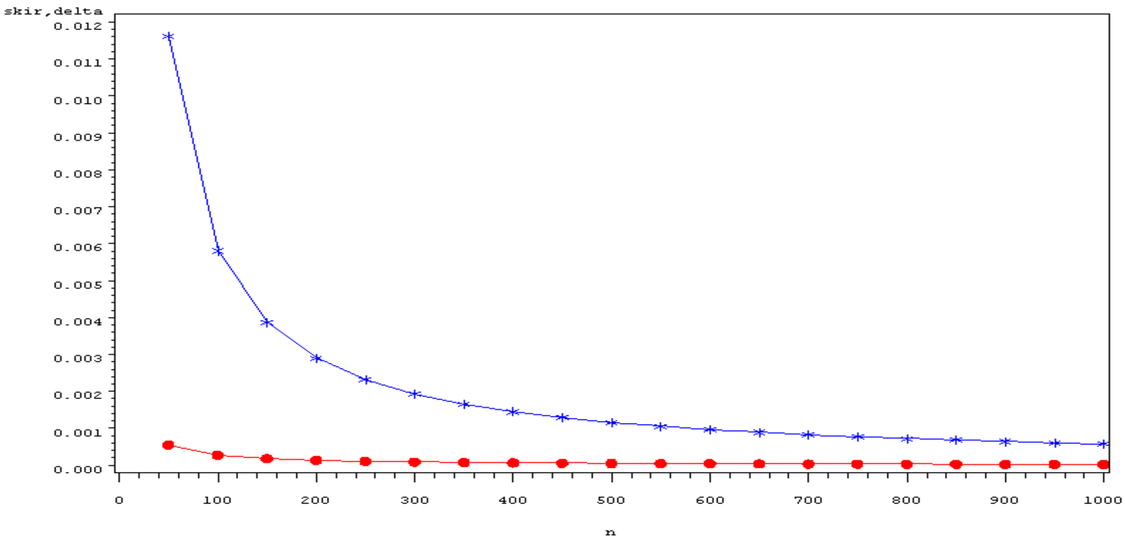
$$= \frac{1}{1+x^{-\beta}} \left(\frac{\left(\frac{2 \cdot x^{-2\beta}}{n} + \frac{2 \cdot x^{-4\beta}}{n^2} \cdot \frac{1}{1-q} \right) \cdot \ln 4}{1+x^{-\beta}} + \frac{\sqrt{e}}{n} x^{-\beta} \left(1 + \frac{1}{1+x^{-\beta}} \right) \right).$$

Matome, kad konvergavimo greičio įverčio eilė n atžvilgiu lygi $\frac{1}{n}$.

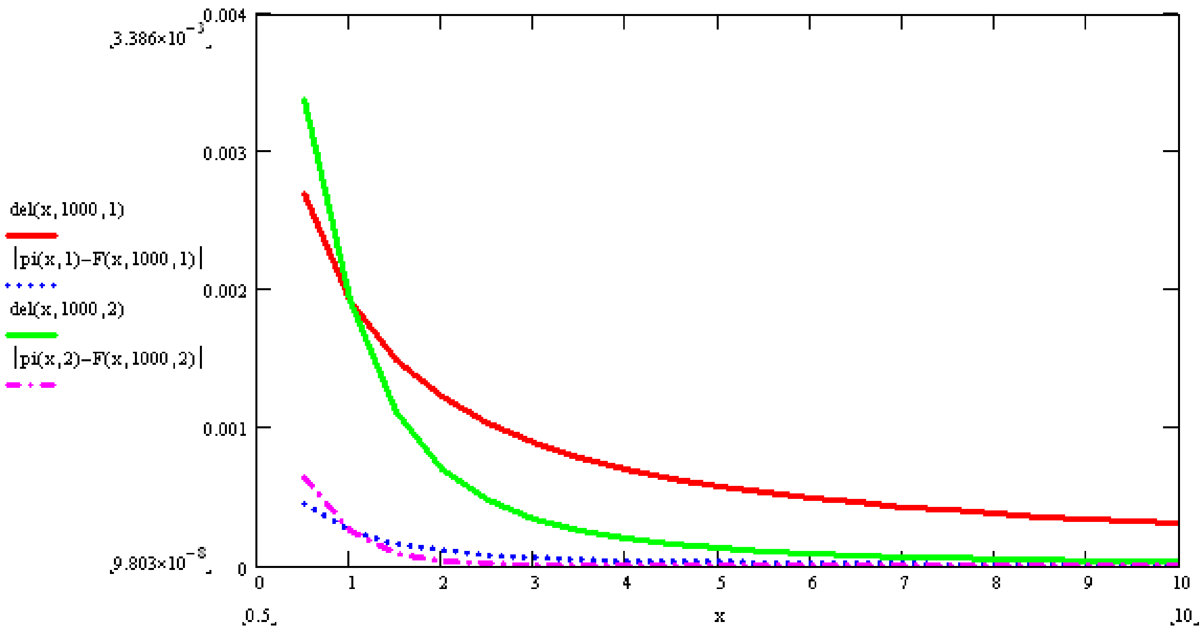
Konvergavimo greičio priklausomybę nuo x, n ir parametro β tirsime, naudodami kompiuterinius skaičiavimus. Kadangi konvergavimo greitį apibūdina paklaidos $\left|P\left(Z_{N_n} < a_n + b_n x\right) - \Psi(x)\right|$ kitimas, tai būtent jį ir nagrinėsime. Pateikiame keletą paveikslų, kurie atspindi konvergavimo greičio priklausomybę nuo minėtų parametrų.



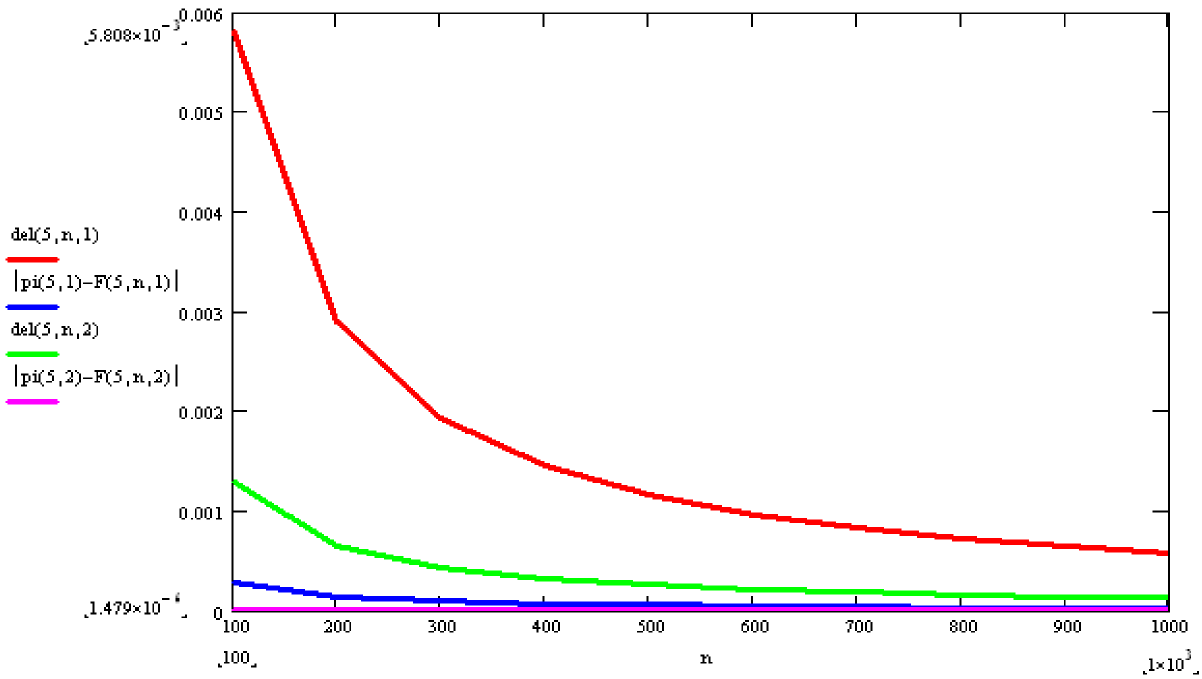
2.1 pav. Maksimumo paklaidos ir paklaidos įverčio grafikai, kai atsitiktiniai dydžiai turi Pareto skirstinį ir x kinta , b=1 ir n =1000



2.2 pav. Maksimumo paklaidos ir paklaidos įverčio grafikai, kai atsitiktiniai dydžiai turi Pareto skirstinį ir n kinta , b=1 ir x =5



2.3 pav. Maksimumo paklaidos ir paklaidos įverčio grafikai, kai atsitiktiniai dydžiai turi Pareto skirstinį ir x kinta, n=1000 ir b=1, b=2



2.4 pav. Maksimumo paklaidos ir paklaidos įverčio grafikai, kai atsitiktiniai dydžiai turi Pareto skirstinį ir n kinta, x=5 ir b=1, b=2

Iš paveikslų matome, kad paklaidos reikšmė mažėja, kai x didėja, ir paklaidos reikšmė didėja, kai β mažėja.

Kiti paklaidos ir paklaidos įverčio tyrimo rezultatai pateikti prieduose (žr. 67 psl.).

2.2 KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTIS MAKSIMUMO PERKĖLIMO TEOREMOJE, KAI ATSITIKTINIAI DYDŽIAI TURI TOLYGŲJĮ SKIRSTINĮ

Tarkime, kad $F(x)=\dfrac{x-a}{b-a}$, $a<x<b$. Kadangi $\omega(F)=b$,tai taikome 1.2 teoremą ir tikriname ar tenkinama 1.2 teoremos sąlyga:

$$F^*(x)=F\left(b-\frac{1}{x}\right)=\frac{b-\frac{1}{x}-a}{b-a},$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1-\dfrac{b-\frac{1}{tx}-a}{b-a}}{1-\dfrac{b-\frac{1}{t}-a}{b-a}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\dfrac{b-a-b+\frac{1}{tx}+a}{b-a}}{\dfrac{b-a-a+\frac{1}{t}+a}{b-a}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{tx}}{\frac{1}{t}}=\frac{1}{x}=x^{-1}.$$

Kadangi 1.2 teoremos sąlyga tenkinama, tai ribinis skirstinys bus $H(x)=e^x$,x<0.

Taikydami 1.2 teoremą, randame centravimo ir normavimo konstantas:

$$a_n=b\,.$$

Norėdami rasti konstantą b_n, sprendžiame lygtį

$$1-\frac{x-a}{b-a}=\frac{1}{n}.$$

Gauname

$$b_n=b-\frac{bn-b+a}{n}=\frac{bn-bn+b-a}{n}=\frac{b-a}{n}.$$

Taigi, gauname

$$\lim_{n\to\infty}P\left(Z_n<b+\frac{b-a}{n}x\right)=H(x)=e^{-(-x)^1}=e^x,x<0.$$

Taikydami perkėlimo teoremą 1.9, randame ribinį skirstinį maksimumo perkėlimo teoremoje

$$\Psi(x)=\int_0^\infty\left(e^x\right)^z d(1-e^{-z})=\int_0^\infty e^{zx}\cdot e^{-z}dz=\int_0^\infty e^{-z(1-x)}dz=-\frac{1}{1-x}e^{-z(1-x)}\Big|_0^\infty=\frac{1}{1-x}.$$

Taigi

$$\lim_{n\to\infty}P\left(Z_{N_n}<b+\frac{b-a}{n}x\right)=\Psi(x)=\frac{1}{1-x},x<0\,. \qquad \textbf{(2.5)}$$

Taikydami 1.11 teoremos įvertį (1.14), įvertinsime konvergavimo greitį (2.5) lygybėje.

Skaičiuojame dydžius, įeinančius į konvergavimo greičio įverčio išraišką:

$$\int_0^\infty z(\delta_n(x)H(x))^{z-1}dA_n(nz)$$

$$\delta_n(x) = \max(1, e^{-v_n(x)}) = 1,$$

$$u_n(x) = n \cdot \left(1 - \frac{b + \frac{b-a}{n} x - a}{b-a} \right) = n \cdot \frac{b - a - b - \frac{b-a}{n} x + a}{b-a} = -x,$$

$$v_n(x) = -x + \ln e^x = 0.$$

$$\int_0^\infty z\left(e^x\right)^{z-1} d\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{nz}\right) = \int_0^\infty z e^{zx} \cdot e^{-x} \cdot (-n)\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{nz} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) dz = -\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{e^x} \int_0^\infty z\left(e^x \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)^z =$$

$$= -\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{e^x \ln\left(e^x\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)} \int_0^\infty z d\left(e^x\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)^z = -\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{e^x \ln\left(e^x\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)} z\left(e^x\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)^z \Big|_0^\infty +$$

$$+ \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{e^x \ln\left(e^x\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)} \int_0^\infty \left(e^x\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)^z dz = \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{e^x\left(\ln\left(e^x\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)\right)^2} \left(e^x\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)^z \Big|_0^\infty =$$

$$= \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{e^x\left(\ln\left(e^x\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)\right)^2} \left(e^x\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)^z \Big|_0^\infty = -\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{e^x\left(x + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)^2}.$$

Kadangi $1 < -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \le \ln 4$, tai, kai n≥2, gauname

$$\int_0^\infty z\left(e^x\right)^{z-1} d\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{nz}\right) \le \frac{\ln 4}{e^x (x-1)^2}. \qquad \textbf{(2.6)}$$

Įvertinsime antrąjį įverčio $\Delta_{N_n}(x)$ narį. Kadangi

$\left| 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{nz} - (1 - e^{-z}) \right| \le \frac{\sqrt{e}}{n} e^{-z}(1+z)$, tai

$$\left| \int_0^\infty \left(A_n(nz) - A(z)\right) dH^z(x) \right| = \left| \int_0^\infty \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{nz}\right) - (1 - e^{-z}) d(e^x)^z \right| \le \frac{\sqrt{e}}{n} \int_0^\infty e^{-z}(1+z) x e^{xz} dz =$$

$$= \frac{\sqrt{e}}{n} x \int_0^\infty e^{-z(1-x)}(1+z) dz = \frac{\sqrt{e}}{n} \cdot \frac{x}{1-x} \int_0^\infty (1+z) d\left(e^{-z(1-x)}\right) = \frac{\sqrt{e}}{n} \cdot \frac{x}{1-x} (1+z) e^{-z(1-x)} \Big|_0^\infty -$$

$$-\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x}{1-x}\int_0^\infty e^{-z(1-x)}dz=\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x}{1-x}-\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x}{(1-x)^2}e^{-z(1-x)}\Big|_0^\infty=\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x}{1-x}+\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x}{(1-x)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x}{1-x}\left(1+\frac{1}{1-x}\right). \qquad \textbf{(2.7)}$$

Skaičiuosime $\Delta_n(x)$:

$$\Gamma_{1,n}(x)=\frac{2x^2}{n}+\frac{2x^4}{n^2}\cdot\frac{1}{1-q},$$

$$\Gamma_{2,n}(x)=0,$$

$$q=\frac{2x^2}{3n}.$$

$$\Delta_n(x)=e^x\left(\frac{2x^2}{n}+\frac{2x^4}{n^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{2x^2}{3n}}\right) \qquad \textbf{(2.8)}$$

Čia q 0<q<1 parinktas taip, kad

$$\frac{2x^2}{3n}\le q\ .$$

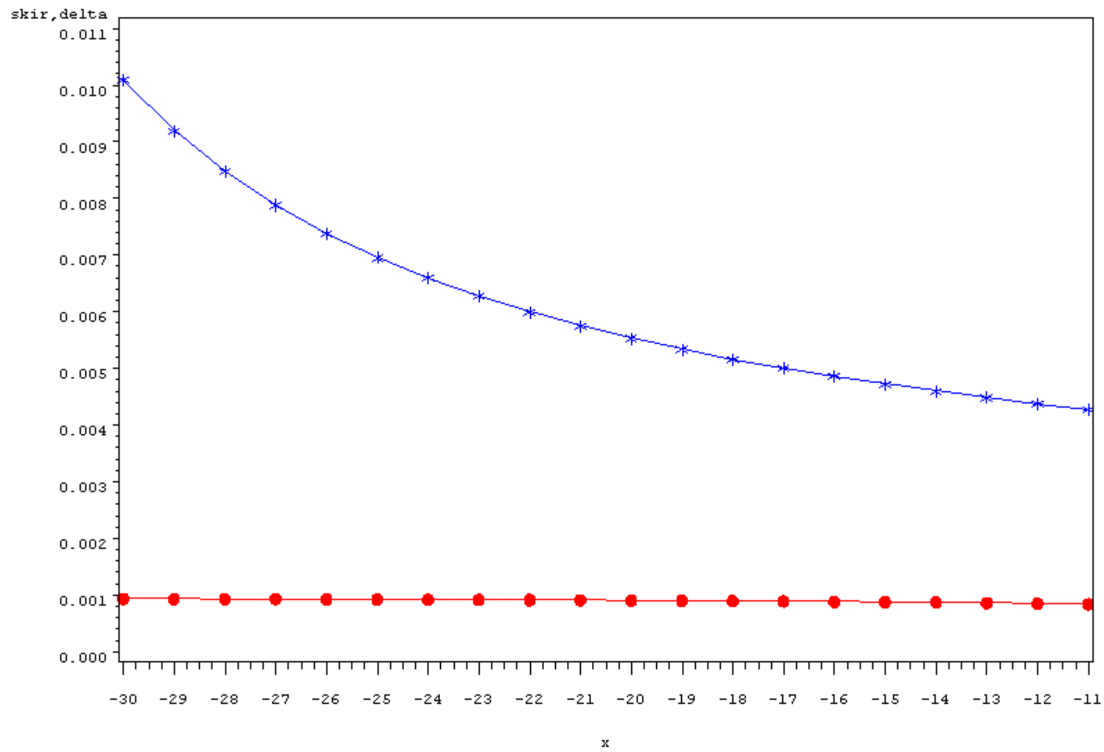
Atsižvelgę į (2.6), (2.7) ir (2.8) galutinai gauname

$$\left|P\left(Z_{N_n}<b+\frac{b-a}{n}x\right)-\frac{1}{1-x}\right|\le\frac{e^x\left(\frac{2x^2}{n}+\frac{2x^4}{n^2}\cdot\frac{1}{1-q}\right)\ln 4}{e^x(1-x)^2}+\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x}{1-x}\left(1+\frac{1}{1-x}\right)=$$

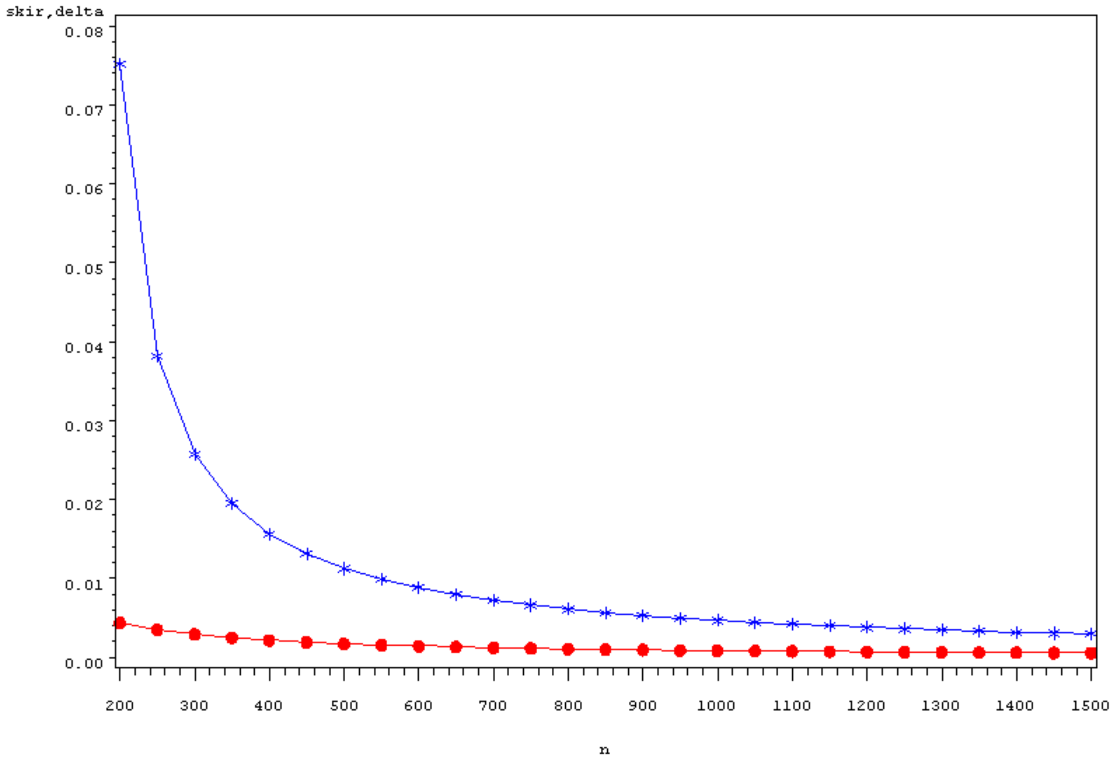
$$=\frac{1}{1-x}\left(\frac{\left(\frac{2x^2}{n}+\frac{2x^4}{n^2}\cdot\frac{1}{1-q}\right)\ln 4}{1-x}+\frac{\sqrt{e}}{n}x\left(1+\frac{1}{1-x}\right)\right).$$

Matome, kad konvergavimo greičio įverčio eilė n atžvilgiu lygi $\frac{1}{n}$.

Konvergavimo greičio priklausomybę nuo x ir n tirsime, naudodami kompiuterinius skaičiavimus. Kadangi konvergavimo greitį apibūdina paklaidos $\left|P\left(Z_{N_n}<a_n+b_nx\right)-\Psi(x)\right|$ kitimas, tai būtent jį ir nagrinėsime. Pateikiame keletą paveikslų, kurie atspindi konvergavimo greičio priklausomybę nuo minėtų parametrų.



2.5 pav. Maksimumo paklaidos ir paklaidos įverčio grafikai, kai atsitiktiniai dydžiai turi tolygųjį skirstinį ir x kinta, n=1000



2.6 pav. Maksimumo paklaidos ir paklaidos įverčio grafikai, kai atsitiktiniai dydžiai turi tolygųjį skirstinį ir n kinta, x=-15

Iš paveikslų matome, kad paklaidos reikšmė mažėja , kai x didėja.

Kiti paklaidos ir paklaidos įverčio tyrimo rezultatai pateikti prieduose (žr. 67 – 68 psl.).

2.3 KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTIS MAKSIMUMO PERKĖLIMO TEOREMOJE, KAI ATSITIKTINIAI DYDŽIAI TURI EKSPONENTINĮ SKIRSTINĮ

Tarkime, kad $p(x) = \lambda e^{-\lambda(x-\theta)}, x \ge \theta.$

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda(y-\theta)} dy = -e^{-\lambda(y-\theta)} \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda(x-\theta)}, x \ge \theta.$$

Kadangi $\varpi(F) = \infty$, tai taikome 1.3 teoremą. Tikriname teoremos sąlygas:

$$\int_a^\infty (1-1+e^{-\lambda(x-\theta)})dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda(x-\theta)} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda(a-\theta)} < \infty .$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1-1+e^{-\lambda\left(t+x\frac{1}{\lambda}-\theta\right)}}{1-1+e^{-\lambda(t-\theta)}} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-\lambda(t-\theta)} \cdot e^{-\lambda\frac{1}{\lambda}x}}{e^{-\lambda(t-\theta)}} = e^{-x}.$$

$$R(t) = \frac{1}{1-1+e^{-\lambda(t-\theta)}} \int_t^\infty e^{-\lambda(x-\theta)} dx = \frac{-1}{e^{-\lambda(t-\theta)}} \cdot \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda(x-\theta)} \Big|_t^\infty = \frac{1}{\lambda}.$$

Kadangi teoremos sąlyga tenkinama, tai ribinis skirstinys bus $H(x) = e^{-e^{-x}}$. Taikydami 1.3 teoremą, randame centravimo ir normavimo konstantas :

$$b_n = \frac{1}{\lambda}.$$

Norėdami rasti a_n konstantą, sprendžiame lygtį:

$$1-1+e^{-\lambda(x-\theta)} = \frac{1}{n} .$$

Gauname

$$a_n = \frac{\ln n + \lambda\theta}{\lambda}.$$

Taigi, gauname

$$\lim_{n\to\infty} P\left(Z_n < \frac{\ln n + \lambda\theta}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}x \right) = H(x) = e^{-e^{-x}}, x \in \Re .$$

Taikydami perkėlimo teoremą 1.9, randame ribinį skirstinį maksimumo perkėlimo teoremoje :

$$\Psi(x) = \int_0^\infty \left(e^{-e^{-x}}\right)^z d\left(1-e^{-z}\right) = \frac{1}{1+e^{-x}},\ x \in \Re .$$

Taigi

$$P\left(Z_{N_n} < \frac{\ln n + \lambda\theta}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}x \right) = \Psi(x) = \frac{1}{1+e^{-x}},\ x \in \Re . \qquad \textbf{(2.9)}$$

Taikydami 1.9. teoremos įvertį, įvertinsime konvergavimo greitį (2.9) lygybėje.

Skaičiuojame dydžius, įeinančius į konvergavimo greičio įverčio išraišką:

$$\int_0^{\infty} z(\delta_n(x)H(x))^{z-1}\,dA_n(nz),$$

$$\delta_n(x)=\max(1,e^{-v_n(x)})=1,$$

$$u_n(x)=n\cdot 1-1+e^{-\lambda\left(\frac{\ln n+\lambda\theta}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}x-\theta\right)}=n\cdot e^{-(\ln n+x+\theta-\theta)}=n\cdot\frac{1}{n}\cdot e^{-x}=e^{-x},$$

$$v_n(x)=e^{-x}+\ln e^{-e^{-x}}=e^{-x}-e^{-x}=0.$$

$$\int_0^{\infty} z\cdot\left(e^{-e^{-x}}\right)^{z-1}d\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)=\int_0^{\infty} z\cdot e^{-ze^{-x}}\cdot e^{e^{-x}}\cdot(-n)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\cdot\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)dz=$$

$$=\frac{-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-e^{-x}}}\int_0^{\infty} z\cdot\left(e^{-e^{-x}}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z dz=\frac{-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-e^{-x}}\cdot\ln\left(e^{-e^{-x}}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)}\int_0^{\infty} z\,d\left(e^{-e^{-x}}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z=$$

$$=\frac{-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-e^{-x}}\cdot\ln\left(e^{-e^{-x}}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)}\cdot z\cdot\left(e^{-e^{-x}}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z\Big|_0^{\infty}+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-e^{-x}}\cdot\ln\left(e^{-e^{-x}}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)}\int_0^{\infty}\left(e^{-e^{-x}}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z dz=$$

$$=\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-e^{-x}}\cdot\left(\ln\left(e^{-e^{-x}}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)\right)^2}\int_0^{\infty} d\left(e^{-e^{-x}}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z=\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-e^{-x}}\cdot\left(\ln\left(e^{-e^{-x}}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)\right)^2}\cdot\left(e^{-e^{-x}}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z\Big|_0^{\infty}=$$

$$=-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-e^{-x}}\cdot\left(\ln\left(e^{-e^{-x}}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)\right)^2}=-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-e^{-x}}\cdot\left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-e^{-x}\right)^2}.$$

Kadangi $1<-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\le\ln 4$, tai, kai $n\ge 2$, gauname

$$\int_0^{\infty} z\cdot\left(e^{-e^{-x}}\right)^{z-1}\cdot d\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)\le\frac{\ln 4}{e^{-e^{-x}}(1+e^{-x})^2}. \qquad \textbf{(2.10)}$$

Įvertinsime antrąjį įverčio $\Delta_{N_n}(x)$ dėmenį. Kadangi

$$\left|1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}-\left(1-e^{-z}\right)\right|\le\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot e^{-z}(1+z),\ \text{tai}$$

$$\left|\int_0^\infty\left(\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)-\left(1-e^{-z}\right)\right)d\left(e^{-e^{-x}}\right)^z\right|\le\frac{\sqrt{e}}{n}\int_0^\infty e^{-z}\cdot(1+z)d\left(e^{-ze^{-x}}\right)=\frac{\sqrt{e}}{n}\int_0^\infty e^{-z}(1+z)e^{-x}e^{-ze^{-x}}dz=$$

$$=\frac{\sqrt{e}}{n}e^{x}\int_0^\infty(1+z)e^{-z(1+e^{-x})}dz=-\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\left((1+z)e^{-z\left(1+e^{-x}\right)}\right)\Big|_0^\infty+\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\int_0^\infty e^{-z\left(1+e^{-x}\right)}dz=\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}-$$

$$-\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}e^{-z\left(1+e^{-x}\right)}\Big|_0^\infty=\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}+\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}. \qquad \textbf{(2.11)}$$

Skaičiuosime $\Delta_n(x)$:

$$\Gamma_{1,n}(x)=\frac{2\cdot e^{-2x}}{n}+\frac{2\cdot e^{-4x}}{n^2}\cdot\frac{1}{1-q},$$
$$\Gamma_{2,n}(x)=0,$$
$$q=\frac{2e^{-2x}}{3n}.$$

Taigi

$$\Delta_n(x)=e^{-e^{-x}}\left(\frac{2\cdot e^{-2x}}{n}+\frac{2\cdot e^{-4x}}{n^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{2e^{-2x}}{3n}}\right) \qquad \textbf{(2.12)}$$

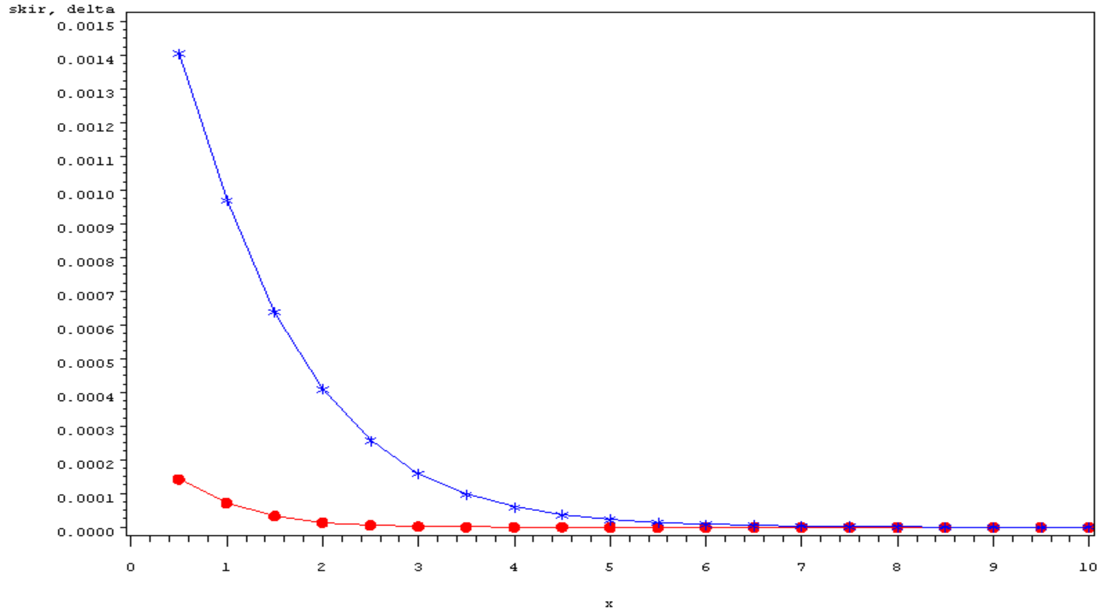
Atsižvelgę į (2.10), (2.11), (2.12) galutinai gauname

$$\left|P\left(Z_{N_n}<\frac{\ln n+\lambda\theta}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}x\right)-\frac{1}{1+e^{-x}}\right|\le\frac{e^{-e^{-x}}\cdot\left(\frac{2\cdot e^{-2x}}{n}+\frac{2\cdot e^{-4x}}{n^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{2e^{-2x}}{3n}}\right)\cdot\ln 4}{e^{-e^{-x}}(1+e^{-x})^2}+$$

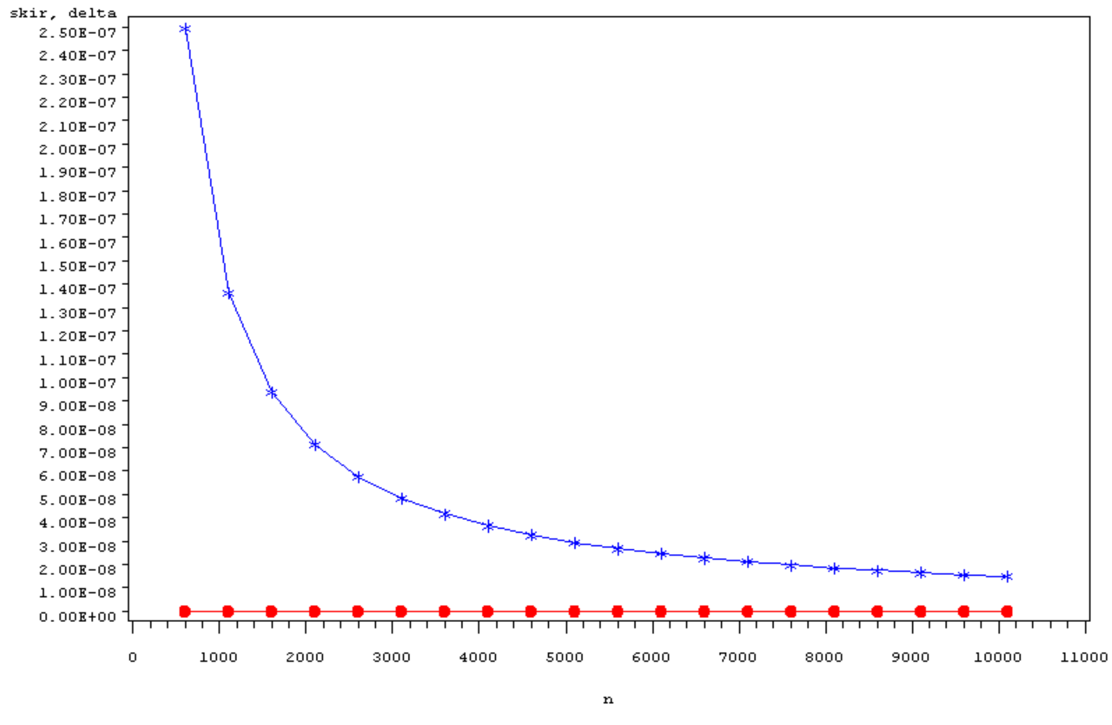
$$+\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}+\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}=\frac{\left(\frac{2\cdot e^{-2x}}{n}+\frac{2\cdot e^{-4x}}{n^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{2e^{-2x}}{3n}}\right)\cdot\ln 4}{(1+e^{-x})^2}+\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\left(1+\frac{1}{\left(1+e^{-x}\right)}\right).$$

Matome, kad konvergavimo greičio įverčio eilė n atžvilgiu lygi $\frac{1}{n}$.

