



**KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS**  
**FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS**  
**TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA**

**Irena Simonaitytė**

**Priverstinės sinchronizacijos sistemos  
matematinio modelio sudarymas ir tyrimas**

Magistro darbas

**Vadovas**  
**prof. dr. J. Rimas**

**KAUNAS, 2005**



**KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS**  
**FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS**  
**TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA**

**TVIRTINU**  
**Katedros vedėjas**  
**prof. dr. J.Rimas**  
**2005 06 11**

**Priverstinės sinchronizacijos sistemos**  
**matematinio modelio sudarymas ir tyrimas**

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

**Kalbos konsultantas**  
**dr. J.Džežulskienė**  
**2005 05 30**

**Vadovas**  
**prof. dr. J.Rimas**  
**2005 06 03**

**Recenzentas**  
**doc. dr. V.Galvanauskas**  
**2005 06 01**

**Atliko**  
**FMMM – 3gr. stud.**  
**Irena Simonaitytė**  
**2005 05 27**

**KAUNAS, 2005**

## KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

**Pirmininkas:**

Leonas Saulis, profesorius (VGTU)

**Sekretorius:**

Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)

**Nariai:**

Algimantas Jonas Aksomaitis, profesorius (KTU)

Vytautas Janilionis, docentas (KTU)

Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU)

Rimantas Rudzkis, banko NORD/LB vyriausiasis analitikas

Zenonas Navickas, profesorius (KTU)

Arūnas Barauskas, UAB „Elsis“ generalinio direktoriaus pavaduotojas

**Simonaitytė I. Working out and investigation of the mathematical model of the forced synchronization system : Master's work in applied mathematics / supervisor prof. J. Rimas; Department of Applied mathematics, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. – 2005. – 52 p.**

## **SUMMARY**

The mathematical model of the forced synchronization system, composed of four oscillators is investigated. The mathematical model of the system is the matrix differential equation with delayed arguments.

The matrix differential equation is solved using method of steps and applying Laplace transform. Using this method and exact solution of the matrix differential equation with delayed arguments was obtained and exact expressions of the elements of the step responses matrix, of the synchronization system are got. On the base of derived formulas the transition processes of the system are investigated.

## TURINYS

<b>IVADAS</b> .....	7
<b>1. BENDROJI DALIS</b> .....	8
1.1. SINCHRONIZACIJA. SINCHRONIZAVIMO BŪDAI.....	8
1.2. OPERACINIS SKAIČIAVIMAS. LAPLASO TRANSFORMACIJA.....	9
1.3. APIBENDRINTOS FUNKCIJOS.....	12
<b>2. TIRIAMOJI DALIS</b> .....	16
2.1. SINCHRONIZACIJOS SISTEMOS MATEMATINIO MODELIO SUDARYMAS.....	16
2.2. DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SPRENDIMAS.....	18
2.2.1. MATRICINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTIES SPRENDIMAS.....	18
2.3. MATRICOS, NUSAKANČIOS VIDINĘ RYŠIŲ STRUKTŪRĄ, K-TOJO LAIPSNIO RADIMAS.....	24
2.4. PEREINAMŲJŲ PROCESŲ SISTEMOJE TYRIMAS.....	27
2.4.1. PEREINAMŲJŲ FUNKCIJŲ SKAIČIAVIMAS.....	27
2.4.2. PEREINAMŲJŲ PROCESŲ PRIKLAUSOMYBĖS NUO PRADINIŲ SĄLYGŲ TYRIMAS.....	29
2.4.3. RIBINĖS GENERATORIŲ VIRPESIŲ FAZIŲ SKIRTUMŲ REIKŠMĖS.....	33
<b>PROGRAMINĖ REALIZACIJA IR INSTRUKCIJA VARTOTOJUI</b> .....	38
<b>IŠVADOS</b> .....	39
<b>LITERATŪRA</b> .....	40
1 priedas. VAIZDŲ PIRMAVAIZDŽIŲ SKAIČIAVIMAS.....	41
2 priedas. PEREINAMŲJŲ FUNKCIJŲ SKAIČIAVIMO ALGORITMAS.....	43
3 priedas. PEREINAMŲJŲ FUNKCIJŲ GRAFIKAI.....	44
4 priedas. GENERATORIŲ VIRPESIŲ FAZIŲ SKIRTUMO SKAIČIAVIMO ALGORITMAS.....	47
5 priedas. GENERATORIŲ VIRPESIŲ FAZIŲ SKIRTUMŲ GRAFIKAI.....	50

## PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

- 1.1 pav. Ryšio tinklo sinchronizavimo būdai, psl.9
- 1.2 pav. Pirmavaizdžio vaizdas pusplokštumėje, psl.10
- 1.3 pav. Hevisaido vienetinės funkcijos grafikas, psl.13
- 1.4 pav. Vėluojančiosios vienetinės funkcijos grafikas, psl.13
- 1.5 pav. Funkcijos  $f(t)l(t)$  grafikas, psl.14
- 1.6 pav. Vėluojančiosios funkcijos grafikas, psl.14
- 1.7 pav. Impulsinės funkcijos grafikas, psl.14
- 2.1 pav. Priverstinės sinchronizacijos sistemos schema, psl.16
- 2.2 pav. Pereinamųjų funkcijų  $h_{ij}(\kappa t)$  grafikai, psl.28
- 2.3 pav. Pereinamųjų funkcijų  $h_{ij}(\kappa t)$  grafikai, psl.29
- 2.4 pav. Fazių skirtumo  $x_4(t) - x_3(t)$  grafikai, psl.37
- 2.5 pav. Fazių skirtumo  $x_4(t) - x_1(t)$  grafikai prie skirtingų  $\kappa t$  reikšmių, psl.37

## IVADAS

Siekiant sumažinti informacijos, perduodamos ryšio tinklu, nuostolius būtina sinchronizuoti tinklo komutacijos mazgų taktinius generatorius. Vienas iš galimų tokios sinchronizacijos būdų yra priverstinė taktinių generatorių sinchronizacija. Šiame darbe yra nagrinėjama priverstinės sinchronizacijos sistema, sudaryta iš keturių generatorių: vedančiojo generatoriaus ir kitų trijų generatorių, sujungtų tarpusavyje ir su vedančiuoju.

Remdamiesi sinchronizacijos sistemos struktūrine schema, sudarome šios sistemos matematinį modelį. Nagrinėjamos sistemos matematinis modelis yra matricinė diferencialinė lygtis su vėluojančiu argumentu. Šią lygtį sprendžiame žingsnių metodu: intervalą  $0 \leq t < \infty$  dalijame į vienodo ilgio  $\tau$  intervalus ir kiekviename daliniame intervale lygtį sprendžiame atskirai, kaip paprastą matricinę diferencialinę lygtį be vėluojančio argumento. Sprendinys, gautas  $k$ -tajame intervale yra pradinė sąlyga sprendžiant lygtį  $(k+1)$ -jame intervale. Ieškodami sprendinio kiekviename daliniame intervale, naudojame Laplaso transformaciją.

Suradę matricinių diferencialinių lygčių sprendinius ir panaudoję atvirkštinę Laplaso transformaciją, nagrinėjame sinchronizacijos sistemos dinamiką. Sinchronizacijos sistemos dinamiką tiriamo remdamiesi jos pereinamosiomis funkcijomis. Šių funkcijų analizes išraiškas gauname panaudoję surastą matricinės diferencialinės lygties sprendinį. Panaudoję sprendinį randame ir sistemos generatorių virpesių fazių skirtumų analizes išraiškas. Remiantis gautomis pereinamųjų funkcijų ir fazių skirtumų analizinėmis išraiškomis atliktas pereinamųjų procesų sinchronizacijos sistemoje tyrimas.

## 1. BENDROJI DALIS

### 1.1. SINCHRONIZACIJA. SINCHRONIZAVIMO BŪDAI

Sinchronizacija – kelių procesų suderinimas taip, kad jie vyktų su vienodu fazių skirtumu arba vienu metu. Periodiniai procesai sinchronizuojami taip: jų periodai (dažniai) padaromi lygūs arba kartotiniai, o fazių skirtumas pastovus. Procesai, atitinkantys sinchroniškumo sąlygas, vadinami sinchroniniais, o jų sinchroniškumo savybė – sinchronizmu. Nesinchroniniai procesai vadinami asinchroniniais [9].

Apžvelgsime, kaip sinchronizuojami ryšio tinklai. Ryšio tinklo svarbiausios funkcijos yra perdavimas ir komutavimas. Pradžioje ir perdavimas, ir komutavimas buvo analoginiai, vėliau tapo skaitmeniniais.

Telefoninio ryšio tinkluose pirmosios skaitmeninės perdavimo linijos buvo panaudotos tarp analoginių komutatorių. Tada sinchronizuoti vienos sistemos taktinį dažnį su kitos sistemos taktiniu dažniu dar nereikėjo. Tokios sinchronizacijos poreikis atsirado tada, kai skaitmeninę technologiją imta naudoti ir komutatoriuose. Skaitmeniniam komutatoriui sinchronizacija reikalinga, norint išvengti įėjimo signalų poslinkių ir informacijos nuostolių. Tokie poslinkiai nedaug tepaveikia normalų telefoninį pokalbį, bet duomenų ryšio paslaugose gali sukurti daug problemų. Todėl atsiradus duomenų perdavimo tinklams ir integruotam skaitmeniniam tinklui, sinchronizacija tapo būtina.

Ryšio tinkluose pradėtos naudoti sinchroninės skaitmeninės ryšio sistemos. Tinklo sinchronizacija leido panaudoti visus sistemos resursus, pagerinti paslaugų kokybę.

Sinchronizuojant ryšio tinklą, kurio taktinio dažnio generatoriai išsidėstę dideliame geografiniame plote, yra paskirstomas atraminis laiko arba dažnio signalas, stengiamasi suvienodinti visų jų laiko ir dažnių skales. Yra bandytos įvairios tinklo sinchronizavimo strategijos; keletą pastarųjų dešimtmečių plačiausiai buvo taikomos trys iš jų: pleziosinchronizavimas, priverstinis sinchronizavimas ir tarpusavio sinchronizavimas [4].

Pleziosinchronizavimo strategiją reikėtų vadinti nesinchronizavimo strategija, nes kiekviename tinklo mazge yra nepriklausomas taktinio dažnio generatorius. Ši valdymo forma yra paprasčiausia, bet jos efektyvumas priklauso nuo pavienių elementų elgsenos. Atskirų mazgų veiklos sinchronizavimą apsprendžia tinklo generatorių (taktinio dažnio generatorių) tikslumas, todėl tie generatoriai turi būti kokybiški. Pleziosinchronizavimo strategija praeityje buvo plačiai naudojama dažnio sutankinimo tinkluose [4]. Pleziosinchronizavimo struktūrinė schema pateikta 1.1 a pav.

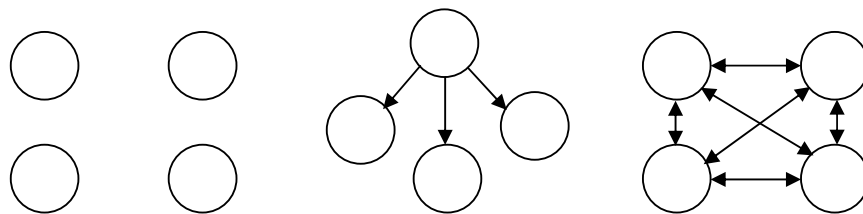
Priverstinės sinchronizacijos strategija remiasi vieno pagrindinio generatoriaus signalo tiesioginiu arba netiesioginiu paskirstymu visiems kitiems tinkle esantiems taktiniams generatoriams. Priverstinės sinchronizacijos sistemų trūkumas – jų mažas gyvybingumas. Gyvybingumo padidinimui priverstinėse



sinchronizavimo sistemose paprastai būna pora ar daugiau papildomų lygmenų, turinčių pagrindinį generatorių.

Iš pradžių skaitmeninėse telefono stotyse buvo stengiamasi įrengti labai tikslus, bet nepriklausomus taktinius generatorius, viliantis, kad kvarcinių ir atominių generatorių kaina vis mažės. Vėliau, kai greta paprasto telefoninio ryšio atsirado vis sudėtingesnių duomenų perdavimo paslaugų, sinchronizavimo poreikis ėmė vis labiau ryškėti. Šiuo metu priverstinės sinchronizacijos sistemos yra plačiausiai taikomos telekomunikacijų tinkluose, nes jos užtikrina patikimą tinklo sinchronizavimą [4]. Priverstinės sinchronizacijos sistemos struktūrinė schema pateikta 1.1 b pav.

Tarpusavio sinchronizacija pagrįsta tiesiogine abipuse kontrole. Tokioje sistemoje kiekvieno generatoriaus dažnis yra nustatomas apibendrinus visų likusiųjų dažnius. Tokios sinchronizacijos sistemos pasižymi dideliu gyvybingumu, nes nėra pagrindinio generatoriaus. Tačiau šio tipo sinchronizacijos sistemų modeliavimas ar net stabilumą užtikrinančių kontrolės algoritmų kūrimas yra sudėtingas. Todėl tokie tinklai yra gana brangūs ir iki šiol naudojami tik ypatingais atvejais, pavyzdžiui, karyboje [4,9]. Tarpusavio sinchronizacijos sistemos struktūrinė schema pateikta 1.1 c pav.



**1.1 pav. Ryšio tinklo sinchronizavimo būdai**

## 1.2. OPERACINIS SKAIČIAVIMAS. LAPLASO TRANSFORMACIJA

Tiesinių grandinių analizės metodas, pagrįstas realaus kintamojo funkcijų Laplaso transformacija, vadinamas operaciniu. Čia veiksmai su funkcijomis pakeičiami veiksmams su jų vaizdais. Daugeliu atvejų veiksmai su vaizdais yra paprastesni. Uždavinių sprendimo metodą, kai pirmavaizdžiai keičiami į jų vaizdus, su vaizdais atliekami veiksmai ir nuo gautojo rezultato – vaizdo grįžtama prie jo pirmavaizdžio, vadiname operaciniu skaičiavimu [9].

Paiškinsime kai kurias sąvokas, naudojamas operaciniame skaičiavime.

Realaus kintamojo  $t$  kompleksinę funkciją  $f(t)$  vadiname pirmavaizdžiu, kai [11];

1) funkcija  $f(t)$  intervale  $0 \leq t < \infty$  yra tolydi arba turi tikrai pirmojo tipo trūkio taškus, kurių skaičius bet kuriame baigtiniame intervale yra baigtinis,

2)  $f(t) = 0$ , kai  $t < 0$ ,

3) didėjant  $t$ , funkcijos  $f(t)$  modulis didėja ne greičiau, kaip eksponentinė funkcija, t.y., egzistuoja tokie teigiami skaičiai  $\sigma$  ir  $M$  su kuriais

$$|f(t)| \leq Me^{\sigma t}, \quad (1.1)$$

kai  $t > 0$ .

Pirmavaizdžio  $f(t)$  vaizdu vadiname kompleksinio kintamojo  $p$  funkciją  $F(p)$ , apibrėžiamą netiesioginiu integralu:

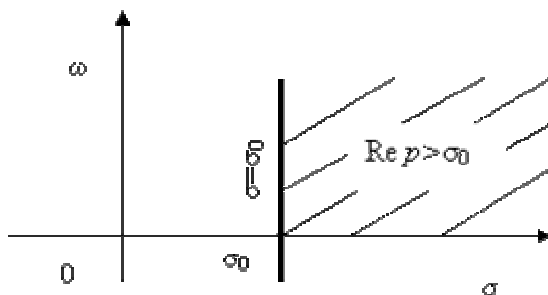
$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (1.2)$$

Šis integralas vadinamas funkcijos  $f(t)$  Laplaso transformacija. Veiksmas, kuriuo randamas pirmavaizdžio  $f(t)$  vaizdas  $F(p)$ , taip pat, vadinamas Laplaso transformacija.

Vaizdo  $F(p)$  ir pirmavaizdžio  $f(t)$  atitiktį žymėsime vienu šių simboliu:  $f(t) \div F(p)$ ,  $F(p) = L\{f(t)\}$ .

Pirmavaizdžio  $f(t)$  vaizdas  $F(p)$  yra apibrėžtas ne visoje kompleksinėje plokštumoje  $p$ . Kokia funkcijos  $F(p)$  apibrėžimo sritis, t.y. kurioje kompleksinės plokštumos  $p$  srityje funkcijos  $f(t)$  Laplaso integralas konverguoja, nusako ši teorema.

Vaizdo egzistavimo teorema [11]. Kiekvienas pirmavaizdis  $f(t)$  turi vaizdą  $F(p)$ , apibrėžtą pusplokštumėje  $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ ; čia  $\sigma_0$  – funkcijos  $f(t)$  didėjimo rodiklis (tikslus apatinis visų skaičių  $\sigma$ , kuriems teisinga (1.1) nelygybė, rėžis  $\sigma_0$  vadinamas funkcijos  $f(t)$  didėjimo rodikliu) (1.2 pav.).



