



**KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA**

Laura Stankevičiūtė

**VIENOS DINAMINĖS SISTEMOS CHAOTINIO
JUDESIO PAIEŠKA**

Magistro darbas

**Vadovas
prof. Z. Navickas**

KAUNAS, 2009



**KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA**

TVIRTINU

Katedros vedėjas

doc. dr. N. Listopadskis

2009 06 05

**VIENOS DINAMINĖS SISTEMOS CHAOTINIO
JUDESIO PAIEŠKA**

Matematikos magistro baigiamasis darbas

Vadovas

prof. Z. Navickas

2009 06 03

Recenzentas

doc. dr. K. Plukas

2009 06 02

Atliko

FMMM-7 gr. stud.

L. Stankevičiūtė

2009 05 25

KAUNAS, 2009

KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

- Pirmininkas:** Leonas Saulis, profesorius (VGTU)
- Sekretorius:** Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)
- Nariai:**
- Algimantas Jonas Aksomaitis, profesorius (KTU)
 - Arūnas Barauskas, Vice-prezidentas projektams (UAB „Baltic Amadeus“)
 - Vytautas Janilionis, docentas (KTU)
 - Zenonas Navickas, profesorius (KTU)
 - Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU)
 - Rimantas Rudzkis, valdybos pirmininko patarėjas („DnB NORD“ bankas)

SANTRAUKA

Šiame darbe vienoje dinaminėje sistemoje ieškoma chaotinio judesio. Pastaroji sistema yra aprašoma dviem paprastosiomis diferencialinėmis lygtimis. Šių lygčių sprendinių ieškoma dviem metodais: operatoriniu ir skaitiniu Rungės ir Kutos. Vėliau tiriama diferencialinių lygčių sprendinių priklausomybė nuo pradinių sąlygų. Taip pat atliekamas chaoso tyrimas pagal i tiriamas diferencialines lygtis įeinančius parametrus. Ir galiausiai vertinamas chaosas sistemoje pagal Liapunovo eksponentes.

Nustatyta, kad priklausomai nuo parametrų reikšmių, duotoje sistemoje egzistuoja stabilus režimas, determinuotas chaosas bei pereinamieji procesai.

Stankevičiūtė L. CHAOTIC MOTION SEARCH OF ONE DYNAMIC SYSTEM: Master's work in applied mathematics / supervisor prof. Z. Navickas; Department of Applied mathematics, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2009. –43 p.

SUMMARY

In this paper a search for the chaotic motion is made in one dynamic system. This system is described by two simple differential equations. We are looking for solutions of this system using two methods: operator method and numerical Runge and Kutta method. Then a study of dependency of solutions of differential equations on initial conditions is made. Also a study of chaos using parameters of considered differential equations is presented. And finally we estimate chaos in the system using Lyapunov exponents.

The results showed that a stable regime, determined chaos and transition processes exist in the given system depending on values of parameters.

TURINYS

Įvadas	8
1. Bendroji dalis	9
1.1 Skaitiniai Rungės ir Kutos metodai	9
1.2 Diferencialinių lygčių sprendimas taikant operatorius	10
1.2.1 Operatorinis diferencialinių lygčių sprendimo metodas	10
1.2.2 Diferencialinių lygčių operatorinių sprendinių sudarymo pavyzdžiai	11
1.2.3 Apibendrinimai diferencialinių lygčių sistemoms	15
1.2.4 Skaičiavimo algoritmas	16
1.3 Mechaninių virpesių sistema	18
1.4 Liapunovo eksponentės	20
1.4.1 Liapunovo eksponenčių apskaičiavimo metodai	20
1.4.2 Maksimalios Liapunovo eksponentės. Liapunovo eksponenčių spektras	21
1.4.3 Liapunovo eksponenčių spektro apskaičiavimo pavyzdys	23
1.4.4 Lokalių Liapunovo eksponentės	24
1.4.5 Lokalių Liapunovo eksponenčių spektro apskaičiavimo pavyzdys	24
2. Tiriamoji dalis	26
2.1 Sistemos sprendimas Rungės ir Kutos ir operatoriniu metodais	26
2.2 Sistemos savybių priklausomybė nuo pradinių sąlygų	27
2.3 Sistemos savybių priklausomybės nuo parametrų tyrimas	28
2.4 Sistemos chaotiškumo vertinimas pagal Liapunovo eksponentes	32
Išvados	36
Literatūra	38
1 priedas. Programų tekstai	39

Paveikslų sąrašas

1.1 pav. Artinių šeima	16
1.2 pav. Galutinis sprendinio artinys	16
1.3 pav. Diferencialinių lygčių sprendimo operatoriniu metodu algoritmo schema	17
1.4 pav. Sistemos modelis	18
1.5 pav. Dviejų gretimų fazinės erdvės trajektorijų kitimas laike	20
2.1 pav. Sprendinių grafikai a) sprendžiant operatoriniu metodu ($n=3$), b) sprendžiant operatoriniu metodu ($n=5$)	26
2.1 pav. Sprendinių grafikai c) sprendžiant Rungės ir Kutos metodu	27
2.2 pav. Chaotinio režimo pavyzdys: a) sprendinys standartinėje plokštumoje x	27
2.2 pav. Chaotinio režimo pavyzdys: b) sprendinys fazinėje plokštumoje φ' / φ''	28
2.3 pav. Chaotinio režimo pavyzdys, kai sprendinys vaizduojamas fazinėje plokštumoje φ' / φ''	28
2.4 pav. Chaotinio režimo pavyzdys pastoviam parametrai q_1 ir skirtingiems parametrų q_3	29
2.5 pav. Chaotinio režimo pavyzdys pastoviam parametrai q_3 ir skirtingiems parametrų q_1	30
2.6 pav. Autovirpesių (kai $\mu = 0$) ir sukimosi režimų egzistavimo sritys skirtingoms rotorius masėms ($\mu = 0.1, \mu = 0.2, \mu = 0.3$)	31
2.7 pav. Režimų pavyzdžiai egzistavimo srityse, kai $\mu = 0.1$ ir $q_3 = 0.1$	31
2.8 pav. Liapunovo eksponenčių spektrų dinamika: a) $p=0.1, d=0.1, q_1 = 0.1, q_3 = 0.1$, b) $p=0.1, d=0.1, q_1 = 0.1, q_3 = 0.00000001$	33
2.8 pav. Liapunovo eksponenčių spektrų dinamika: c) $p=0.1, d=0.1, q_1 = 0.1, q_3 = 100$, d) $p=1, d=1, q_1 = 0.000000000001, q_3 = 1$, e) $p=1, d=1, q_1 = 10, q_3 = 1$	34
2.8 pav. Liapunovo eksponenčių spektrų dinamika: f) $p=100, d=0.1, q_1 = 0.1, q_3 = 0.1$	35

ĮVADAS

Chaosu vadinamas nereguliarus dinaminių sistemų elgesys. Pagrindinė chaotinio elgesio savybė: artimos trajektorijos fazinėje erdvėje eksponentiškai greitai prasiskiria (Drugelio efektas). Chaoso teorijos pradininku laikomas Edwardas Lorenzas.

Šio darbo tikslas ir yra įvertinti chaosą vienoje dinaminėje sistemoje, bei atlikti chaoso tyrimą sistemoje pagal parametrus. Skaičiavimams buvo naudotos *Maple* ir *Matlab* programinės įrangos.

Pirmoje dalyje – bendrojoje dalyje pateikiama skaičiavimams naudotų operatorinio ir Rungės ir Kutos metodų aprašymai. Taip pat aprašomas akademiko prof. K. Ragulskio pasiūlytas mechaninių virpesių sistemos modelis. Toliau pateikta teorija reikalinga apibrėžti Liapunovo eksponentes, kurių pagalba įvertinamas chaosas sistemoje. Tiriamojoje dalyje lyginamas operatorinio ir Rungės ir Kutos diferencialinių lygčių sprendimo metodų efektyvumas, tiriama sistemos savybių priklausomybė nuo pradinių sąlygų, taip pat priklausomybė nuo parametrų, vertinamas sistemos chaotiškumas pagal Liapunovo eksponentes.

1. BENDROJI DALIS

Galima išskirti tikslus, apytikslius, ir skaitinius paprastųjų diferencialinių lygčių sprendimo metodus. Tikslūs metodai yra kai randami duotos lygties bendrasis sprendinys, skaitiniai – kai randami atskirieji sprendiniai su pakankamu tikslumu skaičių lentelės pavidalu, apytiksliai – kai analiziškai randamas apytikslis atskirasis lygties sprendinys. Šie metodai gali būti realizuojami naudojant matematinę (*Maple, Matlab, Mathcad,...*) arba kitą programinę įrangą.

1.1 SKAITINIAI RUNGĖS IR KUTOS METODAI

Pirmuosius skaitinius diferencialinių lygčių sprendimo metodus sukūrė I. Niutonas (I. Newton) ir L. Oileris (L. Euler). XX amžiaus pradžioje jau buvo žinomi dabar tapę klasikiniai Rungės ir Kutos ir Adamso metodai.[5]

Paprastųjų diferencialinių lygčių sprendimo metodai skirstomi į vienažingsnius ir daugiažingsnius. Rungės ir Kutos metodai yra tipiškas vienažingsnių metodų pavyzdys. Tai vieni dažniausiai taikomų apytikslių diferencialinių lygčių sprendimo metodų.

Tarkime, kad $y(x)$ yra diferencialinės lygties $y' = f(x, y)$ su pradinėmis sąlygomis $y|_{x=x_0} = y_0$ (Koši uždavinio) sprendinys. Išreiškime jį Teiloro formule kiekvieno taško $x_n (n = 1, 2, \dots)$ aplinkoje, apsiribodami pirmaisiais keturiais nariais:

$$y(x) = y_n + h \frac{dy}{dx} + \frac{h^2 d^2 y}{2! dx^2} + \frac{h^3 d^3 y}{3! dx^3}; \text{ čia } h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1}.$$

Imdami tik pirmuosius du šios formulės narius, gautume Oilerio metodo formulę.

Pažymėkime $y_{n+1} = y_n + \lambda_n$; čia $\lambda_n = h \frac{dy}{dx} + \frac{h^2 d^2 y}{2! dx^2} + \frac{h^3 d^3 y}{3! dx^3}$. Šis dydis apskaičiuojamas pagal formulę $\lambda_n = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$; čia $k_1 = hf(x_n, y_n)$, $k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$, $k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$, $k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$.

Taigi diferencialinės lygties sprendinio reikšmė taške x_{n+1} apskaičiuojama pagal formulę

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Rungės-Kutos ir Felbergo metodas, naudotas šiame darbe, yra adaptuotas skaitinis metodas spręsti uždaviniui: $y'(t) = f(t, y(t)), y(t_0) = y_0$. Šis metodas suderina ketvirtos ir penktos eilės Rungės ir Kutos metodus.

1.2 DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SPRENDIMAS TAIKANT OPERATORIUS

Operatorių taikymas tiesinių diferencialinių lygčių sprendime buvo aprašytas straipsnyje [2].

1.2.1 OPERATORINIS DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SPRENDIMO METODAS

Pirmiausia pateiksime specialias sąvokas ir teoremas, skirtas netiesinėms diferencialinėms lygtims spręsti.

Tarkime, turime trijų kintamųjų algebrinę eilutę

$$F_{xst} = \left\{ \sum_{k,l,n=0}^{+\infty} a_{kln} x^k s^l t^n \mid a_{kln} \in C \right\} \text{ ir funkciją } f_k := f_k(x, s, t), k = 1, 2, \dots, n. \text{ Funkcija } f_k$$

yra laipsnių eilutė nuo x, s, t . $P(x, s, t)$ ir $Q(x, s, t)$ yra daugianariai.

1 apibrėžimas. Tiesinį operatorių $D_{st} := P(x, s, t)D_s + Q(x, s, t)D_t$ vadinsime apibendrintuoju diferencialiniu operatoriumi (čia D_s ir D_t - diferencialiniai operatoriai atitinkamai pagal s ir t).

1.1 pavyzdys. Tarkime $D_{st} = sD_s + tD_t$, tuomet $D_{st}x^n = (sD_s + tD_t)x^n = s \cdot 0 + t \cdot 0 = 0$, $D_{st}s^2xt^3 = (sD_s + tD_t)s^2xt^3 = 2s^2xt^3 + 3s^2xt^3 = 5s^2xt^3$, $D_{st}x^n s^l t^k = (l+k)x^n s^l t^k$.