Konvergavimo greičio priklausomybę nuo x ir n tirsime, naudodami kompiuterinius skaičiavimus. Kadangi konvergavimo greitį apibūdina paklaidos $\left|P\left(Z_{N_n}<a_n+b_nx\right)-\Psi(x)\right|$ kitimas, tai būtent jį ir nagrinėsime. Pateikiame keletą paveikslų, kurie atspindi konvergavimo greičio priklausomybę nuo minėtų parametrų.



2.7 pav. Maksimumo paklaidos ir paklaidos įverčio grafikai, kai atsitiktiniai dydžiai turi eksponentinį skirstinį ir x kinta , n =1000



2.8 pav. Maksimumo paklaidos ir paklaidos įverčio grafikai, kai atsitiktiniai dydžiai turi eksponentinį skirstinį ir n kinta , x =10

Iš pateiktų paveikslų matome, kad paklaidos reikšmė mažėja, kai x didėja.

Kiti paklaidos ir paklaidos įverčio tyrimo rezultatai pateikti prieduose (žr. 68 − 69 psl.).

2.4 KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTIS MINIMUMO PERKĖLIMO TEOREMOJE, KAI ATSITIKTINIAI DYDŽIAI TURI TOLYGŲJĮ SKIRSTINĮ

Tarkime , kad $F(x)=\dfrac{x-a}{b-a},\ a<x<b.$ Kadangi $\alpha(F)=a$, tai taikome 1.6 teoremą. Tikriname 1. 6 teoremos sąlygą :

$$F^*(x)=F\left(a-\frac{1}{x}\right)=\frac{a-\frac{1}{x}-a}{b-a}=-\frac{\frac{1}{x}}{b-a},$$

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{-\frac{1}{tx}(b-a)}{-(b-a)\frac{1}{t}}=\lim_{t\to-\infty}\frac{t}{tx}=\frac{1}{x}=x^{-1}.$$

Kadangi 1.6 teoremos sąlyga tenkinama, tai ribinis skirstinys bus $L(x)=1-e^{-x}$. Taikydami 1.6 teoremą, randame centravimo ir normavimo konstantas:

$$c_n=a\,.$$

Norėdami rasti konstantą d_n, sprendžiame lygtį :

$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{1}{n}.$$

Gauname

$$d_n=\frac{b-a}{n}+a-a=\frac{b-a}{n}.$$

Taigi , gauname

$$\lim_{t\to-\infty}P\left(W_n<a+\frac{b-a}{n}x\right)=L(x)=1-e^{-x},x>0.$$

Taikydami perkėlimo teoremą 1.10, randame ribinį skirstinį minimumo perkėlimo teoremoje:

$$\psi(x)=1-\int_0^\infty(1-L(x))^z\,dAz=1-\int_0^\infty(1-1+e^{-x})^z\,d(1-e^{-z})=1-\int_0^\infty e^{-xz}\cdot e^{-z}dz=$$

$$=1-\int_0^\infty e^{-z(x+1)}dz=1+\frac{1}{x+1}e^{-z(x+1)}\Big|_0^\infty=1-\frac{1}{x+1},x>0.$$

Taigi

$$\lim_{n\to\infty}P\left(W_{N_n}<a+\frac{b-a}{n}x\right)=\psi(x)=1-\frac{1}{x+1},x>0. \qquad \textbf{(2.13)}$$

Taikydami 1.12 teoremos įvertį, įvertinsime konvergavimo greitį (2.13) lygybėje . Skaičiuojame dydžius, įeinančius į konvergavimo greičio įverčio išraišką:

$$\int_0^\infty z(\delta_n(x)(1-L(x)))^{z-1}dA_n(nz),$$

$$\delta_n(x)=\max(1,e^{-T_n(x)})=1,$$

$$W_n(x)=n\cdot F(xd_n+c_c)=n\cdot\frac{\frac{b-a}{n}x+a-a}{b-a}=x,$$

$$T_n(x)=W_n(x)+\ln(1-L(x))=x+\ln(1-1+e^{-x})=x-x=0.$$

$$\int_0^\infty z(1-1+e^{-x})^{z-1}d\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)=\int_0^\infty ze^{-xz}e^{x}(-n)\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)dz=$$

$$=-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-x}}\int_0^\infty z\left(e^{-x}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z dz=-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-x}\cdot\ln\left(e^{-x}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)}\int_0^\infty zd\left(e^{-x}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z=$$

$$=-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-x}\cdot\ln\left(e^{-x}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)}z\left(e^{-x}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z\Big|_0^\infty+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-x}\cdot\ln\left(e^{-x}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)}\int_0^\infty\left(e^{-x}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z dz=$$

$$=\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-x}\cdot\left(\ln\left(e^{-x}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)\right)^2}\left(e^{-x}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z\Big|_0^\infty=-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-x}\cdot\left(\ln\left(e^{-x}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)\right)^2}=-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-x}\cdot\left(\ln\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)-x\right)^2}.$$

Kadangi

$1<-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\le\ln 4$, tai, kai $n\ge 2$, gauname

$$\int_0^\infty z(e^{-x})^{z-1}d\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)\le\frac{\ln 4}{e^{-x}(x+1)^2}. \tag{2.14}$$

Įvertinsime antrąjį įverčio $\Delta_{N_n}(x)$ narį. Kadangi

$\left|1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}-(1-e^{-z})\right|\le\frac{\sqrt{e}}{n}e^{-z}(1+z)$, tai

$$\left|\int_0^\infty(A_n(nz)-A(z))d(1-L(x))^z\right|=\left|\int_0^\infty\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)-(1-e^{-z})d(1-1+e^{-x})^z\right|\le\frac{\sqrt{e}}{n}\int_0^\infty e^{-z}(1+z)xe^{-xz}dz=$$

$$\frac{\sqrt{e}}{n}x\int_0^\infty e^{-z(1+x)}(1+z)dz = -\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x}{x+1}\int_0^\infty (1+z)d\left(e^{-z(x+1)}\right) = -\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x}{x+1}(1+z)e^{-z(x+1)}\Big|_0^\infty +$$

$$+\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x}{x+1}\int_0^\infty e^{-z(x+1)}dz = \frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x}{x+1} - \frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x}{(x+1)^2}e^{-z(x+1)}\Big|_0^\infty = \frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x}{x+1} + \frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x}{x+1}\left(1+\frac{1}{x+1}\right) \tag{2.15}$$

Apskaičiuosime įvertį $\Delta_n(x)$:

$$r_{1,n}(x) = \frac{2x^2}{n} + \frac{2x^4}{n^2}\cdot\frac{1}{1-q},$$

$$r_{2,n}(x) = 0,$$

$$\Delta_n(x) = e^{-x}\left(\frac{2x^2}{n} + \frac{2x^4}{n^2}\cdot\frac{1}{1-q}\right), \tag{2.16}$$

$$q = \frac{2x^2}{3n}.$$

Čia q $0 < q < 1$ parinktas taip, kad

$$\frac{2x^2}{3n} \le q .$$

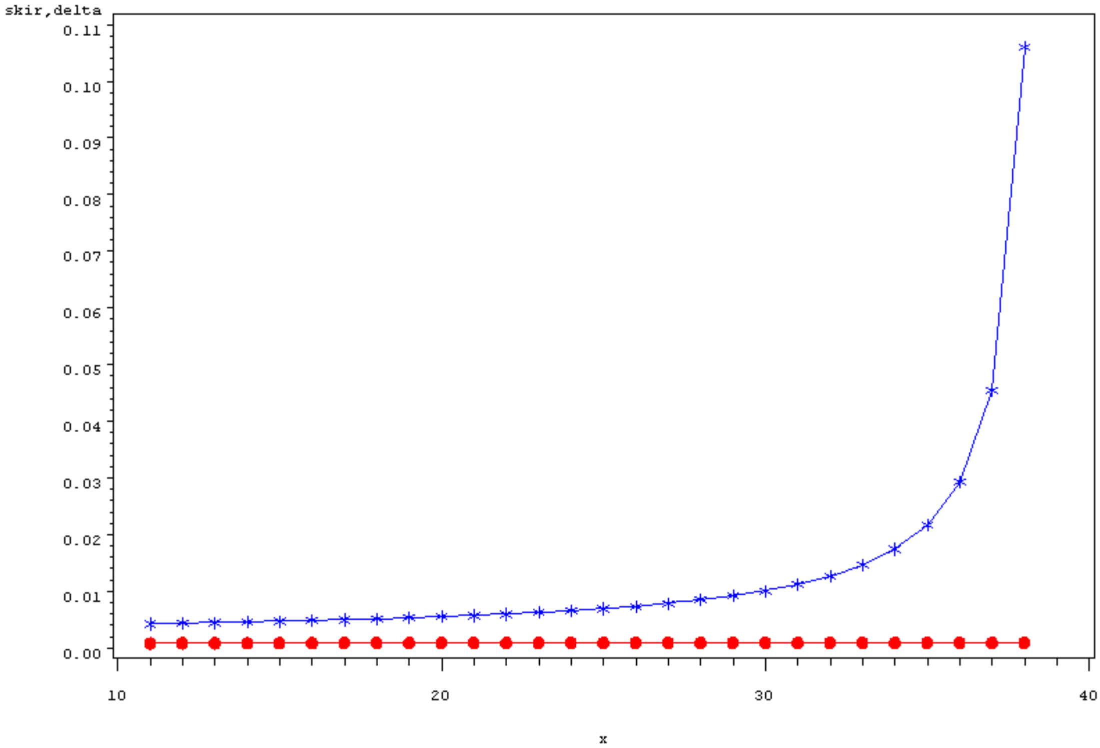
Atsižvelgę į (2.14), (2.15) ir (2.16) galutinai gauname

$$\left|P\left(W_{N_n} < a + \frac{b-a}{n}x\right) - 1 + \frac{1}{x+1}\right| \le e^{-x}\left(\left(\frac{2x^2}{n} + \frac{2x^4}{n^2}\cdot\frac{1}{1-q}\right)\cdot\frac{\ln 4}{e^{-x}(-x-1)^2} + \frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x}{x+1}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\right) =$$

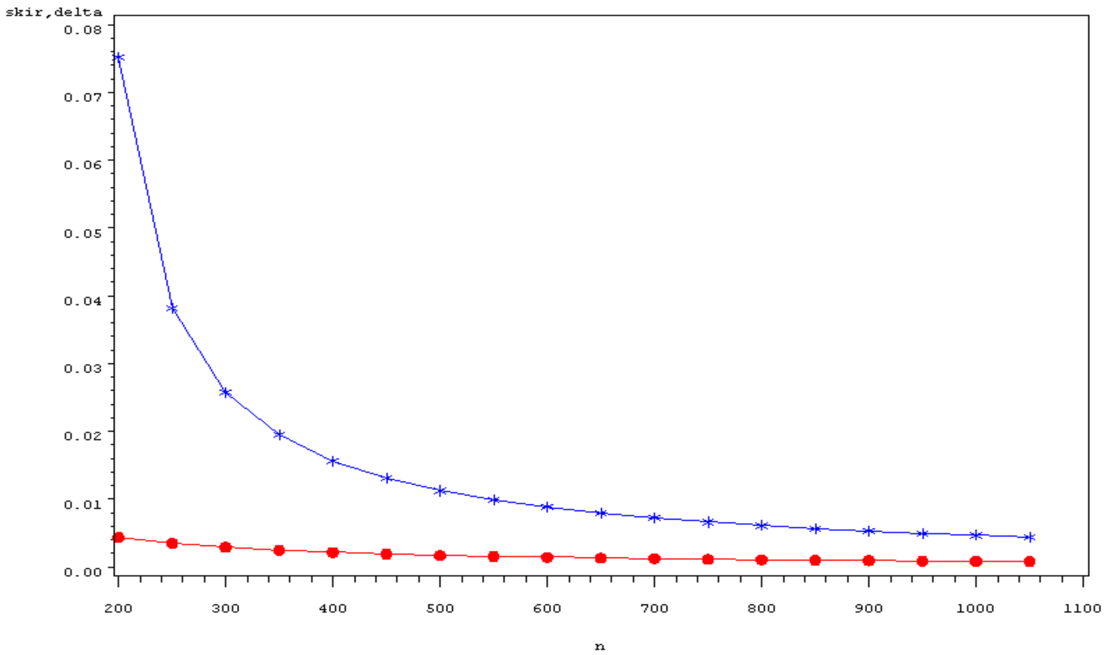
$$= \left(\frac{2x^2}{n} + \frac{2x^4}{n^2}\cdot\frac{1}{1-q}\right)\cdot\frac{\ln 4}{(x+1)^2} + \frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x}{x+1}\left(1+\frac{1}{x+1}\right).$$

Matome, kad konvergavimo greičio įverčio eilė n atžvilgiu yra $\frac{1}{n}$.

Konvergavimo greičio priklausomybę nuo x ir n tirsime, naudodami kompiuterinius skaičiavimus. Kadangi konvergavimo greitį apibūdina paklaidos $\left|P\left(W_{N_n} < c_n + d_n x\right) - \psi(x)\right|$ kitimas, tai būtent jį ir nagrinėsime. Pateikiame keletą paveikslų, kurie atspindi konvergavimo greičio priklausomybę nuo minėtų parametrų.



2.9 pav. Minimumo paklaidos ir paklaidos įverčio grafikai, kai atsitiktiniai dydžiai turi tolygųjį skirstinį ir x kinta , n =1000



2.10 pav. Minimumo paklaidos ir paklaidos įverčio grafikai, kai atsitiktiniai dydžiai turi tolygųjį skirstinį ir n kinta , x =15

Iš pateiktų paveikslų matome, kad paklaidos reikšmė mažėja, kai x mažėja.

Kiti paklaidos ir paklaidos įverčio tyrimo rezultatai pateikti prieduose (žr. 69 – 70 psl.)

2.5 KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTIS MINIMUMO PERKĖLIMO TEOREMOJE, KAI ATSITIKTINIAI DYDŽIAI TURI EKSPONENTINĮ SKIRSTINĮ

Tarkime turime $F(x)=1-e^{-\lambda(x-\theta)}, x\geq\theta$. Kadangi $\alpha(F)=\theta$, tai taikome 1.6 teoremą. Tikriname 1.6 teoremos sąlygą:

$$F^*(x)=F\left(\theta-\frac{1}{x}\right)=1-e^{-\lambda\left(\theta-\frac{1}{x}-\theta\right)}=1-e^{\frac{\lambda}{x}},$$

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{1-e^{\lambda\frac{1}{tx}}}{1-e^{\lambda\frac{1}{t}}}=\lim_{t\to-\infty}\frac{-\frac{\lambda}{x}e^{\frac{\lambda}{tx}}\cdot\left(\frac{1}{t}\right)'}{-\lambda e^{\frac{1}{t}}\cdot\left(\frac{1}{t}\right)'}=\lim_{t\to-\infty}\frac{e^{\frac{\lambda}{xt}}\cdot\frac{1}{t^2}}{xe^{\frac{\lambda}{t}}\cdot\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{x}e^{\frac{\lambda}{xt}}\cdot e^{-\frac{\lambda}{t}}=\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot e^{\frac{\lambda}{t}\left(\frac{1}{x}-1\right)}=\frac{1}{x}=x^{-1}.$$

Kadangi teoremos sąlyga tenkinama, tai ribinis skirstinys bus $L(x)=1-e^{-x}$, x>0. Taikydami 1.6 teoremą, randame centravimo ir normavimo konstantas:

$$c_n=\theta.$$

Norėdami rasti konstantą d_n , sprendžiame lygtį :

$$e^{-\lambda(x-\theta)}=\frac{n-1}{n}\quad.$$

Gauname

$$d_n=\theta-\frac{\ln\frac{n-1}{n}}{\lambda}-\theta=\frac{1}{\lambda}\cdot\ln\frac{n}{n-1}.$$

Taigi, gauname

$$\lim_{t\to-\infty}P\left(W_n<\theta+\frac{1}{\lambda n}x\right)=L(x)=1-e^{-x}\text{, x>0.}$$

Kadangi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{n}{n-1}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-1-n}{(n-1)^2}}{-\frac{1}{n^2}}\Rightarrow 1$, tai

$$d_n=\frac{1}{\lambda}\ln\frac{n}{n-1}\Rightarrow d_n=\frac{1}{\lambda n}.$$

Taikydami perkėlimo teoremą 1.10, randame ribinį skirstinį minimumo perkėlimo teoremoje:

$$\psi(x)=1-\int_0^\infty(1-L(x))^z\,dA_z(nz)=1-\int_0^\infty\left(1-1+e^{-x}\right)^z e^{-z}dz=1-\int_0^\infty e^{-z(x+1)}dz=$$

$$=1+\frac{1}{x+1}e^{-z(x+1)}\Big|_0^{\infty}=1-\frac{1}{x+1}, x>0$$

Taigi $P\left(W_{N_n}<\theta+\frac{1}{\lambda}\ln\frac{n}{n-1}\right)=\psi(x)=1-\frac{1}{x+1}, x>0.$ **(2.17)**

Kadangi

$$P\left(W_n<\frac{x}{n\lambda}\right)=L(x)=1-e^{-x},$$

su visais n, tai konvergavimo greičio įverčio išraiška šiuo atveju supaprastėja. Gauname, kad

$$\Delta_{N_n}(x)=\left|\int_0^{\infty}\left(A_n(nz)-A(z)\right)d(1-L(x))^z\right|.$$

Kadangi $\left|1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}-\left(1-e^{-z}\right)\right|\le\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot e^{-z}(1+z),$ tai

$$\Delta_{N_n}(x)=\left|\int_0^{\infty}\left((1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}-1+e^{-z}\right)d(1-1+e^{-x})^z\right|\le\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{e}}{n}e^{-z}(1+z)\cdot xe^{-xz}dz=$$

$$=\frac{\sqrt{e}}{n}x\int_0^{\infty}e^{-z(1+x)}(1+z)dz=-\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x}{1+x}\cdot e^{-z(1+x)}(1+z)\Big|_0^{\infty}+\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x}{1+x}\int_0^{\infty}e^{-z(1+x)}dz=$$

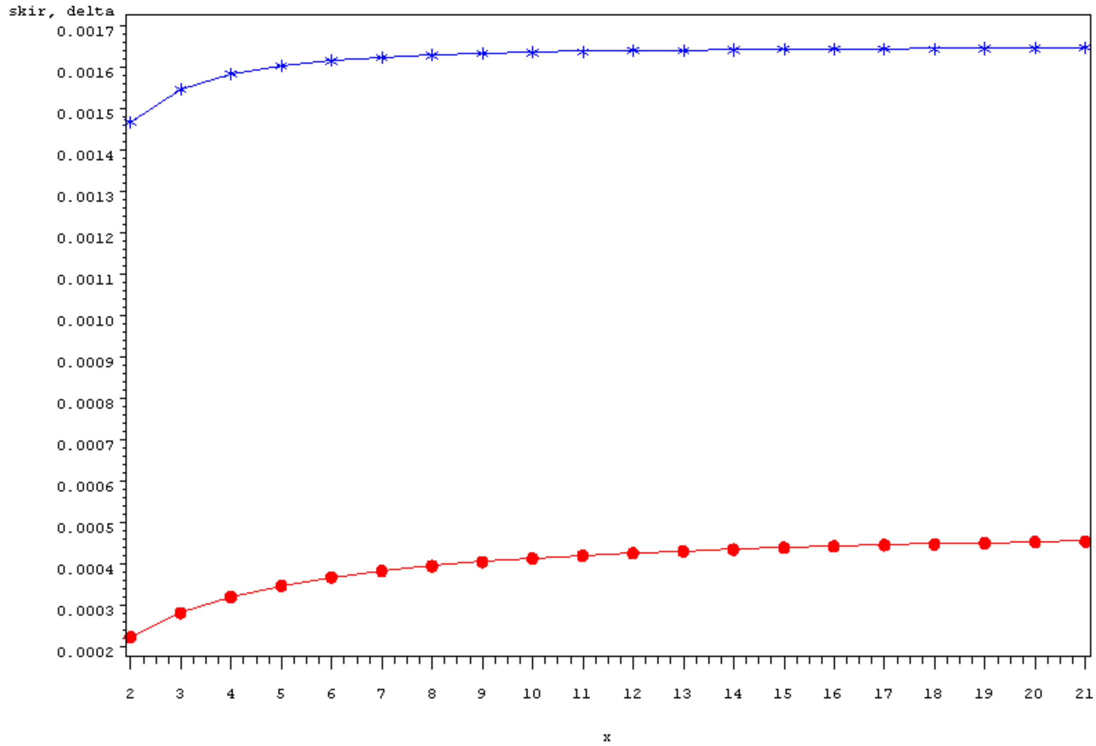
$$=\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x}{1+x}-\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x}{(x+1)^2}e^{-z(x+1)}\Big|_0^{\infty}=\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x}{1+x}+\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x}{(1+x)^2}=\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x}{1+x}\left(1+\frac{1}{x+1}\right). \qquad \textbf{(2.18)}$$

Atsižvelgę į (2.17) ir (2.18) galutinai gauname

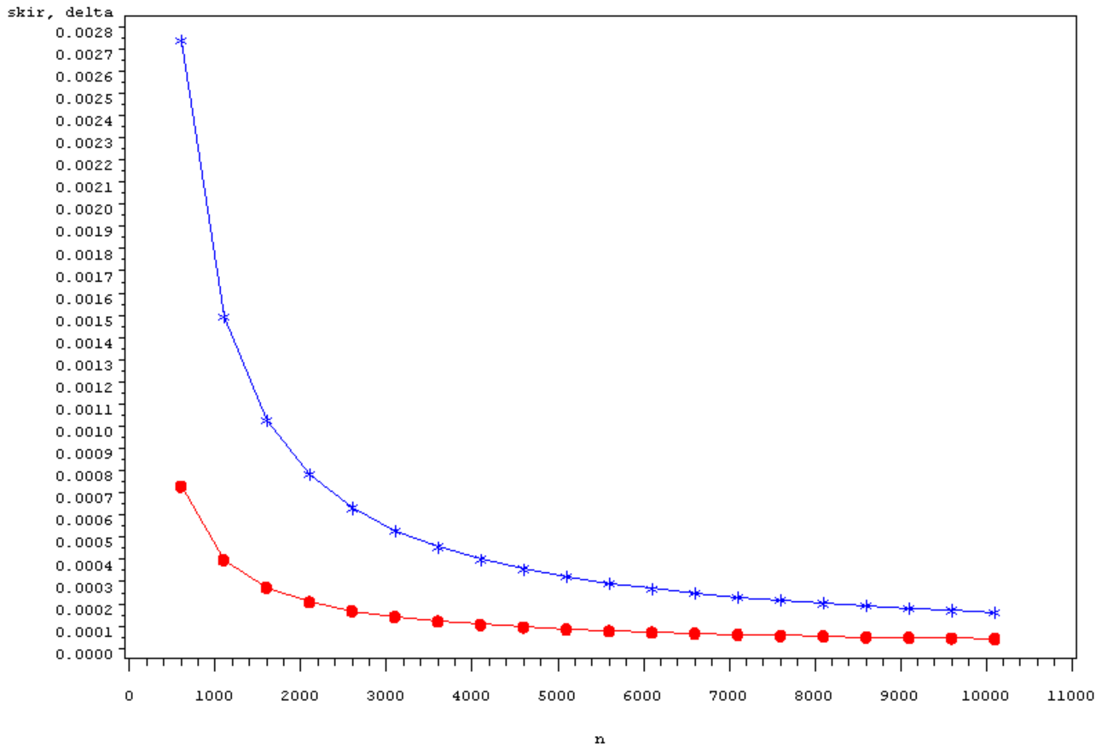
$$\left|P\left(W_{N_n}<\theta+\frac{x}{\lambda n}\right)-1\frac{1}{x+1}\right|\le\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x}{1+x}\left(1+\frac{1}{x+1}\right).$$

Matome, kad konvergavimo greičio įverčio eilė n atžvilgiu yra $\frac{1}{n}$.

Konvergavimo greičio priklausomybę nuo x ir n tirsime, naudodami kompiuterinius skaičiavimus. Kadangi konvergavimo greitį apibūdina paklaidos $\left|P\left(W_{N_n}<c_n+d_nx\right)-\psi(x)\right|$ kitimas, tai būtent jį ir nagrinėsime. Pateikiame keletą paveikslų, kurie atspindi konvergavimo greičio priklausomybę nuo minėtų parametrų.



2.11 pav. Minimumo paklaidos ir paklaidos įverčio grafikai, kai atsitiktiniai dydžiai turi eksponentinį skirstinį ir x kinta , n =1000



2.12 pav. Minimumo paklaidos ir paklaidos įverčio grafikai, kai atsitiktiniai dydžiai turi eksponentinį skirstinį ir n kinta , x=15

Iš pateiktų paveikslų matome, kad paklaidos reikšmė mažėja, kai x mažėja.

Kiti paklaidos ir paklaidos įverčio tyrimo rezultatai pateikti prieduose (žr. 70 psl.).

2.6 MAKSIMUMO TANKIO KONVERGAVIMAS, KAI ATSITIKTINIAI DYDŽIAI TURI LOGISTINĮ SKIRSTINĮ

Tarkime, kad a.d. turi logistinį skirstinį, t.y. $F(x)=\dfrac{1}{e^{-x}+1}$, $p(x)=\dfrac{e^{-x}}{\left(e^{-x}+1\right)^2}$, $x\in\Re$. Kadangi $\omega(F)=\infty$, tai taikome 1.3 teoremą ir randame centravimo bei normavimo konstantas $a_n=\ln n,\ b_n=1$.

Gauname, kad ribinis skirstinys

$$\lim_{n\to\infty}P(Z_n<\ln n+x)=H(x)=e^{-e^{-x}},x\in\Re.$$

Rasime tiesiškai normuoto maksimumo tankio $p_{Z_n}(x)$ ribinį tankį.

Tikriname 1.13 teoremos sąlygas:

$$\lim_{x\to\omega(F)}\frac{p(x)\int\limits_x^{\omega(F)}(1-F(t))dt}{(1-F(x))^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\int\limits_x^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{e^{-t}+1}\right)dt}{\left(1-\dfrac{1}{e^{-x}+1}\right)^2}=1.$$

Kadangi skirstinys F(x) tenkina 1.13 teoremos c) dalį, tai

$$\lim_{n\to\infty}p_{Z_n}(x)=H'(x)=e^{-x}e^{-e^{-x}},\ x\in\Re.$$

Tarkime, kad $\{N_n\}$ – sveikaskaitiniai teigiami a.d., nepriklausantys nuo a.d. $\{X_j\}$ ir turintys geometrinį skirstinį su parametru $p_n=\dfrac{1}{n}$, t.y.

$$P(N_n=k)=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1},\ k=1,2,\ldots.$$

Tada

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{N_n}{n}<z\right)=A(z)=1-e^{-z},z>0.$$

Tuomet taikydami (1.9) formulę, randame ribinį skirstinį maksimumo perkėlimo teoremoje

$$\lim_{n\to\infty}P(Z_{N_n}<\ln n+x)=\Psi(x)=\int\limits_0^\infty H^z(x)dA(z)=\int\limits_0^\infty e^{-ze^{-x}}d(1-e^{-z})=\int\limits_0^\infty e^{-z(e^{-x}+1)}dz=\frac{1}{e^{-x}+1},x\in\Re.\ \textbf{(2.19)}$$

Tuomet pagal 1.14 teoremą, gauname:

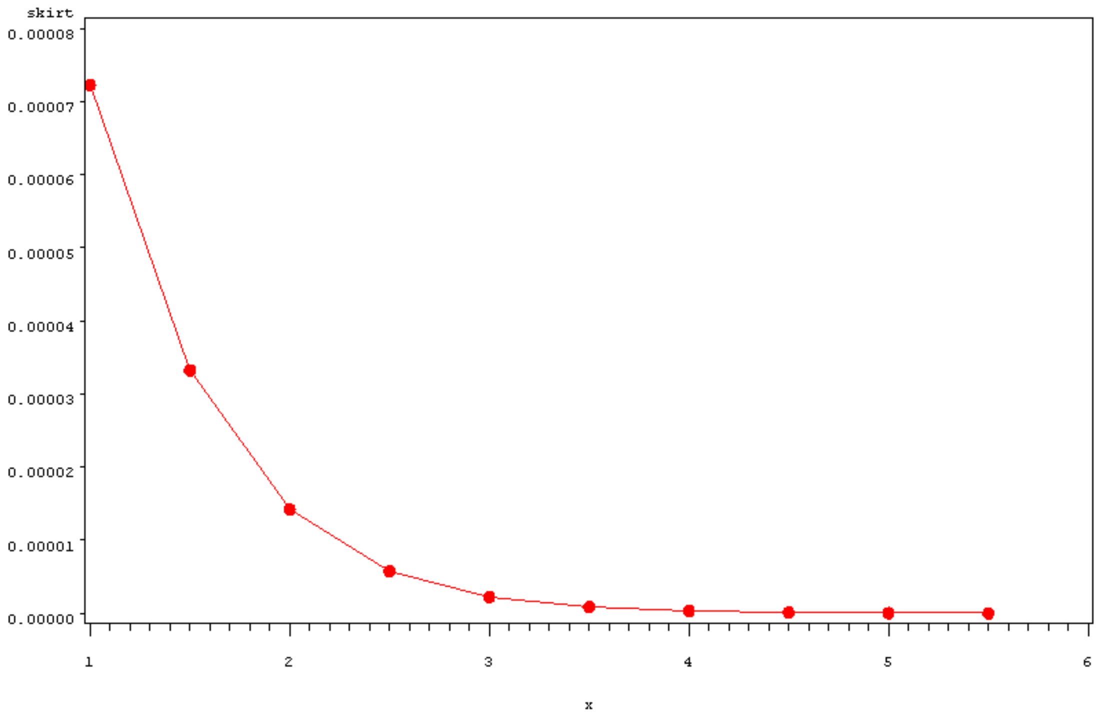
$$p_{Z_{N_n}}(x)=\frac{H'(x)}{H(x)}\int_0^{\infty} zH^z(x)dA(z)=\frac{e^{-x}e^{-e^{-x}}}{e^{-e^x}}\int_0^{0} ze^{-ze^{-x}}d(1-e^{-z})=e^{-x}\int_0^{\infty} ze^{-z(e^{-x}+1)}dz=$$

$$=-e^{-x}\frac{1}{e^{-x}+1}e^{-z(e^{-x}+1)}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty} e^{-x}\frac{1}{e^{-x}+1}e^{-z(e^{-x}+1)}dz=\frac{e^{-x}}{\left(e^{-x}+1\right)^2},\ x>0,$$

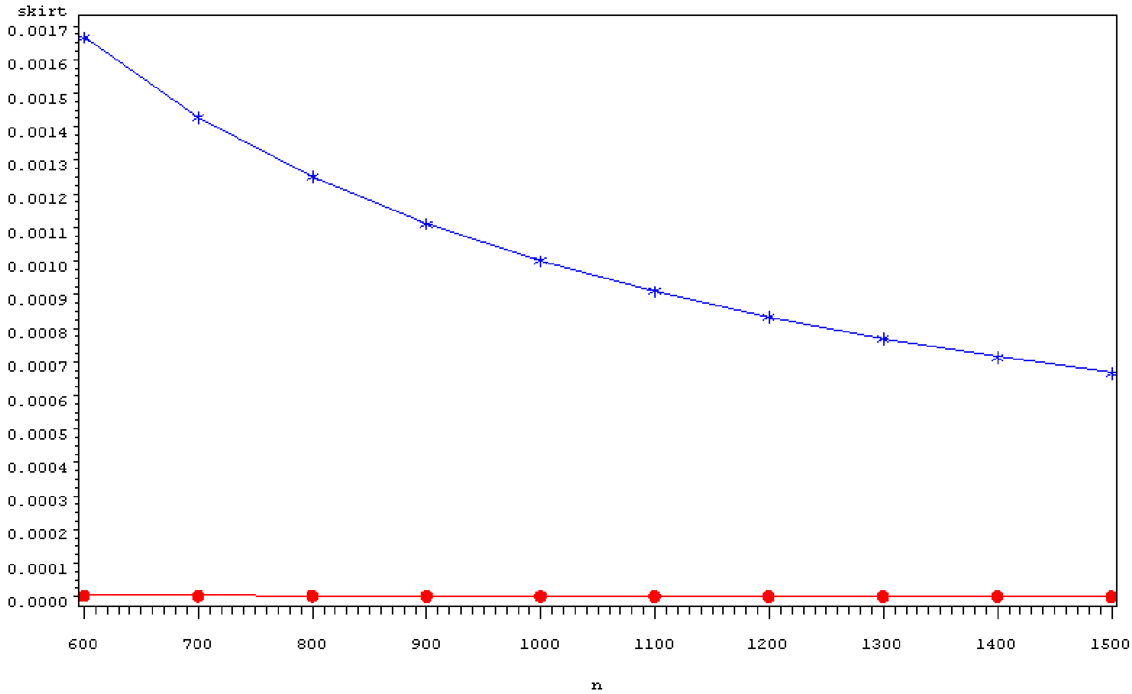
t.y.

$$\lim_{n\to\infty} p_{Z_{N_n}}(x)=\Psi'(x)=\frac{e^{-x}}{\left(e^{-x}+1\right)^2},\ x>0. \qquad \textbf{(2.20)}$$

Skirtumą tarp maksimumo tankio ir ribinio skirstinio tankio, tirsime atlikdami kompiuterinius skaičiavimus. Kadangi minėtas skirtumas priklauso nuo x ir n, tai atlikdami skaičiavimus nagrinėsime, kaip šį skirtumą įtakoja x ir n. Pateikiame keletą paveikslų, kuriuose atsispindi maksimumo tankio $p_{Z_{N_n}}(x)$ konvergavimo į ribinį skirstinį $\Psi'(x)$ priklausomybė nuo minėtų parametrų.