### 1.2 pav. Pirmavaizdžio vaizdas pusplokštumėje

Pirmavaizdžio  $f(t)$  Laplaso integralas konverguoja su visomis parametro  $p$  reikšmėmis, kurių  $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ . Vaizdas  $F(p)$  yra analizinė funkcija pusplokštumėje  $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0$ .

Pateiksime svarbesnes Laplaso transformacijos savybes.

Tiesiškumo teorema [11]. Jei pirmavaizdžių  $f_1(t)$  ir  $f_2(t)$  vaizdai yra atitinkamai  $F_1(p)$  ir  $F_2(p)$ , t.y.,  $f_1(t) \div F_1(p)$  ir  $f_2(t) \div F_2(p)$ , ir  $C_1, C_2$  - kompleksiniai skaičiai, tai

$$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \div C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p). \quad (1.3)$$

Laplaso transformacijos teisiškumo savybė gali būti apibendrinta, bet kuriam baigtiniam dėmenų skaičiui: jeigu  $f_k(t) \div F_k(p)$ ,  $k = \overline{1, n}$  ir  $C_k \in C$ , tai

$$\sum_{k=1}^n C_k f_k(t) \div \sum_{k=1}^n C_k F_k(p). \quad (1.4)$$

Panašumo teorema [11]. Jeigu  $f(t) \div F(p)$  ir  $\lambda > 0$ , tai

$$f(\lambda t) \div \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right). \quad (1.5)$$

Postūmio teorema [11]. Jeigu  $a$  yra bet koks kompleksinis skaičius ir  $f(t) \div F(p)$ , tai

$$F(p-a) \div e^{at} f(t). \quad (1.6)$$

Vėlavimo teorema [2]. Jeigu  $\tau > 0$  ir  $f(t) \div F(p)$ , tai

$$f(t-\tau) \div e^{-p\tau} F(p). \quad (1.7)$$

Pirmavaizdžio diferencijavimo teorema [11]. Jeigu  $f(t)$  yra tolydi, dalimis diferencijuojama funkcija, kai  $t > 0$ , be to  $f(t)$  ir  $f'(t)$  yra pirmavaizdžiai ir  $f(t) \div F(p)$ , tai

$$f'(t) \div pF(p) - f(0); \quad (1.8)$$

čia  $f(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$  – pradinė pirmavaizdžio reikšmė.

Vaizdų sandaugos teorema [11]. Jeigu  $f_1(t) \div F_1(p)$  ir  $f_2(t) \div F_2(p)$ , tai

$$F_1(p)F_2(p) \div \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau. \quad (1.9)$$

Dešinėje šios operatorinėm lygybės pusėje esantis integralas vadinamas funkcijų  $f_1(t)$  ir  $f_2(t)$  sąsūka.

Ribinės reikšmės teorema [2]. Jeigu  $f(t) \div F(p)$  ir  $f'(t)$  yra pirmavaizdis, be to egzistuoja  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ , tai

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p). \quad (1.10)$$

Funkcijų  $f(t)$  ir  $F(p)$  atitiktį, aprašytą lygybe

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\omega}^{\sigma_0 + i\omega} F(p) e^{pt} dp$$

(čia  $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0$ ,  $\sigma_0$  - funkcijos  $f(t)$  didėjimo rodiklis), vadiname atvirkštine Laplaso transformacija ir žymime  $f(t) = L^{-1}(F(p))$ .

Pritaikę Laplaso transformaciją tiesinei diferencialinei lygčiai, gauname vaizdų operatorinę lygtį (sprendinio vaizdą vadiname operatoriniu sprendiniu). Tokioje transformuotoje lygtyje jau yra įvertintos pradinės sąlygos. Pritaikę atvirkštinę Laplaso transformaciją operatoriniam sprendiniui, gauname diferencialinės lygties sprendinį.

### 1.3. APIBENDRINTOS FUNKCIJOS

Apibendrintos funkcijos apibrėžimas [6]. Bet kurią tiesinį tolydų funkcionalą, apibrėžtą pagrindinių funkcijų erdvėje  $D(\Omega)$ , vadiname apibendrintąja funkcija. Apibendrintųjų funkcijų erdvę žymėsime  $D^*(\Omega)$ , arba trumpiau – . Simboliu  $\langle f, \varphi \rangle$  žymėsime funkcionalo  $f \in D^*(\Omega)$  reikšmę taške  $\varphi \in D(\Omega)$ .

Paaiškinsim apibendrintosios funkcijos apibrėžimą:

1. Apibendrintoji funkcija  $f$  yra funkcionalas erdvėje  $D(\Omega)$ , t.y. kiekvienai funkcijai  $\varphi \in D(\Omega)$  priskiria skaičių  $\langle f, \varphi \rangle$ .

2. Apibendrintoji funkcija  $f$  yra tiesinis funkcionalas erdvėje  $D(\Omega)$ , t.y. jeigu  $\varphi, \psi \in D(\Omega)$ ,  $\lambda, \mu \in C$ , tai

$$\langle f, \lambda\varphi + \mu\psi \rangle = \lambda \langle f, \varphi \rangle + \mu \langle f, \psi \rangle.$$

3. Apibendrintoji funkcija  $f$  yra tolydus funkcionalas erdvėje  $D(\Omega)$ , t.y. jeigu  $\varphi_k \rightarrow \varphi$ , kai  $k \rightarrow \infty$ , tai  $\langle f, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$ , kai  $k \rightarrow \infty$ .

Išskirsime dvi plačias apibendrintų funkcijų klases:

1. Reguliariosios apibendrintosios funkcijos. Tegu  $f$  yra lokaliai integruojama srityje  $\Omega$  funkcija. Integralas

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in D(\Omega)$$

apibrėžia reguliariają apibendrintą funkciją  $f$ .

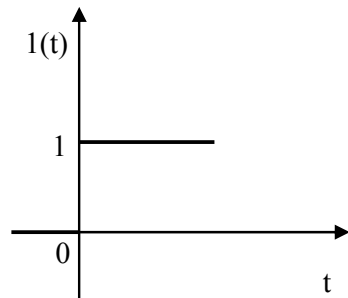
2. Singuliariosios apibendrintosios funkcijos. Apibendrintąsias funkcijas, kurių negalima aprašyti šiuo integralu, vadinsime singuliariomis apibendrintomis funkcijomis.

Apibendrintoms funkcijoms priklauso Hevisaido vienetinė funkcija, Dirako delta funkcija.

Hevisaido funkcija [11]. Funkciją

$$f(t) = 1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

vadiname Hevisaido vienetine funkcija (1.3 pav.).



### 1.3 pav. Hevisaido vienetinės funkcijos grafikas

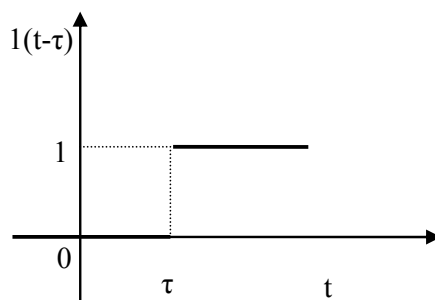
Kiekvieną pirmavaizdį, naudojant Hevisaido vienetinę funkciją, galima parašyti taip:

$$f(t)1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

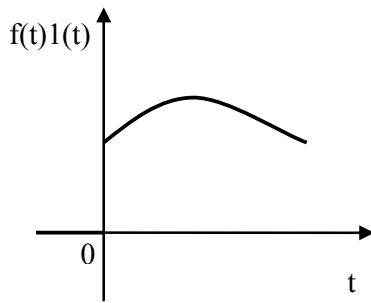
Vėluojanti funkcija [11]. Funkciją

$$1(t - \tau) = \begin{cases} 1, & t \geq \tau, \\ 0, & t < \tau. \end{cases}$$

vadiname vėluojančiąja vienetine funkcija (1.4 pav.).



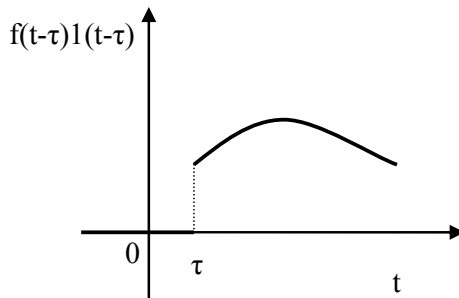
### 1.4 pav. Vėluojančiosios vienetinės funkcijos grafikas



**1.5 pav. Funkcijos  $f(t)l(t)$  grafikas**

Funkciją  $f(t-\tau)l(t-\tau)$  vadiname vėluojančiąja funkcija.

Vėluojančios funkcijos grafikas gaunamas iš funkcijos  $f(t)l(t)$  grafiko (1.5 pav.), pastūmus jį į dešinę atstumu  $\tau$  (1.6 pav.).

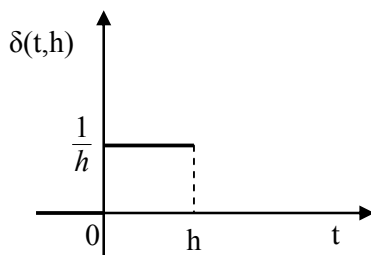


**1.6 pav. Vėluojančiosios funkcijos grafikas**

Dirako delta funkcija [2]. Funkcija (1.7 pav.)

$$\delta(t, h) = \frac{1}{h} (1(t) - 1(t-h)) = \begin{cases} 0, & t < 0, \quad t > h, \\ \frac{1}{h}, & 0 < t < h. \end{cases}$$

vadinama impulsine.



**1.7 pav. Impulsinės funkcijos grafikas**

Impulsinę funkciją galima traktuoti kaip jėgą  $\frac{1}{h}$ , veikiančią  $0 \leq t \leq h$ . Tokios jėgos sukurtas

impulsas yra lygus vienetui, t.y.  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t, h) dt = \int_0^h \frac{dt}{h} = 1$ .

Perėję prie ribos, kai  $h \rightarrow 0$ , gauname:

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta(t, h) = \begin{cases} +\infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases}$$

t.y. momentu  $t = 0$ , turime begalinę jėgą. Tačiau jos sukurtą jėgos impulsą laikome taip pat lygiu vienetui, t.y.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t, h) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Funkcijos  $\delta(t)$  vaizdas yra impulsinės funkcijos  $\delta(t, h)$  vaizdo riba, kai  $h \rightarrow 0$ . Taigi, jeigu

$$\delta(t, h) \div \frac{1}{h} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-ph} \right),$$

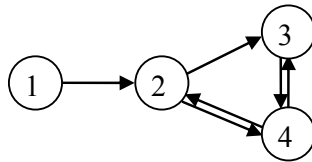
tai

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta(t, h) \div \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-ph}}{ph} = 1.$$

## 2. TIRIAMOJI DALIS

### 2.1. SINCHRONIZACIJOS SISTEMOS MATEMATINIO MODELIO SUDARYMAS

Nagrinėsime priverstinę sinchronizacijos sistemą, sudarytą iš keturių tarpusavyje sujungtų generatorių. 2.1 paveiksle pateikta šios sistemos schema, vaizduojanti taktinius generatorius (skrituliukai) ir ryšio linijas, kuriomis perduodami sinchronizacijos signalai, (orientuotos tiesės atkarpos).



2.1 pav. Priverstinės sinchronizacijos sistemos schema

Remdamiesi struktūrine sistemos schema (2.1 pav.), galime užrašyti visų keturių generatorių valdymo lygtis.  $i$ -tojo generatoriaus valdymo signalas  $\Delta f_i(t)$  proporcingas generatorių virpesių fazių skirtumams fazinių detektorių  $FD_{ij}$ ,  $j = \overline{1, m}$  įėjimuose; čia  $m$  skaičius generatorių, turinčių tiesioginį ryšį su  $i$ -tuoju generatoriumi. Valdymo lygtis sinchronizacijos sistemos  $i$ -tajam generatoriui gali būti parašyta taip:

$$f_i(t) = f_{0i} + \Delta f_i(t), \quad i = \overline{1, 4}; \quad (2.1)$$

čia

$$\begin{aligned} \Delta f_1(t) &= 0, \\ \Delta f_2(t) &= \frac{\kappa}{2} (\varphi_1(t-\tau) - \varphi_2(t)) + \frac{\kappa}{2} (\varphi_4(t-\tau) - \varphi_2(t)), \\ \Delta f_3(t) &= \frac{\kappa}{2} (\varphi_2(t-\tau) - \varphi_3(t)) + \frac{\kappa}{2} (\varphi_4(t-\tau) - \varphi_3(t)), \\ \Delta f_4(t) &= \frac{\kappa}{2} (\varphi_2(t-\tau) - \varphi_4(t)) + \frac{\kappa}{2} (\varphi_3(t-\tau) - \varphi_4(t)). \end{aligned}$$

Įvertinę  $i$ -tojo generatoriaus virpesio fazės  $\varphi_i(t)$  ryšį su to generatoriaus dažniu  $f_i(t)$  ( $\varphi_i'(t) = f_i(t)$ ) ir panaudoję (2.1) lygtį, gauname diferencialinių lygčių su vėluojančiu argumentu sistemą – nagrinėjamos sinchronizacijos sistemos matematinį modelį:

$$\varphi_i'(t) = f_{0i} + \Delta f_i(t), \quad i = \overline{1, 4}. \quad (2.2)$$

Panaudosime apibendrinto diferencijavimo operatorių  $D$  [8]. Tai leis supaprastinti (2.2) diferencialinių lygčių sistemos sprendinio gavimo procedūrą.



Padauginame abi (2.2) lygties puses iš vienetinės Hevisaido funkcijos  $1(t)$ :

$$\varphi_i(t)1(t) = f_{0i}1(t) + \Delta f_i(t)1(t), \quad i = \overline{1,4}. \quad (2.3)$$

Pažymėję  $\varphi_i(t)1(t) = x_i(t)$ , užrašome funkcijos  $x_i(t)$  apibendrintą išvestinę  $Dx_i(t)$ :

$$Dx_i(t) = D(\varphi_i(t)1(t)) = \varphi_i'(t)1(t) + \varphi_i(0)\delta(t); \quad (2.4)$$

čia  $\delta(t)$  - delta funkcija.

Panaudoję (2.4), perrašome (2.3) išraišką:

$$Dx_i(t) = f_{0i}1(t) + \varphi_i(0)\delta(t) + \Delta f_i(t)1(t), \quad i = \overline{1,4}. \quad (2.5)$$

(2.5) diferencialinių lygčių sistemos pradines sąlygas užrašysime šitaip:

$$\varphi_i'(t) = f_{0i}, \quad t \leq 0,$$

$$\varphi_i(t) = \varphi_{0i}, \quad t = 0, \quad i = \overline{1,4}. \quad (2.6)$$

(2.6) pradinių sąlygų geometrinė interpretacija: šias pradines sąlygas galima aiškinti taip: laiko momentu  $t=0$  visiems generatoriams įjungiamas valdymas; kai  $t < 0$ , visi generatoriai dirba savaisiais dažniais.

Įvertinę pradines sąlygas, (2.5) diferencialinių lygčių sistemą perrašome taip:

$$\begin{cases} Dx_1(t) = z_1(t), \\ Dx_2(t) = \frac{\kappa}{2}(x_1(t-\tau) - x_2(t) + x_4(t-\tau) - x_2(t)) + z_2(t), \\ Dx_3(t) = \frac{\kappa}{2}(x_2(t-\tau) - x_3(t) + x_4(t-\tau) - x_3(t)) + z_3(t), \\ Dx_4(t) = \frac{\kappa}{2}(x_2(t-\tau) - x_4(t) + x_3(t-\tau) - x_4(t)) + z_4(t); \end{cases} \quad (2.7)$$

čia

$$\begin{aligned}
z_1(t) &= f_{01}1(t) + \varphi_{01}\delta(t), \\
z_2(t) &= f_{02}1(t) + \varphi_{02}\delta(t) + \frac{\kappa}{2}(f_{01}t1(t) - f_{01}\tau1(t) + \varphi_{01}1(t) - f_{01}(t-\tau)1(t-\tau) + \varphi_{01}1(t-\tau)) + \\
&\quad + \frac{\kappa}{2}(f_{04}t1(t) - f_{04}\tau1(t) + \varphi_{04}1(t) - f_{04}(t-\tau)1(t-\tau) + \varphi_{04}1(t-\tau)), \\
z_3(t) &= f_{03}1(t) + \varphi_{03}\delta(t) + \frac{\kappa}{2}(f_{02}t1(t) - f_{02}\tau1(t) + \varphi_{02}1(t) - f_{02}(t-\tau)1(t-\tau) + \varphi_{02}1(t-\tau)) + \quad (2.8) \\
&\quad + \frac{\kappa}{2}(f_{04}t1(t) - f_{04}\tau1(t) + \varphi_{04}1(t) - f_{04}(t-\tau)1(t-\tau) + \varphi_{04}1(t-\tau)), \\
z_4(t) &= f_{04}1(t) + \varphi_{04}\delta(t) + \frac{\kappa}{2}(f_{02}t1(t) - f_{02}\tau1(t) + \varphi_{02}1(t) - f_{02}(t-\tau)1(t-\tau) + \varphi_{02}1(t-\tau)) + \\
&\quad + \frac{\kappa}{2}(f_{03}t1(t) - f_{03}\tau1(t) + \varphi_{03}1(t) - f_{03}(t-\tau)1(t-\tau) + \varphi_{03}1(t-\tau)).
\end{aligned}$$

## 2.2. DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SPRENDIMAS

### 2.2.1. MATRICINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTIES SPRENDIMAS

Nagrinėjamos sistemos matematinis modelis – matricinė tiesinė diferencialinė lygtis su vėluojančiu argumentu:

$$Dx(t) = B_0x(t) + B_1x(t-\tau) + z(t); \quad (2.9)$$

čia  $D$  – apibendrinto diferencijavimo operatorius (naudojamas apibendrintoms funkcijoms),

$$B_0 = \text{diag}(0 \quad -\kappa \quad -\kappa \quad -\kappa), \quad \kappa - \text{koeficientas}, \quad B_1 = \frac{\kappa}{2}B,$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

( $B$  matrica nurodo sistemos vidinių ryšių struktūrą),  $\tau$  – pastovus vėlinimas,  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))^T$  – ieškoma vektorinė funkcija,  $x_i(t) = \varphi_i(t)1(t)$ ,  $\varphi_i(t)$  ( $i = \overline{1,4}$ ) –  $i$ -tojo generatoriaus virpesio fazė,  $1(t)$  – vienetinė funkcija [3],  $z(t)$  – vektorinė funkcija, priklausanti nuo pradinių sąlygų.