Apibendrintojo diferencijavimo operatoriaus savybės:

1. Teisinga lygybė $D_{st} \sum_{k=1}^n a_k f_k = \sum_{k=1}^n a_k D_{st} f_k, a_k \in R$.
2. Teisinga lygybė $D_{st}(f_1 \cdot f_2) = (D_{st} f_1) f_2 + f_1 (D_{st} f_2)$.
3. Teisingos lygybės:

$$D_{st} f_1^n = n f_1^{n-1} (D_{st} f_1), D_{st} \frac{f_1}{f_2} = \frac{(D_{st} f_1) f_2 - f_1 (D_{st} f_2)}{f_2^2}, \dots$$

1 teorema. Tiesinis operatorius $g(L_x D_{st}) := G_D = \sum_{k=0}^{+\infty} (L_x D_{st})^k$, kai $(L_x D_{st})^0 := 1$, yra

multiplikatyvusis operatorius, ir, be to, tenkina tokias lygybes:

1. $G \sum_{k=1}^n a_k f_k = \sum_{k=1}^n a_k G f_k$.
2. $G(f(s,t)) = f(Gs, Gt)$.
3. Teisinga lygybė $G \frac{f_1(s,t)}{f_2(s,t)} = \frac{f_1(Gs, Gt)}{f_2(Gs, Gt)}$.
4. $G_D(f_1 + f_2) = G_D f_1 + G_D f_2$.
5. $G_D s^k t^l = (G_D s)^k \cdot (G_D t)^l$.

1.2 pavyzdys. Tarkime, $D := tD_s - sD_t$, tuomet

$$G_D s = s + t \frac{x}{1!} - s \frac{x^2}{2!} - t \frac{x^3}{3!} + \dots = s \cos x + t \sin x.$$

$$G_D s^2 = s^2 + ts \frac{x}{1!} + (t^2 - s^2) \frac{x^2}{2!} - 2ts \frac{x^3}{3!} + \dots = (s \cos x + t \sin x)^2,$$

$$(G_D s)'_x = G_D t, \dots$$

$$G_D t = -s - t \frac{x}{1!} + s \frac{x^2}{2!} + t \frac{x^3}{3!} - s \frac{x^4}{4!} - \dots = -s \sin x + t \cos x.$$

Sprendžiant diferencialines lygtis, taip pat taikomos ir šios lygybės:

$$G_D v^n = \sum_{k=0}^{+\infty} (L_x D_v)^k v^n = \left(v^n + \frac{x}{1!} n v^{n-1} + \frac{x^2}{2!} n(n-1) v^{n-2} + \frac{x^3}{3!} n(n-1)(n-2) v^{n-3} + \dots \right) = (x+v)^n,$$

$$G_D f_1(v, s, t) = f_1(x+v, s, t), (1 - L_v D_v) f_1(v, s, t) = f_1(0, s, t), v \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Kai } D_{vst} := D_v + P(s, t) D_s + Q(s, t) D_t,$$

$$G(D_{vst}) f_1(v) = G(D_v) f_1(v) = \sum_{k=0}^{+\infty} (L_x D_v)^k f_1(v) = \left(f_1(v) + \frac{x}{1!} (f_1(v))' + \dots \right) = f_1(x+v),$$

$$\begin{aligned} G(D_{vst}) f_1(v, s, t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} (L_x (D_v + P(s, t) D_s + Q(s, t) D_t))^k f_1(v, s, t) = \\ &= f(G(D_{vst})v, G(D_{vst})s, G(D_{vst})t), \dots \end{aligned}$$

1.2.2 DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ OPERATORINIŲ SPRENDINIŲ SUDARYMO PAVYZDŽIAI

1. $y' = P(y)$ lygties sprendinio sudarymas.

Tarkime, turime diferencialinę lygtį

$$y' = P(y). \quad (1.1)$$

Duotosios lygties pradinė sąlyga yra $y(0, s) = s$. Surasime šios lygties sprendinį

$y = y(x, s)$. Sudarome geometrę $G = \sum_{k=0}^{+\infty} (L_x)^k (P(s) D_s)^k$. Tuomet sprendinys užrašomas taip:

$$y(x, s) = Gs. \quad (1.2)$$

Įrodysime, kad (1.2) tenkina (1.1) lygtį.

$$\begin{aligned} (y(x, s))'_x &= D_x Gs = D_x (1 + L_x P(s) D_s + L_x^2 (P(s) D_s)^2 + \dots) s = D_x (s + L_x P(s) D_s s + \dots) = \\ &= (P(s) D_s + P(s) D_s L_x P(s) D_s + \dots) s = P(s) D_s (1 + L_x P(s) D_s + L_x^2 (P(s) D_s)^2 + \dots) s = \\ &= GP(s) D_s s = GP(s) = P(Gs) = P(y(x, s)) \Rightarrow y'_x = P(y). \end{aligned}$$

$$Gs \Big|_{x=0} = (1 + L_x P(s) D_s + \dots) s = s \Rightarrow y(0, s) = s.$$

2. $y''_{xx} = P(y, y')$ lygties sprendinio sudarymas.

Sakykime, turime diferencialinę lygtį

$$y''_{xx} = P(y, y'). \quad (1.3)$$

Surasime šios lygties sprendinį $y = y(x, s, t)$. Duotosios lygties pradinės sąlygos yra

$$y(0, s, t) = s \quad \text{ir} \quad y'_x(x, s, t) \Big|_{x=0} = t.$$

Sudarome geometrę $G = \sum_{k=0}^{+\infty} (L_x)^k (tD_s + P(s, t)D_t)^k$. Tuomet sprendinys užrašomas taip:

$$y = y(x, s, t) = Gs. \quad (1.4)$$

Įrodysime, kad (1.4) tenkina (1.3) lygtį.

$$\begin{aligned} (y(x, s))''_{xx} &= D_x Gs = (D_x)^2 (1 + L_x (tD_s + P(s, t)D_t) + \dots) s = D_x (tD_s + P(s, t)D_t + \dots) Gs = \\ &= D_x Gt = G(P(s, t)) = P(Gs, Gt) = P(y, y') \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y''_{xx} = P(y, y').$$

$$Gs \Big|_{x=0} = (1 + L_x D_{st} + (L_x D_{st})^2 + \dots) s = s \Rightarrow y'_x \Big|_{x=0} = Gt = t.$$

3. $y''_{xx} = P(x, y, y')$ lygties sprendinio sudarymas.

Šios lygties sprendinio išraiškos buvo pateiktos [3].

Sakykime, duota diferencialinė lygtis

$$y''_{xx} = P(x, y, y') \quad (1.5)$$

su pradinėmis sąlygomis:

$$y(v, s, t) \Big|_{x=v} = s \quad \text{ir} \quad (y(v, s, t))'_x \Big|_{x=v} = t, \quad (1.6)$$

kai $P(x, s, t)$ yra daugianaris arba funkcija, išreiškiama visur konverguojančia eilute. Tada duotosios diferencialinės lygties sprendinys yra

$$y(x, s, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x-v)^k}{k!} ((D_v + tD_s + P(v, s, t)D_t)^k s), \quad v \in R. \quad (1.7)$$

4. Apibendrinimas.

Šio skyrelio formules galima apibendrinti bet kurios eilės netiesinei diferencialinei lygčiai.

Diferencialinės lygties

$$y_x^{(n)} = P(x, y, y'_x, y''_x, \dots, y_x^{(n-1)}) \quad (1.8)$$

su pradinėmis sąlygomis

$$\begin{aligned} y(v; s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) &= s_1, \\ (y(x; s_1, s_2, \dots, s_{n-1}))'_x \Big|_{x=v} &= s_2, \\ (y(x; s_1, s_2, \dots, s_{n-1}))''_x \Big|_{x=v} &= s_3, \\ &\dots, \\ (y(x; s_1, s_2, \dots, s_{n-1}))^{(n-1)}_x \Big|_{x=v} &= s_{n-1} \end{aligned} \quad (1.9)$$

sprendinį $y(x; s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$, galima užrašyti tokia forma:

$$y(x; s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, v) \frac{(x-v)^k}{k!}, \quad (1.10)$$

kai $p_k(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, v) = (D_v + s_2 D_{s_1} + s_3 D_{s_2} + \dots + s_{n-1} D_{s_{n-2}} + P(v, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) D_{s_{n-1}})^k s_1$.

Čia $D_v, D_{s_1}, D_{s_2}, \dots, D_{s_{n-1}}$ - diferencialiniai operatoriai, o $P(x, y, y'_x, y''_x, \dots, y_x^{(n-1)})$ yra daugianaris arba funkcija.

1.3 pavyzdys. Tegul duota diferencialinė lygtis $y' = y^2$, $y(v) = s$. Naudojantis (1.2)

sprendinio operatorine išraiška gauname, kad $y = y(x; s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \frac{(x-v)^k}{k!}$,

kai $p_k = p_k(s, v) = (D_v + s^2 D_s)^k s$.

Tada $p_0 = s$, $p_1 = 1 \cdot s^2$, $p_2 = 1 \cdot 2s^3$, ..., $p_n = n! s^{n+1}$, t.y. $y = y(x; s) = s \sum_{k=0}^{\infty} s^k (x-v)^k$,

arba $y = \frac{s}{1 - s(x-v)}$, kai $|s(x-v)| < 1$.

Tokia sprendinio analizė galima tik tuo atveju, kai jis užrašomas operatoriniu pavidalu.

1.4 pavyzdys. Tegul duota antros eilės diferencialinė lygtis $y'' = xy^2$ su pradinėmis sąlygomis $y|_{x=0} = s$, $y'|_{x=0} = t$. Tada apibendrintas diferencialinis operatorius bus

$D = D_v + tD_s + vs^2 D_t$, o funkcijos $p_k = p_k(s, t, v)$, $k = 1, 2, \dots$. Tada gauname, kad

$$p_0 = D^0 s_1 = s_1, p_1 = D s_1 = s_2, p_2 = D^2 s_1 = v s_2, p_3 = D^3 s_1 = s_1^2 + 2v s_1 s_2, \dots$$

Tada bendrasis diferencialinės lygties sprendinys gali būti išreiškiamas funkcijų eilute:

$$y = s_1 + s_2 \frac{(x-v)}{1!} + v s_1^2 \frac{(x-v)^2}{2!} + (s_1^2 + 2v s_1 s_2) \frac{(x-v)^3}{3!} + \dots$$

Kai $v = 0$, bendrasis sprendinys taško 0 aplinkoje yra

$$y = s_1 + s_2 \frac{x}{1!} + s_1^2 \frac{x^2}{2!} + \dots$$

Įrašius vietoj s_1 ir s_2 konkrečias skaitines reikšmes gautume atskirąjį lygties sprendinį.

Pavyzdžiui, jei $s_1 = 1$, $s_2 = 2$, atskirasis sprendinys yra $\bar{y} = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k(1,2,0) \frac{x^k}{k!} = 1 + 2 \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

5. Diferencialinių lygčių sistemos sprendinių sudarymas.

Tegul duota diferencialinių lygčių sistema su pradinėmis sąlygomis:

$$\begin{cases} x'_t = P(x, y), x(0; u, v) = u, \\ y'_t = Q(x, y), y(0; u, v) = v, \end{cases} \quad (1.11)$$

kai $P(x, y), Q(x, y) \in F_{xy}$.

Tada jos sprendiniai išreiškiami taip:

$$x = Gu, y = Gv, \text{ kai } G := \sum_{k=0}^{+\infty} (L_t(P(u, v)D_u + Q(u, v)D_v))^k. \quad (1.12)$$

Pirmiausia pastebėsime, kad algebrainis tiesinis operatorius G yra multiplikatyvusis:

$$G : \langle F_{uv}; +, \cdot | C \rangle \leftrightarrow \langle \text{Ker}(D_t - P(u, v)D_u - Q(u, v)D_v); +, \cdot | C \rangle.$$

Taigi

$$\begin{aligned} x'_t &= D_t Gu = (P(u, v)D_u + Q(u, v)D_v)Gu = G(P(u, v)D_u + Q(u, v)D_v)u = \\ &= GP(u, v) = P(Gu, Gv) = P(x, y). \end{aligned}$$

Analogiškai turime $y'_t = Q(x, y)$.

1.5 pavyzdys. Diferencialinių lygčių sistemos

$$\begin{cases} x'_t = a_1 x + b_1 y \\ y'_t = a_2 x + b_2 y \end{cases} \quad (1.13)$$

su pradinėmis sąlygomis $x(v) = s_1$, $y(v) = s_2$ operatorinių sprendinių artiniai yra tokie:

$$\begin{aligned} x &= x(t; s_1; s_2, v) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k(s_1, s_2, v) \frac{(t-v)^k}{k!}, \\ y &= y(t; s_1; s_2, v) = \sum_{k=0}^{+\infty} q_k(s_1, s_2, v) \frac{(t-v)^k}{k!}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Čia $p_0(s_1, s_2, v) = s_1$,

$$\begin{aligned} p_{k+1}(s_1, s_2, v) &= (D_v + (a_1 s_1 + b_1 s_2)D_{s_1} + (a_2 s_1 + b_2 s_2)D_{s_2}) p_k(s_1, s_2, v), \quad q_0(s_1, s_2, v) = s_2, \\ q_{k+1}(s_1, s_2, v) &= (D_v + (a_1 s_1 + b_1 s_2)D_{s_1} + (a_2 s_1 + b_2 s_2)D_{s_2}) q_k(s_1, s_2, v). \end{aligned}$$

Taigi

$$\begin{aligned} p_2(s_1, s_2, v) &= a_1 s_1 + b_1 s_2, \quad p_3(s_1, s_2, v) = a_1(a_1 s_1 + b_1 s_2) + b_1(a_2 s_1 + b_2 s_2) \text{ ir t.t.}, \\ q_2(s_1, s_2, v) &= a_2 s_1 + b_2 s_2, \quad q_3(s_1, s_2, v) = a_2(a_1 s_1 + b_1 s_2) + b_2(a_2 s_1 + b_2 s_2) \text{ ir t.t.} \end{aligned}$$

1.2.3 APIBENDRINIMAI DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SISTEMOMS

Naudojant panašią metodiką galima gauti ir sudėtingesnių diferencialinių lygčių sistemų sprendinius.