2.13 pav. Maksimumo tankio paklaidos grafikas, kai atsitiktiniai dydžiai turi logistinį skirstinį ir x kinta , n=1000



2.14 pav. Maksimumo tankio paklaidos grafikas, kai atsitiktiniai dydžiai turi logistinį skirstinį ir n kinta , x=3

Iš paveikslų matome, kad maksimumo tankio $p_{Z_{N_n}}(x)$ konvergavimo į ribinio skirstinio tankį $\Psi'(x)$ greitis gerėja, kai x didėja.

Kiti paklaidos tyrimo rezultatai pateikti prieduose (žr. 71 psl.).

2.7 MAKSIMUMO TANKIO KONVERGAVIMAS, KAI ATSITIKTINIAI DYDŽIAI TURI TOLYGŲJĮ SKIRSTINĮ

Tarkime, kad a.d. $\{X_j\}$ turi tolygųjį skirstinį, t.y. $F(x)=\dfrac{x-a}{b-a},\ a<x<b,\ \ p(x)=\dfrac{1}{b-a}$. Kadangi $\omega(F)=b$, tai taikome 1.2 teoremą ir randame centravimo bei normavimo konstantas $a_n=b,\ b_n=\dfrac{b-a}{n}$.

Gauname, kad ribinis skirstinys

$$\lim_{n\to\infty} P\left(Z_n<b+\frac{b-a}{n}x\right)=H(x)=e^x, x<0.$$

Rasime tiesiškai normuoto maksimumo tankio $p_{Z_n}(x)$ ribinį tankį.

Tikriname 1.13 teoremos sąlygas:

$$\lim_{x\to\omega(F)} \frac{(\omega(F)-x)p(x)}{1-F(x)} = \lim_{x\to b} \frac{(b-x)\frac{1}{b-a}}{1-\frac{x-a}{b-a}} = 1 .$$

Kadangi skirstinys F(x) tenkina 1.13 teoremos b) dalį, tai

$$\lim_{n\to\infty} p_{Z_n}(x) = H'(x) = e^x, x < 0 .$$

Tarkime, kad $\{N_n\}$ – sveikaskaitiniai teigiami a.d., nepriklausantys nuo a.d. $\{X_j\}$ ir turintys geometrinį skirstinį su parametru $p_n = \frac{1}{n}$. Tuomet taikydami (1.9) formulę, randame ribinį skirstinį maksimumo perkėlimo teoremoje

$$\lim_{n\to\infty} P\left(Z_{N_n} < b + \frac{b-a}{n} x \right) = \Psi(x) = \int_0^\infty H^z(x) dA(z) = \int_0^\infty e^{zx} d(1-e^{-z}) = \frac{1}{1-x}, \; x < 0 . \qquad \textbf{(2.21)}$$

Tuomet, pagal 1.14 teoremą, randame tiesiškai normuoto maksimumo tankį perkėlimo teoremoje

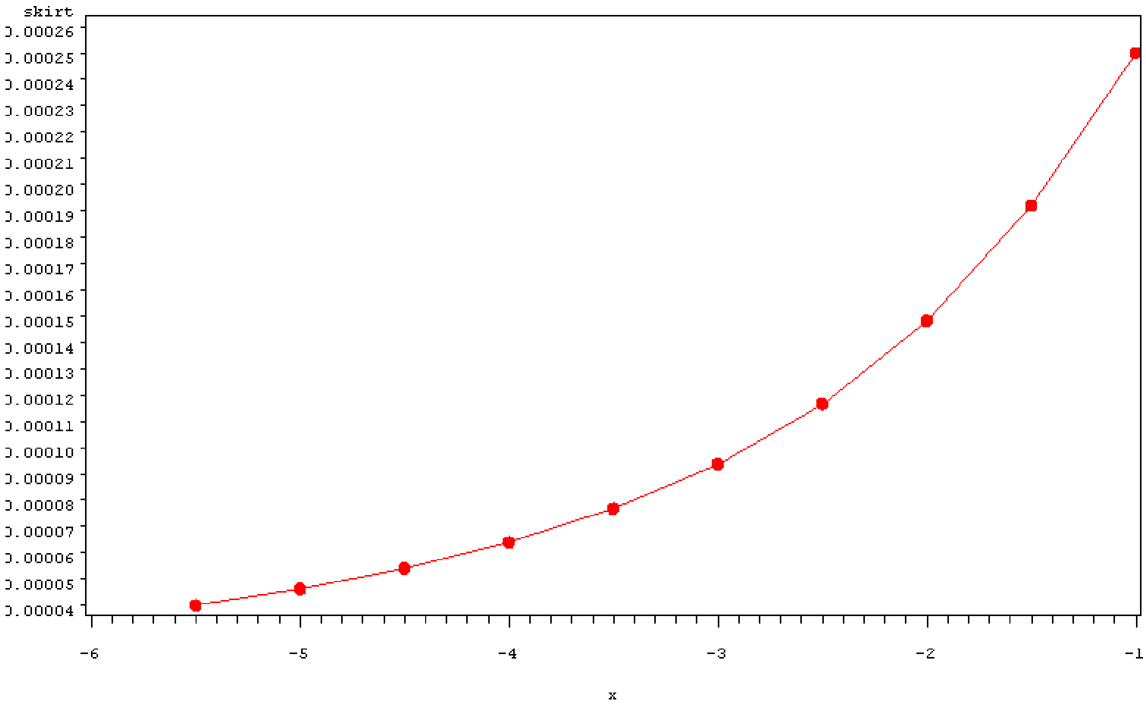
$$\lim_{n\to\infty} p_{Z_{N_n}}(x) = \frac{H'(x)}{H(x)} \int_0^\infty z H^z(x) dA(z) = \frac{e^x}{e^x} \int_0^\infty z e^{zx} d(1-e^{-z}) = \int_0^\infty z e^{-z(1-x)} dz = -z \frac{e^{-z(1-x)}}{1-x} \Big|_0^\infty +$$

$$+ \int_0^\infty \frac{e^{-z(1-x)}}{1-x} dz = \frac{1}{(1-x)^2},$$

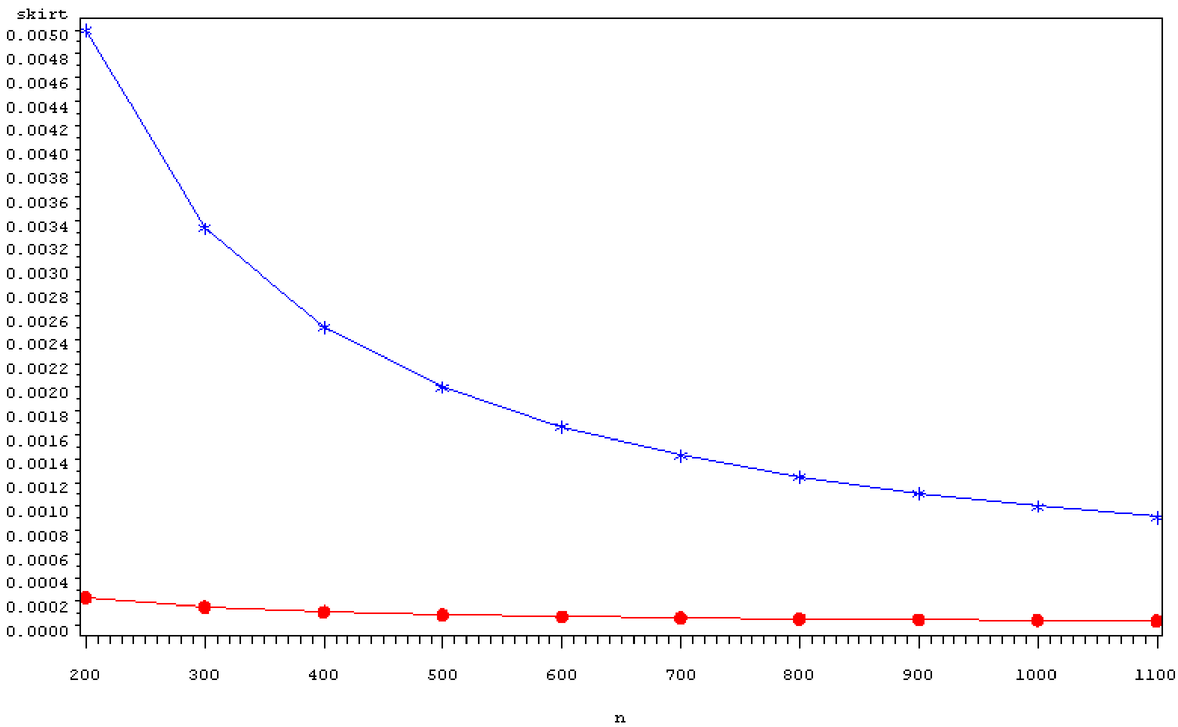
t.y.

$$\lim_{n\to\infty} p_{Z_{N_n}}(x) = \Psi'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \; x < 0 . \qquad \textbf{(2.22)}$$

Skirtumą tarp maksimumo tankio ir ribinio skirstinio tankio, tirsime atlikdami kompiuterinius skaičiavimus. Kadangi minėtas skirtumas priklauso nuo x ir n, tai atlikdami skaičiavimus nagrinėsime, kaip šį skirtumą įtakoja x ir n. Pateikiame keletą paveikslų, kuriuose atsispindi maksimumo tankio $p_{Z_{N_n}}(x)$ konvergavimo į ribinį skirstinį $\Psi'(x)$ priklausomybė nuo minėtų parametrų.



2.15 pav. Maksimumo tankio paklaidos grafikas, kai atsitiktiniai dydžiai turi tolygųjį skirstinį ir x kinta , n=1000



2.16 pav. Maksimumo tankio paklaidos grafikas, kai atsitiktiniai dydžiai turi tolygųjį skirstinį ir n kinta , x=-5

Iš paveikslų matome, kad maksimumo tankio $p_{Z_{N_n}}(x)$ konvergavimo į ribinio skirstinio tankį $\Psi'(x)$ greitis gerėja, kai x mažėja.

Kiti paklaidos tyrimo rezultatai pateikti prieduose (žr. 71 – 72 psl.).

2.8 MAKSIMUMO TANKIO KONVERGAVIMAS, KAI ATSITIKTINIAI DYDŽIAI TURI EKSPONENTINĮ SKIRSTINĮ

Tarkime, kad a.d. $\{X_j\}$ turi eksponentinį skirstinį, t.y. $F(x)=1-e^{-\lambda(x-\theta)}$, $p(x)=\lambda e^{-\lambda(x-\theta)}$, $x \geq \theta$. Kadangi $\varpi(F)=\infty$, tai taikome 1.3 teoremą ir randame centravimo bei normavimo konstantas

$$a_n = \frac{\ln n + \lambda\theta}{\lambda},\ b_n = \frac{1}{\lambda},$$

gauname, kad ribinis skirstinys

$$\lim_{n\to\infty} P\left(Z_n < \frac{\ln n + \lambda\theta}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}x \right) = H(x) = e^{-e^{-x}}, x \in \Re .$$

Rasime tiesiškai normuoto maksimumo tankio $p_{Z_n}(x)$ ribinį tankį.

Tikriname 1.13 teoremos sąlygas:

$$\lim_{x\to\omega(F)} \frac{p(x)\int_x^{\omega(F)}(1-F(t))dt}{(1-F(x))^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\lambda e^{-\lambda x}\int_x^{\infty} e^{-\lambda t}dt}{e^{-2\lambda x}} = 1 .$$

Kadangi skirstinys F(x) tenkina 1.13 teoremos c) dalį, tai

$$\lim_{n\to\infty} p_{Z_n}(x) = H'(x) = e^{-x}\cdot e^{-e^{-x}},\ x \in \Re .$$

Tarkime, kad $\{N_n\}$ – sveikaskaitiniai teigiami a.d., nepriklausantys nuo a.d. $\{X_j\}$ ir turintys geometrinį skirstinį su parametru $p_n = \frac{1}{n}$. Tuomet taikydami (1.9) formulę, randame ribinį skirstinį maksimumo perkėlimo teoremoje

$$\lim_{n\to\infty} P\left(Z_{N_n} < \frac{\ln n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}x \right) = \Psi(x) = \int_0^{\infty} H^z(x)dA(z) = \int_0^{\infty} e^{-ze^{-z}} d(1-e^{-z}) = \frac{1}{e^{-x}+1}, x \in \Re . \qquad \textbf{(2.23)}$$

Tuomet, pagal 1.14 teoremą, randame tiesiškai normuoto maksimumo tankį perkėlimo teoremoje:

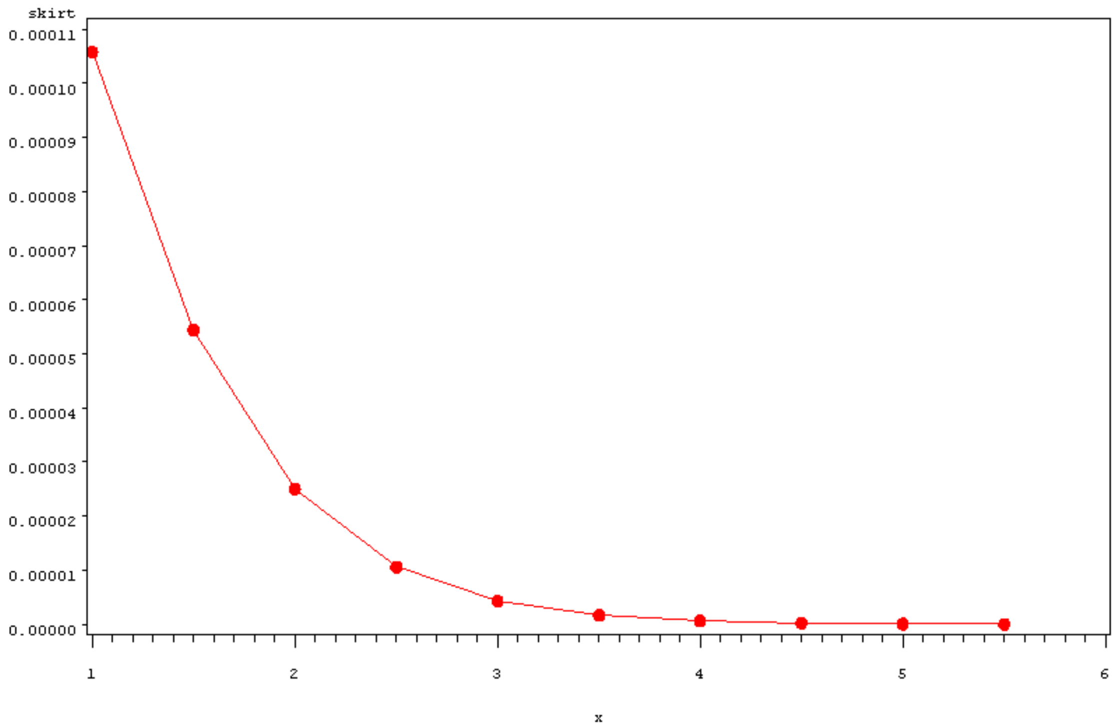
$$\lim_{n\to\infty} p_{Z_{N_n}}(x) = \frac{H'(x)}{H(x)}\int_0^\infty zH^z(x)dA(z) = \frac{e^{-x}e^{-e^{-x}}}{e^{-e^{-e}}}\int_0^\infty ze^{-ze^{-x}}d(1-e^{-z}) = e^{-x}\int_0^\infty ze^{-z(e^{-x}+1)}dz =$$

$$= -e^{-x}z\frac{1}{1+e^{-x}}e^{-z(e^{-x}+1)}\Big|_0^\infty + e^{-x}\int_0^\infty \frac{1}{e^{-x}+1}e^{-z(e^{-x}+1)}dz = -e^{-x}\frac{1}{\left(e^{-x}+1\right)^2}e^{-z(e^{-x}+1)}\Big|_0^\infty = \frac{e^{-x}}{\left(e^{-x}+1\right)^2}, x>0,$$

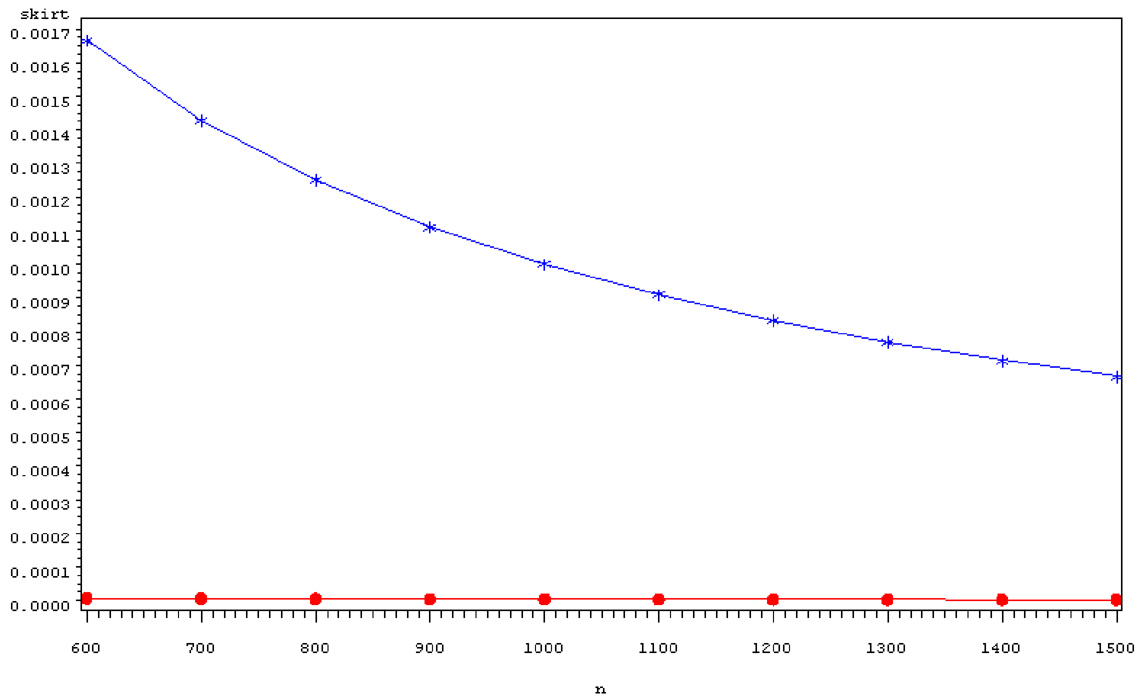
t.y.

$$\lim_{n\to\infty} p_{Z_{N_n}}(x) = \Psi'(x) = \frac{e^{-x}}{\left(e^{-x}+1\right)^2}, x>0\,. \qquad \textbf{(2.24)}$$

Skirtumą tarp maksimumo tankio ir ribinio skirstinio tankio, tirsime atlikdami kompiuterinius skaičiavimus. Kadangi minėtas skirtumas priklauso nuo x ir n, tai atlikdami skaičiavimus nagrinėsime, kaip šį skirtumą įtakoja x ir n. Pateikiame keletą paveikslų, kuriuose atsispindi maksimumo tankio $p_{Z_{N_n}}(x)$ konvergavimo į ribinį skirstinį $\Psi'(x)$ priklausomybė nuo minėtų parametrų.



2.17 pav. Maksimumo tankio paklaidos grafikas, kai atsitiktiniai dydžiai turi eksponentinį skirstinį ir x kinta , n=1000



2.18 pav. Maksimumo tankio paklaidos grafikas, kai atsitiktiniai dydžiai turi eksponentinį skirstinį ir n kinta , x=1

Iš paveikslų matome, kad maksimumo tankio $p_{Z_{N_n}}(x)$ konvergavimo į ribinio skirstinio tankį $\Psi'(x)$ greitis gerėja, kai x didėja.

Kiti paklaidos tyrimo rezultatai pateikti prieduose (žr. 72 psl.).

2.9 ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MINIMUMO TANKIO PERKĖLIMO TEOREMA

Tarkime, kad $X_1, X_2,...X_n,\dots$ - nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių (a.d.) seka su pasiskirstymo funkcija $F(x)$ ir tankiu p(x). Apibrėšime a.d.

$$W_n = \min(X_1, X_2,..., X_n).$$

Tarkime, kad egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantų sekos $\{c_n,\ n \geq 1\}$ ir $\{d_n, n > 1\}$,kad

$$\lim_{n\to\infty} P(W_n < c_n + d_n x) = L(x)\,, \qquad \textbf{(2.25)}$$

visuose funkcijos L tolydumo taškuose; čia L – neišsigimusi pasiskirstymo funkcija.

Jei tenkinama (2.25) lygybė , sakysime, kad pasiskirstymo funkcija F priklauso ribinio skirstinio L traukos sričiai (žymėsime $F \in D(L)$) .

Kaip žinome (žr. [2]), egzistuoja trys ribinio skirstinio L tipai:

$$L_{1,\gamma}(x) = \begin{cases} 1-\exp(-(-x)^{-\gamma}), & x<0, \\ 1, & x>0; \end{cases}$$

$$L_{2,\gamma}(x) = \begin{cases} 1-\exp(-x^{\gamma}), & x>0, \\ 0, & x<0; \end{cases}$$

$$L_{3,0}(x) = 1-\exp(-e^{x}), x \in \Re .$$

Pažymėkime,

$$p_{W_n}(x) = nd_n p(c_n + d_n x)(1-F(c_n + d_n x))^{n-1},$$

čia $p_{W_n}(x)$ - a.d. $(W_n - c_n)/d_n$ tankis.

Suformuluosime sąlygas, kurias turi tenkinti pasiskirstymo funkcija F, kad tiesiškai normuoto minimumo tankis $p_{W_n}(x)$ konverguotų į ribinio skirstinio L tankį $L'(x)$, t.y.

$$\lim_{n\to\infty} p_{W_n}(x) = L'(x). \qquad \textbf{(2.26)}$$

2.1 teorema. Jei $F \in D(L)$ ir

a) $L = L_{1,\gamma}$, tai (2.26) sąryšis bus teisingas intervale $(-\infty;0)$ tada ir tik tada, kai tankio funkcija p(-x) yra teigiama, su pakankamai dideliais x, ir γ > 0 tenkinama sąlyga

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xp(-x)}{F(-x)} = \gamma;$$

b) $L = L_{2,\gamma}$, tai (2.26) sąryšis bus teisingas intervale $(0;\infty)$ tada ir tik tada, kai tankio funkcija p(-x) yra teigiama, ir γ > 0 tenkinama sąlyga

$$\lim_{x\to\alpha(F)} \frac{(\alpha(F)-x)p(-x)}{F(-x)} = \gamma,$$

čia - $\alpha(F) = \inf\{x: \quad F(x) > 0\}$;

c) $L = L_{3,0}$, tai (2.26) sąryšis bus teisingas su visais x tada ir tik tada, kai tenkinama sąlyga

$$\lim_{x\to\alpha(F)} \frac{d}{dx}\left(\frac{1-F(-x)}{p(-x)}\right) = 0.$$

2.1 teoremos teiginys išplaukia iš [4] darbe suformuluotos teoremos maksimumų tankiams.

Sakykime, kad $\{N_n, n \ge 1\}$ - sveikareikšmių teigiamų a.d. nepriklausančių nuo $\{X_j, j \ge 1\}$, seka.

Tarkime, kad tenkinama sąlyga

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{N_n}{n} < z\right) = A(z), \qquad \textbf{(2.27)}$$

visuose funkcijos A(z) tolydumo taškuose. Kaip žinoma (žr.[3]), jei tenkinamos lygybės (2.25) ir (2.27), tai

$$\lim_{n\to\infty} P(W_{N_n} < c_n + d_n x) = \psi(x) = 1 - \int_0^\infty (1 - L(x))^z \, dA(z). \qquad \textbf{(2.28)}$$

2.2 teorema. Tarkime tenkinamos (2.25) ir (2.26) sąlygos. Jei a.d. $\{N_n\}$ tenkina (2.27) sąlygą, tai

$$\lim_{n\to\infty} p_{W_{N_n}}(x) = \frac{L'(x)}{1 - L(x)} \int_0^\infty z(1 - L(x))^z \, dA(z) = \psi'(x).$$

Įrodymas. Kadangi a.d. $\{N_n,\ n \ge 1\}$ ir $\{X_j,\ j \ge 1\}$ yra nepriklausomi, tai , pritaikę pilnos tikimybės formulę, gauname

$$p_{W_{N_n}}(x) = \frac{d}{dx}\left(1 - \sum_{j\ge1}(1 - F(c_n + d_n x))^j P(N_n = j)\right) = \sum_{j\ge1} j d_n (1 - F(c_n + d_n x))^{j-1} p(c_n + d_n x) P(N_n = j) =$$

$$= \frac{n d_n p(c_n + d_n x)(1 - F(c_n + d_n x))^{n-1}}{(1 - F(c_n + d_n x))^n} \times \sum_{j\ge1} \frac{j}{n}(1 - F(c_n + d_n x))^{\frac{j}{n}} P\left(\frac{N_n}{n} < \frac{j}{n}\right) =$$

$$= \frac{n d_n p(c_n + d_n x)(1 - F(c_n + d_n x))^{n-1}}{(1 - F(c_n + d_n x))^n} \times \int_0^\infty z\left((1 - F(c_n + d_n x))^n\right)^z dP\left(\frac{N_n}{n} < z\right).$$

Atsižvelgę į teoremos sąlygas, gauname

$$\lim_{n\to\infty} p_{W_{N_n}}(x) = \frac{L'(x)}{1 - L(x)} \int_0^\infty z(1 - L(x))^z \, dA(z) = \psi'(x).$$

Teorema įrodyta.

2.10 MINIMUMO TANKIO KONVERGAVIMAS, KAI ATSITIKTINIAI DYDŽIAI TURI LOGISTINĮ SKIRSTINĮ

Tarkime, kad a.d. $\{X_j\}$ turi logistinį skirstinį, t.y $F(x) = \dfrac{1}{e^{-x} + 1}, x > 0, \quad p(x) = \dfrac{1}{\left(e^{-x} + 1\right)^2} e^{-x}$.

Kadangi $\alpha(F) = -\infty$, tai taikome (1.7) teoremą ir randame centravimo ir normavimo konstantas $c_n = -\ln n,\ d_n = 1$.

Gauname, kad ribinis skirstinys

$$\lim_{n\to\infty} P\left(W_n < -\ln n + x\right) = L(x) = 1 - e^{-e^x}$$

Tikriname 2.1 teoremos sąlygas:

$$\lim_{x\to\alpha(F)} \frac{d}{dx}\left(\frac{1-F(-x)}{p(-x)}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{1-\dfrac{1}{e^x+1}}{\dfrac{e^x}{e^x+1}}\right) = 0 .$$

Kadangi skirstinys F(x) tenkina 2.1 teoremos c) dalį, tai

$$\lim_{n\to\infty} p_{W_n}(x) = L'(x) = e^x e^{-e^x} ,$$

čia $p_{W_n}(x)$ - tiesiškai normuoto minimumo tankis.

Tarkime, kad $\{N_n\}$ – sveikaskaitiniai teigiami a.d., nepriklausantys nuo a.d. $\{X_j\}$ ir turintys geometrinį skirstinį su parametru $p_n = \frac{1}{n}$. Tuomet taikydami (1.12) formulę, randami ribinį skirstinį minimumo perkėlimo teoremoje

$$P(W_{N_n} < -\ln n + x) = \sum_{j\ge1}(1-(1-F(c_n+d_n x))^j)\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{j-1} = 1-\frac{1}{n-1}\frac{\left(1-\dfrac{1}{e^{-(-\ln n+x)}+1}\right)\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}{1-\left(1-\dfrac{1}{e^{-(-\ln n+x)}+1}\right)\left(1-\dfrac{1}{n}\right)} =$$

$$= 1-\frac{1}{n-1}\frac{\dfrac{e^{-x}(n-1)}{ne^{-x}+1}}{\dfrac{(ne^{-x}+1)n-ne^{-x}(n-1)}{(ne^{-x}+1)n}} = 1-\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} = \frac{1}{e^{-x}+1}. \tag{2.29}$$

Tuomet

$$p_{W_{N_n}}(x) = \sum_{j\ge1} d_n p(c_n+d_n x)(1-F(c_n+d_n x))^{j-1}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{j-1} = \frac{\dfrac{e^{-(-\ln n+x)}}{\left(e^{-(-\ln n+x)}+1\right)^2}}{n}\times$$

$$\times\frac{1}{\left(1-\left(1-\dfrac{1}{e^{-(-\ln+x)}+1}\right)\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right)^2} = \frac{e^{-x}}{\left(ne^{-x}+1\right)^2}\frac{1}{\left(\dfrac{\left(ne^{-x}+1\right)n-ne^{-x}(n-1)}{\left(ne^{-x}+1\right)n}\right)^2} = \frac{e^{-x}}{\left(e^{-x}+1\right)^2}. \tag{2.30}$$

Iš (2.29) ir (2.30) lygybės matome, kad skirstinys yra geometriškai mini-stabilus. Taigi šiuo atveju konvergavimo greičio problema yra neaktuali, nes minimumo skirstinio tankis yra lygus ribinio skirstinio tankiui. .

2.11 MINIMUMO TANKIO KONVERGAVIMAS, KAI ATSITIKTINIAI DYDŽIAI TURI TOLYGŲJĮ SKIRSTINĮ

Tarkime, kad a.d. $\{X_j\}$ turi tolygųjį skirstinį, t.y. $F(x)=\dfrac{x-a}{b-a}$, $p(x)=\dfrac{1}{b-a}$, $a<x<b$.
Kadangi $\alpha(F)=a$, tai taikome 1.6 teoremą ir randame centravimo bei normavimo konstantas $c_n=a,\ d_n=\dfrac{b-a}{n}$.

Gauname, kad ribinis skirstinys

$$\lim_{n\to\infty}P\left(Z_n<a+\frac{b-a}{n}x\right)=L(x)=1-e^{-x},\ x>0.$$

Rasime tiesiškai normuoto minimumo tankio $p_{W_n}(x)$ ribinį tankį.

Tikriname 2.1 teoremos sąlygas:

$$\lim_{x\to\alpha(F)}\frac{(\alpha(F)-x)p(-x)}{F(-x)}=\lim_{x\to a}\frac{(a-x)\frac{1}{b-a}}{\frac{-x+a}{b-a}}=1.$$

Kadangi skirstinys F(x) tenkina 2.1 teoremos b) dalį, tai

$$\lim_{n\to\infty}p_{W_n}(x)=L'(x)=e^{-x},x>0.$$

Tarkime, kad $\{N_n\}$ – sveikaskaitiniai teigiami a.d., nepriklausantys nuo a.d. $\{X_j\}$ ir turintys geometrinį skirstinį su parametru $p_n=\dfrac{1}{n}$. Tuomet taikydami (1.12) formulę, randame ribinį skirstinį minimumo perkėlimo teoremoje

$$\lim_{n\to\infty}P\left(W_{N_n}<a+\frac{b-a}{n}x\right)=\psi(x)=1-\int_0^\infty\left(1-L(x)\right)^z dA(z)=1-\int_0^\infty e^{-zx}d(1-e^{-z})=1-\frac{1}{x+1},\ x>0. \quad \mathbf{(2.31)}$$

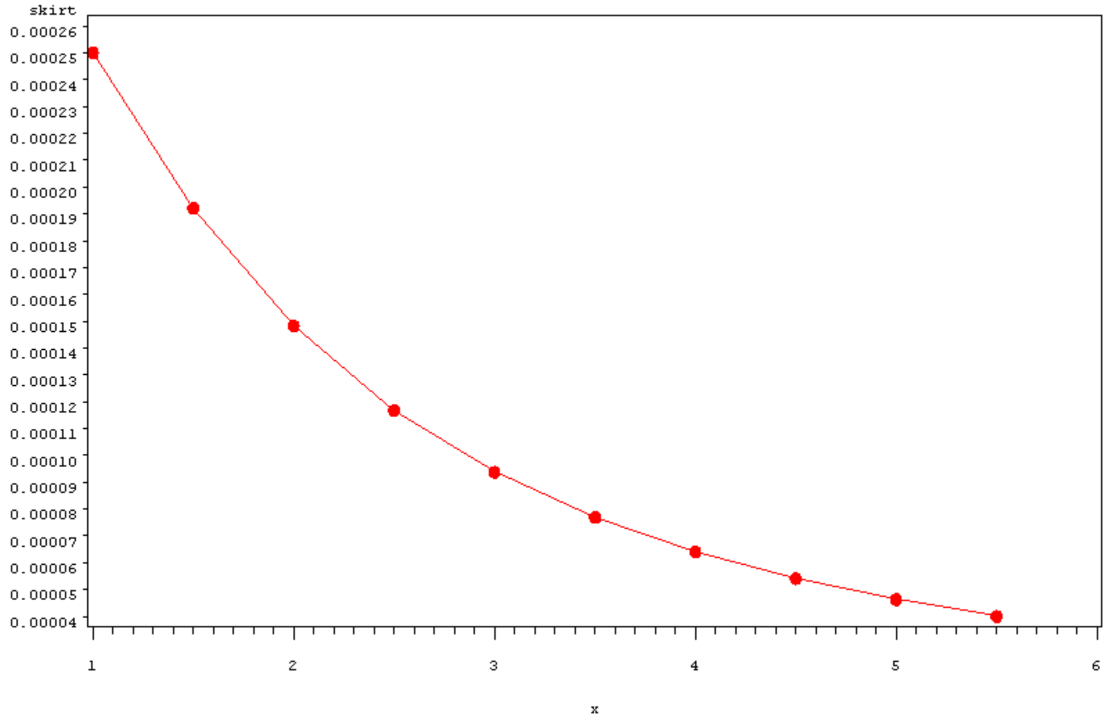
Tuomet, pagal 2.2 teoremą randame tiesiškai normuoto minimumo tankį perkėlimo teoremoje:

$$\lim_{n\to\infty}p_{W_{N_n}}(x)=\frac{L'(x)}{1-L(x)}\int_0^\infty z(1-L(x))^z dA(z)=\frac{e^{-x}}{e^{-x}}\int_0^\infty ze^{-zx}d(1-e^{-z})=\int_0^\infty ze^{-z(x+1)}dz=$$
$$=-z\frac{1}{x+1}e^{-z(x+1)}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty e^{-z(x+1)}\frac{1}{x+1}dz=\frac{1}{(x+1)^2}$$

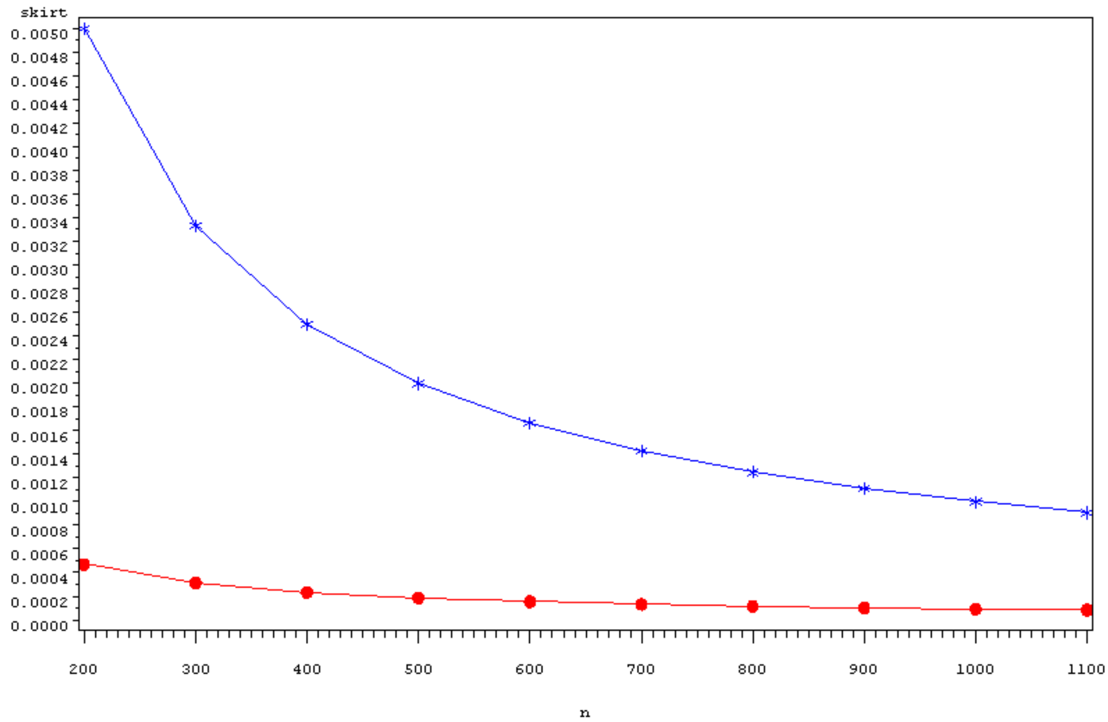
t.y.

$$\lim_{n\to\infty}p_{W_{N_n}}(x)=\psi'(x)=\frac{1}{(x+1)^2},\ x>0. \quad \mathbf{(2.32)}$$

Skirtumą tarp minimumo tankio ir ribinio skirstinio tankio, tirsime atlikdami kompiuterinius skaičiavimus. Kadangi minėtas skirtumas priklauso nuo x ir n, tai atlikdami skaičiavimus nagrinėsime, kaip šį skirtumą įtakoja x ir n. Pateikiame keletą paveikslų, kuriuose atsispindi minimumo tankio $p_{W_{N_n}}(x)$ konvergavimo į ribinį skirstinį $\psi'(x)$ priklausomybė nuo minėtų parametrų.