(2.9) matricinę diferencialinę lygtį sprendžiame žingsnių metodu [2]. Intervalą  $0 \leq t < +\infty$  dalijame į vienodo ilgio  $\tau$  dalis. Kiekviename intervale  $k\tau \leq t < (k+1)\tau$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) (2.9) diferencialinę lygtį sprendžiame atskirai, kaip paprastą diferencialinę lygtį, be vėluojančio argumento.

$k$ -tajame intervale gautas sprendinys yra pradinė sąlyga, sprendžiant lygtį  $(k+1)$ -jame intervale [10].  
Ieškodami sprendinio kiekviename daliniame intervale, naudosisime Laplaso transformaciją.

Iš pradžių išnagrinėsime (2.9) diferencialinę lygtį intervale  $[0, \tau)$ :

Ivertinę tai, kad intervale  $[0, \tau)$  sprendinys  $x(t)$  pažymėtas  $x_0(t)$ , o intervale  $[-\tau, 0) - x_{-1}(t)$ , (2.9) galime perrašyti taip:

$$[0, \tau) : Dx_0(t) = B_0 x_0(t) + B_1 x_{-1}(t - \tau) + z(t). \quad (2.11)$$

Ivertinę tai, kad  $x_{-1}(t) = 0$ , kai  $-\tau < t < 0$ , turime:  $x_{-1}(t - \tau) = 0$ , kai  $0 \leq t < \tau$ . Tada (2.9) lygtis intervale  $[0, \tau)$  įgauna išraišką:

$$Dx_0(t) = B_0 x_0(t) + z(t). \quad (2.12)$$

Sprendami šią lygtį operaciniu metodu ir pažymėję  $X_0(p) \div x_0(t)$ ,  $Z(p) \div z(t)$  (čia  $X(p)$  yra funkcijos  $x(t)$  Laplaso transformacija), užrašome operatorinę lygtį, atitinkančią (2.12) diferencialinę lygtį:

$$pX_0(p) = B_0 X_0(p) + Z(p).$$

Išsprendę šią lygtį, gauname:

$$X_0(p) = (pE - B_0)^{-1} Z(p). \quad (2.13)$$

Pažymėkime

$$A = (pE - B_0).$$

Kadangi  $B_0 = \text{diag}(0 \quad -\kappa \quad -\kappa \quad -\kappa)$ , tai

$$A^{-1} = (pE - B_0)^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{p} \quad \frac{1}{p + \kappa} \quad \frac{1}{p + \kappa} \quad \frac{1}{p + \kappa}\right)$$

ir

$$X_0(p) = A^{-1} Z(p) \div L^{-1}\{A^{-1} Z(p)\} 1(t) = x_0(t).$$

Gautas sprendinys tenkina sąlygas:

$$x_0(t) = x(t), \quad 0 \leq t < \tau,$$

$$x_0(t) = x_{-1}(t), \quad -\tau \leq t < 0. \quad (2.14)$$

Toliau ištirsime (2.9) lygtį intervale  $[\tau, 2\tau)$ . Kadangi sprendinys  $x(t)$  intervale  $[\tau, 2\tau)$  pažymėtas  $x_1(t)$ , o intervale  $[0, \tau) - x_0(t)$ , tai pastarąją lygtį užrašome taip:

$$Dx_1(t) = B_0x_1(t) + B_1x_0(t - \tau) + z(t). \quad (2.15)$$

$x_0(t - \tau)$  ( $\tau \leq t < 2\tau$ ) yra žinoma funkcija (surasta pirmajame žingsnyje), tai (2.15) lygtis yra matricinė diferencialinė lygtis be vėluojančio argumento. Šią lygtį sprendžiame operaciniu metodu.

Pažymėję  $X_1(p) \div x_1(t)$ , užrašome operatorinę lygtį, atitinkančią (2.15) diferencialinę lygtį:

$$pX_1(p) = B_0X_1(p) + B_1X_0(p)e^{-p\tau} + Z(p).$$

Randame operatorinį sprendinį:

$$X_1(p) = (pE - B_0)^{-1}B_1X_0(p)e^{p\tau} + (pE - B_0)^{-1}Z(p) = A^{-1}B_1X_0(p)e^{p\tau} + A^{-1}Z(p). \quad (2.16)$$

Įvedę pažymėjimą:

$$A^{-1}B_1X_0(p) = X_{11}(p) \div x_{11}(t),$$

ir remdamiesi (2.13) išraiška, gauname:

$$X_1(p) = X_{11}(p)e^{-p\tau} + X_0(p) \div x_{11}(t - \tau)l(t - \tau) + x_0(t) = x_1(t).$$

Gautas sprendinys  $x_1(t)$  tenkina sąlygas:

$$x_1(t) = x(t), \quad \tau \leq t < 2\tau,$$

$$x_1(t) = x_0(t), \quad 0 \leq t < \tau.$$

Toliau (2.9) lygtį išstirsime intervale  $[2\tau, 3\tau)$ . Sprendinys  $x(t)$  intervale  $[2\tau, 3\tau)$  pažymėtas  $x_2(t)$ , o intervale  $[\tau, 2\tau) - x_1(t)$ . Gausime tokią lygtį:

$$Dx_2(t) = B_0x_2(t) + B_1x_1(t - \tau) + z(t). \quad (2.17)$$

Kadangi  $x_1(t - \tau)$  ( $2\tau \leq t < 3\tau$ ) yra žinoma funkcija (rasta antrajame žingsnyje), tai (2.17) lygtis yra matricinė diferencialinė lygtis be vėluojančio argumento. Sprendžiame šią lygtį operaciniu metodu.

Pažymėję  $X_2(p) \div x_2(t)$ , užrašome operatorinę lygtį:

$$pX_2(p) = B_0X_2(p) + B_1X_1(p)e^{-p\tau} + Z(p)$$

ir operatorinį sprendinį:

$$X_2(p) = (pE - B_0)^{-1}B_1X_1(p)e^{p\tau} + (pE - B_0)^{-1}Z(p) = A^{-1}B_1X_1(p)e^{p\tau} + A^{-1}Z(p).$$

Antrajame žingsnyje gavome:

$$X_1(p) = A^{-1}B_1X_0(p)e^{-p\tau} + A^{-1}Z(p). \quad (2.18)$$

Įrašę šią išraišką į (2.18), turime:

$$\begin{aligned}
 X_2(p) &= A^{-1}B_1 \left[ A^{-1}B_1 X_0(p)e^{-p\tau} + A^{-1}Z(p) \right] e^{-p\tau} + A^{-1}Z(p) = \\
 &= (A^{-1}B_1)^2 X_0(p)e^{-2p\tau} + A^{-1}B_1 A^{-1}Z(p)e^{-p\tau} + A^{-1}Z(p) \div \\
 &\div x_2(t).
 \end{aligned}$$

Kadangi  $A^{-1}Z(p) = X_0(p)$ , rašome:

$$\begin{aligned}
 X_2(p) &= (A^{-1}B_1)^2 X_0(p)e^{-2p\tau} + A^{-1}B_1 X_0(p)e^{-p\tau} + A^{-1}Z(p) = \\
 &= (A^{-1}B_1)^2 X_0(p)e^{-2p\tau} + X_1(p).
 \end{aligned}$$

Pažymėkime:

$$(A^{-1}B_1)^2 X_0(p) = X_{21}(p) \div x_{21}(t).$$

Tada

$$\begin{aligned}
 X_2(p) &= X_{21}(p)e^{-2p\tau} + X_1(p) \div \\
 &\div x_{21}(t-2\tau)l(t-2\tau) + x_1(t) = x_2(t).
 \end{aligned}$$

Matome, kad sprendinys  $x_2(t)$  tenkina sąlygas:

$$x_2(t) = x(t), \quad \tau \leq t < 3\tau,$$

$$x_2(t) = x_1(t), \quad \tau \leq t < 2\tau.$$

Toliau spęsdami (2.9) matricinę diferencialinę lygtį intervaluose  $k\tau \leq t < (k+1)\tau$  ( $k = 3, 4, 5, \dots$ ), randame:

$$x_k(t) = x_{k-1}(t), \quad t < k\tau, \tag{2.19}$$

$$x_k(t) = x(t), \quad t < (k+1)\tau. \tag{2.20}$$

Ieškome sprendinio  $x(t)$  analizinę išraišką.

Pažymėkime:

$$\varepsilon_0(t) = x_0(t) - x_{-1}(t) = x_0(t), \tag{2.21}$$

$$\varepsilon_1(t) = x_1(t) - x_0(t),$$

.....

$$\varepsilon_k(t) = x_k(t) - x_{k-1}(t), \tag{2.22}$$

.....

ir

$$\Theta_L(t) = \sum_{k=0}^L \varepsilon_k(t).$$

Įvertinę (2.21) ir (2.22), gauname:

$$\Theta_L(t) = x_0(t) + [x_1(t) - x_0(t)] + [x_2(t) - x_1(t)] + \dots + [x_L(t) - x_{L-1}(t)] = x_L(t), \quad t < (L+1)\tau.$$

ir

$$x(t) = \Theta_L(t) = \sum_{k=0}^L \varepsilon_k(t), \quad 0 < t < (L+1),$$

Pritaikę šios lygybės dešiniajai pusei Laplaso transformaciją, turime:

$$x(t) \div \Theta_L(p) = \sum_{k=0}^L \int_0^{\infty} \varepsilon_k(x) e^{-px} dx, \quad 0 \leq t < (L+1)\tau. \quad (2.23)$$

Kadangi  $Dx_k(t) = B_0 x_k(t) + B_1 x_{k-1}(t - \tau) + z(t)$  ir  $Dx_{k-1}(t) = B_0 x_{k-1}(t) + B_1 x_{k-2}(t - \tau) + z(t)$ , tai, įvertinę (2.22), rašome:

$$D\varepsilon_k(t) = B_0 \varepsilon_k(t) + B_1 \varepsilon_{k-1}(t - \tau). \quad (2.24)$$

Užrašome operatorinę lygtį, atitinkančią (2.24) matricinę diferencialinę lygtį:

$$pL\{\varepsilon_k(t)\} = B_0 L\{\varepsilon_k(t)\} + B_1 \int_0^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t - \tau) e^{-pt} dt.$$

Iš čia randame

$$L\{\varepsilon_k(t)\} = (pE - B_0)^{-1} B_1 \int_0^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t - \tau) e^{-pt} dt. \quad (2.25)$$

Pertvarkome šios lygties dešinėje pusėje esantį integralą:

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t - \tau) e^{-pt} dt = \left\{ \begin{array}{l} t - \tau = \theta, \quad dt = d\theta \\ t = 0, \quad \theta = -\tau \\ t = \infty, \quad \tau = \infty \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{-\tau}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(\theta) e^{-p(\tau+\theta)} d\theta = e^{-p\tau} \int_{-\tau}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(\theta) e^{-p\theta} d\theta.$$

Įvertinę pastarąją išraišką ir pažymėję  $A = pE - B_0$ , perrašome (2.25) lygtį:

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_k(t) e^{-pt} dt = A^{-1} B_1 e^{-p\tau} \int_{-\tau}^{\infty} \varepsilon_{k-1}(\theta) e^{-p\theta} d\theta. \quad (2.26)$$

Remdamiesi  $\varepsilon_k(t)$  funkcijos savybe

$$\varepsilon_{k-1}(t) = 0, \quad t < (k-1)\tau.$$

(kuri išplaukia iš (2.19) ir (2.22) išraiškų), turime:

$$\varepsilon_{k-1}(t) = 0, \quad t < 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Pritaikę Laplaso transformaciją abiemis lygybėms  $\varepsilon_0(t) = x_0(t)$  (žr. (2.21) išraišką) pusėms, gauname:

$$\int_0^{\infty} \varepsilon_0(t) e^{-pt} dt = X_0(p). \quad (2.27)$$

(2.26) lygybę, pažymėję  $M = A^{-1} B_1 e^{-p\tau}$  ir įvertinę (2.27), užrašome skirtingiems  $k = 1, 2, 3, \dots$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \varepsilon_1(t) e^{-pt} dt &= M \int_0^{\infty} \varepsilon_0(t) e^{-pt} dt = M X_0(p), \\ \int_0^{\infty} \varepsilon_2(t) e^{-pt} dt &= M \int_0^{\infty} \varepsilon_1(t) e^{-pt} dt = M^2 X_0(p), \\ &\dots\dots\dots \\ \int_0^{\infty} \varepsilon_k(t) e^{-pt} dt &= M \int_0^{\infty} \varepsilon_{k-1}(t) e^{-pt} dt = M^k X_0(p). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Įrašę (2.28) į (2.23), randame (2.9) matricinės diferencialinės lygties sprendinį:

$$x(t) \div \sum_{k=0}^L M^k X_0(p), \quad 0 \leq t < (L+1)\tau.$$

Įvertinę pažymėjimą  $M = A^{-1} B_1 e^{-p\tau}$  ir funkcijos  $X_0(p)$  išraišką (žr. (2.13)), turėsime:

$$x(t) \div \sum_{k=0}^L (A^{-1} B_1 e^{-p\tau})^k A^{-1} Z(p), \quad 0 \leq t < (L+1)\tau. \quad (2.29)$$

čia  $A = pE - B_0 = \text{diag}(p \quad p + \kappa \quad p + \kappa \quad p + \kappa)$ ,  $A^{-1} = \frac{1}{p + \kappa} K$ ,  $B_1 = \frac{\kappa}{2} B$ ,

$$K = \text{diag} \left( \frac{p + \kappa}{p} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \right)$$

(2.29) galime parašyti taip:

$$x(t) \div \sum_{k=0}^L \left( \frac{\kappa}{2} \right)^k \frac{1}{(p + \kappa)^{k+1}} e^{-pk\tau} B^k K Z(p).$$

### 2.3. MATRICOS, NUSAKANČIOS VIDINĘ RYŠIŲ STRUKTŪRĄ, K-TOJO LAIPSNIO RADIMAS

Matricos  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , nusakančios vidinę ryšių struktūrą,  $k$ -tajį laipsnį ( $k \in N$ ) ieškosime

remdamiesi lygybe  $B^k = TJ^kT^{-1}$  [16]; čia  $J$  – matricos  $B$  Žordano forma,  $T$  – transformuojančioji matrica. Abi šias matricas rasime žinodami matricos  $B$  tikrines reikšmes ir tikrinius vektorius [5].

Užrašome matricos  $B$  charakteristinę lygtį:

$$|B - \lambda E| = 0. \quad (2.30)$$

Šios lygties šaknys yra matricos  $B$  tikrinės reikšmės. (2.30) lygtį perrašome taip:

$$\Delta = |B - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2.31)$$

Apskaičiuojame determinantą  $\Delta$ , skleidžiant jį antros eilutės elementais:

$$\Delta = (-1)^{2+1}1M_{21} + (-1)^{2+2}(-\lambda)M_{22} + (-1)^{2+3}0M_{23} + (-1)^{2+4}1M_{24};$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda,$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda, \quad M_{24} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda^2 - \lambda.$$

Įstačius apskaičiuotų minorų reikšmes į determinanto  $\Delta$  išraišką, gauname:

$$\Delta = \lambda^4 - 2\lambda^2 - \lambda = 0.$$

Išsprendus šią ketvirtojo laipsnio lygtį [16], randame keturias realiąsias šaknis (matricos  $B$  tikrines reikšmes):

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = d, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = c.$$

Kadangi visos tikrinės reikšmės yra skirtingos, tai matricos  $B$  Žordano forma yra diagonalioji matrica, kurią užrašome taip:



$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Rasime matricos  $B$  tikrinius vektorius. Pasinaudosime lygybe [5]

$$BX_i = \lambda_i X_i, \quad i = \overline{1, 4}; \quad (2.33)$$

čia  $\lambda_i$  matricos  $B$  tikrinė reikšmė,  $X_i = (x_1^{(i)} \quad x_2^{(i)} \quad x_3^{(i)} \quad x_4^{(i)})^T$  - matricos tikrinis vektorius, atitinkantis tikrinei reikšmei  $\lambda_i$ .