Tegul duota diferencialinių lygčių sistema

$$\begin{cases} x_t'' = P(t, x, x_t', \varphi, \varphi_t') \\ \varphi_t'' = Q(t, x, x_t', \varphi, \varphi_t') \end{cases} \quad (1.15)$$

su pradinėmis sąlygomis

$$x(v) = s_1,$$

$$x_t'(v) = s_2,$$

$$\varphi(v) = s_3,$$

$$\varphi_t'(v) = s_4.$$

Tada sprendinių teorinės išraiškos:

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \frac{(t-v)^k}{k!}, \quad \varphi = \sum_{k=0}^{+\infty} q_k \frac{(t-v)^k}{k!}, \quad (1.16)$$

čia $p_k = D^k s_1$, $q_k = D^k s_3$.

Šiuo atveju apibendrintas diferencialinis operatorius:

$$D = D_v + s_2 D_{s_1} + P D_{s_1} + s_4 D_{s_3} + Q D_{s_3}, \text{ o } P = P(v, s_1, s_2, s_3, s_4) \text{ ir } Q = Q(v, s_1, s_2, s_3, s_4).$$

Turint trijų antros eilės diferencialinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_t'' = P(t, x, x_t', y, y_t', \varphi, \varphi_t'), \\ y_t'' = Q(t, x, x_t', y, y_t', \varphi, \varphi_t'), \\ \varphi_t'' = R(t, x, x_t', y, y_t', \varphi, \varphi_t'), \end{cases} \quad (1.17)$$

su pradinėmis sąlygomis $x(v) = s_1$, $x_t'(t)|_{t=v} = s_2$, $y(v) = s_3$, $y_t'(t)|_{t=v} = s_4$, $\varphi(v) = s_5$,

$\varphi_t'(t)|_{t=v} = s_6$ jos sprendinių išraiškos bus

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \frac{(t-v)^k}{k!}, \quad y = \sum_{k=0}^{+\infty} q_k \frac{(t-v)^k}{k!}, \quad \varphi = \sum_{k=0}^{+\infty} r_k \frac{(t-v)^k}{k!} \quad (1.18)$$

$p_k = D^k s_1$, $q_k = D^k s_3$, $r_k = D^k s_5$, o $D = D_v + s_2 D_{s_1} + P D_{s_1} + s_4 D_{s_3} + Q D_{s_3} + s_6 D_{s_5} + R D_{s_6}$.

Čia daugianariai P , Q ir R yra kintamųjų $t, x, x_t', y, y_t', \varphi, \varphi_t'$, arba atitinkamai v, s_1, s_2, \dots, s_6 funkcijos.

1.2.4 SKAIČIAVIMO ALGORITMAS

Pastebėsime, kad diferencialinių lygčių struktūriniai sprendiniai nusako išsistą šeimą sprendinių, priklausančių nuo parametru konkrečių reikšmių.

Tegul sprendinio $y(x) = y(x, s, t, v)$ koeficientai $p_k = p_k(s, t, v)$, esant fiksuotiems parametrms s, t, v tenkina įvertį $|p_k| \leq M^k$, $0 \leq M < +\infty$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Tada algebrinė eilutė (1.7) konverguoja su visomis $x \in \mathbf{R}$ reikšmėmis, ir, be to, ši eilutė yra (1.5) lygties sprendinys klasikine prasme.

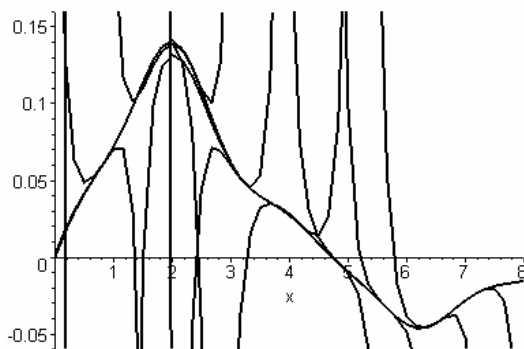
Sprendžiant kompiuteriu gauname tik baigtinį skaičių koeficientų p_k , taigi turime sprendinio artinį. Apskaičiavus funkcijas $p_k(s, t, v)$, $k = 0, \dots, N$, konstruojame daugianarį

$$\hat{y}(x; s; t, v) = \sum_{k=0}^N p_k(s, t, v) \frac{(x-v)^k}{k!} \quad (1.19)$$

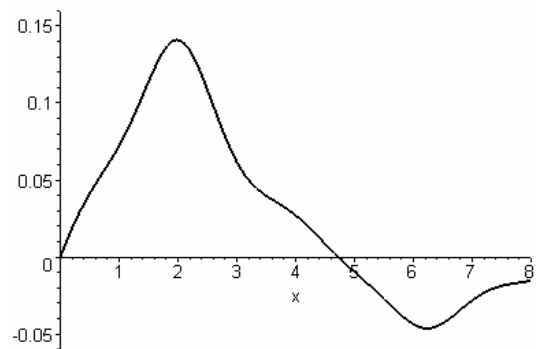
Įrašius skaitines reikšmes vietoj kintamųjų s, t ir v gauname sprendinio $y(x)$ artinį – daugianarį $\hat{y}(x)$ taško v aplinkoje. Šis daugianaris „tolsta“ nuo tikrojo sprendinio, kai kintamasis x „tolsta“ nuo centro v .

Tada sprendinio artinys $y^*(x)$ (1.2 pav.) formuojamas naudojant sprendinių artinių šeimą $\{\hat{y}_l(x) | l = 0, 1, \dots, n\}$ (1.1 pav.) tokiu būdu:

$$y^*(x) := \hat{y}_l(x); \quad \text{kai } v_l \leq x < v_{l+1}; \quad l = 1, 2, \dots, n. \quad (1.20)$$



1.1 pav. Artinių šeima



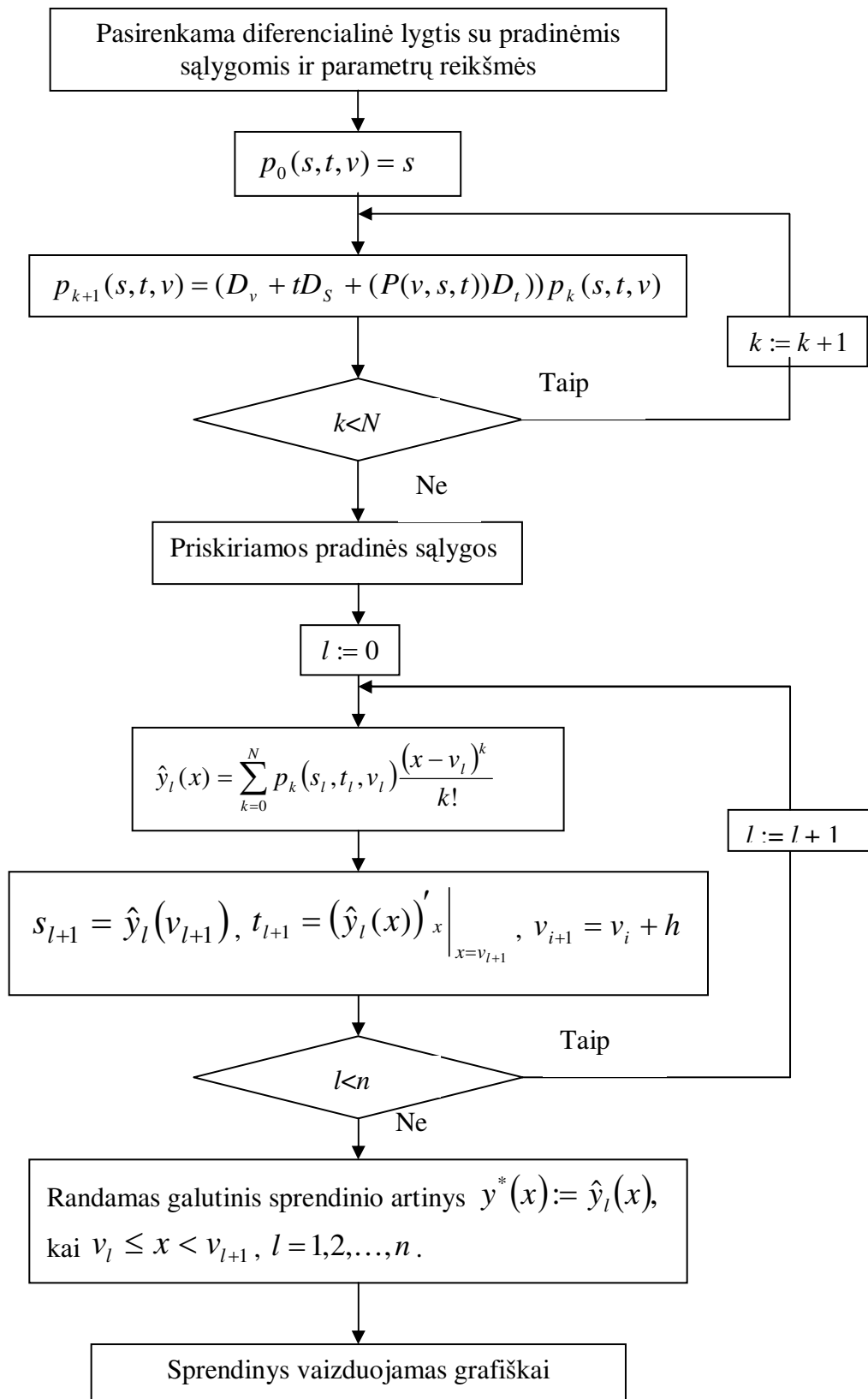
1.2 pav. Galutinis sprendinio artinys

Čia artinių šeima gaunama naudojant tokias idėjas:

tegu $\hat{y}_0(x) = \sum_{k=0}^N p_k(s_0, t_0, v_0) \frac{(x-v_0)^k}{k!}$, $y_0(v_0) = s_0$, $y'_x|_{x=v_0} = t_0$, kai s_0, t_0, v_0 yra duoti. Tada $\hat{y}_l(x) = \sum_{k=0}^N p_k(s_l, t_l, v_l) \frac{(x-v_l)^k}{k!}$, kai $s_{l+1} = \hat{y}_l(v_{l+1})$, $t_{l+1} = (\hat{y}_l(x))'_x|_{x=v_{l+1}}$, $l = 1, 2, \dots, n$, o v_1, v_2, \dots, v_{n+1} pasirenkami laisvai, dažniausiai $v_{i+1} = v_i + h$, o h vadinamas perėjimo tarp centrų žingsniu.

Galima naudoti ir kitokią artinio sudarymo techniką, pavyzdžiui imti gretimų daugianarių vidurkius. Naudojantis aprašomu skaičiavimo metodu galima keisti perėjimo tarp centrų žingsnį, daugianario eilę, daugianarių, naudojamų (1.20) artinio sudarymui, skaičių.

Diferencialinių lygčių sprendimo operatoriniu metodu algoritmo schema pavaizduota 1.3 pav.



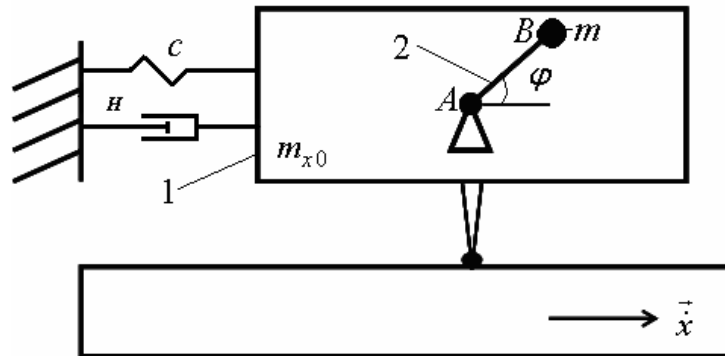
1.3 pav. Diferencialinių lygčių sprendimo operatoriniu metodu algoritmo schema

1.3 MECHANINIŲ VIRPESIŲ SISTEMA

Autonominė sistema.

Šiame skyriuje pateikiamas mechaninių virpesių sistemos modelis. Ši modelį aprašančias diferencialines lygtis sudarė akademikas K. Ragulskis.