2.19 pav. Minimumo tankio paklaidos grafikas, kai atsitiktiniai dydžiai turi tolygųjį skirstinį ir x kinta , n=1000



2.20 pav. Minimumo tankio paklaidos grafikas, kai atsitiktiniai dydžiai turi tolygųjį skirstinį ir n kinta , x=3

Iš paveikslų matome, kad minimumo tankio $p_{W_{N_n}}(x)$ konvergavimo į ribinio skirstinio tankį $\psi'(x)$ greitis gerėja, kai x didėja.

Kiti paklaidos tyrimo rezultatai pateikti prieduose (žr. 72 – 73 psl.).

2.12 MINIMUMO TANKIO KONVERGAVIMAS, KAI ATSITIKTINIAI DYDŽIAI TURI EKSPONENTINĮ SKIRSTINĮ

Tarkime, kad a.d. $\{X_j\}$ turi eksponentinį skirstinį, t.y. $F(x) = 1 - e^{-\lambda(x-\theta)}$, $p(x) = \lambda e^{-\lambda(x-\theta)}$, $x \geq \theta$. Kadangi $\alpha(F) = \theta$, tai taikome 1.6 teoremą ir randame centravimo bei normavimo konstantas $c_n = \theta$, $d_n = \dfrac{1}{\lambda n}$.

Gauname, kad ribinis skirstinys

$$\lim_{n\to\infty} P\left(W_n < \theta + \frac{1}{\lambda n} x \right) = L(x) = 1 - e^{-x}, x > 0.$$

Rasime tiesiškai normuoto minimumo tankio $p_{W_n}(x)$ ribinį tankį.

Tikriname 2.1 teoremos sąlygas:

$$\lim_{x\to\alpha(F)} \frac{(\alpha(F) - x)p(-x)}{F(-x)} = \lim_{x\to\theta} \frac{(\theta - x)\lambda e^{-\lambda(-x-\theta)}}{1 - e^{-\lambda(-x-\theta)}} = \lim_{x\to\theta} \frac{-\lambda e^{\lambda x+\lambda\theta} + (x-\theta)\lambda^2 e^{\lambda x+\lambda\theta}}{-\lambda e^{\lambda x+\lambda\theta}} = 1.$$

Kadangi skirstinys F(x) tenkina 2.1 teoremos b) dalį, tai

$$\lim_{n\to\infty} p_{W_n}(x) = L'(x) = e^{-x}, x > 0.$$

Tarkime, kad $\{N_n\}$ – sveikaskaitiniai teigiami a.d., nepriklausantys nuo a.d. $\{X_j\}$ ir turintys geometrinį skirstinį su parametru $p_n = \dfrac{1}{n}$. Tuomet taikydami (1.12) formulę, randame ribinį skirstinį minimumo perkėlimo teoremoje

$$\lim_{n\to\infty} P\left(W_{N_n} < \theta + \frac{1}{\lambda n} x \right) = \psi(x) = 1 - \int_0^\infty e^{-zx} d(1 - e^{-z}) = 1 - \frac{1}{x+1}, x > 0. \qquad \textbf{(2.33)}$$

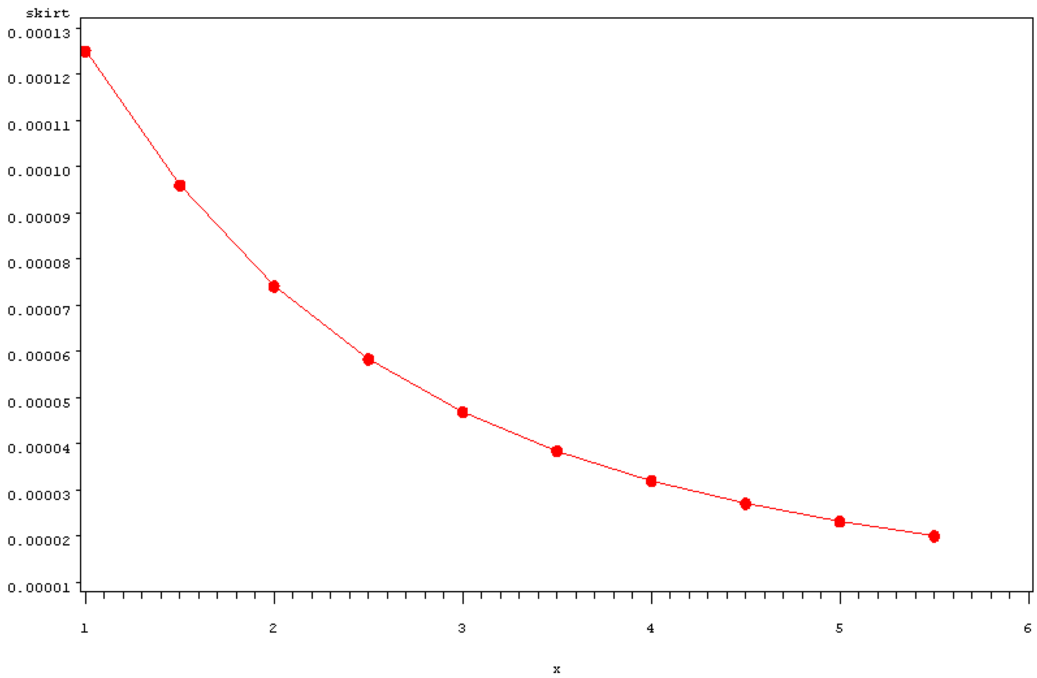
Tuomet pagal 2.2 teoremą randame tiesiškai normuoto minimumo tankį perkėlimo teoremoje:

$$\lim_{n\to\infty} p_{W_{N_n}}(x) = \frac{L'(x)}{1-L(x)}\int_0^\infty z(1-L(x))^z\,dA(z) = \frac{e^{-x}}{e^{-x}}\int_0^\infty ze^{-zx}\,d(1-e^{-z}) = \frac{1}{(x+1)^2}, x>0,$$

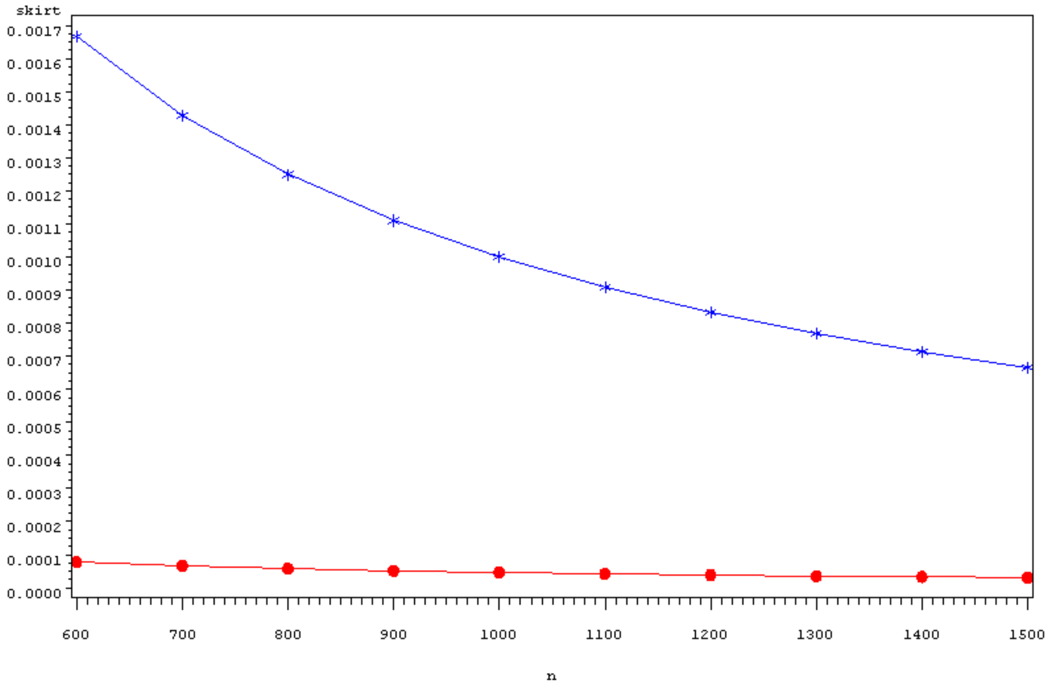
t.y.

$$\lim_{n\to\infty} p_{W_{N_n}}(x) = \psi'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}, x>0. \tag{2.34}$$

Skirtumą tarp minimumo tankio ir ribinio skirstinio tankio, tirsime atlikdami kompiuterinius skaičiavimus. Kadangi minėtas skirtumas priklauso nuo x ir n, tai atlikdami skaičiavimus nagrinėsime, kaip šį skirtumą įtakoja x ir n. Pateikiame keletą paveikslų, kuriuose atsispindi minimumo tankio $p_{W_{N_n}}(x)$ konvergavimo į ribinį skirstinį $\psi'(x)$ priklausomybė nuo minėtų parametrų.



2.21 pav. Minimumo tankio paklaidos grafikas, kai atsitiktiniai dydžiai turi eksponentinį skirstinį ir x kinta , n=1000



2.22 pav. Minimumo tankio paklaidos grafikas, kai atsitiktiniai dydžiai turi eksponentinį skirstinį ir n kinta , x=3

Iš paveikslų matome, kad minimumo tankio $p_{W_{N_n}}(x)$ konvergavimo į ribinio skirstinio tankį $\psi'(x)$ greitis gerėja, kai x didėja.

Kiti paklaidos tyrimo rezultatai pateikti prieduose (žr. 73 psl.).

2.13 NETIESIŠKAI NORMUOTŲ EKSTREMALIŲJŲ REIKŠMIŲ TANKIŲ KONVERGAVIMO GREIČIO TYRIMAS

Tarkime, kad $X_1, X_2, ... X_n, \ldots -$ nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių (a.d.) seka su pasiskirstymo funkcija $F(x)$ ir tankiu p(x). Apibrėšime a.d.

$$Z_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n),$$
$$W_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Tarkime, kad egzistuoja tokios normavimo funkcijų sekos $\{\alpha_n(x),\ n \geq 1\}$ ir $\{\beta_n(x) > 0,\ \ n \geq 1\}$, kad

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n < \alpha_n(x)) = G(x),$$

$$\lim_{n\to\infty} P(W_n < \beta_n(x)) = T(x), \qquad \text{ir}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{Z_n}(x) = G'(x), \tag{2.35}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{W_n}(x) = T'(x)\,, \tag{2.36}$$

čia

$$p_{Z_n}(x) = n\alpha_n^{'}(x)p(\alpha_n(x))F^{n-1}(\alpha_n(x))$$

netiesiškai normuoto maksimumo $\alpha_n^{-1}(Z_n)$ tankis, o

$$p_{W_n}(x) = n\beta_n^{'}(x)p(\beta_n(x))\big(1-F(\beta_n(x))\big)^{n-1}$$

netiesiškai normuoto minimumo $\beta_n^{-1}(W_n)$ tankis.

Tarkime, kad $\{N_n\}$ - sveikaskaitiniai a.d., nepriklausantys nuo $\{X_j\}$. Tarkime, kad tenkinama sąlyga

$$P\left(\frac{N_n}{n} < x\right) = A_n(nz) \underset{n\to\infty}{\to} A(z). \tag{2.37}$$

Tada

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_{N_n} < \alpha_n(x)) = \Psi(x)\,; \tag{2.38}$$

čia $$\Psi(x) = \int_0^\infty G^z(x)dA(z)\,;$$

$$\lim_{n\to\infty} P(W_{N_n} < \beta_n(x)) = \psi(x)\,; \tag{2.39}$$

čia $$\psi(x) = 1 - \int_0^\infty (1-T(x))^z\, dA(z)\,.$$

2.2 Teorema Jeigu tenkinamos (2.35), (2.37) sąlygos, tai

$$\lim_{n\to\infty} p_{Z_{N_n}}(x) = \Psi'(x)\,.$$

2.2 teoremos įrodymas analogiškas 1.13 teoremos įrodymui.

2.3. Teorema Jeigu tenkinamos (2.36), (2.37) sąlygos, tai

$$\lim_{n\to\infty} p_{W_{N_n}}(x) = \psi'(x)\,.$$

2.3 teoremos įrodymas analogiškas 2.1. teoremos įrodymui.

1 Pavyzdys.

Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ turi skirstinio funkciją

$$F(x) = 1 - \frac{1}{\ln x}, \qquad x \geq e,$$

ir tankį

$$p(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^2}.$$

Imdami netiesinę normavimo funkciją $\alpha_n(x) = e^{nx}$, gauname

$$\lim_{n\to\infty} P\left(Z_n < e^{nx}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{\ln e^{nx}}\right)^n = G(x) = e^{-\frac{1}{x}}, \qquad x > 0,$$

ir

$$\lim_{n\to+\infty} p_{Z_n}(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(n+1)}{nx^2}\left(1 - \frac{1}{nx}\right)^n\right) = G'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}, x > 0.$$

Tarkime, kad $\{N_n, n \geq 1\}$ - sveikaskaitiniai teigiami a.d., turintys geometrinį skirstinį su parametru $p_n = \frac{1}{n}$. Tada

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_{N_n} < e^{nx}) = \Psi(x) = \int_0^\infty G^z(x)dA(z) = \int_0^\infty e^{-z\frac{1}{x}} d(1 - e^{-z}) = \int_0^\infty e^{-z(\frac{1}{x}+1)} dz = \frac{x}{x+1}, x > 0. \qquad \textbf{(2.40)}$$

Taikydami 2.2 teoremą, gauname, kad netiesiškai normuoto maksimumo ribinis skirstinio tankis yra lygus:

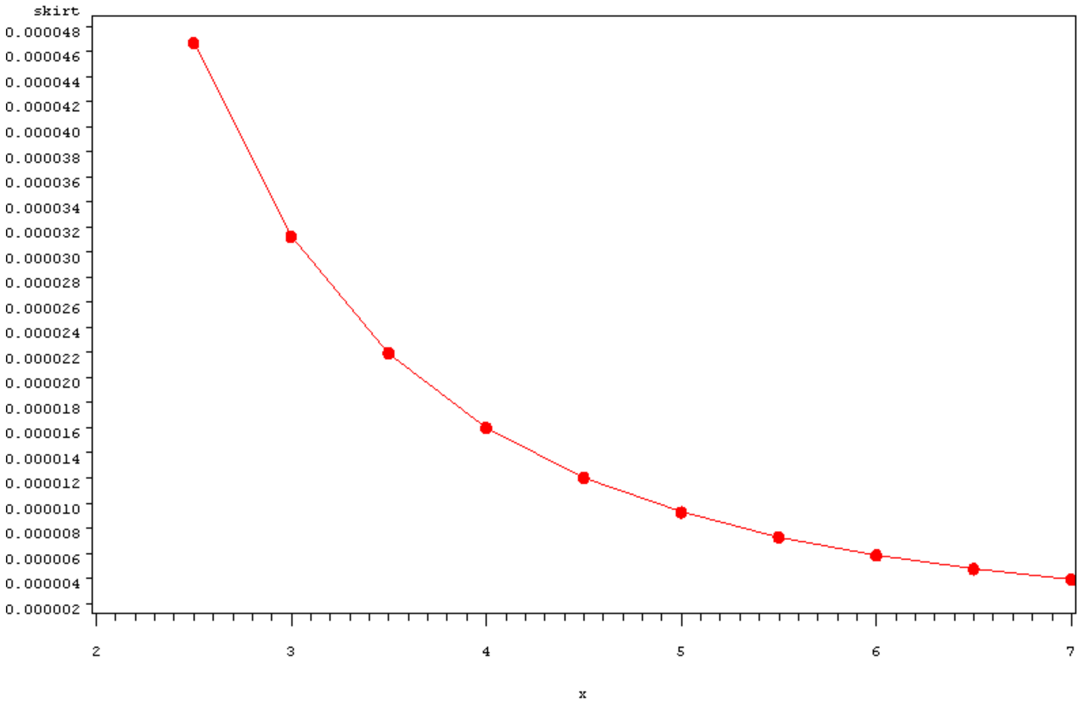
$$\lim_{n\to\infty} p_{Z_{N_n}}(x) = \frac{G'(x)}{G(x)}\int_0^\infty zG^z(x)dA(z) = \frac{\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}}{e^{-\frac{1}{x}}}\int_0^\infty ze^{-z\frac{1}{x}} d(1 - e^{-z}) = \frac{1}{x^2}\int_0^\infty ze^{-z(\frac{1}{x}+1)} dz =$$

$$= -z\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x}+1} e^{-z(\frac{1}{x}+1)}\Big|_0^\infty + \frac{1}{x^2}\int_0^\infty \frac{1}{\frac{1}{x}+1} e^{-z(\frac{1}{x}+1)} dz = \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{x}+1\right)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}, x > 0,$$

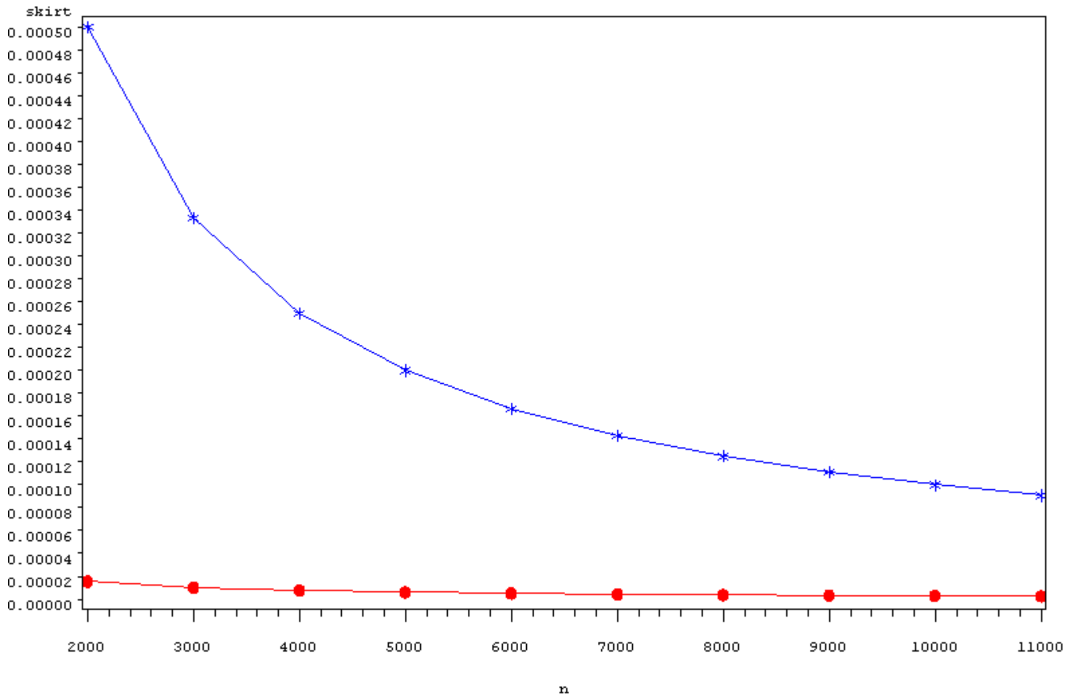
t.y.

$$\lim_{n\to\infty} p_{Z_{N_n}}(x) = \Psi'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}, x > 0. \qquad \textbf{(2.41)}$$

Skirtumą tarp maksimumo tankio ir ribinio skirstinio tankio, tirsime atlikdami kompiuterinius skaičiavimus. Kadangi minėtas skirtumas priklauso nuo x ir n, tai atlikdami skaičiavimus nagrinėsime, kap šį skirtumą įtakoja x ir n. Pateikiame keletą paveikslų, kuriuose atsispindi maksimumo tankio $p_{Z_{N_n}}(x)$ konvergavimo į ribinį skirstinį $\Psi'(x)$ priklausomybė nuo minėtų parametrų.



2.23 pav. Maksimumo tankio paklaidos grafikas, kai x kinta , n=1000



2.24 pav. Maksimumo tankio paklaidos grafikas, kai n kinta , x=3

Iš paveikslų matome, kad maksimumo tankio $p_{Z_{N_n}}(x)$ konvergavimo į ribinio skirstinio tankį $\Psi'(x)$ greitis gerėja, kai x didėja.

Kiti paklaidos tyrimo rezultatai pateikti prieduose (žr. 73 – 74 psl.).

2 pavyzdys

Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ turi skirstinio funkciją

$$F(x) = 1 - \frac{1}{\ln x}, \qquad x \ge e,$$

ir tankį

$$p(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^2}.$$

Imkime netiesinę normavimo funkciją $\beta_n(x) = e^{\left(1+\frac{x}{n}\right)}$. Tuomet

$$P(W_n < \beta_n(x)) = 1 - (1 - F(\beta_n(x)))^n = 1 - \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\ln \beta_n(x)}\right)\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{\ln e^{\left(1+\frac{x}{n}\right)}}\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{1+\frac{x}{n}}\right)^n.$$

Iš čia gauname

$$\lim_{n\to\infty} P\left(W_n < e^{\left(1+\frac{x}{n}\right)}\right) = T(x) = 1 - e^{-x},$$

ir

$$\lim_{n\to+\infty} p_{W_n}(x) = T'(x) = e^{-x}, x > 0.$$

Kai $\{N_n, n \ge 1\}$ - sveikaskaitiniai teigiami a.d., turintys geometrinį skirstinį su parametru $p_n = \frac{1}{n}$, gauname

$$P\left(W_{N_n} < e^{1+\frac{x}{n}}\right) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j\ge1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^j - \sum_{j\ge1}(1-F(\beta_n(x)))^j\left(1-\frac{1}{n}\right)^j\right) =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j\ge1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^j - \sum_{j\ge1}\left(\frac{1}{1+\frac{x}{n}}\right)^j\left(1-\frac{1}{n}\right)^j\right) = 1 - \frac{1}{x+1}, x > 0. \tag{2.42}$$

Tuomet

$$p_{W_{N_n}}(x)=\sum_{j\geq 1} j\beta_n^{'}(x)(1-F(\beta_n^{'}(x)))^{j-1}\,p(\beta_n(x))\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{j-1}=$$
$$=\frac{1}{e^{1+\frac{x}{n}}}\frac{n^2}{(n+x)^2}\frac{1}{n}e^{1+\frac{x}{n}}\frac{1}{n}\sum_{j\geq 1} j\left(\frac{n}{n+x}\right)^{j-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{j-1}=\frac{1}{(x+1)^2}. \qquad \textbf{(2.43)}$$

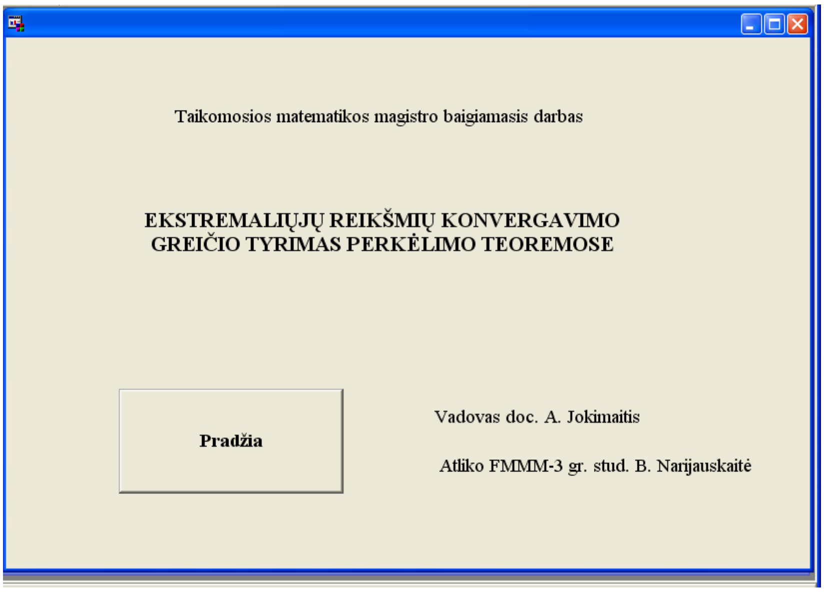
Iš (2.42) ir (2.43) lygybės matome, kad skirstinys yra geometriškai mini-stabilus. Taigi šiuo atveju konvergavimo greičio problema yra neaktuali, nes minimumo skirstinio tankis yra lygus ribinio skirstinio tankiui.

2.14 PROGRAMINĖ REALIZACIJA IR INSTRUKCIJA VARTOTOJUI

Programa parašyta The SAS System for Windows V8. Ši sistema buvo pasirinkta todėl, kad ji yra patogi uždavinių sprendimui ir sąsajos su vartotoju kūrimui.

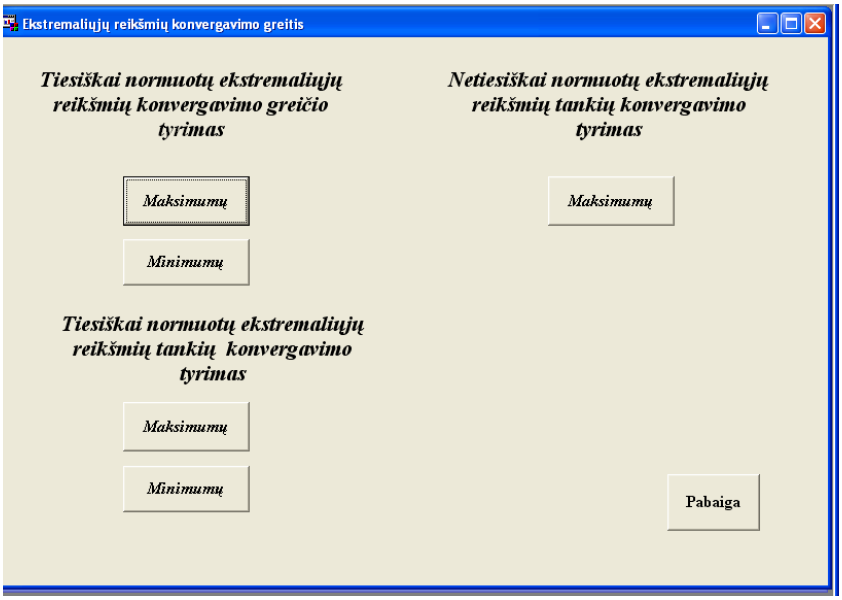
Visi reikalingi failai saugomi struktūroje SAS sisteminiame kataloge ”meniu“. Pagrindinis reikalavimas šiai programai yra tas, kad ji turi būti saugoma kompiuterio D diske.

Programos pradžia – failas „Titulas.frame“.



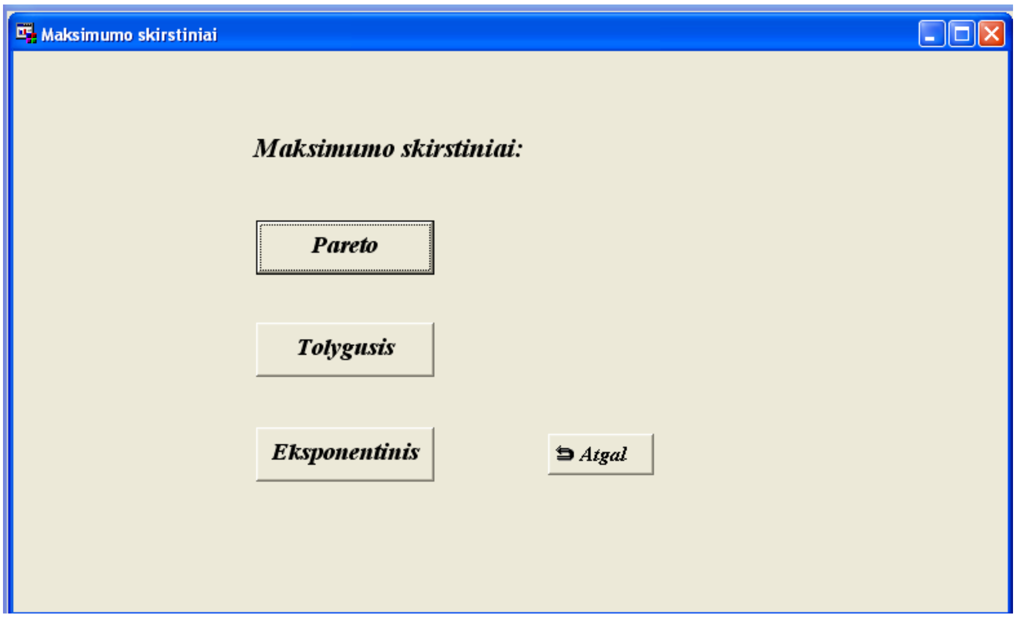
2.25 pav. Pagrindinis programos langas

Atsidarius šį langą spaudžiame mygtuką „Pradžia“. Atsiveriamas langas su galimais uždavinių variantais (2.26 paveikslas).



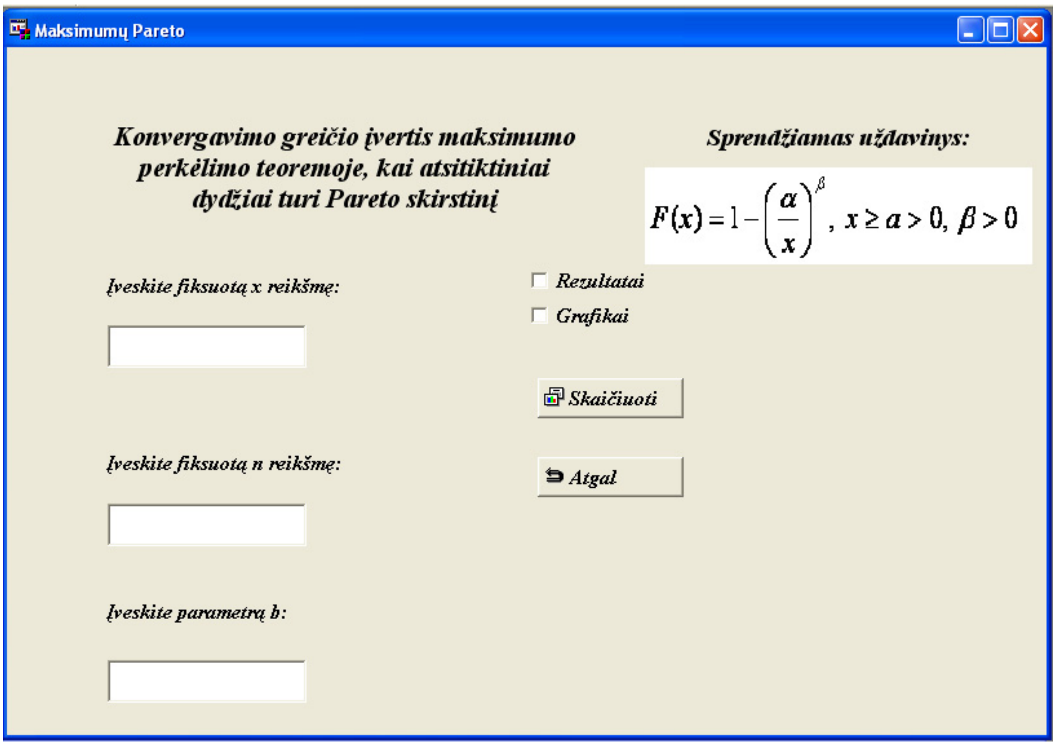
2.26 pav. Uždavinių meniu langas

Galima pasirinkti tiesiškai normuotų ekstremaliųjų reikšmių arba tiesiškai ir netiesiškai normuotų ekstremaliųjų reikšmių tankių konvergavimo greičio tyrimą. Pasirenkamas minimumo arba maksimumo atvejis. Jei pasirenkamos maksimumo tiesiškai normuotos reikšmės, tai atidaromas langas su galimais uždaviniais (2.27 paveikslas).