(2.33) matricinę lygtį perrašome taip:

$$\begin{pmatrix} -\lambda_i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda_i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda_i & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ x_3^{(i)} \\ x_4^{(i)} \end{pmatrix} = 0. \quad (2.34)$$

Remdamiesi (2.34), užrašome lygčių sistemas, kurias spręsdami rasime matricos  $B$  tikrinių vektorių komponentes.

Kai  $\lambda_1 = -1$ , turime:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0, \\ x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + x_4^{(1)} = 0, \\ x_2^{(1)} + x_3^{(1)} + x_4^{(1)} = 0. \end{cases}$$

Išsprendę šią lygčių sistemą, randame matricos  $B$  tikrinį vektorių, atitinkantį tikrinę reikšmę  $\lambda_1$ :

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ x_4^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_4^{(1)} \\ 0 \\ x_4^{(1)} \end{pmatrix};$$

čia  $x_4^{(1)} \in \mathbb{R}$ . Parenkame  $x_4^{(1)} = 1$ . Tuomet  $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Išstatę į (2.34) vietoje  $\lambda_i$   $\lambda_2 = d$ ,  $\lambda_3 = 0$  ir  $\lambda_4 = c$ , užrašome lygčių sistemas kitoms tikrinių vektorių komponentėms rasti. Išsprendę šias sistemas, gauname tikrinius vektorius  $X_2$ ,  $X_3$ ,  $X_4$ :

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -d \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Kadangi visos matricos  $B$  tikrinės reikšmės yra paprastosios (skirtingos), tai transformuojančios matricos  $T$  stulpelius sudaro matricos  $B$  tikriniai vektoriai [1]. Įvertinę tai, parašome matricą  $T$ :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -c & -1 & -d \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Apskaičiuojame šiai matricai atvirkštinę matricą  $T^{-1}$  (skaičiavimo rezultatus patikriname, remdamiesi lygybe  $TT^{-1} = E$ ;  $E$  – vienetinė matrica):

$$T^{-1} = \frac{1}{s} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -s & s \\ c & -1 & c & -1 \\ -s & 0 & 0 & 0 \\ -d & 1 & -d & 1 \end{pmatrix}; \quad (2.36)$$

čia  $s = \sqrt{5}$ .

Užrašome matricos  $B$   $k$ -tąjį laipsnį ( $k = \overline{1,4}$ ):

$$B^k = TJ^kT^{-1} = \frac{1}{s} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 & a_5 & a_6 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \end{pmatrix}; \quad (2.37)$$

čia

$$\begin{aligned} a_1 &= cd^{k-1} - dc^{k-1}, \\ a_2 &= c^{k-1} - d^{k-1}, \\ a_3 &= (-1)^k(c-d) + cd^{k-1} - dc^{k-1}, \\ a_4 &= -(-1)^k(c-d) - d^{k-1} + c^{k-1}, \\ a_5 &= cd^k - dc^k, \\ a_6 &= c^k - d^k, \\ a_7 &= -(-1)^k(c-d) + cd^k - dc^k, \\ a_8 &= (-1)^k(c-d) - d^k + c^k. \end{aligned}$$

## 2.4. SINCHRONIZACIJOS SISTEMOS PEREINAMŪJŲ PROCESŲ TYRIMAS

Sistemos pereinamuosius procesus tirsime remdamiesi jos reakcija į vienetinį fazės šuolį. Sistemos  $i$ -tojo generatoriaus virpesio fazės reakciją į  $j$ -tojo generatoriaus virpesio fazės vienetinį šuolį vadinsime sistemos pereinamąja funkcija  $h_{ij}(t)$ . Jų visuma ( $h_{ij}(t)$  ( $i, j = \overline{1,4}$ )) sudaro pereinamųjų funkcijų matricą  $h(t) = (h_{ij}(t))$ . Rasime šios matricos elementus, pasinaudoję (2.29) sprendiniu.

Skaičiuosime sinchronizacijos sistemos pereinamąsias funkcijas. Kai vienetinis fazės šuolis veikia  $j$ -tojo generatoriaus virpesio fazę, (2.9) lygties laisvasis narys įgauna pokyti:

$$\Delta z(t) = \delta(t) I^{(j)}; \quad (2.38)$$

čia  $I^{(j)}$  – vektorius, kurio  $j$ -tasis elementas lygus 1, o likusieji – 0.  $\delta(t)$  – delta funkcija (jai teisinga tokia operatorinė lygybė  $\delta(t) \div 1$ ).

Simboliu

$$h_j(t) = (h_{ij}(t)), \quad j = \overline{1,4} \quad (2.39)$$

pažymėsime pereinamųjų funkcijų  $h_j(t)$  ( $j = const, i = \overline{1,4}$ ) matricą-stulpelį (šio matricos stulpelio elementai yra sistemos generatorių virpesių fazių reakcijos į  $j$ -tojo generatoriaus fazės vienetinį šuolį).

### 2.4.1. PEREINAMŪJŲ FUNKCIJŲ SKAIČIAVIMAS

Ieškosime pereinamųjų funkcijų. Remdamiesi (2.9) ir (2.38) išraiškėmis perrašome matricinę diferencialinę lygtį vektoriaus  $h_j(t)$  atžvilgiu:

$$Dh_j(t) = B_0 h_j(t) + B_1 h_j(t - \tau) + \delta(t) I^{(j)}, \quad j = \overline{1,4}. \quad (2.40)$$

Šios matricinės diferencialinės lygties sprendinį užrašome remdamiesi (2.9) ir (2.29) sprendiniu:

$$h_j(t) = (h_{ij}(t)) \div \sum_{k=0}^L (A^{-1} B_1 e^{-p\tau})^k A^{-1} I^{(j)}, \quad 0 < t < (L+1)\tau \quad (2.41)$$

čia  $A = pE - B_0$ ,  $E$  – vienetinė ketvirtos eilės matrica,  $j = \overline{1,4}$ .

Iš (2.41) išraiškos išplaukia:

$$h(t) = (h_{ij}(t)) \div \sum_{k=0}^L (A^{-1} B_1 e^{-p\tau})^k A^{-1}, \quad 0 < t < (L+1)\tau \quad (2.42)$$

čia  $h(t)$  - pereinamųjų funkcijų matrica.

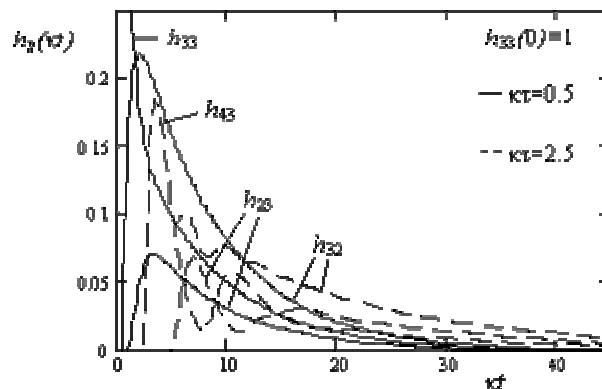
Panaudoję (2.42) išraiškai atvirkštinę Laplaso transformaciją, gauname:

$$\begin{aligned}
 h_{11}(t) &= 1(t), \quad h_{1j}(t) = 0, \quad j = 2, 3, 4. \\
 h_{ii}(t) &= \sum_{k=1}^L \frac{1}{2^k} \{B^k\}_{ii} \left[ 1 - \sum_{l=0}^k \frac{(\kappa t - k\kappa\tau)^l}{l!} e^{-(\kappa t - k\kappa\tau)} \right] 1(\kappa t - k\kappa\tau), \quad i = 2, 3, 4. \\
 h_{ii}(t) &= e^{-\kappa t} 1(t) + \sum_{k=1}^L \frac{(\kappa t - k\kappa\tau)^k}{2^k \cdot k!} e^{-(\kappa t - k\kappa\tau)} \{B^k\}_{ii} 1(\kappa t - k\kappa\tau), \quad i = 2, 3, 4. \\
 h_{ij}(t) &= \sum_{k=1}^L \frac{(\kappa t - k\kappa\tau)^k}{2^k \cdot k!} e^{-(\kappa t - k\kappa\tau)} \{B^k\}_{ij} 1(\kappa t - k\kappa\tau), \quad i, j = \overline{1, 4}, \quad j \neq 1, \quad i \neq j.
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

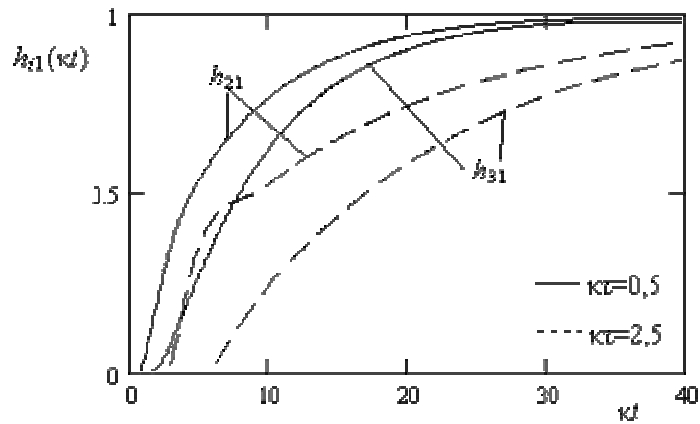
čia  $A^{-1} = \text{diag} \left( \frac{1}{p}, \frac{1}{p+\kappa}, \frac{1}{p+\kappa}, \frac{1}{p+\kappa} \right)$ ,  $L = 0, 1, 2, \dots$ . Matricos  $B$   $k$ -tasis laipsnis apskaičiuotas (2.3)

skyriuje.

Naudojant (2.43) formules, apskaičiuotos pereinamosios funkcijos prie įvairių parametru  $\kappa\tau$  reikšmių. Grafikai pateikti (2.2 pav.) ir 3 priede.



2.2 pav. Pereinamųjų funkcijų  $h_{ij}(\kappa\tau)$  grafikai



2.3 pav. Pereinamųjų funkcijų  $h_{ij}(\kappa t)$  grafikai

Iš pateiktų grafikų galime pastebėti, kad tuo atveju, kai vėlinimo  $\tau$  ir koeficiento  $\kappa$  sandauga mažesnė už vienetą, pereinamosios funkcijos praktiškai nepriklauso nuo vėlinimo dydžio. Kai  $\kappa\tau$  didėja, pereinamojo proceso trukmė turi tendenciją didėti.

#### 2.4.2. PEREINAMŪJŲ PROCESŲ PRIKLAUSOMYBĖS NUO PRADINIŲ SĄLYGŲ TYRIMAS

Pradinių sąlygų įtaką į pereinamuosius procesus sistemoje tirsime remdamiesi (2.29) sprendiniu.

$$x(t) \div \sum_{k=0}^L (A^{-1}B_1 e^{-p\tau})^k A^{-1}Z(p), \quad 0 < t < (L+1)\tau$$

čia  $x(t) = (x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t))^T$ ,  $Z(p) = (Z_1(p) \ Z_2(p) \ Z_3(p) \ Z_4(p))^T$  - vektorinė funkcija, priklausanti nuo pradinių sąlygų,  $Z_i(p) \div z_i(t)$ ,  $i = \overline{1,4}$ .

Funkcijų  $z_i(t)$ ,  $i = \overline{1,4}$  užrašome išraiškas:

$$z_1(t) = f_{01}l(t) + \varphi_{01}\delta(t),$$

$$z_2(t) = f_{02}l(t) + \varphi_{02}\delta(t) + \frac{\kappa}{2}(f_{01}tl(t) - f_{01}\tau l(t) + \varphi_{01}l(t) - f_{01}(t-\tau)l(t-\tau) + \varphi_{01}l(t-\tau)) + \\ + \frac{\kappa}{2}(f_{04}tl(t) - f_{04}\tau l(t) + \varphi_{04}l(t) - f_{04}(t-\tau)l(t-\tau) + \varphi_{04}l(t-\tau)),$$

$$z_3(t) = f_{03}l(t) + \varphi_{03}\delta(t) + \frac{\kappa}{2}(f_{02}tl(t) - f_{02}\tau l(t) + \varphi_{02}l(t) - f_{02}(t-\tau)l(t-\tau) + \varphi_{02}l(t-\tau)) + \\ + \frac{\kappa}{2}(f_{04}tl(t) - f_{04}\tau l(t) + \varphi_{04}l(t) - f_{04}(t-\tau)l(t-\tau) + \varphi_{04}l(t-\tau)),$$

$$z_4(t) = f_{04}l(t) + \varphi_{04}\delta(t) + \frac{\kappa}{2}(f_{02}tl(t) - f_{02}\tau l(t) + \varphi_{02}l(t) - f_{02}(t-\tau)l(t-\tau) + \varphi_{02}l(t-\tau)) + \\ + \frac{\kappa}{2}(f_{03}tl(t) - f_{03}\tau l(t) + \varphi_{03}l(t) - f_{03}(t-\tau)l(t-\tau) + \varphi_{03}l(t-\tau)).$$

Šioms formulėms pritaikę Laplaso transformaciją randame  $Z_i(p)$ ,  $i = \overline{1,4}$ .

$$Z_1(p) = \frac{f_{01}}{p} + \varphi_{01},$$

$$Z_2(p) = \frac{f_{02}}{p} + \varphi_{02} + \frac{\kappa\varphi_{14}}{2p} - \frac{\kappa\tau f_{14}}{2p} + \frac{\kappa f_{14}}{2p^2} - \frac{\kappa\varphi_{14}}{2p}e^{-p\tau} - \frac{\kappa f_{14}}{2p^2}e^{-p\tau},$$

$$Z_3(p) = \frac{f_{03}}{p} + \varphi_{03} + \frac{\kappa\varphi_{24}}{2p} - \frac{\kappa\tau f_{24}}{2p} + \frac{\kappa f_{24}}{2p^2} - \frac{\kappa\varphi_{24}}{2p}e^{-p\tau} - \frac{\kappa f_{24}}{2p^2}e^{-p\tau},$$

$$Z_4(p) = \frac{f_{04}}{p} + \varphi_{04} + \frac{\kappa\varphi_{23}}{2p} - \frac{\kappa\tau f_{23}}{2p} + \frac{\kappa f_{23}}{2p^2} - \frac{\kappa\varphi_{23}}{2p}e^{-p\tau} - \frac{\kappa f_{23}}{2p^2}e^{-p\tau}.$$

čia  $f_{ji} = f_{0j} + f_{0i}$ ,  $\varphi_{ji} = \varphi_{0j} + \varphi_{0i}$

Pasinaudoję (2.29) sprendiniu, galima parašyti:

$$x(t) \div A^{-1}Z(p) + \sum_{k=1}^L (A^{-1}B_1 e^{-p\tau})^k A^{-1}Z(p), \quad 0 < t < (L+1)\tau \quad (2.44)$$

$$\text{čia } A^{-1} = \text{diag} \left( \frac{1}{p}, \frac{1}{p+\kappa}, \frac{1}{p+\kappa}, \frac{1}{p+\kappa} \right).$$

(2.44) išraišką, perrašome taip:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} \div \begin{pmatrix} \alpha_1(p) \\ \alpha_2(p) \\ \alpha_3(p) \\ \alpha_4(p) \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^L \left( \frac{\kappa}{2} \right)^k \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_2^{(k)}(p) \\ \beta_3^{(k)}(p) \\ \beta_4^{(k)}(p) \end{pmatrix},$$

čia

$$\alpha_i(p) = \begin{cases} \frac{1}{p} Z_i(p), & i = 1, \\ \frac{1}{p + \kappa} Z_i(p), & i = 2, 3, 4, \end{cases} \quad (2.45)$$

$$\beta_i^{(k)}(p) = \begin{cases} 0, & i = 1, \\ \{B^k\}_{i1} U_1(p) + \{B^k\}_{i2} U_2(p) + \{B^k\}_{i3} U_3(p) + \{B^k\}_{i4} U_4(p), & i = 2, 3, 4, \end{cases} \quad (2.46)$$

$$U_i(p) = \begin{cases} 0, & i = 1, \\ \frac{e^{-p\kappa}}{(p + \kappa)^{k+1}} Z_i(p), & i = 2, 3, 4, \end{cases} \quad (2.47)$$

Parašome  $i$ -tojo ir  $j$ -tojo ( $i, j = \overline{1, 4}, i \neq j$ ) generatorių virpesių fazių skirtumo analizinę išraišką:

$$x_j(t) - x_i(t) \div \alpha_j(p) - \alpha_i(p) + \sum_{k=1}^L \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k (\beta_j^{(k)}(p) - \beta_i^{(k)}(p)), \quad i, j = \overline{1, 4}, \quad i \neq j. \quad (2.48)$$

Detaliau panagrinėsime skirtumą  $x_4(t) - x_3(t)$ .