Sistemos modelis (1.4 pav.) susideda iš korpuso 1 ir rotoriaus 2. Korpusas pritvirtintas prie nejudančio pagrindo tampriu elementu pagal ašį Ox . [1]



1.4 pav. Sistemos modelis

Sistemos judesio diferencialinės lygtys yra tokio pobūdžio:

$$I(\varphi) + \Pi'_\varphi + \mathcal{D}'_\varphi = -M_\varphi,$$

$$I(x) + \Pi'_x + \mathcal{D}'_x + O_x = 0, \quad (1.21)$$

kur φ - rotoriaus posūkio kampas;

x - sistemos korpuso atsilenkimas nuo statinės pusiausvyros padėties pagal Ox ašį;

$I(\varphi), I(x)$ - inercijos jėgų momentas ir jėgos pagal koordinatę φ ir Ox ;

\mathcal{D} - sklaidos funkcija;

Π - sistemos potencinė energija;

M_n - naudingo pasipriešinimo rotoriaus sukimuisi momentas;

O_x - varanti jėga pagal koordinatę Ox .

Lygčių sudarymui nustatomos kinetinė ir potencinė energijos bei sklaidos funkcija:

$$T = 0.5(m_x \dot{x}^2 + I\dot{\varphi}^2) + mr\dot{\varphi}(-\dot{x} \sin \varphi),$$

$$\Pi = 0.5(c_x x^2 + 0.5c_{x3} x^4) + mg(r(1 + \sin \varphi) + const), \quad (1.22)$$

$$\mathcal{D} = 0.5(H_x \dot{x}^2 + H_\varphi \dot{\varphi}^2),$$

kur

$$m_x = m_{x0} + m, \quad I = I_0 + mr^2,$$

c_x, c_{x3} - standumo koeficientai,

H_x, H_φ - sklaidos koeficientai,

m_{x0} - korpuso 1 redukuota masė pagal ašį Ox ,

m - neišsvėrta rotoriaus B masė,

$r = AB$ - strypo ilgis,

I_0 - rotoriaus inercijos momentas apie tašką A,

g - žemės traukos pagreitis.

Remiantis (1.21), (1.22) gauname

$$I(\varphi) = I\ddot{\varphi} + mr(-\ddot{x} \sin \varphi),$$

$$I(x) = m_x \ddot{x} - mr(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi} \cos \varphi),$$

$$\Pi'_\varphi = mgr \cos \varphi,$$

$$\Pi'_x = c_x x + c_{x3} x^3,$$

$$\mathcal{D}'_\varphi = H_\varphi \dot{\varphi}, \quad \mathcal{D}'_x = H_x \dot{x}. \quad (1.23)$$

Sužadavimo jėga gali būti

$$O_x = -Q_{x1} \dot{x} + Q_{x3} \dot{x}^3,$$

kur Q_{xi} ($i=1,3$) yra sužadavimo greičio funkcijos.

Jei priimsime, kad $c_{x1} = c$, $c_{x3} = 0$, $M_\varphi = const$, $p_x = p$, $h_x = h$, $f_x = 0$,

tada gausime tokias judesio diferencialines lygtis:

$$I\ddot{\varphi} + \Lambda = 0,$$

$$\ddot{x} + \Omega^2 x + X = 0, \quad (1.24)$$

kur

$$\Lambda = -mr\ddot{x} \sin \varphi + H_\varphi \dot{\varphi} - M_\varphi,$$

$$X = (p^2 - \Omega^2)\ddot{x} - q_1 \dot{x} + q_3 \dot{x}^3 - \mu r(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi),$$

$$\text{jei } q_1 = \frac{H - Q_{x1}}{m_x}, \quad q_3 = \frac{Q_{x3}}{m_x}.$$

Suvedus lygtis į bematį pavidalą ir pertvarkius, siekiant sumažinti parametų skaičių ir pritaikant skaitiniam tyrimui, jos užrašomos taip:

$$\begin{cases} \varphi'' - x'' \sin \varphi + H\varphi' = 0, \\ x'' + p^2 x - q_1 x' + q_3 x'^3 - \mu(\varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi) = 0. \end{cases} \quad (1.25)$$

Pertvarkius sistemą (1.25), gauname tokias išraiškas:

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{\mu\varphi'^2 \cos \varphi - p^2 x + q_1 x' - q_3 x'^3 - \mu H\varphi' \sin \varphi}{1 - \mu \sin^2 \varphi}, \\ \varphi'' &= \frac{(\mu\varphi'^2 \cos \varphi - p^2 x + q_1 x' - q_3 x'^3) \sin \varphi - H\varphi'}{1 - \mu \sin^2 \varphi}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Toliau nagrinėsime autonominės sistemos atvejį, kai koeficientai iš (1.23) $c_{x3} = d \neq 0$.

Šiuo atveju sistema (1.25) turi pavidalą

$$\begin{cases} \varphi'' - x'' \sin \varphi + H\varphi' = 0, \\ x'' + p^2 x + dx^3 - q_1 x' + q_3 x'^3 - \mu(\varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \cos \varphi) = 0. \end{cases} \quad (1.27)$$

Pastaroji sistema ir yra pagrindinė tiriama sistema antrojoje šio darbo dalyje (tiriamojame dalyje).

Pertvarkius sistemą (1.27), gauname tokias išraiškas:

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{\mu\varphi'^2 \cos \varphi - p^2 x - dx^3 + q_1 x' - q_3 x'^3 - \mu H\varphi' \sin \varphi}{1 - \mu \sin^2 \varphi}, \\ \varphi'' &= \frac{(\mu\varphi'^2 \cos \varphi - p^2 x - dx^3 + q_1 x' - q_3 x'^3) \sin \varphi - H\varphi'}{1 - \mu \sin^2 \varphi}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

1.4 LIAPUNOVO EKSPONENTĖS

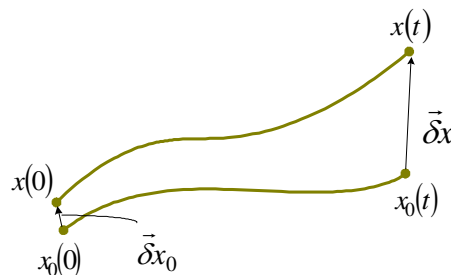
Teorija reikalinga chaoso įvertinimui aprašyta disertacijoje [6].

Netiesinėse dinaminėse sistemose kai kurios kontrolinio parametro reikšmės iššaukia silpnesnę ar stipresnę chaotinę reakciją. Liapunovo eksponentės – vienas iš dažniausiai naudojamų metodų sistemos chaotiškumui kiekybiškai įvertinti. Vienas iš svarbiausių chaotinių dinaminių sistemų požymių – jautrumas pradinėms sąlygoms. Tokį jautrumą pradinėms sąlygoms Liapunovo eksponentės įvertina kiekybiškai.

1.4.1 LIAPUNOVO EKSPONENČIŲ APSKAIČIAVIMO METODAI

2 apibrėžimas. *Dinaminės sistemos Liapunovo eksponente vadinsime dydį, kuris apibūdina atstumo tarp dviejų gretimų fazinės erdvės trajektorijų kitimo (didėjimo/mažėjimo) laike greitį (1.5 pav.):*

$$\left| \vec{\delta x} \right| \approx \left| \vec{\delta x}_0 \right| e^{\lambda_{\max} t}. \quad (1.29)$$



1.5 pav. Dviejų gretimų fazinės erdvės trajektorijų kitimas laike

Keleto matavimų fazinėje erdvėje Liapunovo eksponenčių reikšmės priklausys nuo pradinio vektoriaus $\vec{\delta x}_0$ krypties.

1.4.2 MAKSIMALIOS LIAPUNOVO EKSPONENTĖS. LIAPUNOVO EKSPONENČIŲ SPEKTRAS

Skaičiavimas pagal sistemos dinamiką aprašančias diferencialines lygtis.

1. Neapriboto nuokrypio vektoriaus metodas:

$$r_e = \frac{|\vec{\delta x}|}{|\vec{\delta x}_0|} \Rightarrow \lambda_{\max} \approx \frac{1}{t} \ln r_e(t). \quad (1.30)$$

2. Apriboto nuokrypio vektoriaus metodas:

$$\text{Kadangi } \lambda_{\max} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |\vec{\delta x}| / |\vec{\delta x}_0|}{t} = 0 \Rightarrow |\vec{\delta x}| \geq f \cdot |\vec{\delta x}_0|$$

$$R_i = \frac{|\vec{\delta x}|}{|\vec{\delta x}_0|} \Rightarrow r_e = \prod_{i=1}^N R_i \Rightarrow \lambda_{\max} \approx \frac{1}{t} \sum_{i=1}^N \ln R_i. \quad (1.31)$$

Vienmačiu atveju:

1. Tarkime, kad sistemos dinamiką aprašo diferencialinė lygtis:

$$\dot{x}(t) = f(x). \quad (1.32)$$

2. Funkciją $f(x)$ skleidžiame Teiloro eilute:

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + \dots \quad (1.33)$$

3. Gauname Liapunovo eksponentės išraišką:

$$\dot{x} - \dot{x}_0 = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} \cdot (x - x_0) \Rightarrow \delta x = \delta x_0 \cdot \exp \left\{ \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} \cdot t \right\} \Rightarrow \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} = \lambda. \quad (1.34)$$

Daugiamačiu atveju:

1. Tarkime, kad sistemos dinamiką aprašo diferencialinių lygčių sistema:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \text{ arba } \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{dx_3}{dt} = f_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases}. \quad (1.35)$$

2. Funkcijos $f(x_1, x_2, x_3)$ Teiloro eilutė:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) = & f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) + \left. \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} \right|_{(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})} (x_1 - x_1^{(0)}) + \\ & + \left. \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} \right|_{(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})} (x_2 - x_2^{(0)}) + \left. \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} \right|_{(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})} (x_3 - x_3^{(0)}) + \dots \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{Df} \cdot \delta\mathbf{x} + O(|\delta\mathbf{x}|^2), \quad (\mathbf{Df})_{i,j} = \frac{\partial f_{i,j}}{\partial x_j}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{d(\delta\mathbf{x})}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{d(\delta\mathbf{x})}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d(\delta\mathbf{x})}{dt} = \mathbf{Df} \cdot \delta\mathbf{x}. \quad (1.37)$$

$$\begin{cases} \frac{d(\xi)}{dt} = \mathbf{Df} \cdot \xi \\ \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \end{cases} \Rightarrow |\xi(t)| \approx |\xi(t_0)| e^{\lambda_{\max} t} \Rightarrow \lambda_{\max} \approx \frac{1}{t} \ln \frac{|\xi(t)|}{|\xi(t_0)|} \quad (1.38)$$

$$\begin{cases} \frac{d(\xi^{(1)})}{dt} = \mathbf{Df} \cdot \xi^{(1)} \\ \frac{d(\xi^{(2)})}{dt} = \mathbf{Df} \cdot \xi^{(2)} \\ \frac{d(\xi^{(3)})}{dt} = \mathbf{Df} \cdot \xi^{(3)} \\ \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \end{cases} \Rightarrow v_i = u_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{u_i \cdot v_j}{|v_j|^2} \cdot v_j \text{ (Gram-Schmidt ortogonalizavimas)}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\approx \frac{1}{t} \ln \frac{|\xi^{(1)}(t)|}{|\xi^{(1)}(t_0)|} \\ \Rightarrow \lambda_2 &\approx \frac{1}{t} \ln \frac{|\xi^{(2)}(t)|}{|\xi^{(2)}(t_0)|} \\ \lambda_3 &\approx \frac{1}{t} \ln \frac{|\xi^{(3)}(t)|}{|\xi^{(3)}(t_0)|} \end{aligned} \quad (1.39)$$

1.4.3 LIAPUNOVO EKSPONENČIŲ SPEKTRO APSKAIČIAVIMO PAVYZDYS

Tarkime, kad sistemos svyravimą aprašo švytuoklės su netiesiniu harmoniniu sužadiniu diferencialinė lygtis:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + \sin x = F \cos(Dt). \quad (1.40)$$

Kurią pakeičiame trijų autonominių diferencialinių lygčių sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = F \cos(Dx_3) - bx_2 - \sin x_1, \\ \dot{x}_3 = 1. \end{cases} \quad (1.41)$$

Sudarome Jakobianą:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cos x_1 & -b & -DF \sin(Dx_3) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.42)$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = F \cos(Dx_3) - bx_2 - \sin x_1, \\ \frac{dx_3}{dt} = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d\xi_1^{(j)}}{dt} = \xi_2^{(j)}, \\ \frac{d\xi_2^{(j)}}{dt} = -\xi_1^{(j)} \cos x_1 - \xi_2^{(j)} b - DF \xi_3^{(j)} \sin(Dx_3), \\ \frac{d\xi_3^{(j)}}{dt} = 0. \end{cases}$$

j=1,2,3.