2.27 pav. Uždavinių meniu langas maksimumo atveju

Pasirinkus bet kurį iš trijų uždavinių, pasirodo jį atitinkamas meniu. Pirmojo uždavinio meniu yra toks, kaip parodyta 2.38 paveiksle, kiti meniu analogiški, priklausomai nuo skirstinio parametrų.



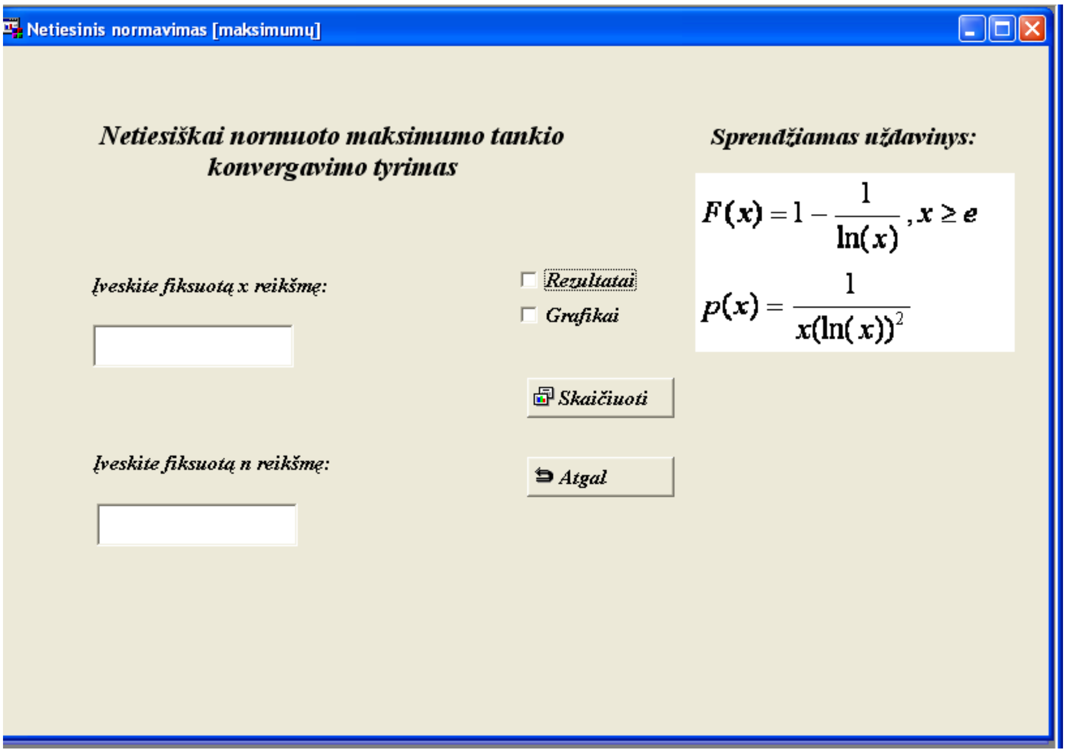
2.28 pav. Pareto skirstinio meniu langas maksimumo atveju.

- Visiems duomenims bendri reikalavimai – visi duomenų įvedimo laukeliai turi būti užpildyti, bei pasirinktas skaičiavimo būdas: „Rezultatai“ ar/ir „Grafikai“. Įvedamos reikšmės priklauso nuo nagrinėjamo skirstinio. Visų uždavinių atveju fiksuota n reikšmė turi būti didesnė už 0.
- Kai duomenys įvesti, pelės spragtelėjimu ant “Skaičiuoti” mygtuko aktyvuojame skaičiavimo procesą tam tikram uždaviniui. Jei duomenų laukai neužpildyti, pasirodo pranešimų langas (žr. 2.29 pav.). Taip pat jei įvesti duomenys netenkina uždavinio sąlygų ar įvedami ne skaičiai, taip pat pasirodo atitinkami pranešimai. Jei duomenys įvesti teisingai, įvykdoma programa.

2.29 pav. Pranešimas apie neteisingą duomenų įvedimą

Jei pasirinkote tiesiškai tiesiškai normuotų ekstremaliųjų reikšmių tankių konvergavimo greičio tyrimą, tai atveriami analogiški langai, kur pirmiausia reikia pasirinkti skirstinį, o po to užpildyti pradinių reikšmių laukus.

Pasirinkus netiesinį maksimumo tankio normavimą, atveriamas langas:



2.30 pav. Maksimumo tankio netiesinio normavimo meniu langas

Jame analogiškai, kaip ir prieš tai minėtiems ekstremumų skirstiniams, reikia įvesti fiksuotas x ir n reikšmes, bei pasirinkti skaičiavimo būdą.

Skaičiavimo rezultatų sąrašas – rezultatų lentelės ir grafikai pateikiami SAS Results lange, o jie patys atveriami Output ir Graph languose.

IŠVADOS

- Pareto skirstinio atveju, kai n yra fiksuotas, paklaida maksimumo perkėlimo teoremoje mažėja, kai x didėja. Paklaida mažėja, kai Pareto skirstinio parametras β didėja; o parametro α reikšmė neturi įtakos.

  Pareto skirstinio atveju, paklaidos maksimumo perkėlimo teoremoje eilė n atžvilgiu lygi $\frac{1}{n}$.

- Logistinio skirstinio atveju, esant fiksuotam n, paklaida maksimumo tankio perkėlimo teoremoje mažėja, kai x didėja.

- Tolygiojo skirstinio atveju, kai n fiksuotas, paklaida maksimumo perkėlimo teoremoje mažėja , kai x didėja, o paklaida minimumo perkėlimo teoremoje didėja, kai x didėja.

  Tolygiojo skirstinio atveju paklaidos eilė n atžvilgiu ir maksimumo ir minimumo perkėlimo teoremoje lygi $\frac{1}{n}$.

  Tolygiojo skirstinio atveju, kai n fiksuotas, paklaida maksimumo tankio perkėlimo teoremoje mažėja, kai x mažėja, paklaida minimumo tankio perkėlimo teoremoje didėja, kai x mažėja.

- Eksponentinio skirstinio atveju, kai n fiksuotas, paklaida maksimumo perkėlimo teoremoje mažėja , kai x didėja, o paklaida minimumo perkėlimo teoremoje didėja, kai x didėja.

  Eksponentinio skirstinio atveju paklaidos eilė n atžvilgiu ir maksimumo perkėlimo teoremoje, ir minimumo perkėlimo teoremoje lygi $\frac{1}{n}$.

  Eksponentinio skirstinio atveju, kai n fiksuotas, paklaida maksimumo tankio teoremoje mažėja, kai x didėja, o paklaida minimumo tankio perkėlimo teoremoje didėja, kai x mažėja.

- Kai kurie skirstiniai yra geometriškai stabilūs. Logistinis skirstinys yra geometriškai mini-stabilus.

  Netiesiškai normuotų a.d., turinčių skirstinio funkciją $F(x) = 1 - \frac{1}{\ln x}$ minimumas yra geometriškai stabilus.

- Nagrinėtų skirstinių atveju, galime daryti prielaidą, kad ekstremaliųjų reikšmių tankių perkėlimo teoremose paklaidos eilė n atžvilgiu lygi $\frac{1}{n}$.

LITERATŪRA

1. Аксомайтис А. О сходимости распределений экстремальных независимых случайных величин // Lietuvos matematikos rinkinys, 1990, 30 (2), p. 219-231.
2. Галамбош Я. Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. – М.:Наука, 1984. 349с.
3. Гнеденко Б.В., Гнеденко Д.Б. О распределених Лапласа и логистическом как предельных в теории вероятностей // Сердика, 1982, 8, с. 229-234.
4. S.I. Resnick. Extreme Values, Regular variation, and Point Processes. New York: Springer.
5. A. Jokimaitis, Atsitiktinių dydžių maksimumo tankio perkėlimo teorema// Matematika ir matematikos modeliavimas. Konferencijos pranešimų medžiaga, Technologija, Kaunas, 1999, p. 49-52.
6. Elliott, Rebecca J. Learning SAS in the Computer Lab – University of Utah.1995. –175p.
7. SAS Online Documentation - http://v9doc.sas.com/sasdoc/

1 PRIEDAS

1.1 lentelė

Maksimumo paklaidos ir paklaidos įverčio rezultatai, kai atsitiktinis dydis turi Pareto skirstinį ir x kinta , b=1 ir n = 1000

Obs	x	n	skir	delta
1	1.0	1000	.000250125	.001930382
2	1.5	1000	.000160064	.001498993
3	2.0	1000	.000111148	.001224099
4	2.5	1000	.000081656	.001033907
5	3.0	1000	.000062516	.000894622
6	3.5	1000	.000049394	.000788276
7	4.0	1000	.000040008	.000704450
8	4.5	1000	.000033064	.000636692
9	5.0	1000	.000027782	.000580795
10	5.5	1000	.000023672	.000533901
11	6.0	1000	.000020411	.000494001
12	6.5	1000	.000017780	.000459640
13	7.0	1000	.000015627	.000429742
14	7.5	1000	.000013842	.000403490
15	8.0	1000	.000012347	.000380258
16	8.5	1000	.000011081	.000359552
17	9.0	1000	.000010001	.000340983
18	9.5	1000	.000009071	.000324236
19	10.0	1000	.000008265	.000309056
20	10.5	1000	.000007562	.000295232

1.2 lentelė

Maksimumo paklaidos ir paklaidos įverčio rezultatai, kai atsitiktinis dydis turi Pareto skirstinį ir n kinta , b=1 ir x=5

Obs	x	n	skir	delta
1	5	50	.000557414	0.011617
2	5	100	.000278242	0.005808
3	5	150	.000185391	0.003872
4	5	200	.000139005	0.002904
5	5	250	.000111185	0.002323
6	5	300	.000092644	0.001936
7	5	350	.000079403	0.001659
8	5	400	.000069473	0.001452
9	5	450	.000061751	0.001291
10	5	500	.000055574	0.001162
11	5	550	.000050520	0.001056
12	5	600	.000046309	0.000968
13	5	650	.000042746	0.000894
14	5	700	.000039692	0.000830
15	5	750	.000037045	0.000774
16	5	800	.000034729	0.000726
17	5	850	.000032686	0.000683
18	5	900	.000030870	0.000645
19	5	950	.000029245	0.000611
20	5	1000	.000027782	0.000581

1.3 lentelė

Maksimumo paklaidos ir paklaidos įverčio rezultatai, kai atsitiktinis dydis turi tolygųjį skirstinį ir x kinta , n = 1000

Obs	x	n	skir	delta
1	-11	1000	.000841049	0.004274
2	-12	1000	.000852858	0.004378
3	-13	1000	.000863046	0.004486
4	-14	1000	.000871925	0.004601
5	-15	1000	.000879731	0.004724
6	-16	1000	.000886648	0.004857
7	-17	1000	.000892819	0.005002
8	-18	1000	.000898358	0.005161
9	-19	1000	.000903358	0.005336

10	-20	1000	.000907894	0.005532
11	-21	1000	.000912028	0.005750
12	-22	1000	.000915810	0.005995
13	-23	1000	.000919284	0.006273
14	-24	1000	.000922486	0.006591
15	-25	1000	.000925446	0.006956
16	-26	1000	.000928191	0.007381
17	-27	1000	.000930744	0.007881
18	-28	1000	.000933124	0.008477
19	-29	1000	.000935349	0.009197
20	-30	1000	.000937432	0.010086

1.4 lentelė

Maksimumo paklaidos ir paklaidos įverčio rezultatai, kai atsitiktinis dydis turi tolygųjį skirstinį ir n kinta , x= -15

Obs	x	n	skir	delta
1	-15	200	.004415228	0.075225
2	-15	250	.003528858	0.038248
3	-15	300	.002938871	0.025781
4	-15	350	.002517905	0.019487
5	-15	400	.002202428	0.015681
6	-15	450	.001957203	0.013126
7	-15	500	.001761115	0.011291
8	-15	550	.001600740	0.009909
9	-15	600	.001467136	0.008829
10	-15	650	.001354117	0.007963
11	-15	700	.001257264	0.007251
12	-15	750	.001173342	0.006657
13	-15	800	.001099922	0.006153
14	-15	850	.001035149	0.005720
15	-15	900	.000977581	0.005345
16	-15	950	.000926078	0.005015
17	-15	1000	.000879731	0.004724
18	-15	1050	.000837802	0.004465
19	-15	1100	.000799687	0.004233
20	-15	1150	.000764890	0.004024
21	-15	1200	.000732995	0.003834
22	-15	1250	.000703653	0.003662
23	-15	1300	.000676570	0.003505
24	-15	1350	.000651494	0.003360
25	-15	1400	.000628211	0.003227
26	-15	1450	.000606534	0.003104
27	-15	1500	.000586304	0.002990

1.5 lentelė

Maksimumo paklaidos ir paklaidos įverčio rezultatai, kai atsitiktinis dydis turi eksponentinį skirstinį ir x kinta , n = 1000

Obs	x	n	skir	delta
1	0.5	1000	.000142591	.001405257
2	1.0	1000	.000072349	.000968135
3	1.5	1000	.000033285	.000638944
4	2.0	1000	.000014211	.000409035
5	2.5	1000	.000005755	.000256605
6	3.0	1000	.000002249	.000158912
7	3.5	1000	.000000859	.000097621
8	4.0	1000	.000000324	.000059672
9	4.5	1000	.000000121	.000036364
10	5.0	1000	.000000045	.000022120
11	5.5	1000	.000000017	.000013440
12	6.0	1000	.000000006	.000008160
13	6.5	1000	.000000002	.000004953
14	7.0	1000	8.3007E-10	.000003005
15	7.5	1000	3.0561E-10	.000001823
16	8.0	1000	1.1246E-10	.000001106
17	8.5	1000	4.1415E-11	.000000671
18	9.0	1000	1.5183E-11	.000000407
19	9.5	1000	5.5607E-12	.000000247
20	10.0	1000	2.115E-12	.000000150

1.6 lentelė

Maksimumo paklaidos ir paklaidos įverčio rezultatai, kai atsitiktinis dydis turi eksponentinį skirstinį ir n kinta , x = 10

Obs	x	n	skir	delta
1	10	600	3.4446E-12	.000000249
2	10	1100	1.7942E-12	.000000136
3	10	1600	1.1867E-12	.000000094
4	10	2100	9.911E-13	.000000071
5	10	2600	9.3547E-13	.000000058
6	10	3100	8.6331E-13	.000000048
7	10	3600	7.8193E-13	.000000042
8	10	4100	5.6777E-13	.000000037
9	10	4600	5.2425E-13	.000000033
10	10	5100	3.4717E-13	.000000029
11	10	5600	5.3313E-13	.000000027
12	10	6100	3.3618E-13	.000000025
13	10	6600	1.1324E-14	.000000023
14	10	7100	1.7764E-13	.000000021
15	10	7600	1.2512E-13	.000000020
16	10	8100	7.6361E-13	.000000018
17	10	8600	2.4936E-13	.000000017
18	10	9100	1.091E-12	.000000016
19	10	9600	8.239E-13	.000000016
20	10	10100	3.0254E-13	.000000015

1.7 lentelė

Minimumo paklaidos ir paklaidos įverčio rezultatai, kai atsitiktinis dydis turi tolygųjį skirstinį ir x kinta , n = 1000

Obs	x	n	skir	delta
1	11	1000	.000841049	0.00427
2	12	1000	.000852858	0.00438
3	13	1000	.000863046	0.00449
4	14	1000	.000871925	0.00460
5	15	1000	.000879731	0.00472
6	16	1000	.000886648	0.00486
7	17	1000	.000892819	0.00500
8	18	1000	.000898358	0.00516
9	19	1000	.000903358	0.00534
10	20	1000	.000907894	0.00553
11	21	1000	.000912028	0.00575
12	22	1000	.000915810	0.00600
13	23	1000	.000919284	0.00627
14	24	1000	.000922486	0.00659
15	25	1000	.000925446	0.00696
16	26	1000	.000928191	0.00738
17	27	1000	.000930744	0.00788
18	28	1000	.000933124	0.00848
19	29	1000	.000935349	0.00920
20	30	1000	.000937432	0.01009
21	31	1000	.000939387	0.01121
22	32	1000	.000941225	0.01267
23	33	1000	.000942957	0.01464
24	34	1000	.000944591	0.01745
25	35	1000	.000946136	0.02178
26	36	1000	.000947598	0.02928
27	37	1000	.000948985	0.04548
28	38	1000	.000950301	0.10609

1.8 lentelė

Minimumo paklaidos ir paklaidos įverčio rezultatai, kai atsitiktinis dydis turi tolygųjį skirstinį ir n kinta , x = 15

Obs	x	n	skir	delta
1	15	200	.004415228	0.075225
2	15	250	.003528858	0.038248
3	15	300	.002938871	0.025781
4	15	350	.002517905	0.019487

5	15	400	.002202428	0.015681
6	15	450	.001957203	0.013126
7	15	500	.001761115	0.011291
8	15	550	.001600740	0.009909
9	15	600	.001467136	0.008829
10	15	650	.001354117	0.007963
11	15	700	.001257264	0.007251
12	15	750	.001173342	0.006657
13	15	800	.001099922	0.006153
14	15	850	.001035149	0.005720
15	15	900	.000977581	0.005345
16	15	950	.000926078	0.005015
17	15	1000	.000879731	0.004724
18	15	1050	.000837802	0.004465

1.9 lentelė

Minimumo paklaidos ir paklaidos įverčio rezultatai, kai atsitiktinis dydis turi eksponentinį skirstinį ir x kinta , n = 1000

Obs	x	n	skir	delta
1	2	1000	.000222222	.001465530
2	3	1000	.000281215	.001545676
3	4	1000	.000319915	.001582772
4	5	1000	.000347077	.001602923
5	6	1000	.000367137	.001615074
6	7	1000	.000382533	.001622960
7	8	1000	.000394710	.001628367
8	9	1000	.000404574	.001632234
9	10	1000	.000412722	.001635095
10	11	1000	.000419561	.001637272
11	12	1000	.000425379	.001638966
12	13	1000	.000430388	.001640309
13	14	1000	.000434742	.001641394
14	15	1000	.000438560	.001642281
15	16	1000	.000441933	.001643016
16	17	1000	.000444934	.001643633
17	18	1000	.000447619	.001644154
18	19	1000	.000450034	.001644599
19	20	1000	.000452218	.001644983
20	21	1000	.000454200	.001645315

1.10 lentelė

Minimumo paklaidos ir paklaidos įverčio rezultatai, kai atsitiktinis dydis turi eksponentinį skirstinį ir n kinta , x = 15

Obs	x	n	skir	delta
1	15	600	.000729938	.002737135
2	15	1100	.000398764	.001492983
3	15	1600	.000274309	.001026426
4	15	2100	.000209061	.000782039
5	15	2600	.000168888	.000631647
6	15	3100	.000141666	.000529768
7	15	3600	.000122001	.000456189
8	15	4100	.000107131	.000400556
9	15	4600	.000095491	.000357018
10	15	5100	.000086133	.000322016
11	15	5600	.000078445	.000293264
12	15	6100	.000072018	.000269226
13	15	6600	.000066563	.000248830
14	15	7100	.000061877	.000231307
15	15	7600	.000057807	.000216090
16	15	8100	.000054240	.000202751
17	15	8600	.000051087	.000190963
18	15	9100	.000048281	.000180470
19	15	9600	.000045767	.000171071
20	15	10100	.000043501	.000162602

2 PRIEDAS

2.1 lentelė

Maksimumo tankio paklaidos rezultatai, kai atsitiktiniai dydžiai turi logistinį skirstinį ir x kinta , n=1000

Obs	x	n	P	Aps	skirt
1	1.0	1000	0.19661	0.19668	.000072329
2	1.5	1000	0.14915	0.14918	.000033279
3	2.0	1000	0.10499	0.10501	.000014209
4	2.5	1000	0.07010	0.07011	.000005754
5	3.0	1000	0.04518	0.04518	.000002249
6	3.5	1000	0.02845	0.02845	.000000859
7	4.0	1000	0.01766	0.01766	.000000324
8	4.5	1000	0.01087	0.01087	.000000121
9	5.0	1000	0.00665	0.00665	.000000045
10	5.5	1000	0.00405	0.00405	.000000017

2.2 lentelė

Maksimumo tankio paklaidos rezultatai, kai atsitiktiniai dydžiai turi logistinį skirstinį ir n kinta , n=3

Obs	x	n	P	Aps	skirt
1	3	600	0.045177	0.045180	.000003749
2	3	700	0.045177	0.045180	.000003213
3	3	800	0.045177	0.045179	.000002812
4	3	900	0.045177	0.045179	.000002499
5	3	1000	0.045177	0.045179	.000002249
6	3	1100	0.045177	0.045179	.000002045
7	3	1200	0.045177	0.045179	.000001874
8	3	1300	0.045177	0.045178	.000001730
9	3	1400	0.045177	0.045178	.000001607
10	3	1500	0.045177	0.045178	.000001499

2.3 lentelė

Maksimumo tankio paklaidos rezultatai, kai atsitiktiniai dydžiai turi tolygųjį skirstinį ir x kinta , n=1000

Obs	x	n	P	Aps	skirt
1	-1.0	1000	0.25000	0.25025	.000250188
2	-1.5	1000	0.16000	0.16019	.000192173
3	-2.0	1000	0.11111	0.11126	.000148296
4	-2.5	1000	0.08163	0.08175	.000116743
5	-3.0	1000	0.06250	0.06259	.000093856
6	-3.5	1000	0.04938	0.04946	.000076907
7	-4.0	1000	0.04000	0.04006	.000064077
8	-4.5	1000	0.03306	0.03311	.000054161
9	-5.0	1000	0.02778	0.02782	.000046354
10	-5.5	1000	0.02367	0.02371	.000040106

2.4 lentelė

Maksimumo tankio paklaidos rezultatai, kai atsitiktiniai dydžiai turi tolygųjį skirstinį ir n kinta , n=-5

Obs	x	n	P	Aps	skirt
1	-5	200	0.027778	0.028011	.000232936
2	-5	300	0.027778	0.027933	.000154966
3	-5	400	0.027778	0.027894	.000116103
4	-5	500	0.027778	0.027871	.000092825
5	-5	600	0.027778	0.027855	.000077322

6	-5	700	0.027778	0.027844	.000066256
7	-5	800	0.027778	0.027836	.000057961
8	-5	900	0.027778	0.027829	.000051512
9	-5	1000	0.027778	0.027824	.000046354
10	-5	1100	0.027778	0.027820	.000042135

2.5 lentelė

Maksimumo tankio paklaidos rezultatai, kai atsitiktiniai dydžiai turi eksponentinį skirstinį ir x kinta , n=1000

Obs	x	n	P	Aps	skirt
1	1.0	1000	0.19661	0.19672	.000105797
2	1.5	1000	0.14915	0.14920	.000054431
3	2.0	1000	0.10499	0.10502	.000025036
4	2.5	1000	0.07010	0.07011	.000010637
5	3.0	1000	0.04518	0.04518	.000004285
6	3.5	1000	0.02845	0.02845	.000001668
7	4.0	1000	0.01766	0.01766	.000000635
8	4.5	1000	0.01087	0.01087	.000000239
9	5.0	1000	0.00665	0.00665	.000000089
10	5.5	1000	0.00405	0.00405	.000000033

2.6 lentelė

Maksimumo tankio paklaidos rezultatai, kai atsitiktiniai dydžiai turi eksponentinį skirstinį ir n kinta , x=1

Obs	x	n	P	Aps	skirt
1	1	600	0.19661	0.19679	.000176376
2	1	700	0.19661	0.19676	.000151165
3	1	800	0.19661	0.19674	.000132259
4	1	900	0.19661	0.19673	.000117557
5	1	1000	0.19661	0.19672	.000105797
6	1	1100	0.19661	0.19671	.000096175
7	1	1200	0.19661	0.19670	.000088158
8	1	1300	0.19661	0.19669	.000081375
9	1	1400	0.19661	0.19669	.000075560
10	1	1500	0.19661	0.19668	.000070522

2.7 lentelė

Minimumo tankio paklaidos rezultatai, kai atsitiktiniai dydžiai turi tolygųjį skirstinį ir x kinta , n=1000

Obs	x	n	P	Aps	skirt
1	1.0	1000	0.25000	0.25025	.000250188
2	1.5	1000	0.16000	0.16019	.000192173
3	2.0	1000	0.11111	0.11126	.000148296
4	2.5	1000	0.08163	0.08175	.000116743
5	3.0	1000	0.06250	0.06259	.000093856
6	3.5	1000	0.04938	0.04946	.000076907
7	4.0	1000	0.04000	0.04006	.000064077
8	4.5	1000	0.03306	0.03311	.000054161
9	5.0	1000	0.02778	0.02782	.000046354
10	5.5	1000	0.02367	0.02371	.000040106

2.8 lentelė

Minimumo tankio paklaidos rezultatai, kai atsitiktiniai dydžiai turi tolygųjį skirstinį ir n kinta , x=3

Obs	x	n	P	Aps	skirt
1	3	200	0.0625	0.062971	.000471400
2	3	300	0.0625	0.062814	.000313676

3	3	400	0.0625	0.062735	.000235036
4	3	500	0.0625	0.062688	.000187923
5	3	600	0.0625	0.062657	.000156543
6	3	700	0.0625	0.062634	.000134144
7	3	800	0.0625	0.062617	.000117353
8	3	900	0.0625	0.062604	.000104297
9	3	1000	0.0625	0.062594	.000093856
10	3	1100	0.0625	0.062585	.000085315

2.9 lentelė

Minimumo tankio paklaidos rezultatai, kai atsitiktiniai dydžiai turi eksponentinį skirstinį ir x kinta , n=1000

Obs	x	n	P	Aps	skirt
1	1.0	1000	0.25000	0.25013	.000125005
2	1.5	1000	0.16000	0.16010	.000095989
3	2.0	1000	0.11111	0.11119	.000074049
4	2.5	1000	0.08163	0.08169	.000058273
5	3.0	1000	0.06250	0.06255	.000046831
6	3.5	1000	0.04938	0.04942	.000038358
7	4.0	1000	0.04000	0.04003	.000031944
8	4.5	1000	0.03306	0.03308	.000026988
9	5.0	1000	0.02778	0.02780	.000023085
10	5.5	1000	0.02367	0.02369	.000019962

2.10 lentelė

Minimumo tankio paklaidos rezultatai, kai atsitiktiniai dydžiai turi eksponentinį skirstinį ir n kinta , x=3

Obs	x	n	P	Aps	skirt
1	3	600	0.0625	0.062578	.000078003
2	3	700	0.0625	0.062567	.000066874
3	3	800	0.0625	0.062559	.000058525
4	3	900	0.0625	0.062552	.000052029
5	3	1000	0.0625	0.062547	.000046831
6	3	1100	0.0625	0.062543	.000042577
7	3	1200	0.0625	0.062539	.000039032
8	3	1300	0.0625	0.062536	.000036032
9	3	1400	0.0625	0.062533	.000033460
10	3	1500	0.0625	0.062531	.000031230

2.11 lentelė

Maksimumo tankio paklaidos rezultatai, kai x kinta , n=1000

Obs	x	n	P	Aps	skirt
1	1.0	1000	0.25000	0.25025	.000250188
2	1.5	1000	0.16000	0.16013	.000128077
3	2.0	1000	0.11111	0.11119	.000074111
4	2.5	1000	0.08163	0.08168	.000046667
5	3.0	1000	0.06250	0.06253	.000031262
6	3.5	1000	0.04938	0.04940	.000021955
7	4.0	1000	0.04000	0.04002	.000016005
8	4.5	1000	0.03306	0.03307	.000012024
9	5.0	1000	0.02778	0.02779	.000009262
10	5.5	1000	0.02367	0.02368	.000007284

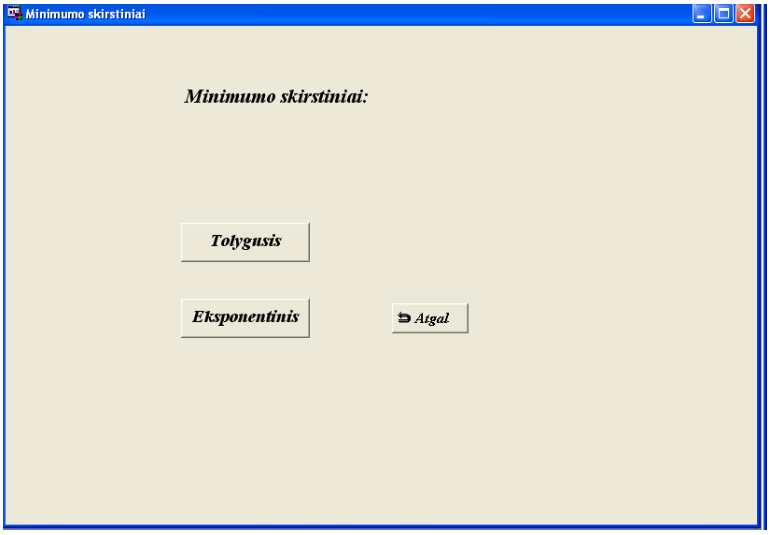
2.12 lentelė

Maksimumo tankio paklaidos rezultatai, kai n kinta , x=3

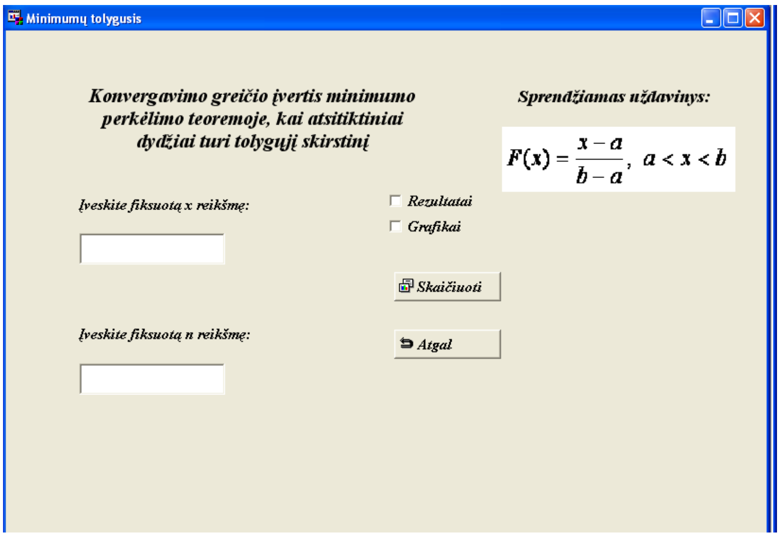
Obs	n	x	P	Aps	skirt
1	2000	3	0.0625	0.062516	.000015628
2	3000	3	0.0625	0.062510	.000010418
3	4000	3	0.0625	0.062508	.000007813
4	5000	3	0.0625	0.062506	.000006250
5	6000	3	0.0625	0.062505	.000005209
6	7000	3	0.0625	0.062504	.000004465

7	8000	3	0.0625	0.062504	.000003906
8	9000	3	0.0625	0.062503	.000003472
9	10000	3	0.0625	0.062503	.000003125
10	11000	3	0.0625	0.062503	.000002841

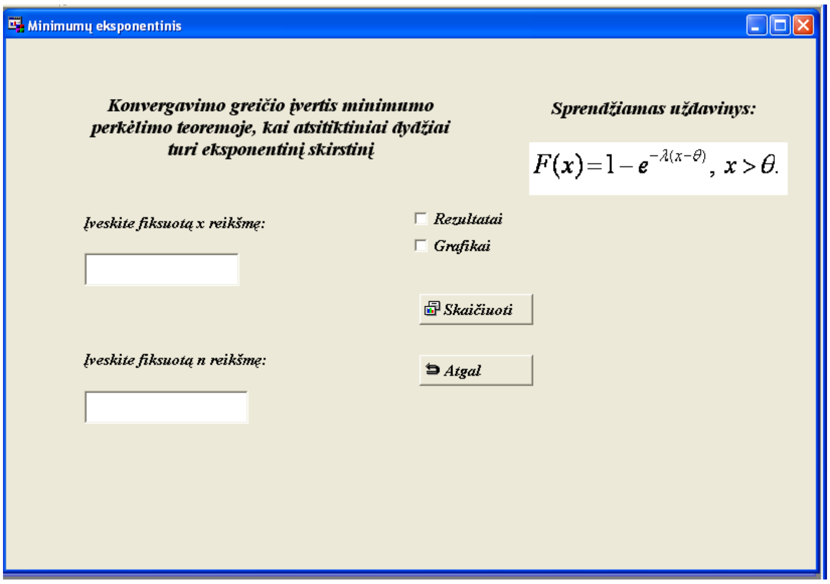
3 PRIEDAS



3.1 pav. Uždavinių meniu langas minimumo atveju

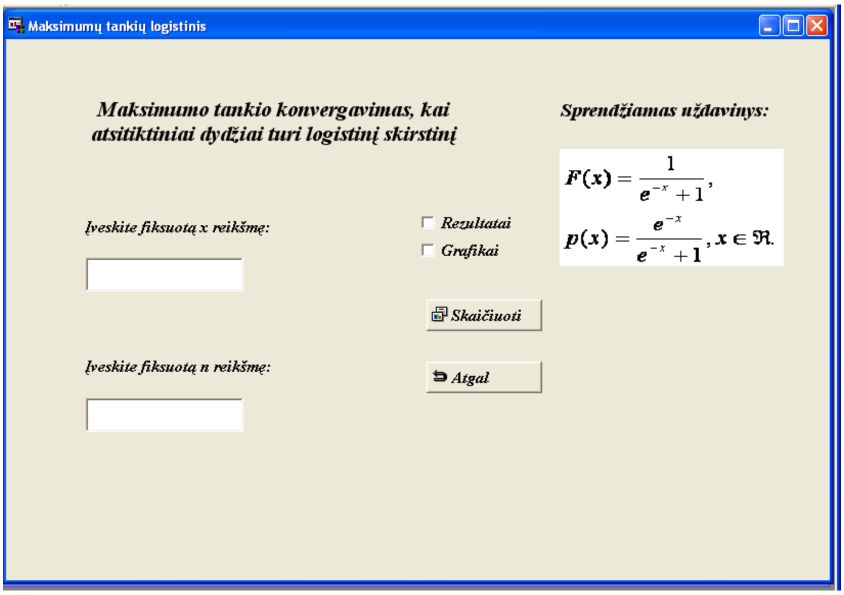


3.2 pav. Tolygiojo skirstinio meniu langas minimumo atveju



3.3 pav. Eksponentinio skirstinio meniu langas minimumo atveju

3.4 pav. Uždavinių meniu langas maksimumo tankių atveju



3.5 pav. Logistinio skirstinio meniu langas maksimumo tankių atveju

4 PRIEDAS

„Titulas.scl“ :

```
Init:
    submit continue;
    libname meniu 'd:\meniu';
  endsubmit;
return;
pushbutton1:
      call display('meniu.Meniu.Index.frame');
return;
```