Remiantis (2.48), generatorių virpesių fazių skirtumą galime parašyti taip:

$$x_4(t) - x_3(t) \div \alpha_4(p) - \alpha_3(p) + \sum_{k=1}^L \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k (\beta_4^{(k)}(p) - \beta_3^{(k)}(p)),$$

Istatę (2.45), (2.46), (2.47) išraiškas į (2.48), gauname:

$$\begin{aligned} & x_4(t) - x_3(t) \div \alpha_4(p) - \alpha_3(p) + \\ & + \sum_{k=1}^L \left(\frac{\kappa}{2}\right)^k \left( (\{B^k\}_{41} - \{B^k\}_{31}) U_1(p) + (\{B^k\}_{42} - \{B^k\}_{32}) U_2(p) + \right. \\ & \left. + (\{B^k\}_{43} - \{B^k\}_{33}) U_3(p) + (\{B^k\}_{44} - \{B^k\}_{34}) U_4(p) \right). \end{aligned}$$

Atlikę atvirkštinę Laplaso transformaciją ir įvedę pažymėjimus, gauname:

$$\begin{aligned} & x_4(t) - x_3(t) = A_{43}(t) + \\ & + \sum_{k=1}^L \left(\frac{1}{2}\right)^k \left( (\{B^k\}_{41} - \{B^k\}_{31}) a_1(t, k) + (\{B^k\}_{42} - \{B^k\}_{32}) a_2(t, k) + \right. \\ & \left. + (\{B^k\}_{43} - \{B^k\}_{33}) a_3(t, k) + (\{B^k\}_{44} - \{B^k\}_{34}) a_4(t, k) \right). \end{aligned}$$

čia

$$a_1(t, k) = f_{01} S_2(t - k\tau, k) l(t - k\tau) + \varphi_{01} S_1(t - k\tau, k) l(t - k\tau),$$

$$\begin{aligned}
a_2(t, k) &= f_{02}S_1(t - k\tau, k + 1)l(t - k\tau) + \varphi_{02}S_0(t - k\tau, k + 1)l(t - k\tau) + \\
&+ \frac{1}{2}(\varphi_{14} - f_{14}\tau)S_1(t - k\tau, k + 1)l(t - k\tau) + \frac{1}{2}f_{14}S_2(t - k\tau, k + 1)l(t - k\tau) - \\
&- \frac{1}{2}\varphi_{14}S_1(t - (k + 1)\tau, k + 1)l(t - (k + 1)\tau) - \frac{1}{2}f_{14}S_2(t - (k + 1)\tau, k + 1)l(t - (k + 1)\tau).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3(t, k) &= f_{03}S_1(t - k\tau, k + 1)l(t - k\tau) + \varphi_{03}S_0(t - k\tau, k + 1)l(t - k\tau) + \\
&+ \frac{1}{2}(\varphi_{24} - f_{24}\tau)S_1(t - k\tau, k + 1)l(t - k\tau) + \frac{1}{2}f_{24}S_2(t - k\tau, k + 1)l(t - k\tau) - \\
&- \frac{1}{2}\varphi_{24}S_1(t - (k + 1)\tau, k + 1)l(t - (k + 1)\tau) - \frac{1}{2}f_{24}S_2(t - (k + 1)\tau, k + 1)l(t - (k + 1)\tau).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_4(t, k) &= f_{04}S_1(t - k\tau, k + 1)l(t - k\tau) + \varphi_{04}S_0(t - k\tau, k + 1)l(t - k\tau) + \\
&+ \frac{1}{2}(\varphi_{23} - f_{23}\tau)S_1(t - k\tau, k + 1)l(t - k\tau) + \frac{1}{2}f_{23}S_2(t - k\tau, k + 1)l(t - k\tau) - \\
&- \frac{1}{2}\varphi_{23}S_1(t - (k + 1)\tau, k + 1)l(t - (k + 1)\tau) - \frac{1}{2}f_{23}S_2(t - (k + 1)\tau, k + 1)l(t - (k + 1)\tau).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{43}(t) &= \left[ f_{043} + \frac{1}{2}(\varphi_{034} - f_{034}\tau) \right] S_1(t, 1) + \varphi_{034}S_0(t, 1) + \frac{1}{2}f_{034}S_2(t, 1) - \\
&- \frac{1}{2}\varphi_{034}S_1(t - \tau, 1)l(t - \tau) - \frac{1}{2}f_{034}S_2(t - \tau, 1)l(t - \tau).
\end{aligned}$$

čia

$$\varphi_{14} = \varphi_{01} + \varphi_{04},$$

$$f_{14} = f_{01} + f_{04},$$

$$\varphi_{034} = \varphi_{03} - \varphi_{04},$$

$$f_{034} = f_{03} - f_{04},$$

Pasinaudojame surastais pirmavaizdžiais (žr. 1 priedą)

$$S_0^{(k)}(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\kappa t},$$

$$S_1^{(k)}(t) = \frac{1}{\kappa^k} - \frac{1}{\kappa^k} \sum_{v=0}^{k-1} \frac{(\kappa t)^v}{v!} e^{-\kappa t},$$

$$S_2^{(k)}(t) = \frac{t}{\kappa^k} - \frac{k}{\kappa^{k+1}} + \frac{1}{\kappa^{k+1}} \sum_{v=0}^{k-1} \sum_{r=0}^v \frac{(\kappa t)^r}{r!} e^{-\kappa t}.$$

Nagrinėjame generatorių virpesių fazių skirtumus tarp visų ryši turinčių generatorių.



### 2.4.3. RIBINĖS GENERATORIŲ VIRPESIŲ FAZIŲ SKIRTUMŲ REIKŠMĖS

Žinome, kad

$$x_i(t) - x_j(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p(X_i - X_j), \quad i, j = \overline{1, 4}. \quad t \rightarrow +\infty.$$

Turime diferencialinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} Dx_1(t) = z_1(t); \\ Dx_2(t) = \frac{\kappa}{2}(x_1(t-\tau) - x_2(t) + x_4(t-\tau) - x_2(t)) + z_2(t); \\ Dx_3(t) = \frac{\kappa}{2}(x_2(t-\tau) - x_3(t) + x_4(t-\tau) - x_3(t)) + z_3(t); \\ Dx_4(t) = \frac{\kappa}{2}(x_2(t-\tau) - x_4(t) + x_3(t-\tau) - x_4(t)) + z_4(t). \end{cases}$$

Šios sistemos sprendinius rasime remdamiesi Kramerio taisykle. Rasime  $\lim_{p \rightarrow 0} p(X_i - X_j)$ ,

Pritaikome Laplaso transformaciją:

$$\begin{cases} pX_1(p) = Z_1(p); \\ pX_2(p) = \frac{\kappa}{2}(X_1(p)e^{-p\tau} - X_2(p) + X_4(p)e^{-p\tau} - X_2(p)) + Z_2(p); \\ pX_3(p) = \frac{\kappa}{2}(X_2(p)e^{-p\tau} - X_3(p) + X_4(p)e^{-p\tau} - X_3(p)) + Z_3(p); \\ pX_4(p) = \frac{\kappa}{2}(X_2(p)e^{-p\tau} - X_4(p) + X_3(p)e^{-p\tau} - X_4(p)) + Z_4(p); \end{cases}$$

Iš koeficientų prie  $X_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$  sudarome matricą:

$$\begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} & p + \kappa & 0 & \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} \\ 0 & \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} & p + \kappa & \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} \\ 0 & \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} & \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} & p + \kappa \end{pmatrix}$$

$$\text{Šios matricos determinantas } \Delta = p \left( (p + \kappa)^3 - \frac{1}{2}\kappa^2 e^{-2p\tau}(p + \kappa) - \frac{1}{8}\kappa^3 e^{-3p\tau} \right).$$

Sistemos laisvųjų narių stulpelis  $b = (Z_1(p), Z_2(p), Z_3(p), Z_4(p))^T$ . Determinanto  $\Delta$  stulpelius paeiliui keisdami laisvųjų narių stulpeliu  $b$ , gausime tokius determinantus:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} Z_1(p) & 0 & 0 & 0 \\ Z_2(p) & \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} & 0 & \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} \\ Z_3(p) & 0 & p+\kappa & \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} \\ Z_4(p) & 0 & \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} & p+\kappa \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} p & Z_1(p) & 0 & 0 \\ \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} & Z_2(p) & 0 & \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} \\ 0 & Z_3(p) & p+\kappa & \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} \\ 0 & Z_4(p) & \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} & p+\kappa \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} p & 0 & Z_1(p) & 0 \\ \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} & p+\kappa & Z_2(p) & \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} \\ 0 & \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} & Z_3(p) & \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} \\ 0 & \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} & Z_4(p) & p+\kappa \end{vmatrix}, \Delta_4 = \begin{vmatrix} p & 0 & 0 & Z_1(p) \\ \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} & p+\kappa & 0 & Z_2(p) \\ 0 & \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} & p+\kappa & Z_3(p) \\ 0 & \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} & \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} & Z_4(p) \end{vmatrix}.$$

Ieškome  $\lim_{p \rightarrow 0} p(X_2 - X_1)$ :

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} p(X_2 - X_1) &= \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{\Delta} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{\Delta} (Z_1(p)(\Delta_{12} - \Delta_{11}) + Z_2(p)(\Delta_{22} - \Delta_{21}) + \\ &+ Z_3(p)(\Delta_{32} - \Delta_{31}) + Z_4(p)(\Delta_{42} - \Delta_{41})), \end{aligned}$$

čia  $\Delta_{ji}$ ,  $j=1,2$ ,  $i=\overline{1,4}$ , matricos  $X$  adjunktai.

Gauname neapibrėžtumą, kai  $p=0$ , todėl taikom Liopitalio taisyklę. Pertvarkom pastarąją išraišką:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} p(X_2 - X_1) &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^2 Z_1(p)}{\Delta} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Delta_{12} - \Delta_{11}}{p} + \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^2 Z_2(p)}{\Delta} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Delta_{22} - \Delta_{21}}{p} + \\ &+ \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^2 Z_3(p)}{\Delta} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Delta_{32} - \Delta_{31}}{p} + \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^2 Z_4(p)}{\Delta} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Delta_{42} - \Delta_{41}}{p} = \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p^2 Z_1(p))'_p}{\Delta'_p} \lim_{p \rightarrow 0} (\Delta_{12} - \Delta_{11})'_p + \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p^2 Z_2(p))'_p}{\Delta'_p} \lim_{p \rightarrow 0} (\Delta_{22} - \Delta_{21})'_p + \\ &+ \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p^2 Z_3(p))'_p}{\Delta'_p} \lim_{p \rightarrow 0} (\Delta_{32} - \Delta_{31})'_p + \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p^2 Z_4(p))'_p}{\Delta'_p} \lim_{p \rightarrow 0} (\Delta_{42} - \Delta_{41})'_p. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Rasime ribų išvestines:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta' = \lim_{p \rightarrow 0} \left( p \left( (p+\kappa)^3 - \frac{1}{2} \kappa^2 e^{-2p\tau} (p+\kappa) - \frac{1}{8} \kappa^3 e^{-3p\tau} \right) \right)' = \frac{3\kappa^3}{8}.$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} p+\kappa & 0 & \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} \\ \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} & p+\kappa & \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} \\ \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} & \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} & p+\kappa \end{vmatrix};$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{-\kappa}{2} \\ \frac{\kappa}{2}\tau & \kappa & \frac{-\kappa}{2} \\ \frac{\kappa}{2}\tau & \frac{-\kappa}{2} & \kappa \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \kappa & 0 & \frac{-\kappa}{2} \\ \frac{-\kappa}{2} & 1 & \frac{-\kappa}{2} \\ \frac{-\kappa}{2} & \frac{\kappa}{2}\tau & \kappa \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \kappa & 0 & \frac{\kappa}{2}\tau \\ \frac{-\kappa}{2} & \kappa & \frac{\kappa}{2}\tau \\ \frac{-\kappa}{2} & \frac{-\kappa}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{5\kappa^2}{2} + \frac{11\kappa^3\tau}{8}.$$

$$\Delta_{21} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} & p+\kappa & \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} \\ \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} & \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} & p+\kappa \end{vmatrix};$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{21} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{2}\tau & \kappa & \frac{-\kappa}{2} \\ \frac{\kappa}{2}\tau & \frac{-\kappa}{2} & \kappa \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\kappa}{2} & 1 & \frac{-\kappa}{2} \\ \frac{-\kappa}{2} & \frac{\kappa}{2}\tau & \kappa \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\kappa}{2} & \kappa & \frac{\kappa}{2}\tau \\ \frac{-\kappa}{2} & \frac{-\kappa}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\Delta_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p+\kappa & 0 & \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} \\ \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} & \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} & p+\kappa \end{vmatrix};$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{-\kappa}{2} \\ \frac{\kappa}{2}\tau & \frac{-\kappa}{2} & \kappa \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & \frac{-\kappa}{2} \\ \frac{-\kappa}{2} & \frac{\kappa}{2}\tau & \frac{-\kappa}{2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & \frac{\kappa}{2}\tau \\ \frac{-\kappa}{2} & \frac{-\kappa}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\Delta_{41} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p+\kappa & 0 & \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} \\ \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} & p+\kappa & \frac{-\kappa}{2}e^{-p\tau} \end{vmatrix};$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{41} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{-\kappa}{2} \\ \frac{\kappa}{2}\tau & \kappa & \frac{-\kappa}{2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & \frac{-\kappa}{2} \\ \frac{-\kappa}{2} & 1 & \frac{-\kappa}{2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & \frac{\kappa}{2}\tau \\ \frac{-\kappa}{2} & \kappa & \frac{\kappa}{2}\tau \end{vmatrix} = 0.$$

Tokiu pačiu būdu randame ir kitas ribas:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{21} &= \kappa^2 - \frac{\kappa^3 \tau}{8}; & \lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{31} &= \frac{\kappa^2}{4} - \frac{7\kappa^3 \tau}{8}; & \lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{41} &= \frac{\kappa^2}{4} - \frac{7\kappa^3 \tau}{8}; \\ \lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{22} &= \frac{3\kappa^2}{4}; & \lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{32} &= \frac{3\kappa^2}{4}; & \lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{42} &= \frac{3\kappa^2}{4}; \\ \lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{23} &= \frac{\kappa^2}{4}; & \lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{33} &= \frac{3\kappa^2}{4}; & \lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{43} &= \frac{\kappa^2}{2}; \\ \lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{24} &= \frac{\kappa^2}{2}; & \lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{34} &= \frac{3\kappa^2}{4}; & \lim_{p \rightarrow 0} \Delta'_{44} &= \kappa^2; \end{aligned}$$

Dabar rasime  $\lim_{p \rightarrow 0} (p^2 Z_i(p))'$ :

$$\lim_{p \rightarrow 0} \left( p^2 \left( \frac{f_{01}}{p} + \varphi_{01} \right) \right)' = f_{01};$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \left( p^2 \left( \frac{f_{02}}{p} + \varphi_{02} + \frac{\kappa \varphi_{14}}{2p} - \frac{\kappa \tau f_{14}}{2p} + \frac{\kappa f_{14}}{2p^2} - \frac{\kappa \varphi_{14}}{2p} e^{-p\tau} - \frac{\kappa f_{14}}{2p^2} e^{-p\tau} \right) \right)' = f_{02};$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \left( p^2 \left( \frac{f_{03}}{p} + \varphi_{03} + \frac{\kappa \varphi_{24}}{2p} - \frac{\kappa \tau f_{24}}{2p} + \frac{\kappa f_{24}}{2p^2} - \frac{\kappa \varphi_{24}}{2p} e^{-p\tau} - \frac{\kappa f_{24}}{2p^2} e^{-p\tau} \right) \right)' = f_{03};$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \left( p^2 \left( \frac{f_{04}}{p} + \varphi_{04} + \frac{\kappa \varphi_{23}}{2p} - \frac{\kappa \tau f_{23}}{2p} + \frac{\kappa f_{23}}{2p^2} - \frac{\kappa \varphi_{23}}{2p} e^{-p\tau} - \frac{\kappa f_{23}}{2p^2} e^{-p\tau} \right) \right)' = f_{04}.$$