1.4.4 LOKALIOS LIAPUNOVO EKSPONENTĖS

Liapunovo eksponenčių spektras apibūdina sistemos globalų elgesį (per ilgą laiko tarpą). Lokalių eksponenčių spektras apibūdina sistemos lokalų elgesį (viename konkrečiame fazinės erdvės taške).

3 apibrėžimas. Lokalių eksponenčių spektru vadinsime Jakobiano matricos tikrines reikšmes:

$$|J - \lambda I| = 0. \quad (1.43)$$

4 apibrėžimas. Vidutines lokalias Liapunovo eksponentes skaičiuosime:

$$\bar{\lambda}_k = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_{k,i}, \quad k=1,2,3 \quad (1.44)$$

čia $\lambda_{k,i}$ yra k -tosios lokalias Liapunovo eksponentės reikšmė i -tajame fazinės trajektorijos taške.

1.4.5 LOKALIŲ LIAPUNOVO EKSPONENČIŲ SPEKTRO APSKAIČIAVIMO PAVYZDYS

Netiesinės švytuoklės su išoriniu harmoniniu sužadinimu dinaminėje sistemoje.

Sistemos svyravimą aprašo švytuoklės diferencialinė lygtis:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + \sin x = F \cos(Dt).$$

Kurią pakeičiame trijų autonominių diferencialinių lygčių sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = F \cos(Dx_3) - bx_2 - \sin x_1, \\ \dot{x}_3 = 1. \end{cases}$$

Sudarome Jakobianą:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cos x_1 & -b & -DF \sin(Dx_3) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lokalias Liapunovo eksponentes skaičiuosime iš lygties:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -\cos x_1 & -(b + \lambda) & -DF \sin(Dx_3) \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Lokalių Liapunovo eksponenčių spektras:

$$\lambda_1 = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - \cos x_1};$$

$$\lambda_2 = -\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - \cos x_1};$$

$$\lambda_3 = 0.$$

2. TIRIAMOJI DALIS

2.1 SISTEMOS SPRENDIMAS RUNGĖS IR KUTOS IR OPERATORINIŲ METODAIS

Šiame darbe mechaninių virpesių sistemą aprašančioms lygtims spręsti buvo naudota *MAPLE* komanda *dsolve*, realizuojanti Felbergo ketvirtos – penktos eilės Rungės ir Kutos metodą, bei anksčiau aprašyto operatorinio metodo kompiuterinė realizacija. Visų šiam darbui reikalingų *Maple* programų tekstai pateikti 1 priede.

Taikant operatorinį metodą $x'' = P(v, s_1, t_1, s_2, t_2)$, $y'' = Q(v, s_1, t_1, s_2, t_2)$ ir naudojant (1.16) formules rasta (1.27) sistemos su pradinėmis sąlygomis ir tokiomis parametru reikšmėmis

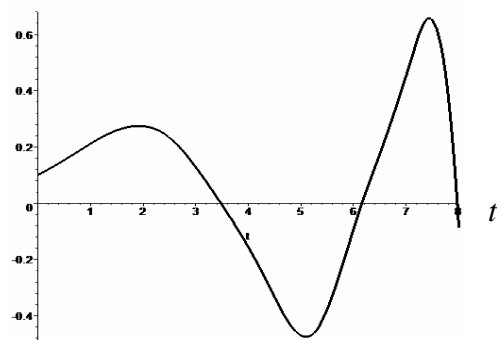
$$q_1 = 0.4, q_3 = 0.2, \mu = 0.1, p = 0.1, H = 0.05, d = 10, x(0) = x'(0) = \varphi(0) = \varphi'(0) = 0.1$$

operatorinio metodo sprendiniai. Operatorinio metodo daugianarių laipsnis imtas $n=5$, o pasirinktas operatorinio metodo žingsnis (atstumas tarp taškų, kuriuose, konstruojant sprendinį, sujungiamos gretimos jo dalys) lygus 0.9.

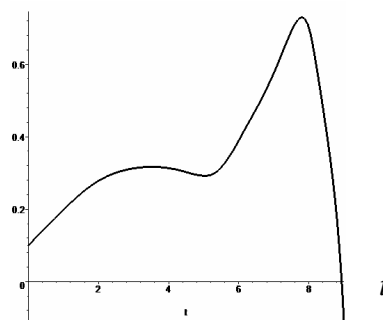
Operatorinio metodo sprendinių buvo ieškoma keičiant sprendinį sudarančių daugianarių eilę.

2.1 paveiksle pavaizduoti (1.27) sistemos sprendiniai. Paveikslo a), b) dalyse nubrėžti operatorinio metodo sprendiniai keičiant sprendinį sudarančių daugianarių eilę ($n=3, n=5$). 2.1 paveikslo c) dalyje nubrėžti Rungės ir Kutos metodo sprendiniai.

x(t)

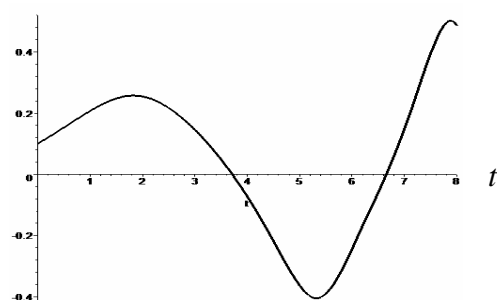


$\varphi(t)$

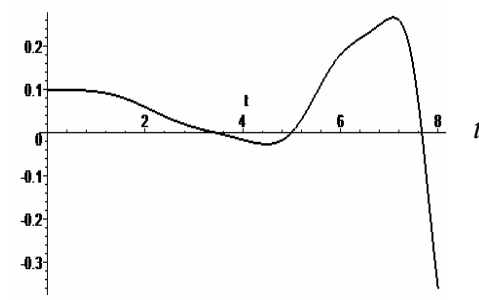


a)

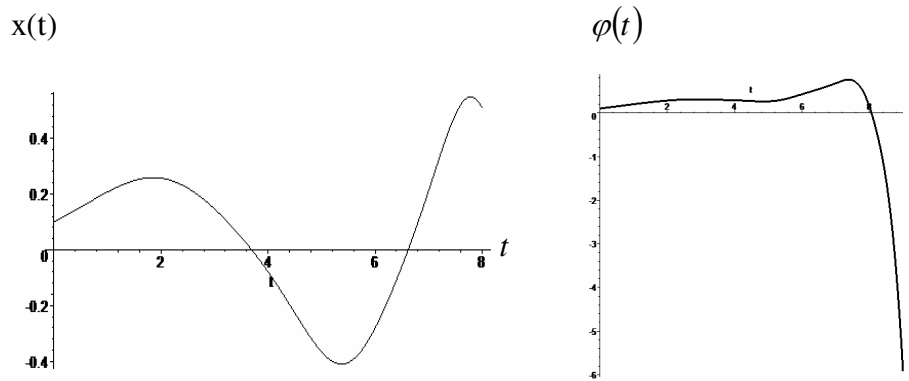
x(t)



$\varphi(t)$



b)



c)

2.1 pav. Sprendinių grafikai a) sprendžiant operatoriniu metodu ($n=3$), b) sprendžiant operatoriniu metodu ($n=5$), c) sprendžiant Rungės ir Kutos metodu

Pastebėta, didinant sprendinį sudarančių daugianarių laipsnį, operatorinio metodo sprendinys artėja prie Rungės ir Kutos metodu gauto sprendinio. Taip pat didinant sprendinį sudarančių daugianarių laipsnį pastebimai išauga skaičiavimo laikas. Kai $n=3$, operatorinio metodo skaičiavimo laikas lygus 4.4 s. Kai $n=5$, operatorinio metodo skaičiavimo laikas lygus 10.6 s. Sprendžiant (1.27) sistemą Rungės ir Kutos metodu skaičiavimo trukmė lygi 0.2 s.

2.2 SISTEMOS SAVYBIŲ PRIKLAUSOMYBĖ NUO PRADINIŲ SĄLYGŲ

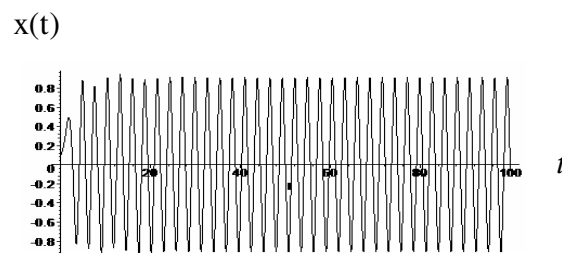
Tirta, kaip sistema priklauso nuo pradinių sąlygų.

Buvo pasirinktos (1.27) sistemos pradinės sąlygos, kurios tyrimų metu buvo keičiamos, o parametrai q_1, q_3, μ, p, H, d liko pastovūs.

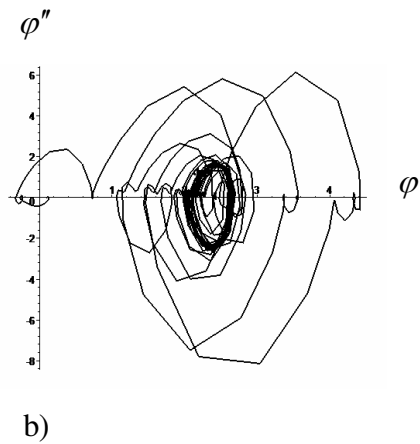
Pastovios parametru reikšmės:

$$q_1 = 1.5, q_3 = 0.6, \mu = 0.1, p = 0.1, H = 0.05, d = 10.$$

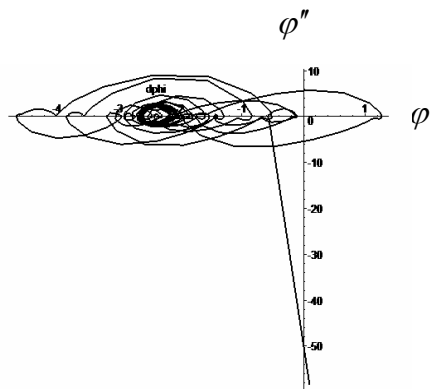
2.2 paveiksle pavaizduoti (1.27) sistemos sprendiniai, kai pasirinktos pradinės sąlygos $x(0) = x'(0) = \varphi(0) = \varphi'(0) = 0.1$. 2.3 paveiksle pavaizduoti sprendiniai, kai $x(0) = \varphi(0) = \varphi'(0) = 0.1$, o $x'(0) = 10$.



a)



2.2 pav. Chaotinio režimo pavyzdys: a) sprendinys standartinėje plokštumoje x , b) sprendinys fazinėje plokštumoje φ' / φ''



2.3 pav. Chaotinio režimo pavyzdys, kai sprendinys vaizduojamas fazinėje plokštumoje φ' / φ''

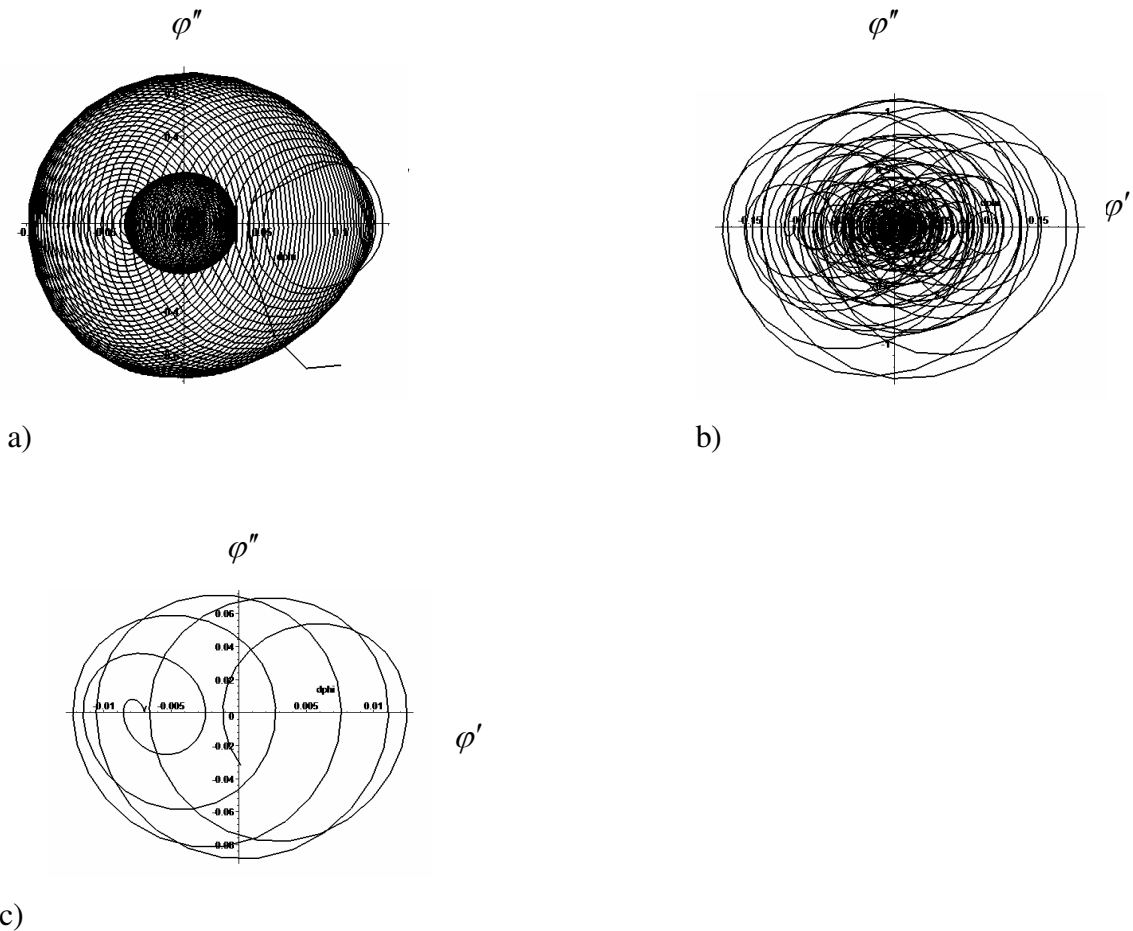
Pastebėta, kad sistema jautriai priklauso nuo pradinių sąlygų.