„Index.scl“ :

```
Init:
  call symput('dmind', '1');
  submit continue;
  libname meniu 'd:\meniu';
  %let progkel=d:\meniu;
endsubmit;
return;

pushbutton1:
call display('meniu.Meniu.Duomenys.frame');
return ;

pushbutton2:
call display ('meniu.Meniu.Minsarasas.frame') ;
return;

pushbutton3:
call display ('meniu.Meniu.Tankminsar.frame') ;
return ;

pushbutton5:
call display ('meniu.Meniu.Tankmaxsar.frame') ;
return;

pushbutton6:
call display('meniu.Meniu.Netmax.frame');

return;

Pushbutton7:
call display('meniu.Meniu.Netmin.frame') ;
return ;
```

„Duomenys.scl“:

```
pushbutton1:
call display ('meniu.Meniu.Parmax.frame') ;
return ;
pushbutton2:
call display ('meniu.Meniu.Maxtolyg.frame') ;
return;

pushbutton3:
call display ('meniu.Meniu.Maxexp.frame');
return ;
```

„Parmax.scl“:

```
Pushbutton1:
call symput ('nr','0') ;
call symput ('nr1','0');
call symputn ('nnn',TextEntry2.text);
call symputn ('xx',TextEntry1.text);
call symputn ('beta',TextEntry3.text);
   if TextEntry1.text = ' ' and Textentry2.text = ' ' and TextEntry3.text = ' ' then
do ;
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Neįvestos visos reikšmės",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
```

```
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
    if TextEntry1.text = ' ' then
do;
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Neįvesta x reikšmė",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
  if textEntry1.text <= '0' then
do;
    textEntry1.text = ' ';
    commandlist = makelist();
    commandlist = insertc (commandlist,"x turi būti daugiau už 0",1);
    command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
    commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
   if symgetn ('xx') ='.' then
do;
   textEntry1.text = ' ';
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"x įvesta ne skaičius",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
   if textEntry2.text = ' ' then
do;
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Neįvesta n reikšmė",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
   if TextEntry2.text <='0' then
do;
   textEntry2.text = ' ';
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"n turi būti daugiau už 0",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
 else
   if symgetn ('nnn') = '.' then
do;
   textEntry2.text = ' ';
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"n įvesta ne skaičius",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
   if textEntry3.text = ' ' then
do;
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Neįvesta parametro b reikšmė",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
   if textEntry3.text <= '0' then
do;
   textEntry3.text = ' ';
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Parametras b turi būti > 0",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
  if symgetn ('beta') ='.' then
do;
   textEntry3.text = ' ';
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"b įvesta ne skaičius",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
```

```
else
do ;
   if Checkbox1.selected = 'Yes' and Checkbox2.selected = 'Yes' then
    do ;
    call symput ('nr','1') ;
    call symput ('nr1','1');
    submit continue ;
   /* PARETO SKIRSTINIO KONVERGAVIMO GREICIO MAKSIMUMO TYRIMAS, KAI x KINTA , n  PASTOVUS */
    data pareto_max ;
    k = 0.5 ;
    b = &beta ; /*SKIRSTINIO PARAMETRAS*/
    n = &nnn ;
    do i = 1 to 20;
       x = k + 0.5 ;
       k = x ;
       u = 1/(x**b);
       d1 =1/(n-1) ;
       d2 = 1-1/n ;
       d3 = 1-1/(n*(x**b)) ;
       P = d1 * ((d3*d2)/(1-d2*d3)) ;
       d4 = (x**(-b)) ;
       F = 1/( 1 + d4 ) ;
       mm = x**(-2*b) ;
       skir = abs ( P - F ) ;
       q = (2*mm)/(3*n);
       n1 = (((2*(x**(-2*b)))/n) + ((2*(x**(-4*b)))/(n*n))*(1/(1-q)))*log(4)/(1+d4);
       n2 = (((SQRT(exp(1)))*d4)/n)*(1+F) ;
       delta = F*(n1 +n2) ;
       H =(exp(1))**(-d4) ;
       output ;
    end ;
    run ;
      data pareto1 ;
      set pareto_max ;
      if x>0 ;
      if b>0 ;
      if (u/n) < 1/2 ;
      if 0 < q <= 1 ;
      if n > 1 ;
      if 0< F < 1 ;
      if 0< P< 1 ;
      if 0< skir <1 ;
      if 0 < delta < 1 ;
      if skir <= delta ;
      if H > 0 ;
      label
         H = 'Ribinis skirstinys '
         skir =' Tiksli reiksme '
         delta = ' Ivertis '  ;
      run ;
      proc print data = pareto1 ;
      var  x n skir delta ;
      run ;
       symbol1 color = red value = dot height= 1 interpol = join ;
      symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
      axis1 label = ("skir,delta") ;
      axis2 label = ("x") ;
      proc gplot data = pareto1 ;
      plot skir *x
     delta * x/overlay
       vaxis = axis1
       haxis = axis2 ;
      run ;
      /* PARETO SKIRSTINIO KONVERGAVIMO GREICIO MAKSIMUMO TYRIMAS, KAI x PASTOVUS, n KINTA*/
      data pareto_max1 ;
      k = 0 ;
      b = &beta ;
      x = &xx ;
      do i = 1 to 20;
         n = k + 50 ;
         k = n ;
         u = 1/(x**b);
         d1 =1/(n-1) ;
         d2 = 1-1/n ;
         d3 = 1-1/(n*(x**b)) ;
         P = d1 * ((d3*d2)/(1-d2*d3)) ;
         d4 = (x**(-b)) ;
         F = 1/( 1 + d4 ) ;
         skir = abs ( P - F ) ;
         q = (2*(x**(-2*b)))/(3*n);
```

```
   n1 = ((2*(d4**2))/n + ((2*(d4**4))/(n*n))*(1/(1-q)))*log(4)/(1+d4);
   n2 = (((SQRT(exp(1)))*d4)/n)*(1+F) ;
   delta = F*(n1 +n2) ;
   H =(exp(1))**(-d4) ;
   output ;
   end ;
run ;
data pareto2 ;
set pareto_max1 ;
if x>0 ;
if b>0 ;
if (u/n) < 1/2 ;
if 0 < q <= 1 ;
if n > 1 ;
if 0< =F < 1 ;
if 0< =P< 1 ;
if 0< skir <1 ;
if 0 < delta < 1 ;
if skir <= delta ;
if H > 0 ;
label
   H = 'Ribinis skirstinys '
   skir =' Tiksli reiksme '
   delta = ' Ivertis '  ;
run ;
proc print data = pareto2 ;
var  x n skir delta ;
run ;
symbol1 color = red value = dot height= 1 interpol = join ;
symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
axis1 label = ("skir,delta") ;
axis2 label = ("n") ;
proc gplot data = pareto2 ;
plot skir *n
     delta * n/overlay
       vaxis = axis1
       haxis = axis2 ;
run ;
endsubmit ;
end ;
 else
   if Checkbox1.selected = 'Yes' then
   do;
   call symput ('nr','1') ;
   call symput ('nr1','1') ;
   submit continue ;
   /* PARETO SKIRSTINIO KONVERGAVIMO GREICIO MAKSIMUMO TYRIMAS, KAI x KINTA , n  PASTOVUS */
data pareto_max ;
k = 0.5 ;
b = &beta ; /*SKIRSTINIO PARAMETRAS*/
n = &nnn ;
do i = 1 to 20;
   x = k + 0.5 ;
   k = x ;
   u = 1/(x**b);
   d1 =1/(n-1) ;
   d2 = 1-1/n ;
   d3 = 1-1/(n*(x**b)) ;
   P = d1 * ((d3*d2)/(1-d2*d3)) ;
   d4 = (x**(-b)) ;
   F = 1/( 1 + d4 ) ;
   mm = x**(-2*b) ;
   skir = abs ( P - F ) ;
   q = (2*mm)/(3*n);
   n1 = (((2*(x**(-2*b)))/n) + ((2*(x**(-4*b)))/(n*n))*(1/(1-q)))*log(4)/(1+d4);
   n2 = (((SQRT(exp(1)))*d4)/n)*(1+F) ;
   delta = F*(n1 +n2) ;
   H =(exp(1))**(-d4) ;
   output ;
   end ;
run ;
data pareto1 ;
set pareto_max ;
if x>0 ;
if b>0 ;
if (u/n) < 1/2 ;
if 0 < q <= 1 ;
if n > 1 ;
if 0< F < 1 ;
if 0< P< 1 ;
```

```
      if 0< skir <1 ;
      if 0 < delta < 1 ;
      if skir <= delta ;
      if H > 0 ;
      label
         H = 'Ribinis skirstinys '
         skir =' Tiksli reiksme '
         delta = ' Ivertis '  ;
run ;
      proc print data = pareto1 ;
      var  x n skir delta ;
      run ;
      /* PARETO SKIRSTINIO KONVERGAVIMO GREICIO MAKSIMUMO TYRIMAS, KAI x PASTOVUS, n KINTA*/
      data pareto_max1 ;
      k = 0 ;
      b = &beta ;
      x = &xx ;
      do i = 1 to 20;
         n = k + 50 ;
         k = n ;
         u = 1/(x**b);
         d1 =1/(n-1) ;
         d2 = 1-1/n ;
         d3 = 1-1/(n*(x**b)) ;
         P = d1 * ((d3*d2)/(1-d2*d3)) ;
         d4 = (x**(-b)) ;
         F = 1/( 1 + d4 ) ;
         skir = abs ( P - F ) ;
         q = (2*(x**(-2*b)))/(3*n);
         n1 = ((2*(d4**2))/n + ((2*(d4**4))/(n*n))*(1/(1-q)))*log(4)/(1+d4);
         n2 = (((SQRT(exp(1)))*d4)/n)*(1+F) ;
         delta = F*(n1 +n2) ;
         H =(exp(1))**(-d4) ;
         output ;
         end ;
      run ;
      data pareto2 ;
      set pareto_max1 ;
      if x>0 ;
      if b>0 ;
      if (u/n) < 1/2 ;
      if 0 < q <= 1 ;
      if n > 1 ;
      if 0< =F < 1 ;
      if 0< =P< 1 ;
      if 0< skir <1 ;
      if 0 < delta < 1 ;
      if skir <= delta ;
      if H > 0 ;
      label
            H = 'Ribinis skirstinys '
          skir =' Tiksli reiksme '
            delta = ' Ivertis '  ;
      run ;
      proc print data = pareto2 ;
      var  x n skir delta ;
      run ;
         endsubmit ;
         end ;
         else
            if Checkbox2.selected = 'Yes' then
            do ;
            call symput ('nr','1') ;
            call symput ('nr1','1') ;
            submit continue ;
        /* PARETO SKIRSTINIO KONVERGAVIMO GREICIO MAKSIMUMO TYRIMAS, KAI x KINTA , n  PASTOVUS */
      data pareto_max ;
      k = 0.5 ;
      b = &beta ; /*SKIRSTINIO PARAMETRAS*/
      n = &nnn ;
      do i = 1 to 20;
         x = k + 0.5 ;
         k = x ;
         u = 1/(x**b);
         d1 =1/(n-1) ;
         d2 = 1-1/n ;
         d3 = 1-1/(n*(x**b)) ;
         P = d1 * ((d3*d2)/(1-d2*d3)) ;
         d4 = (x**(-b)) ;
         F = 1/( 1 + d4 ) ;
```

```
   mm = x**(-2*b) ;
   skir = abs ( P - F ) ;
   q = (2*mm)/(3*n);
   n1 = (((2*(x**(-2*b)))/n) + ((2*(x**(-4*b)))/(n*n))*(1/(1-q)))*log(4)/(1+d4);
   n2 = (((SQRT(exp(1)))*d4)/n)*(1+F) ;
   delta = F*(n1 +n2) ;
   H =(exp(1))**(-d4) ;
   output ;
   end ;
run ;
data pareto1 ;
set pareto_max ;
if x>0 ;
if b>0 ;
if (u/n) < 1/2 ;
if 0 < q <= 1 ;
if n > 1 ;
if 0< F < 1 ;
if 0< P< 1 ;
if 0< skir <1 ;
if 0 < delta < 1 ;
if skir <= delta ;
if H > 0 ;
label
   H = 'Ribinis skirstinys '
   skir =' Tiksli reiksme '
   delta = ' Ivertis '  ;
run ;
symbol1 color = red value = dot height= 1 interpol = join ;
symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
axis1 label = ("skir,delta") ;
axis2 label = ("x") ;
proc gplot data = pareto1 ;
plot skir *x
     delta * x/overlay
      vaxis = axis1
       haxis = axis2 ;
run ;
/* PARETO SKIRSTINIO KONVERGAVIMO GREICIO MAKSIMUMO TYRIMAS, KAI x PASTOVUS, n KINTA*/
data pareto_max1 ;
k = 0 ;
b = &beta ;
x = &xx ;
do i = 1 to 20;
   n = k + 50 ;
   k = n ;
   u = 1/(x**b);
   d1 =1/(n-1) ;
   d2 = 1-1/n ;
   d3 = 1-1/(n*(x**b)) ;
   P = d1 * ((d3*d2)/(1-d2*d3)) ;
   d4 = (x**(-b)) ;
   F = 1/( 1 + d4 ) ;
   skir = abs ( P - F ) ;
   q = (2*(x**(-2*b)))/(3*n);
   n1 = ((2*(d4**2))/n + ((2*(d4**4))/(n*n))*(1/(1-q)))*log(4)/(1+d4);
   n2 = (((SQRT(exp(1)))*d4)/n)*(1+F) ;
   delta = F*(n1 +n2) ;
   H =(exp(1))**(-d4) ;
   output ;
   end ;
run ;
data pareto2 ;
set pareto_max1 ;
if x>0 ;
if b>0 ;
if (u/n) < 1/2 ;
if 0 < q <= 1 ;
if n > 1 ;
if 0< =F < 1 ;
if 0< =P< 1 ;
if 0< skir <1 ;
if 0 < delta < 1 ;
if skir <= delta ;
if H > 0 ;
label
        H = 'Ribinis skirstinys '
      skir =' Tiksli reiksme '
      delta = ' Ivertis '  ;
run ;
```

```
      symbol1 color = red value = dot height= 1 interpol = join ;
      symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
      axis1 label = ("skir,delta") ;
      axis2 label = ("n") ;
      proc gplot data = pareto2 ;
      plot skir *n
           delta * n/overlay
             vaxis = axis1
             haxis = axis2 ;
      run ;
            endsubmit ;
            end;
            else
              do;
                commandlist = makelist();
                commandlist = insertc (commandlist,"nepasirinktas skaičiavimo būdas",1);
                command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
                commandlist = dellist (commandlist) ;
               end ;
end ;
if symget ('nr') = 1 then
do ;
   TextEntry1.text = ' ';
   TextEntry2.text = ' ';
   TextEntry3.text = ' ';
end;
if symget ('nr1') = 1 then
do;
   Checkbox1.selected = 'no' ;
   Checkbox2.selected = 'no' ;
end ;
return;
```

„Maxtolyg.scl“:

```
Pushbutton1:
call symput ('nr','0') ;
call symput ('nr1','0');
call symputn ('nnn',TextEntry2.text);
call symputn ('xx',TextEntry1.text);
if TextEntry1.text = ' ' and Textentry2.text = ' ' then
do ;
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Neįvestos visos reikšmės",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
    if TextEntry1.text = ' ' then
do;
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Neįvesta x reikšmė",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
  if textEntry1.text >= '0' then
do;
    textEntry1.text = ' ';
    commandlist = makelist();
    commandlist = insertc (commandlist,"x turi būti mažiau už 0",1);
    command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
    commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
   if symgetn ('xx') ='.' then
do;
   textEntry1.text = ' ';
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"x įvesta ne skaičius",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
   if textEntry2.text = ' ' then
do;
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Neįvesta n reikšmė",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
```

```
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
   if TextEntry2.text <='0' then
do;
   textEntry2.text = ' ';
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"n turi būti daugiau už 0",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
   if symgetn ('nnn') = '.' then
do;
   textEntry2.text = ' ';
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"n įvesta ne skaičius",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
do ;
   if Checkbox1.selected = 'Yes' and Checkbox2.selected = 'Yes' then
    do ;
    call symput ('nr','1') ;
    call symput ('nr1','1');
    submit continue ;
     /* TOLYGAUS SKIRSTINIO KONVERGAVIMO GREICIO MAKSIMUMO TYRIMAS, KAI x KINTA , n  PASTOVUS */
      data tol_max1 ;
      p =-10 ;
      n= &nnn ;
      do i = 1 to 20;
      x= p - 1 ;
       p = x ;
       u = -x ;
       H = exp(x) ;
       PP = (1/(n-1))*(((1+x/n)*(1-1/n))/(1-(1+x/n)*(1-1/n)));
       F = 1/(1-x);
       d1 = 1/(1-x) ;
       d2 = (2*x*x)/n ;
       d3 = (2*x*x*x*x)/(n*n);
       q = (2*x*x)/(3*n);
       d4 = 1/(1-q) ;
       d6 = (SQRT(exp(1))*x)/n ;
       d7 = 1+d1;
       delta = ((d2+d3*d4)*log(4))/((1-x)**2)+d6*(1/(x-1))*d7 ;
       skir = abs(PP-F);
       output ;
       end ;
run;
       data tol_max11 ;
      set tol_max1 ;
      if n > 1;
      if x < 0 ;
      if (u/n) < 1/2 ;
      if  0 < q < 1 ;
      if 0 < PP < 1 ;
      if 0 < F < 1 ; ;
      if 0 < skir < 1 ;
      if 0 < delta < 1 ;
      if skir <= delta ;
      label
      H = 'Ribinis skirstinys '
      skir = ' Tiksli reiksme '
      delta = 'Ivertis' ;
      run ;
      proc print data = tol_max11 ;
      var x n skir delta ;
      run ;
      symbol1 color = red value = dot height = 1  interpol = join ;
      symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
      axis1 label = ("skir,delta") ;
      axis2 label = ("x") ;
      proc gplot data = tol_max11 ;
      plot skir*x
            delta*x/overlay
       vaxis = axis1
       haxis = axis2 ;
      run ;
      /* TOLYGIOJO SKIRSTINIO KONVERGAVIMO GREICIO MAKSIMUMO TYRIMAS, KAI n KINTA , x  PASTOVUS */
```

```
data tol_max2 ;
p =0;
x= &xx;
do i = 1 to 30;
n= p + 50 ;
p = n ;
 u = -x ;
 H = exp ( x ) ;
 PP = (1/(n-1))*(((1+x/n)*(1-1/n))/(1-((1+x/n)*(1-1/n))));
 F = 1/(1-x);
 d1 = 1/(1-x) ;
 d2 = (2*x*x)/n ;
 d3 = (2*x*x*x*x)/(n*n);
 q = (2*x*x)/(3*n);
 d4 = 1/(1-q) ;
 d6 = (SQRT(exp(1))*x)/n ;
 d7 = (1+d1);
 d8 = 1/(x-1);
 delta = ((d2+d3*d4)*log(4))/((1-x)**2)+d6*d8*d7 ;
 skir = abs(PP-F);
 output ;
 end ;
run;
data tol_max22 ;
set tol_max2 ;
if x < 0 ;
if (u/n) < 1/2 ;
if 0 < q < 1 ;
if 0 < PP < 1 ;
if 0 < F < 1 ;
if 0 < skir < 1 ;
if 0 < delta <1 ;
if skir <= delta ;
label
      H = 'Ribinis skirstinys '
      skir = ' Tiksli reiksme '
      delta = 'Ivertis' ;
run ;
proc print data = tol_max22 ;
var x n skir delta;
run ;
symbol1 color = red value = dot height = 1  interpol = join ;
symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
axis1 label = ("skir,delta") ;
axis2 label = ("n") ;
proc gplot data = tol_max22 ;
plot skir*n
      delta * n /overlay
        vaxis = axis1
        haxis = axis2 ;
run ;
endsubmit ;
end ;
else
   if Checkbox1.selected = 'Yes' then
   do;
   call symput ('nr','1') ;
   call symput ('nr1','1') ;
   submit continue ;
   /* TOLYGAUS SKIRSTINIO KONVERGAVIMO GREICIO MAKSIMUMO TYRIMAS, KAI x KINTA , n  PASTOVUS */
   data tol_max1 ;
   p =-10 ;
   n= &nnn ;
   do i = 1 to 20;
   x= p - 1 ;
   p = x ;
   u = -x ;
   H = exp(x) ;
   PP = (1/(n-1))*(((1+x/n)*(1-1/n))/(1-(1+x/n)*(1-1/n)));
   F = 1/(1-x);
   d1 = 1/(1-x) ;
   d2 = (2*x*x)/n ;
   d3 = (2*x*x*x*x)/(n*n);
   q = (2*x*x)/(3*n);
   d4 = 1/(1-q) ;
   d6 = (SQRT(exp(1))*x)/n ;
   d7 = 1+d1;
   delta = ((d2+d3*d4)*log(4))/((1-x)**2)+d6*(1/(x-1))*d7 ;
   skir = abs(PP-F);
   output ;
```

```
end ;
run;
data tol_max11 ;
set tol_max1 ;
if n > 1;
if x < 0 ;
if (u/n) < 1/2 ;
if  0 < q < 1 ;
if 0 < PP < 1 ;
if 0 < F < 1 ; ;
if 0 < skir < 1 ;
if 0 < delta < 1 ;
if skir <= delta ;
label
    H = 'Ribinis skirstinys '
    skir = ' Tiksli reiksme '
    delta = 'Ivertis' ;
run ;
proc print data = tol_max11 ;
var x n skir delta ;
run ;
/* TOLYGIOJO SKIRSTINIO KONVERGAVIMO GREICIO MAKSIMUMO TYRIMAS, KAI n KINTA , x  PASTOVUS */
data tol_max2 ;
p =0;
x= &xx;
do i = 1 to 30;
n= p + 50 ;
p = n ;
u = -x ;
H = exp ( x ) ;
PP = (1/(n-1))*(((1+x/n)*(1-1/n))/(1-((1+x/n)*(1-1/n))));
F = 1/(1-x);
d1 = 1/(1-x) ;
d2 = (2*x*x)/n ;
d3 = (2*x*x*x*x)/(n*n);
q = (2*x*x)/(3*n);
d4 = 1/(1-q) ;
d6 = (SQRT(exp(1))*x)/n ;
d7 = (1+d1);
d8 = 1/(x-1);
delta = ((d2+d3*d4)*log(4))/((1-x)**2)+d6*d8*d7 ;
skir = abs(PP-F);
output ;
end ;
run;
data tol_max22 ;
set tol_max2 ;
if x < 0 ;
if (u/n) < 1/2 ;
if 0 < q < 1 ;
if 0 < PP < 1 ;
if 0 < F < 1 ;
if 0 < skir < 1 ;
if 0 < delta <1 ;
if skir <= delta ;
label
  H = 'Ribinis skirstinys '
 skir = ' Tiksli reiksme '
  delta = 'Ivertis' ;
   run ;
proc print data = tol_max22 ;
var x n skir delta;
run ;
endsubmit ;
end ;
else
   if Checkbox2.selected = 'Yes' then
   do ;
   call symput ('nr','1') ;
   call symput ('nr1','1') ;
   submit continue ;
   /* TOLYGAUS SKIRSTINIO KONVERGAVIMO GREICIO MAKSIMUMO TYRIMAS, KAI x KINTA , n  PASTOVUS */
data tol_max1 ;
p =-10 ;
n= &nnn ;
do i = 1 to 20;
x= p - 1 ;
p = x ;
u = -x ;
H = exp(x) ;
```

```
PP = (1/(n-1))*(((1+x/n)*(1-1/n))/(1-(1+x/n)*(1-1/n)));
F = 1/(1-x);
d1 = 1/(1-x) ;
d2 = (2*x*x)/n ;
d3 = (2*x*x*x*x)/(n*n);
q = (2*x*x)/(3*n);
d4 = 1/(1-q) ;
d6 = (SQRT(exp(1))*x)/n ;
d7 = 1+d1;
delta = ((d2+d3*d4)*log(4))/((1-x)**2)+d6*(1/(x-1))*d7 ;
skir = abs(PP-F);
output ;
end ;
run;
data tol_max11 ;
set tol_max1 ;
if n > 1;
if x < 0 ;
if (u/n) < 1/2 ;
if  0 < q < 1 ;
if 0 < PP < 1 ;
if 0 < F < 1 ; ;
if 0 < skir < 1 ;
if 0 < delta < 1 ;
if skir <= delta ;
label
  H = 'Ribinis skirstinys '
 skir = ' Tiksli reiksme '
  delta = 'Ivertis' ;
run ;
symbol1 color = red value = dot height = 1  interpol = join ;
symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
axis1 label = ("skir,delta") ;
axis2 label = ("x") ;
proc gplot data = tol_max11 ;
  plot skir*x
  delta*x/overlay
  vaxis = axis1
  haxis = axis2 ;
run ;
/* TOLYGIOJO SKIRSTINIO KONVERGAVIMO GREICIO MAKSIMUMO TYRIMAS, KAI n KINTA , x  PASTOVUS */
data tol_max2 ;
p =0;
x= &xx;
do i = 1 to 30;
n= p + 50 ;
p = n ;
u = -x ;
H = exp ( x ) ;
PP = (1/(n-1))*(((1+x/n)*(1-1/n))/(1-((1+x/n)*(1-1/n))));
F = 1/(1-x);
d1 = 1/(1-x) ;
d2 = (2*x*x)/n ;
d3 = (2*x*x*x*x)/(n*n);
q = (2*x*x)/(3*n);
d4 = 1/(1-q) ;
d6 = (SQRT(exp(1))*x)/n ;
d7 = (1+d1);
d8 = 1/(x-1);
delta = ((d2+d3*d4)*log(4))/((1-x)**2)+d6*d8*d7 ;
skir = abs(PP-F);
output ;
end ;
run;
data tol_max22 ;
set tol_max2 ;
if x < 0 ;
if (u/n) < 1/2 ;
if 0 < q < 1 ;
if 0 < PP < 1 ;
if 0 < F < 1 ;
if 0 < skir < 1 ;
if 0 < delta <1 ;
if skir <= delta ;
label
  H = 'Ribinis skirstinys '
 skir = ' Tiksli reiksme '
   delta = 'Ivertis' ;
run ;
symbol1 color = red value = dot height = 1  interpol = join ;
```

```
         symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
         axis1 label = ("skir,delta") ;
         axis2 label = ("n") ;
         proc gplot data = tol_max22 ;
           plot skir*n
            delta * n /overlay
              vaxis = axis1
              haxis = axis2 ;
         run ;
            endsubmit ;
            end;
            else
              do;
                commandlist = makelist();
                commandlist = insertc (commandlist,"nepasirinktas skaičiavimo būdas",1);
                command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
                commandlist = dellist (commandlist) ;
               end ;
end ;
if symget ('nr') = 1 then
do ;
   TextEntry1.text = ' ';
   TextEntry2.text = ' ';
end;
if symget ('nr1') = 1 then
do;
   Checkbox1.selected = 'no' ;
   Checkbox2.selected = 'no' ;
end ;
return;
```