Gautus rezultatus statome į (2.46) išraišką:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} p(X_2(p) - X_1(p)) &= \frac{8f_{01}}{3\kappa^3} \left( \kappa^2 - \frac{\kappa^3 \tau}{8} - \frac{5\kappa^2}{2} - \frac{11\kappa^3 \tau}{8} \right) + \\ &+ \frac{8f_{02}}{3\kappa^3} \left( \frac{3\kappa^2}{4} - 0 \right) + \frac{8f_{03}}{3\kappa^3} \left( \frac{\kappa^2}{4} - 0 \right) + \frac{8f_{04}}{3\kappa^3} \left( \frac{\kappa^2}{2} - 0 \right) = \\ &= -2f_{01}\tau + \frac{6}{3} \frac{f_{02} - f_{01}}{\kappa} + \frac{2}{3} \frac{f_{03} - f_{01}}{\kappa} + \frac{4}{3} \frac{f_{04} - f_{01}}{\kappa}. \end{aligned}$$

Analogiškai apskaičiuavę, gauname tokias išraiškas:

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_3(p) - X_1(p)) = -6f_{01}\tau + 2 \frac{f_{02} - f_{01}}{\kappa} + 2 \frac{f_{03} - f_{01}}{\kappa} + 2 \frac{f_{04} - f_{01}}{\kappa},$$

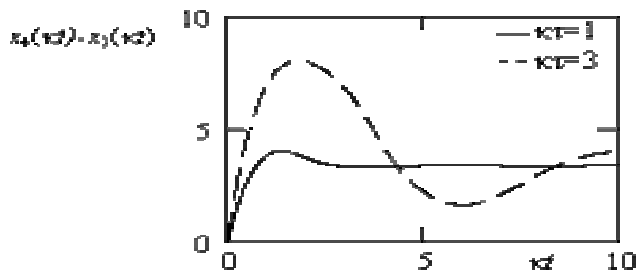
$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_3(p) - X_2(p)) = -2f_{01}\tau + \frac{4}{3} \frac{f_{03} - f_{01}}{\kappa} + \frac{2}{3} \frac{f_{04} - f_{01}}{\kappa},$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_4(p) - X_1(p)) = -6f_{01}\tau + \frac{8}{3} \frac{f_{04} - f_{01}}{\kappa} + \frac{4}{3} \frac{f_{03} - f_{01}}{\kappa} + \frac{6}{3} \frac{f_{02} - f_{01}}{\kappa},$$

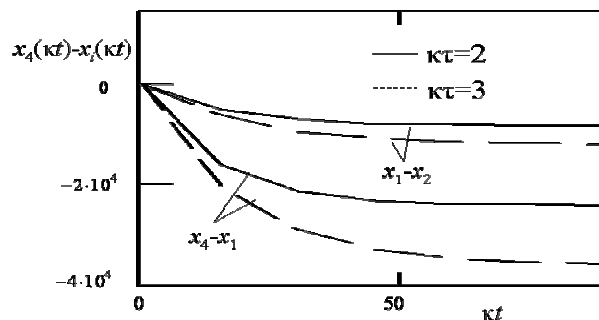
$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_4(p) - X_2(p)) = -2f_{01}\tau + \frac{2}{3} \frac{f_{03} - f_{01}}{\kappa} + \frac{4}{3} \frac{f_{04} - f_{01}}{\kappa},$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_4(p) - X_3(p)) = \frac{2}{3} \frac{f_{04} - f_{03}}{\kappa}.$$

Generatorių virpesių fazių skirtumų pereinamieji procesai priklauso nuo pradinių sąlygų, t.y. nuo generatorių savųjų dažnių  $f_{0i}$  ir pradinių fazių  $\varphi_{0i}$ ,  $i = \overline{1,4}$ . Taip pat nuo parametru  $\kappa\tau$  sandaugos. Didėjant  $\kappa\tau$  pereinamojo proceso trukmė didėja. Kai kurių fazių skirtumų grafikai pateikti 2.5 paveiksle (skaičiuota, kai  $\frac{f_{01}}{\kappa} = 2005$ ;  $\frac{f_{02}}{\kappa} = 2000$ ;  $\frac{f_{03}}{\kappa} = 2000$ ;  $\frac{f_{04}}{\kappa} = 2005$ ,  $\varphi_{0i} = 0.5$   $i = \overline{1,4}$ ) (daugiau grafikų žr. 4 priede).



2.4 pav. Fazių skirtumo  $x_4(t) - x_3(t)$  grafikai



2.5 pav. Fazių skirtumo  $x_4(t) - x_1(t)$  grafikai prie skirtingų  $\kappa\tau$  reikšmių

## **PROGRAMINĖ REALIZACIJA IR INSTRUKCIJA VARTOTOJUI**

Mathcad 12 Professional – taikomųjų programų paketas, orientuotas į mokslinius, techninius skaičiavimus. Šiuo programiniu paketu galima atlikti ne tik skaitmeninius, bet ir analitinius (simbolinius) skaičiavimus. Kadangi šiuo paketu lengvai apskaičiuojamos sudėtingos formulės, todėl visi skaičiavimai ir yra atliekami būtent Mathcad 12 Professional programiniu paketu.

Šiuo paketu skaičiuota pereinamosios funkcijos, generatorių virpesių fazių skirtumai, nubraižyti grafikai.

## IŠVADOS

Nagrinėta priverstinės sinchronizacijos sistema. Analizuodami skaičiavimo rezultatus, padarome šias išvadas:

1. Pereinamojo proceso trukmė sinchronizacijos sistemoje priklauso nuo parametrų  $\kappa$  ir  $\tau$  sandaugos. Didėjant  $\kappa\tau$ , pereinamojo proceso trukmė turi tendenciją didėti. Pereinamasis procesas įgauna virpamojo proceso požymių, kai  $\kappa\tau > 1,5$ .

2. Kai vėlinimo  $\tau$  ir koeficiento  $\kappa$  sandauga daug mažesnė už vienetą, pereinamasis procesas praktiškai nepriklauso nuo vėlinimo dydžio. Tuo atveju galima nagrinėti suprastintą sistemos matematinį modelį – matricinę diferencialinę lygtį be vėluojančio argumento.

3. Sistemos generatorių, iš kurių vienas turi betarpišką ryšį su vedančiuoju, virpesių fazių skirtumų ribinė reikšmė priklauso nuo vedančiojo generatoriaus ir betarpiškai su juo sujungtų generatorių savųjų dažnių skirtumų, bei vedančiojo generatoriaus savojo dažnio ir vėlinimo  $\tau$  sandaugos.

4. Sistemos generatorių, neturinčių betarpiško ryšio su vedančiuoju, virpesių fazių skirtumų ribinė reikšmė priklauso tikrai nuo jų savųjų dažnių skirtumo ir nepriklauso nuo vėlinimo  $\tau$ .

## LITERATŪRA

1. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров: 2-е изд. Москва, 1967, 779 с.
2. Barauskas A., Navickas Z., Tėvelis V. Kompleksinio kintamojo funkcijos ir operacinis skaičiavimas. Vilnius, 1986. 302 p.
3. James G. Advanced modern engineering mathematics. – Wokingham, England: Addison-Wesley, 1993. – 900 p.
4. Bregni S. A. Historical on telekomunicions network in sinchronization // IEEE Communications Magazine. June (1998) p 158-166.
5. Čiegis R. Skaičiuojamoji matematika / Raimondas Čiegis, Vytautas Būda. Vilnius, 1997. 238 p.
6. Ambrazevičius A., Domarkas A. Matematinės fizikos lygtys. Vilnius: Aldorija, 1999, 2 d., 388p.
7. Josima K. Funkcionalinė analizė. Vilnius, 1983. 464 p.
8. Kvedaras B. Matricų teorija. – Kaunas: VDU leidykla, 1999. – 362 p.
9. Krivickas R., Jočys A. Grandinių teorijos pagrindai. Vilnius: Mokslas, 1980, 294 p.
10. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом: 2-е изд. Москва, 1972, 352 с.
11. Rimas J. Operacinis skaičiavimas. Kaunas, 1999, 65 p.
12. Matuliauskas A. Algebra. Vilnius: Mokslas, 1985, 380 p.
13. Apynis A., Stankus E. Matematika. Vilnius, 2001, 357 p.
14. Римас И.З. Исследование динамики систем взаимной синхронизации. Радиотехника, 1977, Т. 32, № 2, с. 3–9.
15. Rimdeikienė A. Priverstinės sinchronizacijos matematinio modelio sudarymas ir tyrimas / Rimdeikienė A., Rimas J. // Lietuvos mokslas ir pramonė. Kaunas, 2000, 30 p.
16. Žilinskas G. Aukštoji algebra. Vilnius, 1960, 822 p.



## 1. PRIEDAS

### VAIZDŲ PIRMAVAIZDŽIŲ SKAIČIAVIMAS

Naudojamės šiomis Laplaso transformacijos formulėmis:

$$1(t) \div \frac{1}{p},$$

$$1(t-\tau) \div \frac{1}{p} e^{-p\tau},$$

$$e^{-\kappa t} \div \frac{1}{p+\kappa},$$

$$\frac{t^n}{n!} \div \frac{1}{p^{n+1}}, \quad n \in N,$$

$$\frac{t^n}{n!} e^{-\kappa t} \div \frac{1}{(p+\kappa)^{n+1}}, \quad n \in N.$$

$$\frac{1}{p(p+\kappa)^{k+1}} \div \int_0^t L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p+\kappa)^{k+1}} \right\} dx = \left[ \frac{1}{(p+\kappa)^{k+1}} \div \frac{x^k}{k!} e^{-\kappa x} \right] = \frac{1}{k!} \int_0^t x^k e^{-\kappa x} dx.$$

$$\int x^k e^{-ax} dx = \begin{bmatrix} -ax = t, \\ x = -\frac{t}{a}, \\ dx = -\frac{1}{a} dt. \end{bmatrix} = \int \left( -\frac{1}{a} \right)^k t^k e^t \left( -\frac{1}{a} \right) dt = \left( -\frac{1}{a} \right)^{k+1} \int t^k e^t dt = \left( -\frac{1}{a} \right)^{k+1} I_1$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int t^k e^t dt = \int t^k de^t = t^k e^t - \int kt^{k-1} e^t dt = t^k e^t - k \int t^{k-1} de^t = t^k e^t - k \left[ t^{k-1} e^t - \int (k-1)t^{k-2} e^t dt \right] = \\ &= t^k e^t - kt^{k-1} e^t + k(k-1) \int t^{k-2} de^t = \dots = t^k e^t - kt^{k-1} e^t + k(k-1)t^{k-2} e^t - k(k-1)(k-2)t^{k-3} e^t + \\ &+ k(k-1)(k-2)(k-3)t^{k-4} e^t + \dots + (-1)^{k-1} k(k-1)(k-2) \dots [k-(k-2)] t^{k-(k-1)} e^t + \\ &+ (-1)^k k(k-1)(k-2) \dots [k-(k-1)] \int t^{k-k} de^t = \\ &= e^t \left[ t^k - kt^{k-1} + k(k-1)t^{k-2} - \dots + (-1)^{k-1} k(k-1)(k-2) \dots 3 \cdot 2t + (-1)^k k(k-1)(k-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \right] \end{aligned}$$

$$I_1 = \int t^k e^t dt = e^t \left[ t^k - kt^{k-1} + k(k-1)t^{k-2} - \dots + (-1)^k k! \right]$$

$$\begin{aligned}
I &= \int x^k e^{-ax} dx = (-1)^k \frac{1}{a^{k+1}} I_1 = \{t = ax\} = (-1)^{k+1} \frac{1}{a^{k+1}} e^{-ax} [(-ax)^k + k(-ax)^{k-1} + k(k-1)(-ax)^{k-2} + \\
&+ \dots + (-1)^{k-1} k!(-ax) + (-1)^k k!] = \frac{1}{a^{k+1}} e^{-ax} [-a^k x^k - ka^{k-1} x^{k-1} - k(k-1)a^{k-2} x^{k-2} - \dots - k!ax - k!] = \\
&= e^{-ax} \left[ -\frac{x^k}{a} - \frac{kx^{k-1}}{a^2} - \frac{k(k-1)x^{k-2}}{a^3} - \dots - \frac{k!}{a^{k+1}} \right].
\end{aligned}$$

$$\int x^k e^{-ax} dx = e^{-ax} \left[ -\frac{x^k}{a} - \frac{kx^{k-1}}{a^2} - \frac{k(k-1)x^{k-2}}{a^3} - \dots - \frac{k!x}{a^k} - \frac{k!}{a^{k+1}} \right].$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p(p+\kappa)^{k+1}} \div \int_0^t \frac{x^k}{k!} e^{-\kappa x} dx &= \frac{1}{k!} \left[ e^{-\kappa x} \left( -\frac{x^k}{\kappa} - \frac{kx^{k-1}}{\kappa^2} - \dots - \frac{k!x}{\kappa^k} - \frac{k!}{\kappa^{k+1}} \right) \right]_0^t = \\
&= \frac{1}{k!} \left[ \left\{ e^{-\kappa t} \left( -\frac{t^k}{\kappa} - \frac{kt^{k-1}}{\kappa^2} - \dots - \frac{k!t}{\kappa^k} - \frac{k!}{\kappa^{k+1}} \right) \right\} - \left( -\frac{k!}{\kappa^{k+1}} \right) \right] = \\
&= \frac{1}{\kappa^{k+1}} - \left[ e^{-\kappa t} \left( \frac{t^k}{\kappa k!} + \frac{t^{k-1}}{(k-1)! \kappa^2} + \dots + \frac{t}{\kappa^k} - \frac{1}{\kappa^{k+1}} \right) \right] = \\
&= \frac{1}{\kappa^{k+1}} - \frac{1}{\kappa^{k+1}} \left[ \left( \frac{\kappa^k t^k}{k!} + \frac{\kappa^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots + \kappa t + 1 \right) e^{-\kappa t} \right] = \frac{1}{\kappa^{k+1}} - \frac{1}{\kappa^{k+1}} \sum_{v=0}^k \frac{(\kappa t)^v}{v!} e^{-\kappa t}.
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{p(p+\kappa)^{k+1}} \div \frac{1}{\kappa^{k+1}} - \frac{1}{\kappa^{k+1}} \sum_{v=0}^k \frac{(\kappa t)^v}{v!} e^{-\kappa t}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p^2} \frac{1}{(p+\kappa)^{k+1}} \div \int_0^t \left( \frac{1}{\kappa^{k+1}} - \frac{1}{\kappa^{k+1}} \sum_{v=0}^k \frac{(\kappa x)^v}{v!} e^{-\kappa x} \right) dx &= \\
= \frac{1}{\kappa^{k+1}} \int_0^t dx - \frac{1}{\kappa^{k+1}} \sum_{v=0}^k \frac{(\kappa)^v}{v!} \int_0^t x^v e^{-\kappa x} dx &= \left\{ \frac{1}{v!} \int_0^t x^v e^{-\kappa x} dx = \frac{1}{\kappa^{v+1}} - \frac{1}{\kappa^{v+1}} \sum_{r=0}^v \frac{(\kappa t)^r}{r!} e^{-\kappa t} \right\} = \\
= \frac{1}{\kappa^{k+1}} t - \frac{1}{\kappa^{k+1}} \sum_{v=0}^k \kappa^v \left[ \frac{1}{\kappa^{v+1}} - \frac{1}{\kappa^{v+1}} \sum_{r=0}^v \frac{(\kappa t)^r}{r!} e^{-\kappa t} \right] &= \\
= \frac{1}{\kappa^{k+1}} t - \frac{1}{\kappa^{k+1}} \sum_{v=0}^k \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa^{k+2}} \sum_{v=0}^k \sum_{r=0}^v \frac{(\kappa t)^r}{r!} e^{-\kappa t} &= \\
= \frac{1}{\kappa^{k+1}} t - \frac{1}{\kappa^{k+2}} \sum_{v=0}^k 1 + \frac{1}{\kappa^{k+2}} \sum_{v=0}^k \sum_{r=0}^v \frac{(\kappa t)^r}{r!} e^{-\kappa t} &= \frac{t}{\kappa^{k+1}} - \frac{k+1}{\kappa^{k+2}} + \frac{1}{\kappa^{k+2}} \sum_{v=0}^k \sum_{r=0}^v \frac{(\kappa t)^r}{r!} e^{-\kappa t}.
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{p^2} \frac{1}{(p+\kappa)^{k+1}} \div \frac{t}{\kappa^{k+1}} - \frac{k+1}{\kappa^{k+2}} + \frac{1}{\kappa^{k+2}} \sum_{v=0}^k \sum_{r=0}^v \frac{(\kappa t)^r}{r!} e^{-\kappa t}.$$

## 2. PRIEDAS

### PEREINAMŪJŲ FUNKCIJŲ SKAIČIAVIMO ALGORITMAS

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad \kappa\tau := 0.5 \quad L := \left( \frac{50}{\kappa\tau} \right) - 1$$

$$T(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{Aprasom Hevisaido vienetine funkcija}$$

$$t\kappa := 0, 0.1..(L+1) \cdot \kappa\tau$$

$$d := \text{floor}(L)$$

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{matrica nusakanti vidine rysiu sistema}$$