2.3 SISTEMOS SAVYBIŲ PRIKLAUSOMYBĖS NUO PARAMETRŲ TYRIMAS

Sprendinio egzistavimo ir stabilumo sąlygos yra funkcijos nuo visų sistemos parametrų.

Šioje tyrimo dalyje (1.27) sistemos parametrai μ, p, H, d buvo pastovūs, o keičiami parametrai - q_1, q_3 , ir tiriama sistemos priklausomybė nuo šių parametrų. Taip pat ieškoma chaotinių reiškinių.

2.4 paveiksle pavaizduoti sprendiniai (1.27) sistemos, kurios $\mu = 0.1, p = 8, H = 0.05, d = 10$ pastovūs su pradinėmis sąlygomis $x(0) = x'(0) = \varphi(0) = \varphi'(0) = 0.1$. Paveikslo a) dalyje vaizduojamas sprendinys fazinėje plokštumoje φ' / φ'' , kai $q_1 = 0.4, q_3 = 0.0000000000000004$, b) dalyje vaizduojamas sprendinys fazinėje plokštumoje φ' / φ'' , kai $q_1 = 0.4, q_3 = 9$, c) dalyje vaizduojamas sprendinys fazinėje plokštumoje φ' / φ'' , kai $q_1 = 0.4, q_3 = 40$.

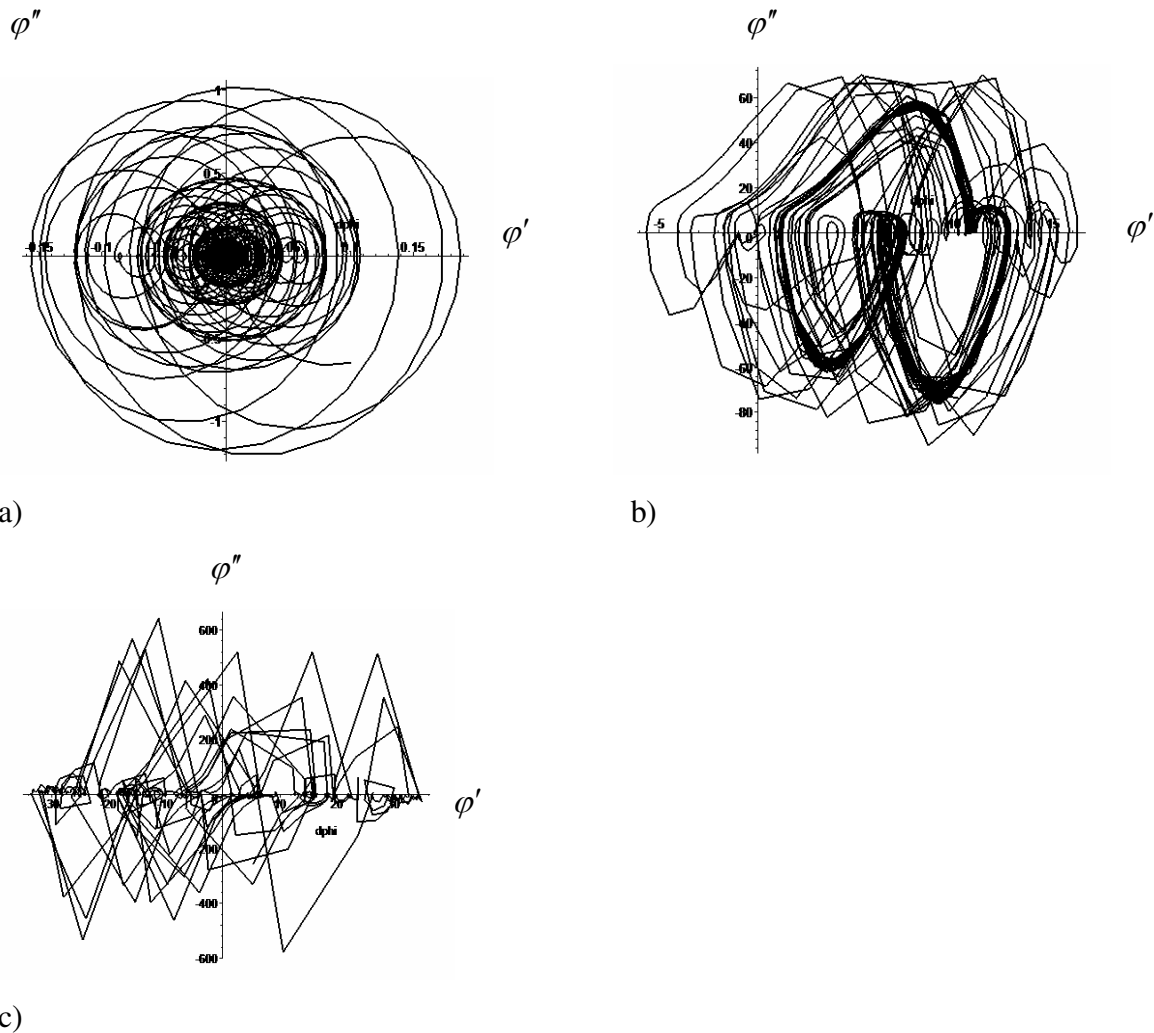


2.4 pav. Chaotinio režimo pavyzdys pastoviam parametrai q_1 ir skirtingiems parametrams q_3

Nesunku pastebėti, kad esant pastoviems parametrams μ, p, H, d, q_1 ir didinant parametą q_3 duotoje sistemoje pastebima mažiau chaotiško sprendinio trajektorijų.

Taip pat buvo tirtas chaotiškumas esant pastoviems parametrams $\mu = 0.1, p = 8, H = 0.05, d = 10, q_3 = 0.4$, kai keičiamas parametras q_1 .

2.5 paveiksle pavaizduoti sprendiniai (1.27) sistemos, kurios parametrai $\mu = 0.1, p = 8, H = 0.05, d = 10, q_3 = 0.4$ pastovūs su pradinėmis sąlygomis $x(0) = x'(0) = \varphi(0) = \varphi'(0) = 0.1$. Paveikslo a) dalyje vaizduojamas sprendinys fazinėje plokštumoje φ' / φ'' , kai $q_1 = 0.000000000000004$, b) dalyje vaizduojamas sprendinys fazinėje plokštumoje φ' / φ'' , kai $q_1 = 10$, c) dalyje vaizduojamas sprendinys fazinėje plokštumoje φ' / φ'' , kai $q_1 = 50$.

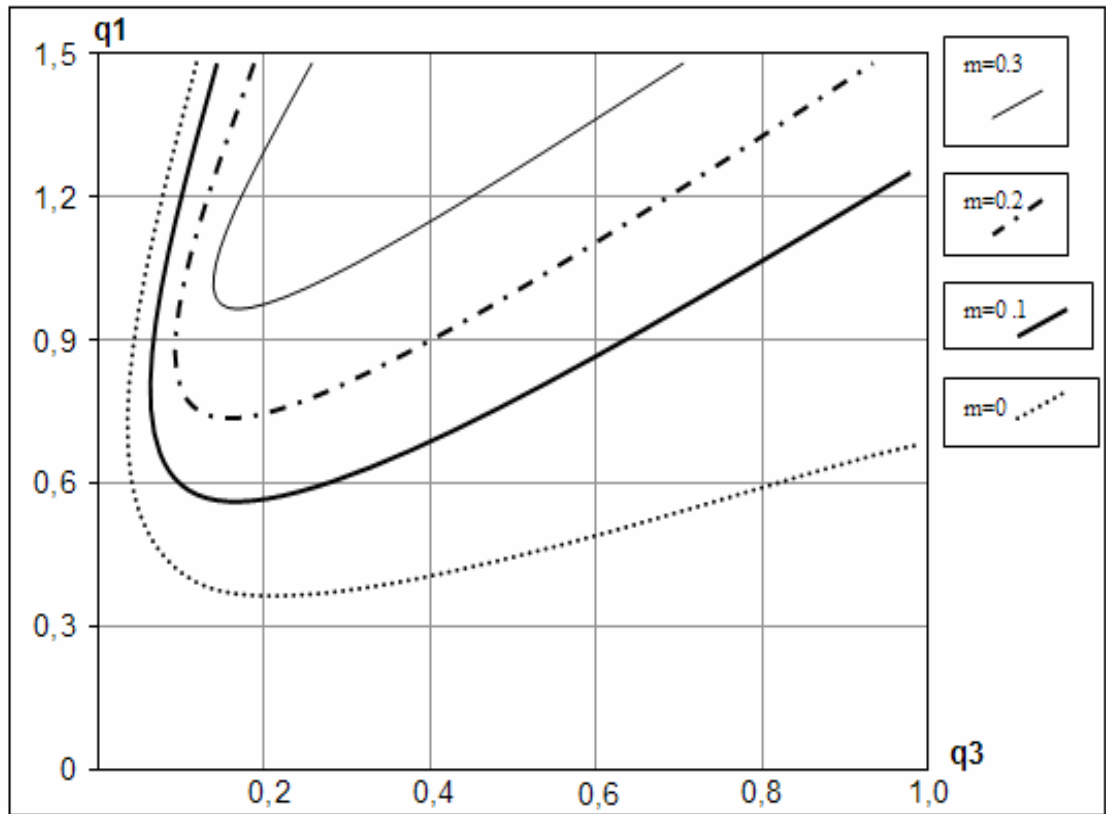


2.5 pav. Chaotinio režimo pavyzdys pastoviam parametrui q_3 ir skirtingiems parametrams q_1

Nesunku pastebėti, kad esant pastoviems parametrms μ, p, H, d, q_3 ir didinant parametą q_1 duotoje sistemoje pastebima mažiau chaotiško sprendinio trajektorijų.

Buvo tirta autovirpesių ir sukimosi režimų egzistavimo sritys, keičiant rotoriaus masę. 2.6 pav. schematiškai pavaizduotos šios sritys. Šiuo atveju:

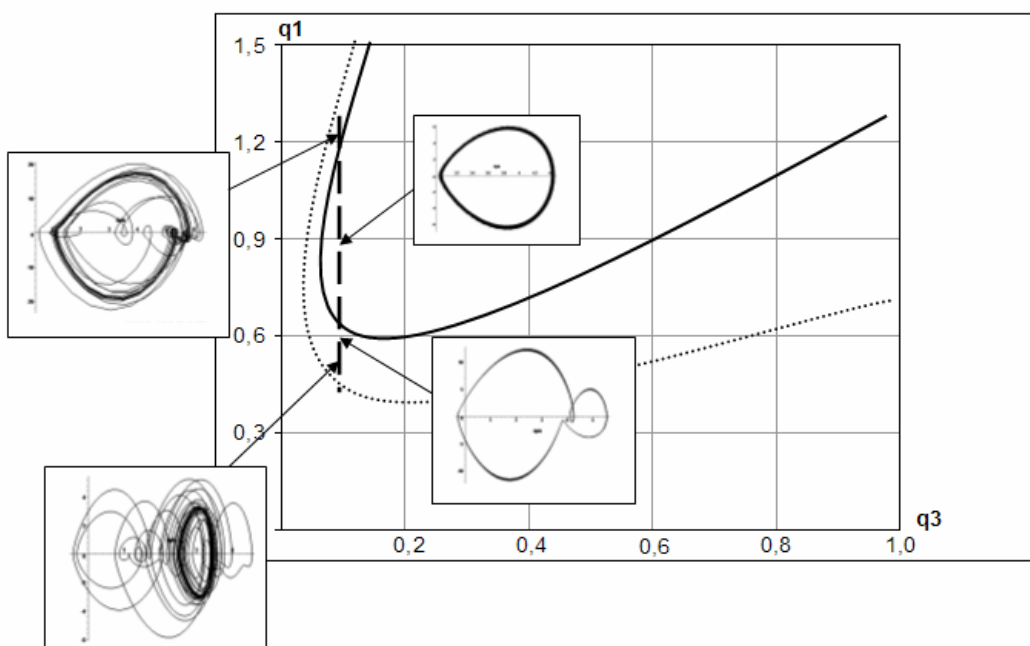
$p = 2, H = 0.2, d = 13, x(0) = x'(0) = \varphi(0) = 0.1, \varphi'(0) = 2$. Kai $\mu = 0$, sistema (1.27) supaprastėja ir užsirašo $x'' + p^2x + dx^3 - q_1x' + q_3x'^3 = 0$. Taip gaunama autovirpesių egzistavimo sritis.