„Maxexp.scl“:

```
Pushbutton1:
call symput ('nr','0') ;
call symput ('nr1','0');
call symputn ('nnn',TextEntry2.text);
call symputn ('xx',TextEntry1.text);
if TextEntry1.text = ' ' and Textentry2.text = ' ' then
do ;
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Neįvestos visos reikšmės",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
    if TextEntry1.text = ' ' then
do;
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Neįvesta x reikšmė",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
   if textEntry1.text <= '0' then
do;
         textEntry1.text = ' ';
         commandlist = makelist();
         commandlist = insertc (commandlist,"x turi būti daugiau už 0",1);
         command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
         commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
   if symgetn ('xx') = '.' then
do;
   textEntry1.text = ' ';
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"x įvesta ne skaičius",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
   if textEntry2.text = ' ' then
do;
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Neįvesta n reikšmė",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
```

```
else
    if TextEntry2.text <='0' then
do;
   textEntry2.text = ' ';
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"n turi būti daugiau už 0",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
   if symgetn ('nnn') = '.' then
do;
   textEntry2.text = ' ';
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"ne ivesta ne skaičius",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
do ;
if Checkbox1.selected = 'Yes' and Checkbox2.selected = 'Yes' then
    do ;
    call symput ('nr','1') ;
    call symput ('nr1','1');
    submit continue ;
     /* EKSPONENTINIO SKIRSTINIO KONVERGAVIMO GREICIO MAKSIMUMO TYRIMAS, KAI x KINTA, n PASTOVUS */
      data exp_max1 ;
      n = &nnn ;
      k = 0;
      do i = 1 to 20 ;
      x = k + 0.5 ;
      k = x ;
      H = exp(-exp(-x)) ;
      d1 = 1/(n-1) ;
      d2 = 1-1/n ;
      d3 = 1-(exp(-x)/n) ;
      u = exp(-x) ;
      P = d1*((d3*d2)/(1-d3*d2));
      F = 1/(1+exp(-x)) ;
      skir = abs( P - F) ;
      q = (2*exp(-2*x))/(3*n) ;
      d4 =( 2*exp(-2*x))/n;
      d5 = (2*exp(-4*x))/(n*n) ;
      d6 = 1/(1-q) ;
      d7 = 1+exp(-x) ;
      d8 = SQRT(exp(1))/n ;
      delta = (((d4+d5*d6)*log(4))/(d7**2))+((d8*exp(-x))/d7)*(1+1/d7) ;
      output ;
      end ;
run ;

      data exp_max11 ;
      set exp_max1 ;
      if x > 0 ;
      if (u/n)< 1/2 ;
      if H > 0 ;
      if 0 < q < 1 ;
      if 0 < P < 1 ;
      if 0 < F < 1 ;
      if 0 < skir < 1;
      if 0 < delta < 1 ;
      if skir <= delta ;
      run ;
      proc print data = exp_max11 ;
      var x n  skir delta ;
      run ;
      symbol color = red value = dot interpol = join;
      symbol2 color = blue value = star interpol = join  ;
      axis1 label = ("skir, delta");
      axis2 label =("x") ;
      proc gplot data = exp_max11 ;
      plot skir * x
      delta *x/overlay
      vaxis = axis1
      haxis = axis2 ;
      run ;
/*EKSPONENTINIO SKIRSTINIO KONVERGAVIMO GREICIO MAKSIMUMO TYRIMAS, KAI n KINTA, O x PASTOVUS*/
      data exp_max2 ;
      x = &xx ;
      k = 100;
```

```
do i = 1 to 20 ;
n = k + 500 ;
k = n ;
H = exp(-exp(-x)) ;
d1 = 1/(n-1) ;
d2 = 1-1/n ;
d3 = 1-(exp(-x)/n) ;
u = exp(-x) ;
P = d1*((d3*d2)/(1-d3*d2));
F = 1/(1+exp(-x)) ;
skir = abs( P - F) ;
q = (2*exp(-2*x))/(3*n) ;
d4 =( 2*exp(-2*x))/n;
d5 = (2*exp(-4*x))/(n*n) ;
d6 = 1/(1-q) ;
d7 = 1+exp(-x) ;
d8 = SQRT(exp(1))/n ;
delta = (((d4+d5*d6)*log(4))/(d7**2))+((d8*exp(-x))/d7)*(1+1/d7) ;
output ;
end ;
run ;
data exp_max22 ;
set exp_max2 ;
if x > 0 ;
if H > 0 ;
if (u/n)< 1/2 ;
if 0<q<1 ;
if 0 < P < 1 ;
if 0 < F < 1 ;
if 0 < skir < 1 ;
if 0 < delta < 1;
if skir <= delta ;
run ;
proc print data = exp_max22 ;
var x n skir delta ;
run ;
symbol color = red value = dot interpol = join;
symbol2 color = blue value = star interpol = join  ;
axis1 label = ("skir, delta");
axis2 label =("n") ;
proc gplot data = exp_max22 ;
plot skir * n
delta *n/overlay
vaxis = axis1
haxis = axis2 ;
run ;
endsubmit ;
end ;
else
   if Checkbox1.selected = 'Yes' then
   do;
   call symput ('nr','1') ;
   call symput ('nr1','1') ;
   submit continue ;
   /* EKSPONENTINIO SKIRSTINIO KONVERGAVIMO GREICIO MAKSIMUMO TYRIMAS, KAI x KINTA, n PASTOVUS */
data exp_max1 ;
n = &nnn ;
k = 0;
do i = 1 to 20 ;
x = k + 0.5 ;
k = x ;
H = exp(-exp(-x)) ;
d1 = 1/(n-1) ;
d2 = 1-1/n ;
d3 = 1-(exp(-x)/n) ;
u = exp(-x) ;
P = d1*((d3*d2)/(1-d3*d2));
F = 1/(1+exp(-x)) ;
skir = abs( P - F) ;
q = (2*exp(-2*x))/(3*n) ;
d4 =( 2*exp(-2*x))/n;
d5 = (2*exp(-4*x))/(n*n) ;
d6 = 1/(1-q) ;
d7 = 1+exp(-x) ;
d8 = SQRT(exp(1))/n ;
delta = (((d4+d5*d6)*log(4))/(d7**2))+((d8*exp(-x))/d7)*(1+1/d7) ;
output ;
end ;
run ;
data exp_max11 ;
```

```
        set exp_max1 ;
        if x > 0 ;
        if (u/n)< 1/2 ;
        if H > 0 ;
        if 0 < q < 1 ;
        if 0 < P < 1 ;
        if 0 < F < 1 ;
        if 0 < skir < 1;
        if 0 < delta < 1 ;
        if skir <= delta ;
        run ;
        proc print data = exp_max11 ;
        var x n  skir delta ;
        run ;
        /*EKSPONENTINIO SKIRSTINIO KONVERGAVIMO GREICIO MAKSIMUMO TYRIMAS, KAI n KINTA, O x PASTOVUS*/
        data exp_max2 ;
        x = &xx ;
        k = 100;
        do i = 1 to 20 ;
        n = k + 500 ;
        k = n ;
        H = exp(-exp(-x)) ;
        d1 = 1/(n-1) ;
        d2 = 1-1/n ;
        d3 = 1-(exp(-x)/n) ;
        u = exp(-x) ;
        P = d1*((d3*d2)/(1-d3*d2));
        F = 1/(1+exp(-x)) ;
        skir = abs( P - F) ;
        q = (2*exp(-2*x))/(3*n) ;
        d4 =( 2*exp(-2*x))/n;
        d5 = (2*exp(-4*x))/(n*n) ;
        d6 = 1/(1-q) ;
        d7 = 1+exp(-x) ;
        d8 = SQRT(exp(1))/n ;
        delta = (((d4+d5*d6)*log(4))/(d7**2))+((d8*exp(-x))/d7)*(1+1/d7) ;
        output ;
        end ;
        run ;
        data exp_max22 ;
        set exp_max2 ;
        if x > 0 ;
        if H > 0 ;
        if (u/n)< 1/2 ;
        if 0<q<1 ;
        if 0 < P < 1 ;
        if 0 < F < 1 ;
        if 0 < skir < 1 ;
        if 0 < delta < 1;
        if skir <= delta ;
        run ;
        proc print data = exp_max22 ;
        var x n skir delta ;
        run ;
           endsubmit ;
           end ;
           else
              if Checkbox2.selected = 'Yes' then
              do ;
              call symput ('nr','1') ;
              call symput ('nr1','1') ;
              submit continue ;
              /* EKSPONENTINIO SKIRSTINIO KONVERGAVIMO GREICIO MAKSIMUMO TYRIMAS, KAI x KINTA, n PASTOVUS
  */
           data exp_max1 ;
           n = &nnn ;
           k = 0;
           do i = 1 to 20 ;
           x = k + 0.5 ;
           k = x ;
           H = exp(-exp(-x)) ;
           d1 = 1/(n-1) ;
           d2 = 1-1/n ;
           d3 = 1-(exp(-x)/n) ;
           u = exp(-x) ;
           P = d1*((d3*d2)/(1-d3*d2));
           F = 1/(1+exp(-x)) ;
           skir = abs( P - F) ;
           q = (2*exp(-2*x))/(3*n) ;
           d4 =( 2*exp(-2*x))/n;
```

```
   d5 = (2*exp(-4*x))/(n*n) ;
   d6 = 1/(1-q) ;
   d7 = 1+exp(-x) ;
   d8 = SQRT(exp(1))/n ;
   delta = (((d4+d5*d6)*log(4))/(d7**2))+((d8*exp(-x))/d7)*(1+1/d7) ;
   output ;
   end ;
   run ;
   data exp_max11 ;
   set exp_max1 ;
   if x > 0 ;
   if (u/n)< 1/2 ;
   if H > 0 ;
   if 0 < q < 1 ;
   if 0 < P < 1 ;
   if 0 < F < 1 ;
   if 0 < skir < 1;
   if 0 < delta < 1 ;
   if skir <= delta ;
   run ;
   symbol color = red value = dot interpol = join;
   symbol2 color = blue value = star interpol = join  ;
   axis1 label = ("skir, delta");
   axis2 label =("x") ;
   proc gplot data = exp_max11 ;
   plot skir * x
   delta *x/overlay
   vaxis = axis1
   haxis = axis2 ;
   run ;
   /*EKSPONENTINIO SKIRSTINIO KONVERGAVIMO GREICIO MAKSIMUMO TYRIMAS, KAI n KINTA, O x PASTOVUS*/
   data exp_max2 ;
   x = &xx ;
   k = 100;
   do i = 1 to 20 ;
   n = k + 500 ;
   k = n ;
   H = exp(-exp(-x)) ;
   d1 = 1/(n-1) ;
   d2 = 1-1/n ;
   d3 = 1-(exp(-x)/n) ;
   u = exp(-x) ;
   P = d1*((d3*d2)/(1-d3*d2));
   F = 1/(1+exp(-x)) ;
   skir = abs( P - F) ;
   q = (2*exp(-2*x))/(3*n) ;
   d4 =( 2*exp(-2*x))/n;
   d5 = (2*exp(-4*x))/(n*n) ;
   d6 = 1/(1-q) ;
   d7 = 1+exp(-x) ;
   d8 = SQRT(exp(1))/n ;
   delta = (((d4+d5*d6)*log(4))/(d7**2))+((d8*exp(-x))/d7)*(1+1/d7) ;
   output ;
   end ;
run ;
   data exp_max22 ;
   set exp_max2 ;
   if x > 0 ;
   if H > 0 ;
   if (u/n)< 1/2 ;
   if 0<q<1 ;
   if 0 < P < 1 ;
   if 0 < F < 1 ;
   if 0 < skir < 1 ;
   if 0 < delta < 1;
   if skir <= delta ;
   run ;
   symbol color = red value = dot interpol = join;
   symbol2 color = blue value = star interpol = join  ;
   axis1 label = ("skir, delta");
   axis2 label =("n") ;
   proc gplot data = exp_max22 ;
   plot skir * n
   delta *n/overlay
   vaxis = axis1
   haxis = axis2 ;
   run ;
      endsubmit ;
      end;
      else
```

```
              do;
                commandlist = makelist();
                commandlist = insertc (commandlist,"nepasirinktas skaičiavimo būdas",1);
                command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
                commandlist = dellist (commandlist) ;
               end ;
end ;
if symget ('nr') = 1 then
do ;
   TextEntry1.text = ' ';
   TextEntry2.text = ' ';
end;
if symget ('nr1') = 1 then
do;
   Checkbox1.selected = 'no' ;
   Checkbox2.selected = 'no' ;
end ;
return;
```

„Minsarasas.scl“:

```
pushbutton2:
call display ('meniu.Meniu.Mintolyg.frame');
return;
pushbutton3:
call display ('meniu.Meniu.Minexp.frame') ;
return ;
```

„Mintolyg.scl“ :

```
Pushbutton1:
call symput ('nr','0') ;
call symput ('nr1','0');
call symputn ('nnn',TextEntry2.text);
call symputn ('xx',TextEntry1.text);
if TextEntry1.text = ' ' and Textentry2.text = ' ' then
do ;
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Neįvestos visos reikšmės",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
    if TextEntry1.text = ' ' then
do;
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Neįvesta x reikšmė",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
  if textEntry1.text <= '0' then
do;
    textEntry1.text = ' ';
    commandlist = makelist();
    commandlist = insertc (commandlist,"x turi būti daugiau už 0",1);
    command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
    commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
   if symgetn ('xx') = '.' then
do;
   textEntry1.text = ' ';
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"x įvesta ne skaičius",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
   if textEntry2.text = ' ' then
do;
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Neįvesta n reikšmė",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
```

```
   if TextEntry2.text <='0' then
do;
   textEntry2.text = ' ';
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"n turi būti daugiau už 0",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
   if symgetn ('nnn') ='.' then
do;
   textEntry2.text = ' ';
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"n įvesta ne skaičius",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
do ;
   if Checkbox1.selected = 'Yes' and Checkbox2.selected = 'Yes' then
    do ;
    call symput ('nr','1') ;
    call symput ('nr1','1');
    submit continue ;
     /*TOLYGAUS SKIRSTINIO KONVERGAVIMO GREICIO MNIMUMO TYRIMAS, KAI x KINTA, n PASTOVUS */
      data tol_min1 ;
      k = 10 ;
      n = &nnn ;
      do i = 1 to 50 ;
        x = k + 1 ;
        k = x ;
        w = x ;
        LL = 1-exp(-x) ;
        d1 = 1/(n-1) ;
        d2 = 1-x/n ;
        d3 = 1-1/n ;
        P = 1-d1 *((d2*d3)/(1-d2*d3));
        F = 1-1/(x+1);
        q = (2*x*x)/(3*n);
        d4 = (2*x*x)/n ;
        d5 = (2*x**4)/(n**2);
        d6 = (SQRT(exp(1)))/n ;
        d7 = 1/(x+1) ;
        delta = ((d4+d5*(1/(1-q)))*log(4))*d7*d7+d6*x*d7*(1+d7) ;
        skir = abs(P - F) ;
        output ;
        end ;
         run ;
      data tol_min11 ;
      set tol_min1 ;
      if x > 0 ;
      if n > 1 ;
      if (w/n) < 1/2 ;
      if 0 < q < 1 ;
      if LL > 0 ;
      if 0 < P < 1;
      if 0 < F < 1 ;
      if 0 < skir < 1 ;
      if 0 < delta < 1;
      if skir <= delta ;
      label
      LL = 'Ribinis skirstinys'
       skir = 'Tiksli reiksme'
       delta = ' Ivertis' ;
      run ;
      proc print data = tol_min11 ;
      var x n skir delta ;
      run ;
      symbol1 color = red value = dot height= 1 interpol = join ;
      symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
      axis1 label=("skir,delta") ;
      axis2 label=("x");
      proc gplot data = tol_min11 ;
      plot skir * x
      delta * x/overlay
       vaxis = axis1
       haxis = axis2 ;
run ;
      /*TOLYGAUS SKIRSTINIO KONVERGAVIMO GREICIO MNIMUMO TYRIMAS, KAI n KINTA, x PASTOVUS */
      data tol_min2 ;
```

```
      k = 50 ;
      x = &xx ;
      do i = 1 to 20 ;
      n = k + 50 ;
        k = n ;
        w = x ;
        LL = 1-exp(-x) ;
        d1 = 1/(n-1) ;
        d2 = 1-x/n ;
        d3 = 1-1/n ;
        P = 1-d1 *((d2*d3)/(1-d2*d3));
        F = 1-1/(x+1);
        q = (2*x*x)/(3*n);
        d4 = (2*x*x)/n ;
        d5 = (2*x**4)/(n**2);
        d6 = (SQRT(exp(1)))/n ;
        d7 = 1/(x+1) ;
        delta = ((d4+d5*(1/(1-q)))*log(4))/((x+1)**2)+d6*x*d7*(1+d7) ;
        skir = abs(P - F) ;
        output ;
        end ;
run ;
      data tol_min22 ;
      set tol_min2 ;
      if x > 0 ;
      if n > 1 ;
      if (w/n) < 1/2 ;
      if 0 < q < 1 ;
      if LL > 0 ;
      if 0 < P < 1 ;
      if 0 < F < 1 ;
      if 0 < skir < 1 ;
      if 0 < delta < 1 ;
      if skir <= delta ;
      label
      LL = 'Ribinis skirstinys'
       skir = 'Tiksli reiksme'
       delta = ' Ivertis' ;
run ;
      proc print data = tol_min22 ;
      var x n skir delta ;
      run ;

      symbol1 color = red value = dot height= 1 interpol = join ;
      symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
      axis1 label=("skir,delta") ;
      axis2 label=("n") ;
      proc gplot data = tol_min22 ;
      plot skir * n
      delta * n/overlay
       vaxis = axis1
       haxis = axis2 ;
run ;
      endsubmit ;
      end ;
      else
         if Checkbox1.selected = 'Yes' then
         do;
         call symput ('nr','1') ;
         call symput ('nr1','1') ;
         submit continue ;
         /*TOLYGAUS SKIRSTINIO KONVERGAVIMO GREICIO MNIMUMO TYRIMAS, KAI x KINTA, n PASTOVUS */
            data tol_min1 ;
         k = 10 ;
         n = &nnn ;
         do i = 1 to 50 ;
        x = k + 1 ;
        k = x ;
        w = x ;
        LL = 1-exp(-x) ;
        d1 = 1/(n-1) ;
        d2 = 1-x/n ;
        d3 = 1-1/n ;
        P = 1-d1 *((d2*d3)/(1-d2*d3));
        F = 1-1/(x+1);
        q = (2*x*x)/(3*n);
        d4 = (2*x*x)/n ;
        d5 = (2*x**4)/(n**2);
        d6 = (SQRT(exp(1)))/n ;
        d7 = 1/(x+1) ;
```

```
        delta = ((d4+d5*(1/(1-q)))*log(4))*d7*d7+d6*x*d7*(1+d7) ;
        skir = abs(P - F) ;
        output ;
        end ;
      run ;
      data tol_min11 ;
      set tol_min1 ;
      if x > 0 ;
      if n > 1 ;
      if (w/n) < 1/2 ;
      if 0 < q < 1 ;
      if LL > 0 ;
      if 0 < P < 1;
      if 0 < F < 1 ;
      if 0 < skir < 1 ;
      if 0 < delta < 1;
      if skir <= delta ;
      label
     LL = 'Ribinis skirstinys'
       skir = 'Tiksli reiksme'
       delta = ' Ivertis' ;
run ;
      proc print data = tol_min11 ;
      var x n skir delta ;
      run ;
      /*TOLYGAUS SKIRSTINIO KONVERGAVIMO GREICIO MNIMUMO TYRIMAS, KAI n KINTA, x PASTOVUS */
      data tol_min2 ;
      k = 50 ;
      x = &xx ;
      do i = 1 to 20 ;
        n = k + 50 ;
        k = n ;
        w = x ;
        LL = 1-exp(-x) ;
        d1 = 1/(n-1) ;
        d2 = 1-x/n ;
        d3 = 1-1/n ;
        P = 1-d1 *((d2*d3)/(1-d2*d3));
        F = 1-1/(x+1);
        q = (2*x*x)/(3*n);
        d4 = (2*x*x)/n ;
        d5 = (2*x**4)/(n**2);
        d6 = (SQRT(exp(1)))/n ;
        d7 = 1/(x+1) ;
        delta = ((d4+d5*(1/(1-q)))*log(4))/((x+1)**2)+d6*x*d7*(1+d7) ;
        skir = abs(P - F) ;
        output ;
        end ;
run ;
      data tol_min22 ;
      set tol_min2 ;
      if x > 0 ;
      if n > 1 ;
      if (w/n) < 1/2 ;
      if 0 < q < 1 ;
      if LL > 0 ;
      if 0 < P < 1 ;
      if 0 < F < 1 ;
      if 0 < skir < 1 ;
      if 0 < delta < 1 ;
      if skir <= delta ;
      label
      LL = 'Ribinis skirstinys'
       skir = 'Tiksli reiksme'
       delta = ' Ivertis' ;

run ;
      proc print data = tol_min22 ;
      var x n skir delta ;
      run ;
         endsubmit ;
         end ;
         else
            if Checkbox2.selected = 'Yes' then
            do ;
            call symput ('nr','1') ;
            call symput ('nr1','1') ;
            submit continue ;
         /*TOLYGAUS SKIRSTINIO KONVERGAVIMO GREICIO MNIMUMO TYRIMAS, KAI x KINTA, n PASTOVUS */
      data tol_min1 ;
```

```
k = 10 ;
n = &nnn ;
do i = 1 to 50 ;
  x = k + 1 ;
  k = x ;
  w = x ;
  LL = 1-exp(-x) ;
  d1 = 1/(n-1) ;
  d2 = 1-x/n ;
  d3 = 1-1/n ;
  P = 1-d1 *((d2*d3)/(1-d2*d3));
  F = 1-1/(x+1);
  q = (2*x*x)/(3*n);
  d4 = (2*x*x)/n ;
  d5 = (2*x**4)/(n**2);
  d6 = (SQRT(exp(1)))/n ;
  d7 = 1/(x+1) ;
  delta = ((d4+d5*(1/(1-q)))*log(4))*d7*d7+d6*x*d7*(1+d7) ;
  skir = abs(P - F) ;
  output ;
  end ;
run ;
data tol_min11 ;
set tol_min1 ;
if x > 0 ;
if n > 1 ;
if (w/n) < 1/2 ;
if 0 < q < 1 ;
if LL > 0 ;
if 0 < P < 1;
if 0 < F < 1 ;
if 0 < skir < 1 ;
if 0 < delta < 1;
if skir <= delta ;
label
LL = 'Ribinis skirstinys'
 skir = 'Tiksli reiksme'
 delta = ' Ivertis' ;
run ;
symbol1 color = red value = dot height= 1 interpol = join ;
symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
axis1 label=("skir,delta") ;
axis2 label=("x");
proc gplot data = tol_min11 ;
plot skir * x
delta * x/overlay
 vaxis = axis1
 haxis = axis2 ;
run ;
/*TOLYGAUS SKIRSTINIO KONVERGAVIMO GREICIO MNIMUMO TYRIMAS, KAI n KINTA, x PASTOVUS */
data tol_min2 ;
k = 50 ;
x = &xx ;
do i = 1 to 20 ;
  n = k + 50 ;
  k = n ;
  w = x ;
  LL = 1-exp(-x) ;
  d1 = 1/(n-1) ;
  d2 = 1-x/n ;
  d3 = 1-1/n ;
  P = 1-d1 *((d2*d3)/(1-d2*d3));
  F = 1-1/(x+1);
  q = (2*x*x)/(3*n);
  d4 = (2*x*x)/n ;
  d5 = (2*x**4)/(n**2);
  d6 = (SQRT(exp(1)))/n ;
  d7 = 1/(x+1) ;
  delta = ((d4+d5*(1/(1-q)))*log(4))/((x+1)**2)+d6*x*d7*(1+d7) ;
  skir = abs(P - F) ;
  output ;
  end ;
run ;
data tol_min22 ;
set tol_min2 ;
if x > 0 ;
if n > 1 ;
if (w/n) < 1/2 ;
if 0 < q < 1 ;
if LL > 0 ;
```

```
       if 0 < P < 1 ;
       if 0 < F < 1 ;
       if 0 < skir < 1 ;
       if 0 < delta < 1 ;
       if skir <= delta ;
       label
        LL = 'Ribinis skirstinys'
        skir = 'Tiksli reiksme'
        delta = ' Ivertis' ;
       run ;
       symbol1 color = red value = dot height= 1 interpol = join ;
       symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
       axis1 label=("skir,delta") ;
       axis2 label=("n") ;
       proc gplot data = tol_min22 ;
       plot skir * n
       delta * n/overlay
        vaxis = axis1
        haxis = axis2 ;
       run ;
             endsubmit ;
             end;
             else
               do;
                 commandlist = makelist();
                 commandlist = insertc (commandlist,"nepasirinktas skaičiavimo būdas",1);
                 command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
                 commandlist = dellist (commandlist) ;
                end ;
end ;
if symget ('nr') = 1 then
do ;
   TextEntry1.text = ' ';
   TextEntry2.text = ' ';
end;
if symget ('nr1') = 1 then
do;
   Checkbox1.selected = 'no' ;
   Checkbox2.selected = 'no' ;
end ;
return;
```

„Minexp.scl“:

```
Pushbutton1:
call symput ('nr','0') ;
call symput ('nr1','0');
call symputn ('nnn',TextEntry2.text);
call symputn ('xx',TextEntry1.text);
if TextEntry1.text = ' ' and Textentry2.text = ' ' then
do ;
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Neįvestos visos reikšmės",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
    if TextEntry1.text = ' ' then
do;
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Neįvesta x reikšmė",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
   if textEntry1.text <= '0' then
do;
    textEntry1.text = ' ';
    commandlist = makelist();
    commandlist = insertc (commandlist,"x turi būti daugiau už 0",1);
    command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
    commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
   if symgetn ('xx') ='.' then
do;
    textEntry1.text = ' ';
    commandlist = makelist();
    commandlist = insertc (commandlist,"x įvesta ne skaičius 0",1);
```

```
    command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
    commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
   if textEntry2.text = ' ' then
do;
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Neįvesta n reikšmė",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
   if TextEntry2.text <='0' then
do;
   textEntry2.text = ' ';
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"n turi būti daugiau už 0",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
  if symgetn ('nnn') ='.' then
do;
    textEntry2.text = ' ';
    commandlist = makelist();
    commandlist = insertc (commandlist,"n įvesta ne skaičius",1);
    command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
    commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
do ;
    if Checkbox1.selected = 'Yes' and Checkbox2.selected = 'Yes' then
    do ;
    call symput ('nr','1') ;
    call symput ('nr1','1');
    submit continue ;
     /*EKSPONENTINIO SKIRSTINIO KONVERGAVIMO GREICIO MINIMUMO TYRIMAS, KAI x KINTA, n PASTOVUS */
      data exp_min1 ;
      n = &nnn ;
      k = 1 ;
      do i = 1 to 20 ;
         x = k + 1 ;
         k = x ;
         L = 1-exp(-x) ;
         F = 1-1/(x+1) ;
         d2 = exp(-x/n) ;
         d3 = 1/(n-1) ;
         d4 = 1-1/n;
         P = 1-d3*((d2*d4)/(1-d2*d4));
         d1 = SQRT(exp(1)) ;
         delta = (d1/n)*(x/(x+1))*(1+1/(x+1)) ;
         skir = abs(P-F) ;
         output ;
         end ;
         run ;
         data exp_min11 ;
         set exp_min1 ;
         if n > 1 ;
         if x > 0 ;
         if L>0 ;
         if 0 < skir < 1 ;
         if 0 < delta < 1 ;
         if skir <= delta ;
         label
           L = 'Ribinis skirstinys'
             skir = ' Tiksli reiksme'
          delta = 'Ivertis' ;
      run ;
         proc print data = exp_min11 ;
         var x n  skir delta ;
         run ;
         symbol1 color = red value = dot interpol = join;
         symbol2 color = blue value = star interpol = join ;
         axis1 label = ("skir, delta") ;
         axis2 label = ("x")  ;
         proc gplot data = exp_min11 ;
         plot skir * x
         delta * x /overlay
         vaxis = axis1
         haxis = axis2 ;
```

```
   run ;
   /*EKSPONENTINIO SKIRSTINIO KONVERGAVIMO GREICIO MINIMUMO TYRIMAS, KAI n KINTA, x PASTOVUS */
   data exp_min2 ;
   x = &xx ;
   k = 100 ;
   do i = 1 to 20 ;
    n = k + 500 ;
    k = n ;
   L = 1-exp(-x) ;
   F = 1-1/(x+1) ;
   d2 = exp(-x/n) ;
   d3 = 1/(n-1) ;
   d4 = 1-1/n;
   P = 1-d3*((d2*d4)/(1-d2*d4));
   d1 = SQRT(exp(1)) ;
   delta = (d1/n)*(x/(x+1))*(1+1/(x+1)) ;
   skir = abs(P-F) ;
   output ;
   end ;
   run ;
data exp_min22 ;
set exp_min2 ;
if x > 0 ;
if n > 1 ;
if L > 0 ;
if 0 < skir < 1 ;
if 0 < delta < 1 ;
if skir <= delta ;
label
     L = 'Ribinis skirstinys'
       skir = ' Tiksli reiksme'
    delta = 'Ivertis' ;
run ;
proc print data = exp_min22 ;
var x n skir delta ;
run ;
symbol1 color = red value = dot interpol = join;
symbol2 color = blue value = star interpol = join ;
axis1 label = ("skir, delta") ;
axis2 label = ("n")  ;
proc gplot data = exp_min22 ;
plot skir * n
     delta * n/overlay
vaxis = axis1
haxis = axis2 ;
run ;
endsubmit ;
end ;
else
   if Checkbox1.selected = 'Yes' then
   do;
   call symput ('nr','1') ;
   call symput ('nr1','1') ;
   submit continue ;
   /*EKSPONENTINIO SKIRSTINIO KONVERGAVIMO GREICIO MINIMUMO TYRIMAS, KAI x KINTA, n PASTOVUS */
   data exp_min1 ;
   n = &nnn ;
   k = 1 ;
   do i = 1 to 20 ;
      x = k + 1 ;
      k = x ;
      L = 1-exp(-x) ;
      F = 1-1/(x+1) ;
      d2 = exp(-x/n) ;
      d3 = 1/(n-1) ;
      d4 = 1-1/n;
      P = 1-d3*((d2*d4)/(1-d2*d4));
      d1 = SQRT(exp(1)) ;
      delta = (d1/n)*(x/(x+1))*(1+1/(x+1)) ;
      skir = abs(P-F) ;
      output ;
      end ;
   run ;
   data exp_min11 ;
   set exp_min1 ;
   if n > 1 ;
   if x > 0 ;
   if L>0 ;
   if 0 < skir < 1 ;
   if 0 < delta < 1 ;
```

```
   if skir <= delta ;
   label
     L = 'Ribinis skirstinys'
    skir = ' Tiksli reiksme'
      delta = 'Ivertis' ;
run ;

   proc print data = exp_min11 ;
   var x n  skir delta ;
   run ;
   /*EKSPONENTINIO SKIRSTINIO KONVERGAVIMO GREICIO MINIMUMO TYRIMAS, KAI n KINTA, x PASTOVUS */
   data exp_min2 ;
   x = &xx ;
   k = 100 ;
   do i = 1 to 20 ;
      n = k + 500 ;
      k = n ;
      L = 1-exp(-x) ;
      F = 1-1/(x+1) ;
      d2 = exp(-x/n) ;
      d3 = 1/(n-1) ;
      d4 = 1-1/n;
      P = 1-d3*((d2*d4)/(1-d2*d4));
      d1 = SQRT(exp(1)) ;
      delta = (d1/n)*(x/(x+1))*(1+1/(x+1)) ;
      skir = abs(P-F) ;
      output ;
      end ;
   run ;
   data exp_min22 ;
   set exp_min2 ;
   if x > 0 ;
   if n > 1 ;
   if L > 0 ;
   if 0 < skir < 1 ;
   if 0 < delta < 1 ;
   if skir <= delta ;
   label
   L = 'Ribinis skirstinys'
   skir = ' Tiksli reiksme'
   delta = 'Ivertis' ;
   run ;
   proc print data = exp_min22 ;
   var x n skir delta ;
   run ;
   endsubmit ;
   end ;
    else
      if Checkbox2.selected = 'Yes' then
      do ;
      call symput ('nr','1') ;
      call symput ('nr1','1') ;
      submit continue ;
   /*EKSPONENTINIO SKIRSTINIO KONVERGAVIMO GREICIO MINIMUMO TYRIMAS, KAI x KINTA, n PASTOVUS */
   data exp_min1 ;
   n = &nnn ;
   k = 1 ;
   do i = 1 to 20 ;
   x = k + 1 ;
   k = x ;
   L = 1-exp(-x) ;
   F = 1-1/(x+1) ;
   d2 = exp(-x/n) ;
   d3 = 1/(n-1) ;
   d4 = 1-1/n;
   P = 1-d3*((d2*d4)/(1-d2*d4));
   d1 = SQRT(exp(1)) ;
   delta = (d1/n)*(x/(x+1))*(1+1/(x+1)) ;
   skir = abs(P-F) ;
   output ;
   end ;
  run ;
   data exp_min11 ;
   set exp_min1 ;
   if n > 1 ;
   if x > 0 ;
   if L>0 ;
   if 0 < skir < 1 ;
   if 0 < delta < 1 ;
   if skir <= delta ;
```

```
          label
            L = 'Ribinis skirstinys'
            skir = ' Tiksli reiksme'
            delta = 'Ivertis' ;
          run ;
          symbol1 color = red value = dot interpol = join;
          symbol2 color = blue value = star interpol = join ;
          axis1 label = ("skir, delta") ;
          axis2 label = ("x")  ;
          proc gplot data = exp_min11 ;
          plot skir * x
             delta * x /overlay
             vaxis = axis1
             haxis = axis2 ;
          run ;

          /*EKSPONENTINIO SKIRSTINIO KONVERGAVIMO GREICIO MINIMUMO TYRIMAS, KAI n KINTA, x PASTOVUS */
          data exp_min2 ;
          x = &xx ;
          k = 100 ;
          do i = 1 to 20 ;
             n = k + 500 ;
             k = n ;
             L = 1-exp(-x) ;
             F = 1-1/(x+1) ;
             d2 = exp(-x/n) ;
             d3 = 1/(n-1) ;
             d4 = 1-1/n;
             P = 1-d3*((d2*d4)/(1-d2*d4));
             d1 = SQRT(exp(1)) ;
             delta = (d1/n)*(x/(x+1))*(1+1/(x+1)) ;
             skir = abs(P-F) ;
             output ;
           end ;
          run ;
          data exp_min22 ;
          set exp_min2 ;
          if x > 0 ;
          if n > 1 ;
          if L > 0 ;
          if 0 < skir < 1 ;
          if 0 < delta < 1 ;
          if skir <= delta ;
          label
            L = 'Ribinis skirstinys'
            skir = ' Tiksli reiksme'
            delta = 'Ivertis' ;
          run ;
          symbol1 color = red value = dot interpol = join;
          symbol2 color = blue value = star interpol = join ;
          axis1 label = ("skir, delta") ;
          axis2 label = ("n")  ;
          proc gplot data = exp_min22 ;
          plot skir * n
          delta * n/overlay
          vaxis = axis1
          haxis = axis2 ;
          run ;
             endsubmit ;
             end;
             else
               do;
                 commandlist = makelist();
                 commandlist = insertc (commandlist,"nepasirinktas skaičiavimo būdas",1);
                 command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
                 commandlist = dellist (commandlist) ;
                end ;
end ;
if symget ('nr') = 1 then
do ;
   TextEntry1.text = ' ';
   TextEntry2.text = ' ';
end;
if symget ('nr1') = 1 then
do;
   Checkbox1.selected = 'no' ;
   Checkbox2.selected = 'no' ;
end ;
return;
```

„Tankmaxsar.scl“:

```
pushbutton1:
call display('meniu.Meniu.Tmaxtolyg.frame');
return;
Pushbutton2:
call display('meniu.Meniu.Tmaxexp.frame') ;
return ;
Pushbutton3:
call display ('meniu.Meniu.Tmaxlog.frame');
return ;
```

„Tmaxtlog.scl“:

```
Pushbutton1:
call symput ('nr','0') ;
call symput ('nr1','0');
call symputn ('nnn',TextEntry2.text);
call symputn ('xx',TextEntry1.text);
if TextEntry1.text = ' ' and Textentry2.text = ' ' then
do ;
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Neįvestos visos reikšmės",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
    if TextEntry1.text = ' ' then
do;
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Neįvesta x reikšmė",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
  if textEntry1.text <='0' then
do;
         textEntry1.text = ' ';
         commandlist = makelist();
         commandlist = insertc (commandlist,"x turi būti daugiau už 0",1);
         command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
         commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
   if symgetn ('xx') ='.' then
do;
   textEntry1.text = ' ';
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"x įvesta ne skaičius",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
   if textEntry2.text = ' ' then
do;
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Neįvesta n reikšmė",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
   if TextEntry2.text <='0' then
do;
   textEntry2.text = ' ';
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"n turi būti daugiau už 0",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
   if symgetn ('nnn') ='.' then
do;
   textEntry2.text = ' ';
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"n įvesta ne skaičius",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
```

```
else
do ;
if Checkbox1.selected = 'Yes' and Checkbox2.selected = 'Yes' then
    do ;
    call symput ('nr','1') ;
    call symput ('nr1','1');
    submit continue ;
     data Tankmaxlog ;
      k = 0.5 ;
      n = &nnn ;
      do i = 1 to 10;
      x = k + 0.5;
      P = exp(-x)*1/((exp(-x)+1)**2);
      k = x ;
      F =1/( exp(-(log(n)+x))+1);
      nn = 1-1/n ;
      bb = 1-F*nn ;
      Aps = (F*exp(-(log(n)+x))/n)*1/(bb*bb) ;
      skirt = Abs(Aps - P) ;
      output ;
      end ;
      run ;
      proc print data = Tankmaxlog ;
      var x n p Aps skirt;
      run ;
      symbol1 color = red value = dot height= 1 interpol = join ;
      symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
      symbol3 color = black value = dot height= 1 interpol = join ;
      proc gplot data = Tankmaxlog ;
      plot  skirt *x;
      run ;
      data Tankmaxlog1 ;
      k =  500;
      x = &xx ;
      do i = 1 to 10;
      n = k + 100;
      P = exp(-x)*1/((exp(-x)+1)**2);
      k = n ;
      nm = 1/n ;
      F =1/( exp(-(log(n)+x))+1);
      nn = 1-1/n ;
      bb =1-F*nn ;
      Aps = (F*exp(-(log(n)+x))/n)*1/(bb*bb) ;
      skirt = Abs(Aps - P) ;
      output ;
      end ;
      run ;
      proc print data = Tankmaxlog1 ;
      var x n p Aps skirt ;
      run ;
      symbol1 color = red value = dot height= 1 interpol = join ;
      symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
      symbol3 color = black value = dot height= 1 interpol = join ;
      proc gplot data = Tankmaxlog1 ;
      plot  skirt *n
            nm * n/overlay;
      run ;
      endsubmit ;
      end ;
      else
         if Checkbox1.selected = 'Yes' then
         do;
         call symput ('nr','1') ;
         call symput ('nr1','1') ;
         submit continue ;
          data Tankmaxlog ;
         k = 0.5 ;
         n = &nnn ;
         do i = 1 to 10;
         x = k + 0.5;
         P = exp(-x)*1/((exp(-x)+1)**2);
         k = x ;
         F =1/( exp(-(log(n)+x))+1);
         nn = 1-1/n ;
         bb = 1-F*nn ;
         Aps = (F*exp(-(log(n)+x))/n)*1/(bb*bb) ;
         skirt = Abs(Aps - P) ;
         output ;
         end ;
         run ;
```

```
proc print data = Tankmaxlog ;
var x n p Aps skirt ;
run ;
data Tankmaxlog1 ;
k =  500;
x = &xx ;
do i = 1 to 10;
n = k + 100;
P = exp(-x)*1/((exp(-x)+1)**2);
k = n ;
F =1/( exp(-(log(n)+x))+1);
nn = 1-1/n ;
bb =1-F*nn ;
Aps = (F*exp(-(log(n)+x))/n)*1/(bb*bb) ;
skirt = Abs(Aps - P) ;
output ;
end ;
run ;
proc print data = Tankmaxlog1 ;
var x n p Aps skirt ;
run ;
endsubmit ;
end ;
else
   if Checkbox2.selected = 'Yes' then
   do ;
   call symput ('nr','1') ;
   call symput ('nr1','1') ;
   submit continue ;
data Tankmaxlog ;
k = 0.5 ;
n = &nnn ;
do i = 1 to 10;
x = k + 0.5;
P = exp(-x)*1/((exp(-x)+1)**2);
k = x ;
F =1/( exp(-(log(n)+x))+1);
nn = 1-1/n ;
bb = 1-F*nn ;
Aps = (F*exp(-(log(n)+x))/n)*1/(bb*bb) ;
skirt = Abs(Aps - P) ;
output ;
end ;
run ;
symbol1 color = red value = dot height= 1 interpol = join ;
symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
symbol3 color = black value = dot height= 1 interpol = join ;
proc gplot data = Tankmaxlog ;
plot  skirt *x;
run ;
data Tankmaxlog1 ;
k =  500;
x = &xx ;
do i = 1 to 10;
n = k + 100;
P = exp(-x)*1/((exp(-x)+1)**2);
k = n ;
nm = 1/n ;
F =1/( exp(-(log(n)+x))+1);
nn = 1-1/n ;
bb =1-F*nn ;
Aps = (F*exp(-(log(n)+x))/n)*1/(bb*bb) ;
skirt = Abs(Aps - P) ;
output ;
end ;
run ;
symbol1 color = red value = dot height= 1 interpol = join ;
symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
symbol3 color = black value = dot height= 1 interpol = join ;
proc gplot data = Tankmaxlog1 ;
plot  skirt *n
      nm * n/overlay;
run ;
   endsubmit ;
   end;
   else
     do;
       commandlist = makelist();
       commandlist = insertc (commandlist,"nepasirinktas skaičiavimo būdas",1);
       command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
```

```
               commandlist = dellist (commandlist) ;
              end ;
end ;
if symget ('nr') = 1 then
do ;
   TextEntry1.text = ' ';
   TextEntry2.text = ' ';
end;
if symget ('nr1') = 1 then
do;
   Checkbox1.selected = 'no' ;
   Checkbox2.selected = 'no' ;
end ;
return;
```