Pereinamuju funkciju skaiciavimo formules

$$hi1(t\kappa) := \sum_{k=1}^L \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^k \cdot B^k \cdot \left[ 1 - \sum_{l=0}^k \left[ \frac{(t\kappa - k \cdot \kappa\tau)^l}{l!} \cdot e^{-(t\kappa - k \cdot \kappa\tau)} \right] \right] \cdot T(t\kappa - k \cdot \kappa\tau) \right] \quad i = 2, 3, 4$$

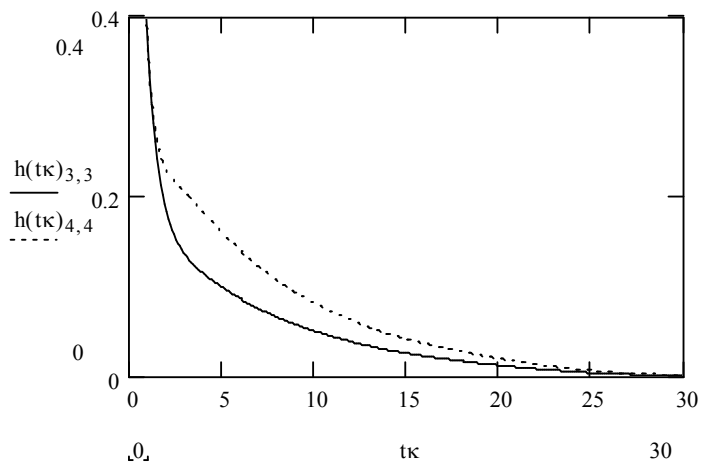
$$hii(t\kappa) := e^{-t\kappa} + \sum_{l=1}^d \frac{(t\kappa - l \cdot \kappa\tau)^l \cdot B^l \cdot e^{-(t\kappa - l \cdot \kappa\tau)} \cdot T(t\kappa - l \cdot \kappa\tau)}{2^l \cdot l!} \quad i = 2, 3, 4$$

$$hij(t\kappa) := \sum_{l=0}^d \left[ \frac{(t\kappa - l \cdot \kappa\tau)^l}{2^l \cdot l!} \cdot e^{-(t\kappa - l \cdot \kappa\tau)} \cdot (B^l) \cdot T(t\kappa - l \cdot \kappa\tau) \right] \quad i, j \neq 1, 2, 3, 4 \quad j \neq 1, i \neq j$$

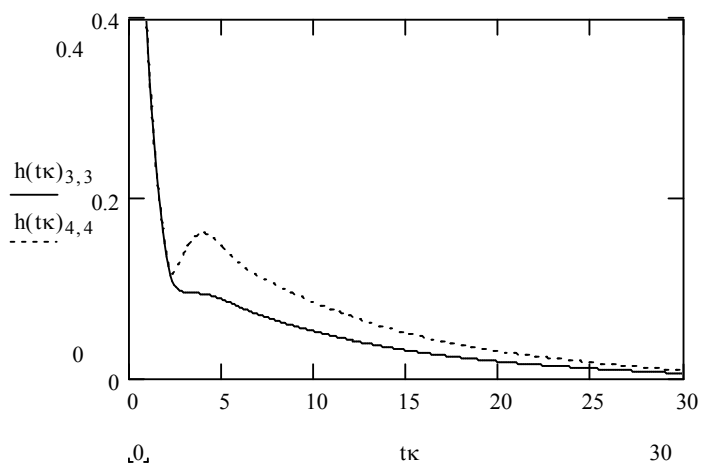
### 3. PRIEDAS

#### PEREINAMŪJŲ FUNKCIJŲ GRAFIKAI

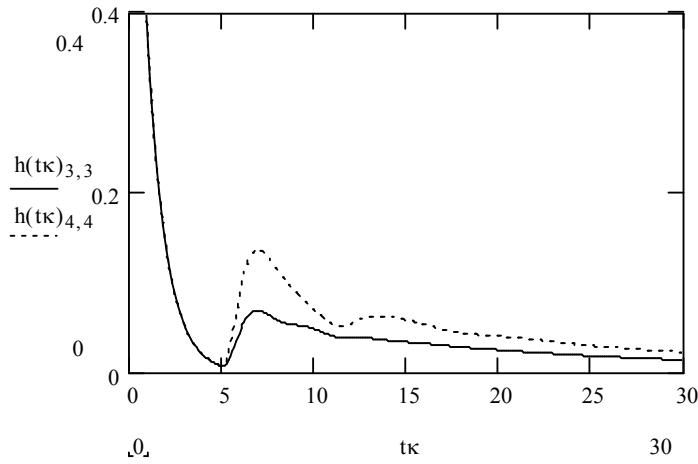
Pereinamųjų funkcijų grafikai prie skirtingų  $\kappa$ ,  $\tau$  reikšmių.



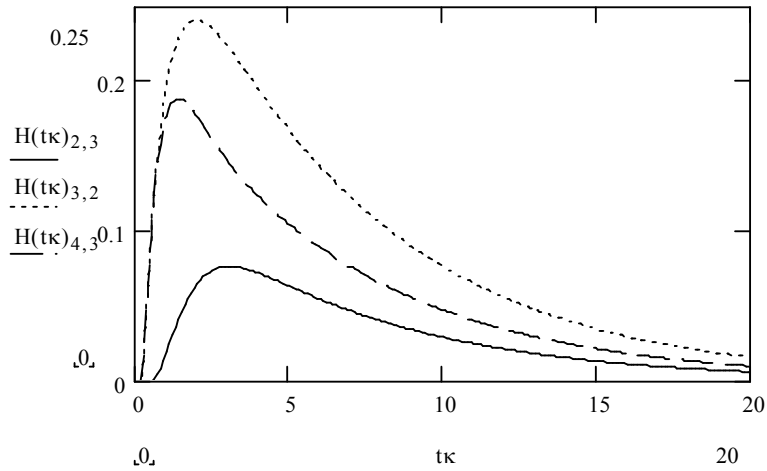
3.1 pav. Pereinamųjų funkcijų  $h_{ii}$  grafikai, kai  $\kappa\tau=0,5$



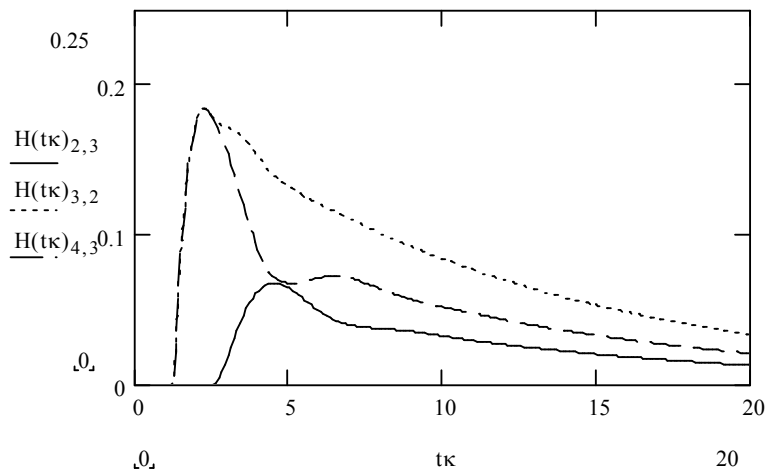
3.2 pav. Pereinamųjų funkcijų  $h_{ii}$  grafikai, kai  $\kappa\tau=1$



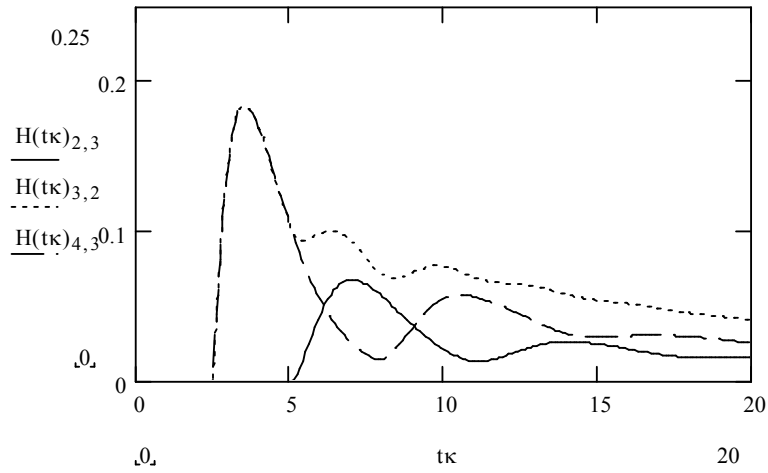
3.3 pav. Pereinamųjų funkcijų  $h_{ii}$  grafikai, kai  $\kappa=2,5$



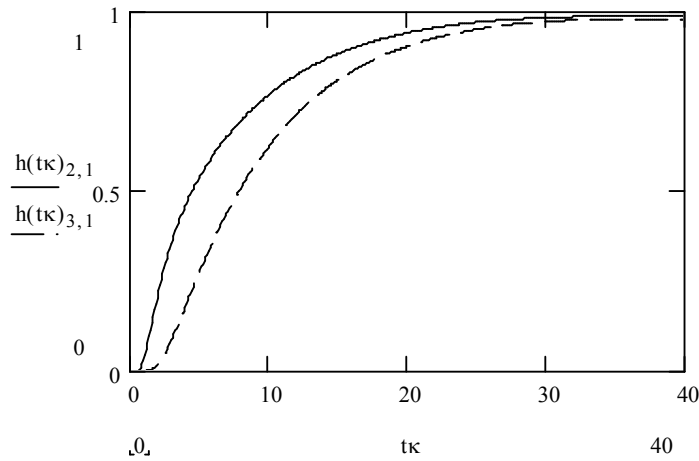
3.4 pav. Pereinamųjų funkcijų  $h_{ij}$  grafikai, kai  $\kappa=0,25$



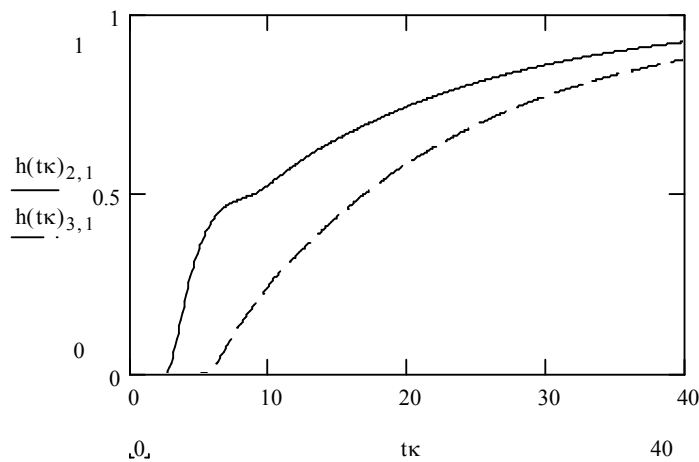
3.5 pav. Pereinamųjų funkcijų  $h_{ij}$  grafikai, kai  $\kappa=1,25$



3.6 pav. Pereinamųjų funkcijų  $h_{ij}$  grafikai, kai  $\kappa=2,5$



3.7 pav. Pereinamųjų funkcijų  $h_{i1}$  grafikai, kai  $\kappa=0,5$



3.8 pav. Pereinamųjų funkcijų  $h_{i1}$  grafikai, kai  $\kappa=2,5$

## 4. PRIEDAS

### GENERATORIŲ VIRPESIŲ FAZIŲ SKIRTUMO SKAIČIAVIMO ALGORITMAS

$$\begin{aligned} \text{ORIGIN} &:= 1 \\ \underline{V}(t) &:= \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \\ \underline{B} &:= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{matrica nusakanti vidine rysių} \\ & \quad \text{struktura} \end{aligned}$$

vienetinė funkcija

$$\begin{aligned} \kappa\tau &:= 3 & \underline{L} &:= \left(\frac{25}{\kappa\tau}\right) - 1 & \kappa\tau &:= 0,005 \cdot (L + 1) \cdot \kappa\tau \\ \underline{c} &:= \text{floor}(L) \end{aligned}$$

$$f01 := 2005 \quad f02 := 2000 \quad f03 := 2000 \quad f04 := 2005 \quad \text{generatorių savieji dažniai}$$

$$\phi01 := 0.5 \quad \phi02 := 0.5 \quad \phi03 := 0.5 \quad \phi04 := 0.5 \quad \text{pradinės fazės}$$

$$f14 := f01 + f04 \quad \phi14 := \phi01 + \phi04$$

$$f24 := f02 + f04 \quad \phi24 := \phi02 + \phi04 \quad \text{ivedame pazymejimus}$$

$$f23 := f02 + f03 \quad \phi23 := \phi02 + \phi03$$

$$f043 := f04 - f03 \quad \phi043 := \phi04 - \phi03$$

$$S0(\kappa t, k) := \frac{\kappa t^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\kappa t}$$

$$S1(\kappa t, k) := 1 - \sum_{v=0}^{k-1} \left( \frac{\kappa t^v}{v!} \cdot e^{-\kappa t} \right)$$

$$S2(\kappa t, k) := \kappa t - k + \sum_{v=0}^{k-1} \sum_{r=0}^v \left( \frac{\kappa t^r}{r!} \cdot e^{-\kappa t} \right)$$

$$A43(\kappa t) = \left[ f043 + \frac{1}{2} \cdot (-\phi043 + f043 \cdot \kappa\tau) \right] \cdot S1(\kappa t, 1) + \phi043 \cdot S0(\kappa t, 1) + \blacksquare$$

$$\blacksquare + \frac{1}{2} \cdot (-f043) \cdot S2(\kappa t, 1) - \frac{1}{2} \cdot (-\phi043) \cdot S1(\kappa t - \kappa\tau, 1) \cdot V(\kappa t - \kappa\tau) - \frac{1}{2} \cdot (-f043) \cdot S2(\kappa t - \kappa\tau, 1) \cdot V(\kappa t - \kappa\tau)$$

$$a1(\kappa t, k) = f01 \cdot S2(\kappa t - k \cdot \kappa\tau, k) \cdot V(\kappa t - k \cdot \kappa\tau) + \phi01 \cdot S1(\kappa t - k \cdot \kappa\tau, k) \cdot V(\kappa t - k \cdot \kappa\tau)$$