2.6 pav. Autovirpesių (kai $\mu = 0$) ir sukimosi režimų egzistavimo sritys skirtingoms rotoriaus masėms ($\mu = 0.1, \mu = 0.2, \mu = 0.3$)

Nesunku pastebėti, kad sistemos autovirpesių egzistavimo sritis didesnė nei sukimosi režimų egzistavimo sritis.

Taip pat buvo tirta, kaip kinta režimai egzistavimo srityje ir už jos ribų. Tuo tikslu, kai $\mu = 0.1$, srityje buvo atlikti keli pjūviai. Rezultatai, gauti fiksuojant parametrą $q_3 = 0.1$ (čia režimai pavaiduoti fazinėje plokštumoje (φ'' / φ')), pateikti 2.7 pav.



2.7 pav. Režimų pavyzdžiai egzistavimo srityse, kai $\mu = 0.1$ ir $q_3 = 0.1$

Pastebėta, kad mažėjant parametrui q_1 ir q_3 ir didėjant μ sukimosi režimų egzistavimo sritis mažėja ir pastebima daugiau chaotiškumo (chaotinių reiškinių sritis didėja).

2.4 SISTEMOS CHAOTIŠKUMO VERTINIMAS PAGAL LIAPUNOVO EKSPONENTES

Tirtas (1.27) sistemos atvejis, kai $\mu = 0$. Tada gaunama lygtis

$$x'' + p^2 x + dx^3 - q_1 x' + q_3 x'^3 = 0.$$

Ją pakeičiame trijų autonominių diferencialinių lygčių sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -p^2 x_1 - dx_1^3 + q_1 x_2 - q_3 x_2^3, \\ \dot{x}_3 = 1. \end{cases}$$

Sudarome Jakobianą

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -p^2 - 3dx_1^2 & q_1 - 3q_3 x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lokalias Liapunovo eksponentes skaičiuosime iš lygties:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -p^2 - 3dx_1^2 & q_1 - 3q_3 x_2^2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Pagal trikampių taisyklę:

$$\lambda^2 (q_1 - 3q_3 x_2^2 - \lambda) + \lambda (-p^2 - 3dx_1^2) = 0.$$

$$\lambda (\lambda (q_1 - 3q_3 x_2^2 - \lambda) + (-p^2 - 3dx_1^2)) = 0.$$

Akivaizdžiai matome, jog

$$\lambda_3 = 0.$$

Sprendžiame lygtį:

$$-\lambda^2 + \lambda (q_1 - 3q_3 x_2^2) + (-p^2 - 3dx_1^2) = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda (q_1 - 3q_3 x_2^2) - (-p^2 - 3dx_1^2) = 0$$

$$D = (q_1 - 3q_3 x_2^2)^2 - 4(p^2 + 3dx_1^2)$$

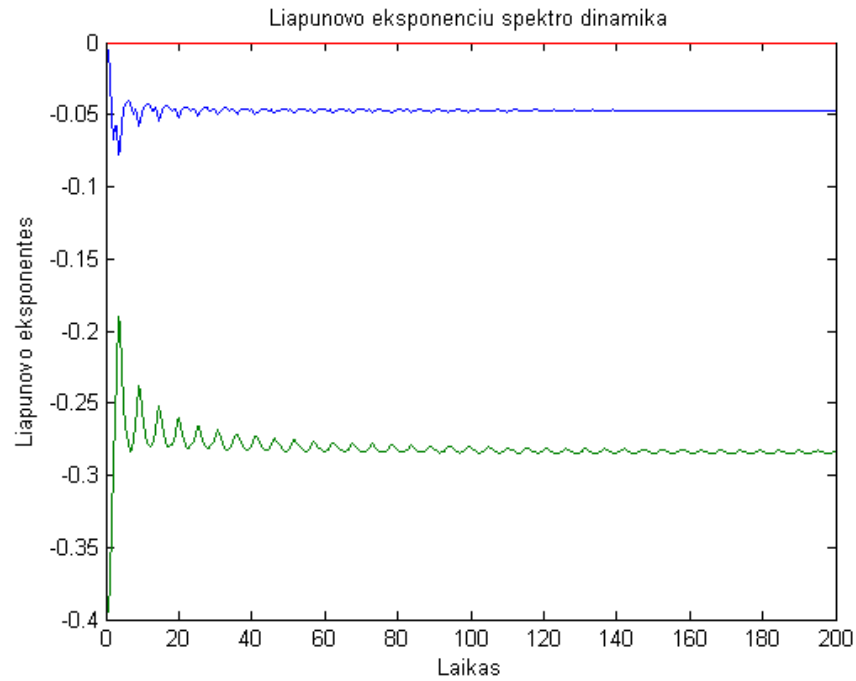
Liapunovo eksponentių spektras:

$$\lambda_3 = 0,$$

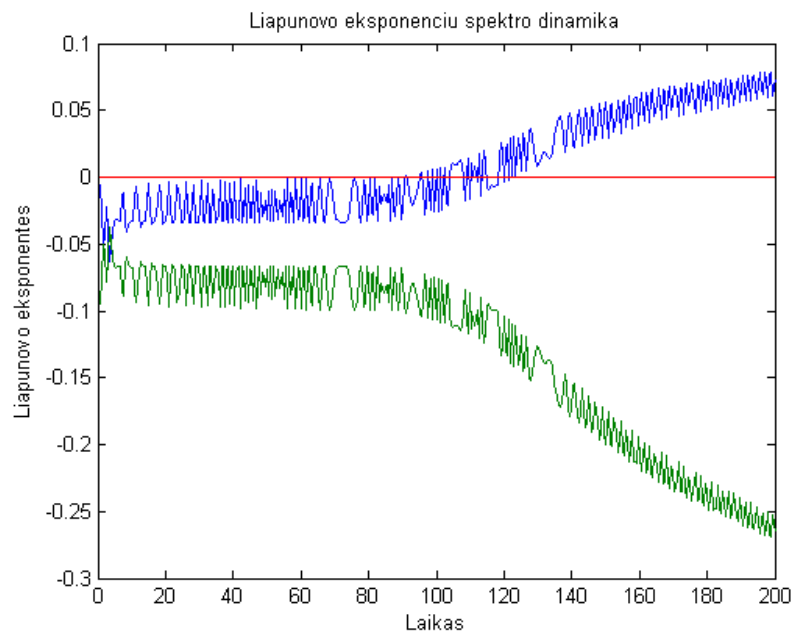
$$\lambda_1 = \frac{(q_1 - 3q_3 x_2^2) + \sqrt{(q_1 - 3q_3 x_2^2)^2 - 4(p^2 + 3dx_1^2)}}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{(q_1 - 3q_3x_2^2) - \sqrt{(q_1 - 3q_3x_2^2)^2 - 4(p^2 + 3dx_1^2)}}{2}.$$

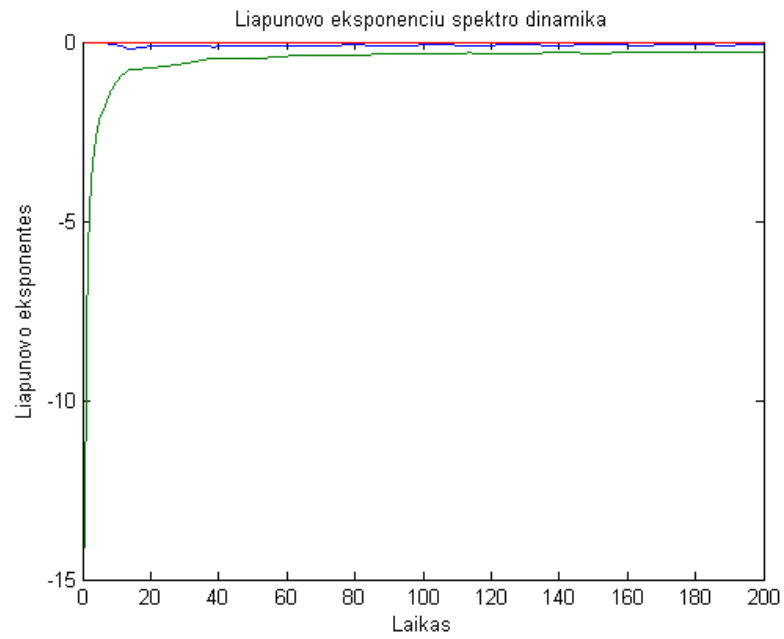
Visų šiam darbui reikalingų *Matlab* programų tekstai pateikti 1 priede. 2.8 paveikslo dalyse pavaizduotos Liapunovo eksponentės keičiantis parametrams.



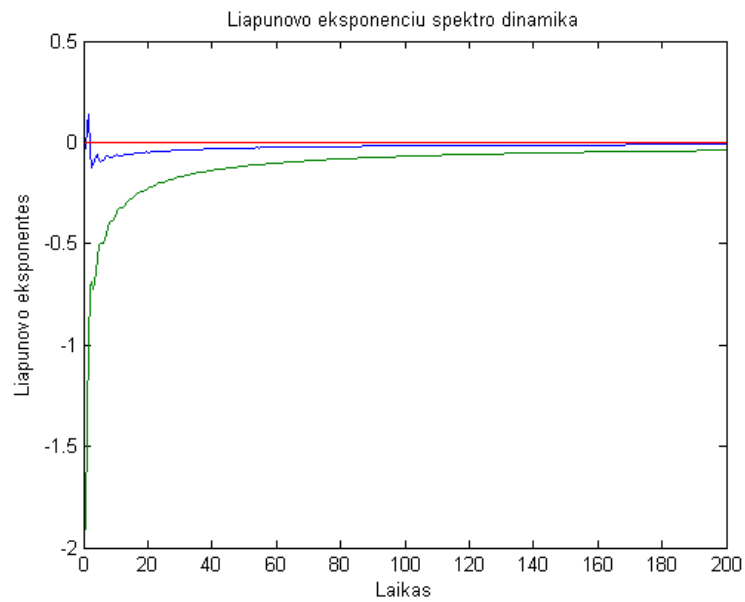
a) $p=0.1, d=0.1, q_1=0.1, q_3=0.1$



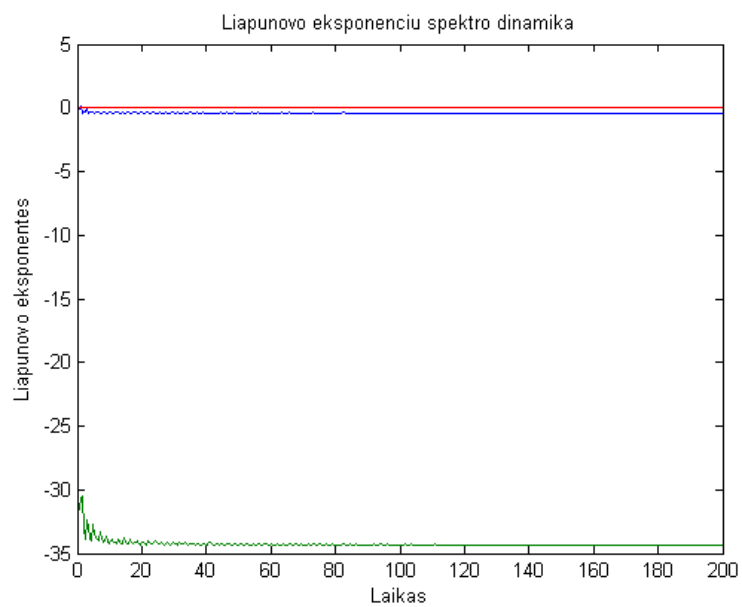
b) $p=0.1, d=0.1, q_1=0.1, q_3=0.00000001$



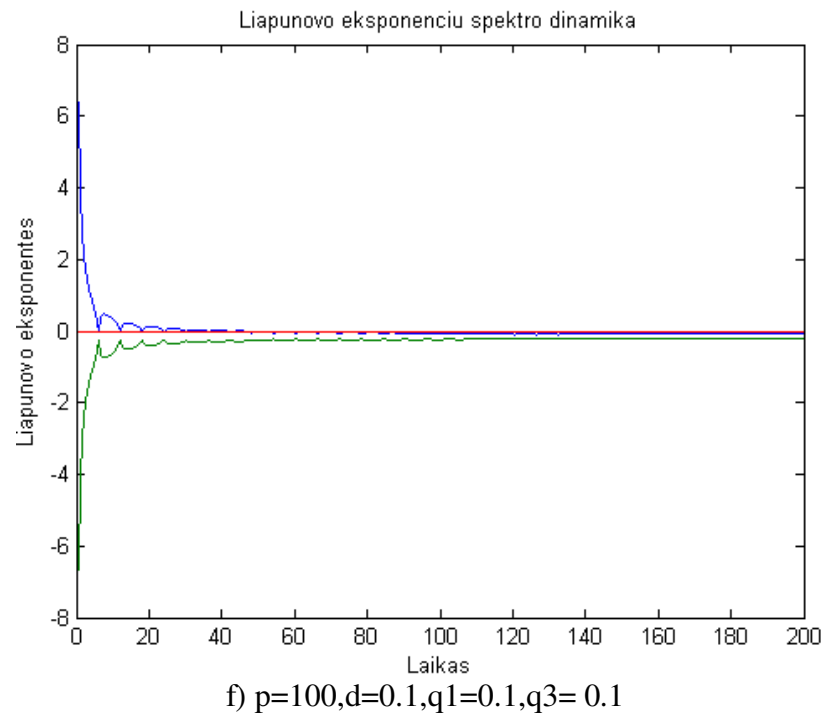
c) $p=0.1, d=0.1, q_1=0.1, q_3=100$



d) $p=1, d=1, q_1=0.000000000001, q_3=1$



e) $p=1, d=1, q_1=10, q_3=1$



2.8 pav. Liapunovo eksponenčių spektrų dinamika

Nesunku pastebėti (tas jau buvo pastebėta šio darbo antros dalies 3 skyriuje), kad esant pastoviems parametrams p ir d didinant parametru q_1 arba q_3 chaotinių reiškinių mažėja arba išvis išnyksta (2.8 pav. b) ir c) dalyse, 2.8 pav. d) ir e) dalyse).