„Tmaxtolyg.scl“:

```
Pushbutton1:
call symput ('nr','0') ;
call symput ('nr1','0');
call symputn ('nnn',TextEntry2.text);
call symputn ('xx',TextEntry1.text);
if TextEntry1.text = ' ' and Textentry2.text = ' ' then
do ;
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Neįvestos visos reikšmės",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
    if TextEntry1.text = ' ' then
do;
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Neįvesta x reikšmė",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
   if textEntry1.text >= '0' then
do;
         textEntry1.text = ' ';
         commandlist = makelist();
         commandlist = insertc (commandlist,"x turi būti mažiau už 0",1);
         command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
         commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
  if symgetn ('xx') ='.' then
do;
  textEntry1.text = ' ';
  commandlist = makelist();
  commandlist = insertc (commandlist,"x įvesta ne skaičius",1);
  command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
  commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
   if textEntry2.text = ' ' then
do;
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Neįvesta n reikšmė",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
   if TextEntry2.text <='0' then
do;
   textEntry2.text = ' ';
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"n turi būti daugiau už 0",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
    if symgetn ('nnn') = '.' then
do;
   textEntry2.text = ' ';
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"n įvesta ne skaičius",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
```

```
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
do ;
   if Checkbox1.selected = 'Yes' and Checkbox2.selected = 'Yes' then
    do ;
    call symput ('nr','1') ;
    call symput ('nr1','1');
    submit continue ;
      data tolygmax ;
      k = -0.5 ;
      n = &nnn;
      do i = 1 to 10;
      x = k - 0.5;
      P = 1/(1-x)**2;
      k = x ;
      nn = 1-1/n ;
      bb =1-(1+x/n)*nn ;
      Aps = (1/(n*n))*(1/(bb**2)) ;
      skirt = Abs(Aps - P) ;
      output ;
      end ;
      run ;
      proc print data = tolygmax ;
      var x n p Aps skirt ;
      run ;
      symbol1 color = red value = dot height= 1 interpol = join ;
      symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
      symbol3 color = black value = dot height= 1 interpol = join ;
      proc gplot data = tolygmax ;
      plot  skirt *x;
      run ;
      data tolygmax1 ;
      k =  100;
      x = &xx ;
      do i = 1 to 10;
      n = k + 100;
      P = 1/(1-x)**2 ;
      k = n ;
      nm = 1/n ;
      nn = 1-1/n ;
      bb =1-(1+x/n)*nn ;
      Aps = (1/(n*n))*(1/(bb**2)) ;
      skirt = Abs(Aps - P) ;
      output ;
      end ;
      run ;
      proc print data = tolygmax1 ;
      var x n p Aps skirt ;
      run ;
      symbol1 color = red value = dot height= 1 interpol = join ;
      symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
      symbol3 color = black value = dot height= 1 interpol = join ;
      proc gplot data = tolygmax1 ;
      plot  skirt *n
            nm * n/overlay;
      run ;
      endsubmit ;
      end ;
      else
         if Checkbox1.selected = 'Yes' then
         do;
         call symput ('nr','1') ;
         call symput ('nr1','1') ;
         submit continue ;
         data tolygmax ;
         k = -0.5 ;
         n = &nnn ;
         do i = 1 to 10;
         x = k - 0.5;
         P = 1/(1-x)**2;
         k = x ;
         nn = 1-1/n ;
         bb =1-(1+x/n)*nn ;
         Aps = (1/(n*n))*(1/(bb**2)) ;
         skirt = Abs(Aps - P) ;
         output ;
         end ;
         run ;
         proc print data = tolygmax ;
```

```
        var x n p Aps skirt;
        run ;
        data tolygmax1 ;
        k =  100;
        x = &xx ;
        do i = 1 to 10;
        n = k + 100;
        P = 1/(1-x)**2 ;
        k = n ;
        nn = 1-1/n ;
        bb =1-(1+x/n)*nn ;
        Aps = (1/(n*n))*(1/(bb**2)) ;
        skirt = Abs(Aps - P) ;
        output ;
        end ;
        run ;
        proc print data = tolygmax ;
        var x n p Aps skirt ;
        run ;
        endsubmit ;
        end ;
        else
           if Checkbox2.selected = 'Yes' then
           do ;
           call symput ('nr','1') ;
           call symput ('nr1','1') ;
           submit continue ;
           data tolygmax ;
           k = -0.5 ;
           n = &nnn ;
           do i = 1 to 10;
           x = k - 0.5;
           P = 1/(1-x)**2;
           k = x ;
           nn = 1-1/n ;
           bb =1-(1+x/n)*nn ;
           Aps = (1/(n*n))*(1/(bb**2)) ;
           skirt = Abs(Aps - P) ;
           output ;
           end ;
           run ;
           symbol1 color = red value = dot height= 1 interpol = join ;
           symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
           symbol3 color = black value = dot height= 1 interpol = join ;
           proc gplot data = tolygmax ;
           plot  skirt *x;
           run ;
           data tolygmax1 ;
           k =  100;
           x = &xx ;
           do i = 1 to 10;
           n = k + 100;
           P = 1/(1-x)**2 ;
           k = n ;
           nm = 1/n ;
           nn = 1-1/n ;
           bb =1-(1+x/n)*nn ;
           Aps = (1/(n*n))*(1/(bb**2)) ;
           skirt = Abs(Aps - P) ;
           output ;
           end ;
           run ;
           symbol1 color = red value = dot height= 1 interpol = join ;
           symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
           symbol3 color = black value = dot height= 1 interpol = join ;
           proc gplot data = tolygmax1 ;
           plot  skirt *n
                 nm * n/overlay;
           run ;
           endsubmit ;
           end;
           else
             do;
               commandlist = makelist();
               commandlist = insertc (commandlist,"nepasirinktas skaičiavimo būdas",1);
               command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
               commandlist = dellist (commandlist) ;
              end ;
end ;
```

```
if symget ('nr') = 1 then
do ;
   TextEntry1.text = ' ';
   TextEntry2.text = ' ';
end;
if symget ('nr1') = 1 then
do;
   Checkbox1.selected = 'no' ;
   Checkbox2.selected = 'no' ;
end ;
return;
```

„Tmaxexp.scl“:

```
Pushbutton1:
call symput ('nr','0') ;
call symput ('nr1','0');
call symputn ('nnn',TextEntry2.text);
call symputn ('xx',TextEntry1.text);
if TextEntry1.text = ' ' and Textentry2.text = ' ' then
do ;
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Neįvestos visos reikšmės",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
    if TextEntry1.text = ' ' then
do;
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Neįvesta x reikšmė",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
   if textEntry1.text <= '0' then
do;
         textEntry1.text = ' ';
         commandlist = makelist();
         commandlist = insertc (commandlist,"x turi būti daugiau už 0",1);
         command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
         commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
    if symgetn ('xx') ='.' then
do;
    textEntry1.text = ' ';
    commandlist = makelist();
    commandlist = insertc (commandlist,"x įvesta ne skaičius",1);
    command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
    commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
   if textEntry2.text = ' ' then
do;
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Neįvesta n reikšmė",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
    if TextEntry2.text <='0' then
do;
   textEntry2.text = ' ';
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"n turi būti daugiau už 0",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
   if symgetn ('nnn') = '.' then
do;
   textEntry2.text = ' ';
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"n įvesta ne skaičius",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
```

```
else
do ;
  if Checkbox1.selected = 'Yes' and Checkbox2.selected = 'Yes' then
    do ;
    call symput ('nr','1') ;
    call symput ('nr1','1');
    submit continue ;
     data Tankmaxexp ;
      k = 0.5 ;
      n = &nnn ;
      do i = 1 to 10;
      x = k + 0.5;
      P = exp(-x)*1/((exp(-x)+1)**2);
      k = x ;
      F =1 - exp(-(log(n)+x));
      nn = 1-1/n ;
      bb = 1-F*nn ;
      Aps = (exp(-(log(n)+x))/n)*1/(bb*bb) ;
      skirt = Abs(Aps - P) ;
      output ;
      end ;
      run ;
      proc print data = Tankmaxexp ;
      var x n p Aps skirt ;
      run ;
      symbol1 color = red value = dot height= 1 interpol = join ;
      symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
      symbol3 color = black value = dot height= 1 interpol = join ;
      proc gplot data = Tankmaxexp ;
      plot  skirt *x;
      run ;
      data Tankmaxexp1 ;
      k =  500;
      x = &xx ;
      do i = 1 to 10;
      n = k + 100;
      P = exp(-x)*1/((exp(-x)+1)**2);
      k = n ;
      nm = 1/n ;
      F = 1 - exp(-(log(n)+x));
      nn = 1-1/n ;
      bb =1- F*nn ;
      Aps = (exp(-(log(n)+x))/n)*1/(bb*bb);
      skirt = Abs(Aps - P) ;
      output ;
      end ;
      run ;
      proc print data = Tankmaxexp1 ;
      var x n p Aps skirt ;
      run ;
      symbol1 color = red value = dot height= 1 interpol = join ;
      symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
      symbol3 color = black value = dot height= 1 interpol = join ;
      proc gplot data = Tankmaxexp1 ;
      plot  skirt *n
            nm * n/overlay;
      run ;
      endsubmit ;
    end ;
      else
         if Checkbox1.selected = 'Yes' then
         do;
         call symput ('nr','1') ;
         call symput ('nr1','1') ;
         submit continue ;
         data Tankmaxexp ;
         k = 0.5 ;
         n = &nnn ;
         do i = 1 to 10;
         x = k + 0.5;
         P = exp(-x)*1/((exp(-x)+1)**2);
         k = x ;
         F =1 - exp(-(log(n)+x));
         nn = 1-1/n ;
         bb = 1-F*nn ;
         Aps = (exp(-(log(n)+x))/n)*1/(bb*bb) ;
         skirt = Abs(Aps - P) ;
         output ;
         end ;
         run ;
```

```
proc print data = Tankmaxexp ;
var x n p Aps skirt ;
run ;
data Tankmaxexp1 ;
k =  500;
x = &xx ;
do i = 1 to 10;
n = k + 100;
P = exp(-x)*1/((exp(-x)+1)**2);
k = n ;
F = 1 - exp(-(log(n)+x));
nn = 1-1/n ;
bb =1-F*nn ;
Aps = (exp(-(log(n)+x))/n)*1/(bb*bb);
skirt = Abs(Aps - P) ;
output ;
end ;
run ;
proc print data = Tankmaxexp1 ;
var x n p Aps skirt ;
run ;
endsubmit ;
end ;
else
   if Checkbox2.selected = 'Yes' then
   do ;
   call symput ('nr','1') ;
   call symput ('nr1','1') ;
   submit continue ;
   data Tankmaxexp ;
   k = 0.5 ;
   n = &nnn ;
   do i = 1 to 10;
   x = k + 0.5;
   P = exp(-x)*1/((exp(-x)+1)**2);
   k = x ;
   F =1 - exp(-(log(n)+x));
   nn = 1-1/n ;
   bb = 1-F*nn ;
   Aps = (exp(-(log(n)+x))/n)*1/(bb*bb) ;
   skirt = Abs(Aps - P) ;
   output ;
   end ;
   run ;
   symbol1 color = red value = dot height= 1 interpol = join ;
   symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
   symbol3 color = black value = dot height= 1 interpol = join ;
   proc gplot data = Tankmaxexp ;
   plot  skirt *x;
   run ;
   data Tankmaxexp1 ;
   k =  500;
   x = &xx ;
   do i = 1 to 10;
   n = k + 100;
   P = exp(-x)*1/((exp(-x)+1)**2);
   k = n ;
   nm = 1/n;
   F = 1 - exp(-(log(n)+x));
   nn = 1-1/n ;
   bb =1-F*nn ;
   Aps = (exp(-(log(n)+x))/n)*1/(bb*bb);
   skirt = Abs(Aps - P) ;
   output ;
   end ;
   run ;
   symbol1 color = red value = dot height= 1 interpol = join ;
   symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
   symbol3 color = black value = dot height= 1 interpol = join ;
   proc gplot data = Tankmaxexp1 ;
   plot  skirt *n
         nm * n/overlay ;
   run ;
   endsubmit ;
   end;
   else
     do;
       commandlist = makelist();
       commandlist = insertc (commandlist,"nepasirinktas skaičiavimo būdas",1);
       command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
```

```
                commandlist = dellist (commandlist) ;
               end ;
end ;
if symget ('nr') = 1 then
do ;
   TextEntry1.text = ' ';
   TextEntry2.text = ' ';
end;
if symget ('nr1') = 1 then
do;
   Checkbox1.selected = 'no' ;
   Checkbox2.selected = 'no' ;
end ;
return;
```

„Tankminsar.scl“:

```
pushbutton2:
call display ('meniu.Meniu.Tmintolyg.frame') ;
return ;
pushbutton3:
call display ('meniu.Meniu.Tminexp.frame');
return ;
```

„Tmintolyg.scl“:

```
Pushbutton1:
call symput ('nr','0') ;
call symput ('nr1','0');
call symputn ('nnn',TextEntry2.text);
call symputn ('xx',TextEntry1.text);
if TextEntry1.text = ' ' and Textentry2.text = ' ' then
do ;
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Neįvestos visos reikšmės",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
    if TextEntry1.text = ' ' then
do;
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Neįvesta x reikšmė",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
    if textEntry1.text <= '0' then
do;
         textEntry1.text = ' ';
         commandlist = makelist();
         commandlist = insertc (commandlist,"x turi būti daugiau už 0",1);
         command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
         commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
     if symgetn ('xx')='.' then
do;
     textEntry1.text = ' ';
     commandlist = makelist();
     commandlist = insertc (commandlist,"x įvesta ne skaičius",1);
     command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
     commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
   if textEntry2.text = ' ' then
do;
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Neįvesta n reikšmė",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
if TextEntry2.text <='0' then
do;
   textEntry2.text = ' ';
   commandlist = makelist();
```

```
   commandlist = insertc (commandlist,"n turi būti daugiau už 0",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
  if symgetn ('nnn') = '.' then
do ;
    textEntry2.text = ' ';
    commandlist = makelist();
    commandlist = insertc (commandlist,"n įvesta ne skaičius",1);
    command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
    commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
do ;
if Checkbox1.selected = 'Yes' and Checkbox2.selected = 'Yes' then
    do ;
    call symput ('nr','1') ;
    call symput ('nr1','1');
    submit continue ;
     /* Minimumu tankis , kai atsitiktiniai dydziai turi tolyguji intervale [a;b]skirstini*/
     data Tmintolyg ;
      k = 0.5 ;
      n = &nnn ;
      do i = 1 to 10;
      x = k + 0.5;
      P = 1/(x+1)**2;
      k = x ;
      nn = 1-1/n ;
      bb =1-(1-x/n)*nn ;
      Aps = (1/(n*n))*(1/(bb**2)) ;
      skirt = Abs(Aps - P) ;
      output ;
      end ;
      run ;
      proc print data = Tmintolyg ;
      var x n p Aps skirt ;
      run ;
      symbol1 color = red value = dot height= 1 interpol = join ;
      symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
      symbol3 color = black value = dot height= 1 interpol = join ;
      proc gplot data = Tmintolyg ;
      plot  skirt *x;
      run ;
      data Tmintolyg1 ;
      k =  100;
      x = &xx ;
      do i = 1 to 10;
      n = k + 100;
      P = 1/(x+1)**2 ;
      k = n ;
      nm = 1/n ;
      nn = 1-1/n ;
      bb =1-(1-x/n)*nn ;
      Aps = (1/(n*n))*(1/(bb**2)) ;
      skirt = Abs(Aps - P) ;
      output ;
      end ;
      run ;
      proc print data = Tmintolyg1 ;
      var x n p Aps skirt ;
      run ;
      symbol1 color = red value = dot height= 1 interpol = join ;
      symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
      symbol3 color = black value = dot height= 1 interpol = join ;
      proc gplot data = Tmintolyg1 ;
      plot  skirt *n
            nm * n/overlay ; ;
      run ;
      endsubmit ;
      end ;
      else
         if Checkbox1.selected = 'Yes' then
         do;
         call symput ('nr','1') ;
         call symput ('nr1','1') ;
         submit continue ;
         /* Minimumu tankis , kai atsitiktiniai dydziai turi tolyguji intervale [a;b]skirstini*/
         data Tmintolyg ;
         k = 0.5 ;
```

```
n = &nnn ;
do i = 1 to 10;
x = k + 0.5;
P = 1/(x+1)**2;
k = x ;
nn = 1-1/n ;
bb =1-(1-x/n)*nn ;
Aps = (1/(n*n))*(1/(bb**2)) ;
skirt = Abs(Aps - P) ;
output ;
end ;
run ;
proc print data = Tmintolyg ;
var x n p Aps skirt ;
run ;
data Tmintolyg1 ;
k =  100;
x = &xx ;
do i = 1 to 10;
n = k + 100;
P = 1/(x+1)**2 ;
k = n ;
nn = 1-1/n ;
bb =1-(1-x/n)*nn ;
Aps = (1/(n*n))*(1/(bb**2)) ;
skirt = Abs(Aps - P) ;
output ;
end ;
run ;
proc print data = Tmintolyg1 ;
var x n p Aps skirt ;
run ;
endsubmit ;
end ;
else
   if Checkbox2.selected = 'Yes' then
   do ;
   call symput ('nr','1') ;
   call symput ('nr1','1') ;
   submit continue ;
   /* Minimumu tankis , kai atsitiktiniai dydziai turi tolyguji intervale [a;b]skirstini*/
   data Tmintolyg ;
   k = 0.5 ;
   n = &nnn ;
   do i = 1 to 10;
   x = k + 0.5;
   P = 1/(x+1)**2;
   k = x ;
   nn = 1-1/n ;
   bb =1-(1-x/n)*nn ;
   Aps = (1/(n*n))*(1/(bb**2)) ;
   skirt = Abs(Aps - P) ;
   output ;
   end ;
   run ;
   symbol1 color = red value = dot height= 1 interpol = join ;
   symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
   symbol3 color = black value = dot height= 1 interpol = join ;
   proc gplot data = Tmintolyg ;
   plot  skirt *x;
   run ;
   data Tmintolyg1 ;
   k =  100;
   x = &xx ;
   do i = 1 to 10;
   n = k + 100;
   P = 1/(x+1)**2 ;
   k = n ;
   nm = 1/n ;
   nn = 1-1/n ;
   bb =1-(1-x/n)*nn ;
   Aps = (1/(n*n))*(1/(bb**2)) ;
   skirt = Abs(Aps - P) ;
   output ;
   end ;
   run ;
   symbol1 color = red value = dot height= 1 interpol = join ;
   symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
   symbol3 color = black value = dot height= 1 interpol = join ;
```

```
            proc gplot data = Tmintolyg1 ;
            plot  skirt *n
                  nm * n/overlay;
            run ;
            endsubmit ;
            end;
            else
              do;
                commandlist = makelist();
                commandlist = insertc (commandlist,"nepasirinktas skaičiavimo būdas",1);
                command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
                commandlist = dellist (commandlist) ;
               end ;
end ;
if symget ('nr') = 1 then
do ;
   TextEntry1.text = ' ';
   TextEntry2.text = ' ';
end;
if symget ('nr1') = 1 then
do;
   Checkbox1.selected = 'no' ;
   Checkbox2.selected = 'no' ;
end ;
return;
```

„Tminexp.scl“:

```
Pushbutton1:
call symput ('nr','0') ;
call symput ('nr1','0');
call symputn ('nnn',TextEntry2.text);
call symputn ('xx',TextEntry1.text);
if TextEntry1.text = ' ' and Textentry2.text = ' ' then
do ;
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Neįvestos visos reikšmės",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
    if TextEntry1.text = ' ' then
do;
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Neįvesta x reikšmė",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
   if textEntry1.text <= '0' then
do;
    textEntry1.text = ' ';
    commandlist = makelist();
    commandlist = insertc (commandlist,"x turi būti daugiau už 0",1);
    command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
    commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
   if symgetn ('xx') ='.' then
do;
   textEntry1.text = ' ';
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"x įvesta ne skaičius",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
   if textEntry2.text = ' ' then
do;
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Neįvesta n reikšmė",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
    if TextEntry2.text <='0' then
do;
   textEntry2.text = ' ';
```

```
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"n turi būti daugiau už 0",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
   if symgetn ('nnn')='.' then
do;
   textEntry2.text = ' ';
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"n įvesta ne skaičius",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
do ;
   if Checkbox1.selected = 'Yes' and Checkbox2.selected = 'Yes' then
do ;
    call symput ('nr','1') ;
    call symput ('nr1','1');
    submit continue ;
     data Tminexp ;
      k = 0.5 ;
      n = &nnn ;
      do i = 1 to 10;
      x = k + 0.5;
      P = 1/((x+1)**2);
      k = x ;
      F = exp(-x/n);
      nn = 1-1/n ;
      bb =1-F*nn ;
      Aps = (1/(n*n))*F*(1/(bb*bb)) ;
      skirt = Abs(Aps - P) ;
      output ;
      end ;
      run ;
      proc print data = Tminexp ;
      var x n p Aps skirt ;
      run ;
      symbol1 color = red value = dot height= 1 interpol = join ;
      symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
      symbol3 color = black value = dot height= 1 interpol = join ;
      proc gplot data = Tminexp ;
      plot  skirt *x;
      run ;
      data Tminexp1 ;
      k =  500;
      x = &xx ;
      do i = 1 to 10;
      n = k + 100;
      P = 1/((x+1)**2);
      k = n ;
      nm = 1/n ;
      F = exp(-x/n);
      nn = 1-1/n ;
      bb =1-F*nn ;
      Aps = 1/(n*n)*F*(1/(bb*bb)) ;
      skirt = Abs(Aps - P) ;
      output ;
      end ;
      run ;
      proc print data = Tminexp1 ;
      var x n p Aps skirt;
      run ;
      symbol1 color = red value = dot height= 1 interpol = join ;
      symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
      symbol3 color = black value = dot height= 1 interpol = join ;
      proc gplot data = Tminexp1 ;
      plot  skirt *n
            nm * n/overlay ;
      run ;
      endsubmit ;
      end ;
      else
         if Checkbox1.selected = 'Yes' then
         do;
         call symput ('nr','1') ;
         call symput ('nr1','1') ;
         submit continue ;
         data Tminexp ;
```

```
k = 0.5 ;
n = &nnn ;
do i = 1 to 10;
x = k + 0.5;
P = 1/((x+1)**2);
k = x ;
F = exp(-x/n);
nn = 1-1/n ;
bb =1-F*nn ;
Aps = (1/(n*n))*F*(1/(bb*bb)) ;
skirt = Abs(Aps - P) ;
output ;
end ;
run ;
proc print data = Tminexp ;
var x n p Aps skirt ;
run ;
data Tminexp1 ;
k =  500;
x = &xx ;
do i = 1 to 10;
n = k + 100;
P = 1/((x+1)**2);
k = n ;
F = exp(-x/n);
nn = 1-1/n ;
bb =1-F*nn ;
Aps = 1/(n*n)*F*(1/(bb*bb)) ;
skirt = Abs(Aps - P) ;
output ;
end ;
run ;
proc print data = Tminexp1 ;
var x n p Aps skirt ;
run ;
endsubmit ;
end ;
else
   if Checkbox2.selected = 'Yes' then
   do ;
   call symput ('nr','1') ;
   call symput ('nr1','1') ;
   submit continue ;
   data Tminexp ;
   k = 0.5 ;
   n = &nnn ;
   do i = 1 to 10;
   x = k + 0.5;
   P = 1/((x+1)**2);
   k = x ;
   F = exp(-x/n);
   nn = 1-1/n ;
   bb =1-F*nn ;
   Aps = (1/(n*n))*F*(1/(bb*bb)) ;
   skirt = Abs(Aps - P) ;
   output ;
   end ;
   run ;
   symbol1 color = red value = dot height= 1 interpol = join ;
   symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
   symbol3 color = black value = dot height= 1 interpol = join ;
   proc gplot data = Tminexp ;
   plot  skirt *x;
   run ;
   data Tminexp1 ;
   k =  500;
   x = &xx ;
   do i = 1 to 10;
   n = k + 100;
   P = 1/((x+1)**2);
   k = n ;
   nm = 1/n ;
   F = exp(-x/n);
   nn = 1-1/n ;
   bb =1-F*nn ;
   Aps = 1/(n*n)*F*(1/(bb*bb)) ;
   skirt = Abs(Aps - P) ;
   output ;
   end ;
   run ;
```

```
            symbol1 color = red value = dot height= 1 interpol = join ;
            symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
            symbol3 color = black value = dot height= 1 interpol = join ;
            proc gplot data = Tminexp1 ;
            plot  skirt *n
                   nm * n/overlay;
            run ;
            endsubmit ;
            end;
            else
              do;
                commandlist = makelist();
                commandlist = insertc (commandlist,"nepasirinktas skaičiavimo būdas",1);
                command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
                commandlist = dellist (commandlist) ;
               end ;
end ;
if symget ('nr') = 1 then
do ;
   TextEntry1.text = ' ';
   TextEntry2.text = ' ';
end;
if symget ('nr1') = 1 then
do;
   Checkbox1.selected = 'no' ;
   Checkbox2.selected = 'no' ;
end ;
return;
```

„Netmax.scl“:

```
Pushbutton1:
call symput ('nr','0') ;
call symput ('nr1','0');
call symputn ('nnn',TextEntry2.text);
call symputn ('xx',TextEntry1.text);
if TextEntry1.text = ' ' and Textentry2.text = ' ' then
do ;
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Neįvestos visos reikšmės",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
    if TextEntry1.text = ' ' then
do;
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Neįvesta x reikšmė",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
   if textEntry1.text <= exp(1) then
do;
   textEntry1.text = ' ';
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"x turi būti daugiau už e",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
     if  symgetn ('xx')= '.' then
do;
     textEntry1.text = ' ';
     commandlist = makelist();
     commandlist = insertc (commandlist,"x įvesta ne skaičius",1);
     command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
     commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
   if textEntry2.text = ' ' then
do;
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"Neįvesta n reikšmė",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end ;
else
   if TextEntry2.text <='0' then
```

```
do;
   textEntry2.text = ' ';
   commandlist = makelist();
   commandlist = insertc (commandlist,"n turi būti daugiau už 0",1);
   command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
   commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
    if symgetn ('nnn')='.' then
do ;
     textEntry2.text = ' ';
     commandlist = makelist();
     commandlist = insertc (commandlist,"n įvesta ne skaičius",1);
     command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
     commandlist = dellist (commandlist) ;
end;
else
do ;
if Checkbox1.selected = 'Yes' and Checkbox2.selected = 'Yes' then
    do ;
    call symput ('nr','1') ;
    call symput ('nr1','1');
    submit continue ;
    data netmax ;
    k = 0.5 ;
    n = &nnn ;
    do i = 1 to 10;
    x = k + 0.5;
    P = 1/(x*x)*1/(((1/x)+1)**2);
    k = x ;
    F =1-1/(n*x);
    nn = 1-1/n ;
    bb = 1-F*nn ;
    Aps = (1/(x*x*n*n))*1/(bb*bb) ;
    skirt = Abs(Aps - P) ;
    output ;
    end ;
    run ;
    proc print data = netmax ;
    var x n p Aps skirt ;
    run ;
    symbol1 color = red value = dot height= 1 interpol = join ;
    symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
    symbol3 color = black value = dot height= 1 interpol = join ;
    proc gplot data = netmax ;
    plot  skirt *x;
    run ;
    data netmax1 ;
    k = 1000 ;
    x = &xx ;
    do i = 1 to 10;
    n = k + 1000 ;
    P = 1/(x*x)*1/(((1/x)+1)**2);
    k = n ;
    nm =1/n ;
    F =1-1/(n*x);
    nn = 1-1/n ;
    bb = 1-F*nn ;
    Aps = (1/(x*x*n*n))*1/(bb*bb) ;
    skirt = Abs(Aps - P) ;
    output ;
    end ;
    run ;
    proc print data = netmax1 ;
    var n x p Aps skirt ;
    run ;
    symbol1 color = red value = dot height= 1 interpol = join ;
    symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
    symbol3 color = black value = dot height= 1 interpol = join ;
    proc gplot data = netmax1 ;
    plot  skirt *n
          nm * n/overlay  ;
    run ;
    endsubmit ;
    end ;
    else
         if Checkbox1.selected = 'Yes' then
         do;
         call symput ('nr','1') ;
         call symput ('nr1','1') ;
```

```
submit continue ;
data netmax ;
k = 0.5 ;
n = &nnn ;
do i = 1 to 10;
x = k + 0.5;
P = 1/(x*x)*1/(((1/x)+1)**2);
k = x ;
F =1-1/(n*x);
nn = 1-1/n ;
bb = 1-F*nn ;
Aps = (1/(x*x*n*n))*1/(bb*bb) ;
skirt = Abs(Aps - P) ;
output ;
end ;
run ;
proc print data = netmax ;
var x n p Aps skirt ;
run ;
data netmax1 ;
k = 1000 ;
x = &xx ;
do i = 1 to 10;
n = k + 1000 ;
P = 1/(x*x)*1/(((1/x)+1)**2);
k = n ;
F =1-1/(n*x);
nn = 1-1/n ;
bb = 1-F*nn ;
Aps = (1/(x*x*n*n))*1/(bb*bb) ;
skirt = Abs(Aps - P) ;
output ;
end ;
run ;
proc print data = netmax1 ;
var x n p Aps skirt ;
run ;
endsubmit ;
end ;
else
   if Checkbox2.selected = 'Yes' then
   do ;
   call symput ('nr','1') ;
   call symput ('nr1','1') ;
   submit continue ;
    data netmax ;
    k = 0.5 ;
    n = &nnn ;
    do i = 1 to 10;
    x = k + 0.5;
    P = 1/(x*x)*1/(((1/x)+1)**2);
    k = x ;
    F =1-1/(n*x);
    nn = 1-1/n ;
    bb = 1-F*nn ;
    Aps = (1/(x*x*n*n))*1/(bb*bb) ;
    skirt = Abs(Aps - P) ;
    output ;
    end ;
    run ;
    symbol1 color = red value = dot height= 1 interpol = join ;
    symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
    symbol3 color = black value = dot height= 1 interpol = join ;
    proc gplot data = netmax ;
    plot  skirt *x;
    run ;
    data netmax1 ;
    k = 1000 ;
    x = &xx ;
    do i = 1 to 10;
    n = k + 1000 ;
    P = 1/(x*x)*1/(((1/x)+1)**2);
    k = n ;
    nm = 1/n ;
    F =1-1/(n*x);
    nn = 1-1/n ;
    bb = 1-F*nn ;
    Aps = (1/(x*x*n*n))*1/(bb*bb) ;
    skirt = Abs(Aps - P) ;
    output ;
```

```
            end ;
            run ;
            symbol1 color = red value = dot height= 1 interpol = join ;
            symbol2 color = blue value = star height = 1 interpol = join ;
            symbol3 color = black value = dot height= 1 interpol = join ;
            proc gplot data = netmax1 ;
            plot  skirt *n
                  nm * n/overlay;
            run ;
           endsubmit ;
           end;
           else
             do;
               commandlist = makelist();
               commandlist = insertc (commandlist,"Nepasirinktas skaičiavimo būdas",1);
               command = messagebox(commandlist,'!','0','Pranešimas') ;
               commandlist = dellist (commandlist) ;
              end ;
end ;
if symget ('nr') = 1 then
do ;
   TextEntry1.text = ' ';
   TextEntry2.text = ' ';
end;
if symget ('nr1') = 1 then
do;
   Checkbox1.selected = 'no' ;
   Checkbox2.selected = 'no' ;
end ;
return;
```