$$\begin{aligned}
& a_2(\kappa t, k) = f_{02} S_1(\kappa t - k \cdot \kappa \tau, k + 1) \cdot \mathcal{V}(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) + \phi_{02} S_0(\kappa t - k \cdot \kappa \tau, k + 1) \cdot \mathcal{V}(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) + \blacksquare \\
& \blacksquare + \frac{1}{2} \cdot (\phi_{14} - f_{14} \kappa \tau) \cdot S_1(\kappa t - k \cdot \kappa \tau, k + 1) \cdot \mathcal{V}(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) + \frac{1}{2} \cdot f_{14} S_2(\kappa t - k \cdot \kappa \tau, k + 1) \cdot \mathcal{V}(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) - \blacksquare \\
& \left[ \frac{1}{2} \cdot \phi_{14} S_1[\kappa t - (k + 1) \cdot \kappa \tau, k + 1] \cdot \mathcal{V}[\kappa t - (k + 1) \cdot \kappa \tau] - \frac{1}{2} \cdot f_{14} S_2[\kappa t - (k + 1) \cdot \kappa \tau, k + 1] \cdot \mathcal{V}[\kappa t - (k + 1) \cdot \kappa \tau] \right] \\
& a_3(\kappa t, k) = f_{03} S_1(\kappa t - k \cdot \kappa \tau, k + 1) \cdot \mathcal{V}(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) + \phi_{03} S_0(\kappa t - k \cdot \kappa \tau, k + 1) \cdot \mathcal{V}(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) + \blacksquare \\
& \blacksquare + \frac{1}{2} \cdot (\phi_{24} - f_{24} \kappa \tau) \cdot S_1(\kappa t - k \cdot \kappa \tau, k + 1) \cdot \mathcal{V}(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) + \frac{1}{2} \cdot f_{24} S_2(\kappa t - k \cdot \kappa \tau, k + 1) \cdot \mathcal{V}(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) - \blacksquare \\
& \left[ \frac{1}{2} \cdot \phi_{24} S_1[\kappa t - (k + 1) \cdot \kappa \tau, k + 1] \cdot \mathcal{V}[\kappa t - (k + 1) \cdot \kappa \tau] - \frac{1}{2} \cdot f_{24} S_2[\kappa t - (k + 1) \cdot \kappa \tau, k + 1] \cdot \mathcal{V}[\kappa t - (k + 1) \cdot \kappa \tau] \right] \\
& a_4(\kappa t, k) = f_{04} S_1(\kappa t - k \cdot \kappa \tau, k + 1) \cdot \mathcal{V}(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) + \phi_{04} S_0(\kappa t - k \cdot \kappa \tau, k + 1) \cdot \mathcal{V}(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) + \blacksquare \\
& \blacksquare + \frac{1}{2} \cdot (\phi_{23} - f_{23} \kappa \tau) \cdot S_1(\kappa t - k \cdot \kappa \tau, k + 1) \cdot \mathcal{V}(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) + \frac{1}{2} \cdot f_{23} S_2(\kappa t - k \cdot \kappa \tau, k + 1) \cdot \mathcal{V}(\kappa t - k \cdot \kappa \tau) - \blacksquare \\
& \left[ \frac{1}{2} \cdot \phi_{23} S_1[\kappa t - (k + 1) \cdot \kappa \tau, k + 1] \cdot \mathcal{V}[\kappa t - (k + 1) \cdot \kappa \tau] - \frac{1}{2} \cdot f_{23} S_2[\kappa t - (k + 1) \cdot \kappa \tau, k + 1] \cdot \mathcal{V}[\kappa t - (k + 1) \cdot \kappa \tau] \right] \\
& x_{43}(\kappa t) = A_{43}(\kappa t) + \sum_{l=1}^c \left[ \frac{1}{2^l} \cdot \left[ \binom{B^l}{4,1} - \binom{B^l}{3,1} \right] \cdot a_1(\kappa t, l) + \left[ \binom{B^l}{4,2} - \binom{B^l}{3,2} \right] \cdot a_2(\kappa t, l) + \left[ \binom{B^l}{4,3} - \binom{B^l}{3,3} \right] \cdot a_3(\kappa t, l) + \left[ \binom{B^l}{4,4} - \binom{B^l}{3,4} \right] \cdot a_4(\kappa t, l) \right] \\
& A_{41}(\kappa t) = \left[ f_{04} + \frac{1}{2} \cdot (\phi_{23} - f_{23} \kappa \tau) \right] \cdot S_1(\kappa t, 1) + \phi_{04} S_0(\kappa t, 1) + \frac{1}{2} \cdot f_{23} S_2(\kappa t, 1) - \blacksquare \\
& \left( \frac{1}{2} \cdot \phi_{23} S_1(\kappa t - \kappa \tau, 1) \cdot \mathcal{V}(\kappa t - \kappa \tau) - \frac{1}{2} \cdot f_{23} S_2(\kappa t - \kappa \tau, 1) \cdot \mathcal{V}(\kappa t - \kappa \tau) - f_{01} \kappa t \cdot \mathcal{V}(\kappa t) - \phi_{01} \cdot \mathcal{V}(\kappa t) \right) \\
& A_{42}(\kappa t) = \left[ f_{042} + \frac{1}{2} \cdot (\phi_{23} - f_{23} \kappa \tau) - \frac{1}{2} \cdot (\phi_{14} - f_{14} \kappa \tau) \right] \cdot S_1(\kappa t, 1) + \phi_{042} S_0(\kappa t, 1) + \blacksquare \\
& \blacksquare + \frac{1}{2} \cdot (f_{23} - f_{14}) \cdot S_2(\kappa t, 1) - \frac{1}{2} \cdot (\phi_{23} - \phi_{14}) \cdot S_1(\kappa t - \kappa \tau, 1) \cdot \mathcal{V}(\kappa t - \kappa \tau) - \frac{1}{2} \cdot (f_{23} - f_{14}) \cdot S_2(\kappa t - \kappa \tau, 1) \cdot \mathcal{V}(\kappa t - \kappa \tau) \\
& x_{44}(\kappa t) = A_{42}(\kappa t) + \sum_{l=1}^c \left[ \frac{1}{2^l} \cdot \left[ \binom{B^l}{4,1} - \binom{B^l}{2,1} \right] \cdot a_1(\kappa t, l) + \left[ \binom{B^l}{4,2} - \binom{B^l}{2,2} \right] \cdot a_2(\kappa t, l) + \left[ \binom{B^l}{4,3} - \binom{B^l}{2,3} \right] \cdot a_3(\kappa t, l) + \left[ \binom{B^l}{4,4} - \binom{B^l}{2,4} \right] \cdot a_4(\kappa t, l) \right] \\
& x_{41}(\kappa t) = A_{41}(\kappa t) + \sum_{l=1}^c \left[ \frac{1}{2^l} \cdot \left[ \binom{B^l}{4,1} - \binom{B^l}{1,1} \right] \cdot a_1(\kappa t, l) + \left[ \binom{B^l}{4,2} - \binom{B^l}{1,2} \right] \cdot a_2(\kappa t, l) + \left[ \binom{B^l}{4,3} - \binom{B^l}{1,3} \right] \cdot a_3(\kappa t, l) + \left[ \binom{B^l}{4,4} - \binom{B^l}{1,4} \right] \cdot a_4(\kappa t, l) \right] \\
& x_{31}(\kappa t) := A_{31}(\kappa t) + \sum_{l=1}^c \left[ \frac{1}{2^l} \cdot \left[ \binom{B^l}{3,1} \cdot a_1(\kappa t, l) + \binom{B^l}{3,2} \cdot a_2(\kappa t, l) + \binom{B^l}{3,3} \cdot a_3(\kappa t, l) + \binom{B^l}{3,4} \cdot a_4(\kappa t, l) \right] \right] \\
& x_{21}(\kappa t) := A(\kappa t) + \sum_{l=1}^c \left[ \frac{1}{2^l} \cdot \left[ \binom{B^l}{2,1} \cdot a_1(\kappa t, l) + \binom{B^l}{2,2} \cdot a_2(\kappa t, l) + \binom{B^l}{2,3} \cdot a_3(\kappa t, l) + \binom{B^l}{2,4} \cdot a_4(\kappa t, l) \right] \right] \\
& x_{32}(\kappa t) := A_{32}(\kappa t) + \sum_{l=1}^c \left[ \frac{1}{2^l} \cdot \left[ \binom{B^l}{3,1} - \binom{B^l}{2,1} \right] \cdot a_1(\kappa t, l) + \left[ \binom{B^l}{3,2} - \binom{B^l}{2,2} \right] \cdot a_2(\kappa t, l) + \left[ \binom{B^l}{3,3} - \binom{B^l}{2,3} \right] \cdot a_3(\kappa t, l) + \left[ \binom{B^l}{3,4} - \binom{B^l}{2,4} \right] \cdot a_4(\kappa t, l) \right] \\
& A_{32}(\kappa t) = \left[ f_{032} + \frac{1}{2} \cdot (-\phi_{032} + f_{032} \kappa \tau) \right] \cdot S_1(\kappa t, 1) + \phi_{032} S_0(\kappa t, 1) + \frac{1}{2} \cdot (-f_{032}) \cdot S_2(\kappa t, 1) - \blacksquare
\end{aligned}$$



$$-\left[ \frac{1}{2} \cdot (-\phi 032) \cdot S1(\kappa t - \kappa \tau, 1) \cdot V(\kappa t - \kappa \tau) - \frac{1}{2} \cdot (-f 032) \cdot S2(\kappa t - \kappa \tau, 1) \cdot V(\kappa t - \kappa \tau) \right]$$

$$A_{31}(\kappa t) := f_{03} + \frac{1}{2} \cdot (\phi_{24} - f_{24} \kappa \tau) \cdot S1(\kappa t, 1) + \phi_{03} \cdot S0(\kappa t, 1) + \frac{1}{2} \cdot f_{24} \cdot S2(\kappa t, 1) - \frac{1}{2} \cdot \phi_{24} \cdot S1(\kappa t - \kappa \tau, 1) \cdot V(\kappa t - \kappa \tau) - \frac{1}{2} \cdot f_{24} \cdot S2(\kappa t - \kappa \tau, 1) \cdot V(\kappa t - \kappa \tau) - f_{01} \cdot \kappa t \cdot V(\kappa t) - \phi_{01} \cdot V(\kappa t)$$

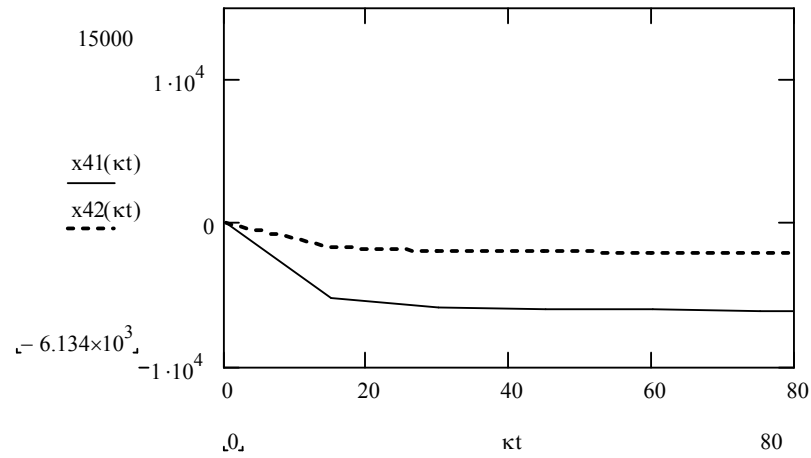
$$\underline{A}(\kappa t) := f_{02} + \frac{1}{2} \cdot (\phi_{14} - f_{14} \kappa \tau) \cdot S1(\kappa t, 1) + \phi_{02} \cdot S0(\kappa t, 1) + \frac{1}{2} \cdot f_{14} \cdot S2(\kappa t, 1) - \frac{1}{2} \cdot \phi_{14} \cdot S1(\kappa t - \kappa \tau, 1) \cdot V(\kappa t - \kappa \tau) - \frac{1}{2} \cdot f_{14} \cdot S2(\kappa t - \kappa \tau, 1) \cdot V(\kappa t - \kappa \tau) - f_{01} \cdot \kappa t \cdot V(\kappa t) - \phi_{01} \cdot V(\kappa t)$$

## 5. PRIEDAS

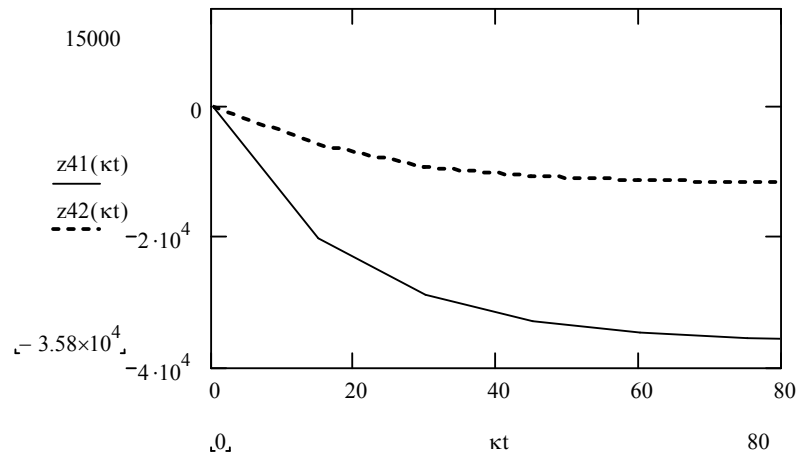
### GENERATORIŲ VIRPESIŲ FAZIŲ SKIRTUMŲ GRAFIKAI

Generatorių virpesių fazių skirtumai, kai

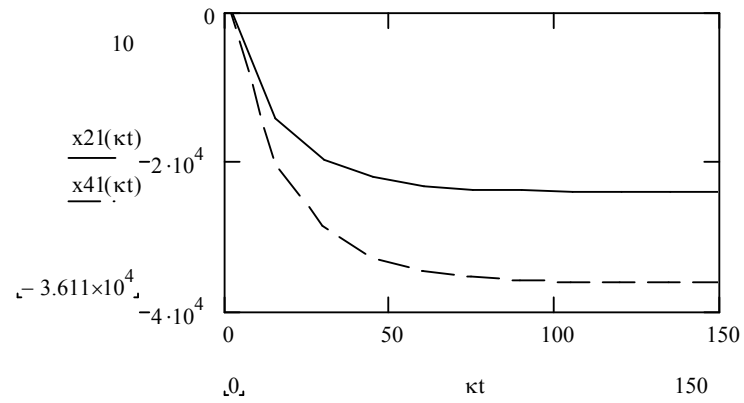
$$\frac{f_{01}}{\kappa} = 2005, \quad \frac{f_{02}}{\kappa} = 2000, \quad \frac{f_{03}}{\kappa} = 2000, \quad \frac{f_{04}}{\kappa} = 2005, \quad \varphi_{0i} = 0.5 \quad i = \overline{1,4}$$



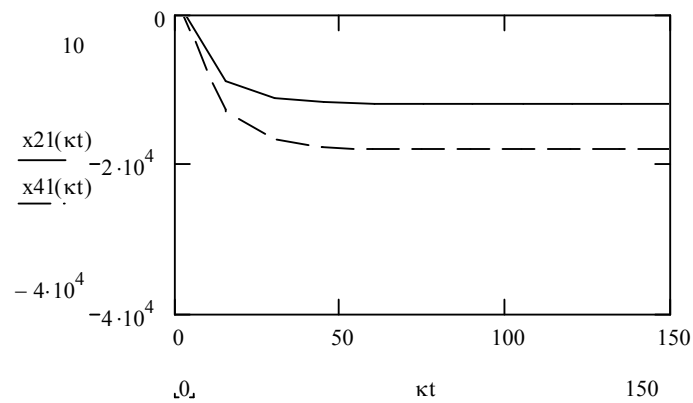
5.1 pav. Fazių skirtumo  $x_4(t) - x_i(t)$ ,  $i = 1, 2$  grafikas, kai  $\kappa\tau = 0.5$



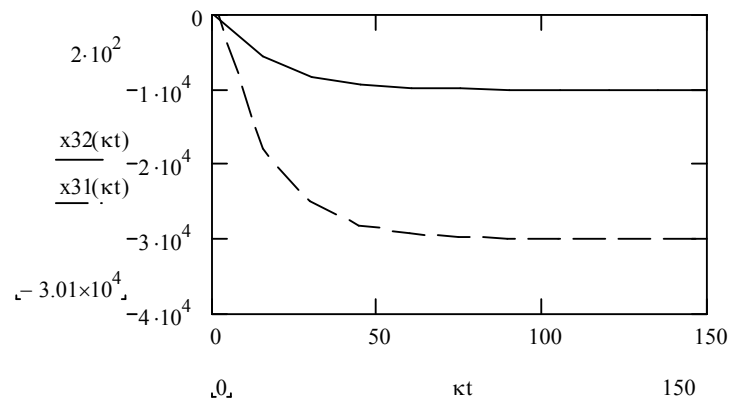
5.2 pav. Fazių skirtumo  $x_4(t) - x_i(t)$ ,  $i = 1, 2$  grafikas, kai  $\kappa\tau = 3$



5.3 pav. Fazių skirtumo  $x_i(t) - x_1(t)$ ,  $i = 2, 4$  grafikas, kai  $\kappa\tau = 3$



5.4 pav. Fazių skirtumo  $x_i(t) - x_1(t)$ ,  $i = 2, 4$  grafikas, kai  $\kappa\tau = 1.5$



5.5 pav. Fazių skirtumo  $x_i(t) - x_j(t)$ , grafikas, kai  $\kappa\tau = 2.5$

Gaunamos tokios ribinės reikšmės:

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_4(p) - X_1(p)) = -36106.7;$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_4(p) - X_2(p)) = -12033.3;$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_4(p) - X_3(p)) = 3.3.$$

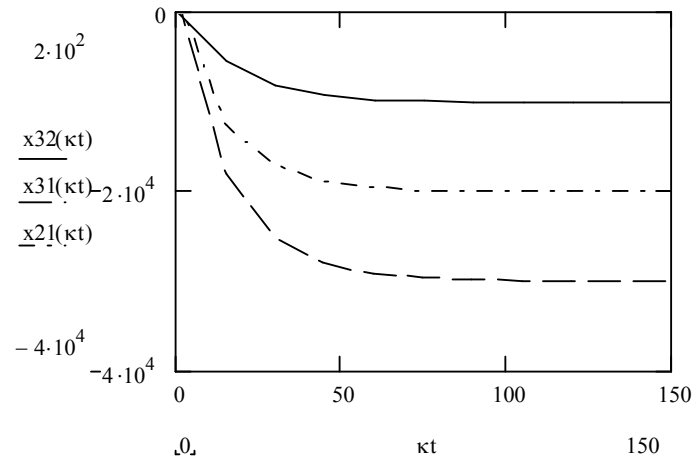
$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_2(p) - X_1(p)) = -12043.3;$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_3(p) - X_1(p)) = -36110;$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p(X_3(p) - X_2(p)) = -12036.7;$$

Generatorių virpesių fazių skirtumai, kai

$$\frac{f_{01}}{\kappa} = \frac{f_{02}}{\kappa} = \frac{f_{03}}{\kappa} = \frac{f_{04}}{\kappa} = 2000, \quad \varphi_{01} = \varphi_{02} = 0, \quad \varphi_{03} = \varphi_{04} = 1.$$



5.6 pav. Fazių skirtumo  $x_i(t) - x_j(t)$ , grafikas, kai  $\kappa\tau = 2.5$