Taip pat pastebėtas determinuotas chaosas, pereinamieji procesai, kai iš chaotinio režimo pereinama į stabilų režimą (2.8 pav. f) dalyje). Taip pat pastebėta stabilaus režimo pavyzdžiai (vienas jų pavaizduotas 2.8 pav. a) dalyje).

IŠVADOS

- 1) Operatoriniu ir Rungės ir Kutos metodais gaunami artimi sprendiniai. Sprendžiant sistemą Rungės ir Kutos metodu skaičiavimo trukmė žymiai trumpesnė nei sprendžiant operatoriniu metodu.
- 2) Sistema jautriai priklauso nuo pradinių sąlygų.
- 3) Esant pastoviems sistemos parametrams μ, p, H, d, q_1 ir didinant parametą q_1 arba q_3 sistemoje vyksta mažiau chaoso reiškinių.
- 4) Sistemoje priklausomai nuo parametrų reikšmių egzistuoja determinuotas chaosas, pereinamieji procesai arba stabilus režimas.

PADĖKOS

Nuoširdžiai dėkoju savo moksliniam vadovui prof. Z. Navickui už pagalbą, patarimus. Taip pat dėkoju akademikui K. Ragulskiui už sudarytas mechaninių virpesių sistemos modelį aprašančias diferencialines lygtis.

LITERATŪRA

1. Bikulčienė, L. Netiesinių diferencialinių lygčių tyrimas operatoriniu metodu. *Daktaro disertacija*. KTU Taikomosios matematikos katedra, 2007.
2. Navickas, Z. Adapted formal algorithms for the solution of differential equations. *International Journal of differential equations and applications*, Volume 1A No. 4 2000, Plodiv, Bulgaria. p. 415-424.
3. Навицкас, З. Псевдообратный оператор и один метод его построения. *Lietuvos matematikos rinkinys*, T. 41. Vilnius, 2001. p. 211 – 217.
4. Pyragas, K. Netiesinės dinamikos pagrindai. Vilnius, 2003.
5. Plukas, K. Skaitiniai metodai ir algoritmai. Kaunas, 2001.
6. Saunorienė, L. Vidurkintų laike dinaminių sistemų muaro vaizdų analizė ir tyrimai. *Daktaro disertacija*. KTU Fundamentalųjų mokslų fakultetas, 2007
7. <http://pyragas.pfi.lt/>

1 PRIEDAS. PROGRAMŲ TEKSTAI

Failė operatorinis.mws – pateikta operatorinio diferencilinių lygčių sistemos sprendimo metodo realizacija *Maple* kalba.

SPRENDIMAS SKAITINIŲ METODU

```
> restart:
> q1:=0.01: q3:=9: miu:=0.04: p:=10: H:=7: d:=10:#sistemas
parametrai
> Fx:=miu*((dphi(t))^2)*cos(phi(t))-p^2*x(t)-d*x(t)^3+q1*dx(t)-
q3*dx(t)^3:
> Fphi:=-miu*H*dphi(t)*sin(phi(t)):
> c:=1-miu*sin(phi(t))^2:
> sys:=diff(dx(t),t)=(Fx+Fphi)/c,diff(x(t),t)=dx(t),diff(dphi(t),
t)=(Fx*sin(phi(t))-H*dphi(t))/c,diff(phi(t),t)=dphi(t):
> fons:={x(t), dx(t), phi(t), dphi(t)}:
> F:=dsolve({sys,x(0)=0.1,dx(0)=0.1,phi(0)=0.1,dphi(0)=0.1},fons
,numeric,method=rkf45):
> plots[odeplot](F,[t,x(t)],0..200,color=black,thickness=1,numpo
ints=3000);
> plots[odeplot](F,[t,dphi(t)],0..200,color=black,
thickness=2,numpoints=3000);
> plots[odeplot](F,[phi(t),dphi(t)],0..200,color=black,
thickness=2,numpoints=3000);
> plots[odeplot](F,[dphi(t),(Fx*sin(phi(t))-
H*dphi(t))/c],0..100,color=black,thickness=2,numpoints=3000);
```

SPRENDIMAS OPERATORINIŲ METODU

```
> restart:#sprendimas operatoriniu metodu
> psx:=0.1:psxt:=0.003:psphi:=0.1:psphit:=0.2:n:=3:#Pradinės
sąlygos ir narių skaičius
> m:=10:pradzia:=0:
> a:=0.6: b:=0.9:c:=0.01:d:=0.2:e:=0.5:dd:=10:#Sistemas
parametrai
> f1[0]:=g:f2[0]:=u:pr[1]:=pradzia:zg:=0.9:
> for k from 0 by 1 to n-1 do #skaičiuojami
koeficientai (funkcijos)
f1[k+1]:=diff(f1[k],g)*h+diff(f1[k],h)*((c*cos(u)*v*v-d*d*g-
dd*g*g*g+a*h-b*h*h*h-c*e*v*sin(u))/(1-
c*sin(u)*sin(u))+diff(f1[k],u)*v+diff(f1[k],v)*((c*v*v*cos(u)
)-d*d*g-dd*g*g*g+a*h-b*h*h*h)*sin(u)-e*v)/(1-
c*sin(u)*sin(u))); od:
> for k from 0 by 1 to n-1 do #skaičiuojami daugianariai
f2[k+1]:=diff(f2[k],g)*h+diff(f2[k],h)*((c*cos(u)*v*v-d*d*g-
dd*g*g*g+a*h-b*h*h*h-c*e*v*sin(u))/(1-
c*sin(u)*sin(u))+diff(f2[k],u)*v+diff(f2[k],v)*((c*v*v*cos(u)
)-d*d*g-dd*g*g*g+a*h-b*h*h*h)*sin(u)-e*v)/(1-
c*sin(u)*sin(u))); od:
> g:=psx: h:=psxt: u:=psphi: v:=psphit:
> for i from 1 by 1 to m do
> x[i]:=sum('f1[k]*(t-pr[i])^k/k!','k'=0..n);
```

```

> phi[i]:=sum('f2[k]*(t-pr[i])^k/k!','k'=0..n);
> dx[i]:=diff(x[i],t):dphi[i]:=diff(phi[i],t);
> pr[i+1]:=pr[i]+zg;
> t:=pr[i+1];g:=x[i];h:=dx[i];u:=phi[i];v:=dphi[i];t:='t';
> od:
> xgal:=[]: #konstruojamas galutinis sprendinys x(t)
> for i from 1 to m do xgal:=[op(xgal),
t+pradzia<pradzia+i*zg,x[i]]; od:
> xgal: op(xgal):
> xfunkcija:=t->piecewise(op(xgal),x[m]):expand(xfunkcija(t)):
>
> phigal:=[]:
> for i from 1 to m do phigal:=[op(phigal),
t+pradzia<pradzia+i*zg,phi[i]]; od:
> phigal: op(phigal):
> phifunkcija:=t-
> piecewise(op(phigal),phi[m]):expand(phifunkcija(t)):
> dxgal:=[]:
> for i from 1 to m do dxgal:=[op(dxgal), t+pr<pr+i*zg,dx[i]];
od:
> op(dxgal):
> xisvestine:=t->piecewise(op(dxgal),dx[m]):
> xisvestine(t):
> dphigal:=[]:
> for i from 1 to m do dphigal:=[op(dphigal),
t+pradzia<pradzia+i*zg,dphi[i]]; od:
> op(dphigal):
> phiisvestine:=t->piecewise(op(dphigal),dphi[m]):
> phiisvestine(t):
> plot(xfunkcija(t),t=pradzia..pradzia+zg*m-
1,thickness=3,color=black);#braižomi grafikai
> plot(phifunkcija(t),t=pradzia..pradzia+zg*m,thickness=3,color=
black);
> plot([xfunkcija(t), phifunkcija(t), t=pradzia..pradzia+zg*m-
1],thickness=4,color=black);
> plot([xisvestine(t), phiisvestine(t),
t=pradzia..pradzia+zg*m-1],thickness=4,color=black);
> plot([phifunkcija(t), phiisvestine(t),
t=pradzia..pradzia+zg*m-1],thickness=4,color=black);
> plot([xfunkcija(t), xisvestine(t), t=pradzia..pradzia+zg*m-
1],thickness=4,color=black);
> plot([phiisvestine(t)-1,phifunkcija(t)-t,
t=pradzia..pradzia+zg*m-1],thickness=4,color=black);

```

Failai `lyapunov.m`, `lorenz_ext.m`, `run_lyap.m` – *Matlab* programos, leidžiančios tirti sistemos Liapunovo eksponentes, keičiant parametrus.

`lyapunov.m`

```
% n-lygčių skaičius
```



```

% visas lygčių skaičius

n1=n; n2=n1*(n1+1);

% žingsnių skaičius

nit = round((tend-tstart)/stept);

% atminties paskirstymas

y=zeros(n2,1); cum=zeros(n1,1); y0=y;
gsc=cum; znorm=cum;

% pradinės reikšmės

y(1:n)=ystart(:);

for i=1:n1 y((n1+1)*i)=1.0; end;

t=tstart;

for ITERLYAP=1:nit

% Išplėstinis sprendinys

[T,Y] = feval(fcn_integrator,rhs_ext_fcn,[t t+stept],y);

t=t+stept;
y=Y(size(Y,1),:);

for i=1:n1
    for j=1:n1 y0(n1*i+j)=y(n1*j+i); end;
end;

% konstrukcija naujos ortonormuotos bazės Gramo-šmidto

znorm(1)=0.0;
for j=1:n1 znorm(1)=znorm(1)+y0(n1*j+1)^2; end;

znorm(1)=sqrt(znorm(1));

for j=1:n1 y0(n1*j+1)=y0(n1*j+1)/znorm(1); end;

for j=2:n1
    for k=1:(j-1)
        gsc(k)=0.0;
        for l=1:n1 gsc(k)=gsc(k)+y0(n1*l+j)*y0(n1*l+k); end;
    end;

    for k=1:n1
        for l=1:(j-1)
            y0(n1*k+j)=y0(n1*k+j)-gsc(l)*y0(n1*k+l);

```

```

end;
    end;

    znorm(j)=0.0;
    for k=1:n1 znorm(j)=znorm(j)+y0(n1*k+j)^2; end;
    znorm(j)=sqrt(znorm(j));

    for k=1:n1 y0(n1*k+j)=y0(n1*k+j)/znorm(j); end;
end;

for k=1:n1 cum(k)=cum(k)+log(znorm(k)); end;

% eksponenčių normavimas

for k=1:n1
    lp(k)=cum(k)/(t-tstart);
end;

% išvedimo modifikacija

if ITERLYAP==1
    Lexp=lp;
    Texp=t;
else
    Lexp=[Lexp; lp];
    Texp=[Texp; t];
end;

if (mod(ITERLYAP,ioutp)==0)
    fprintf('t=%6.4f,t);
    for k=1:n1 fprintf(' %10.6f,lp(k)); end;
    fprintf('\n');
end;

for i=1:n1
    for j=1:n1
        y(n1*j+i)=y0(n1*i+j);
    end;
end;

end;

```

lorenz_ext.m

```

function f=lorenz_ext(t,X
% Parametru reikšmės
pp =0.5;
dd =0.4;
q1 = 0.1;q3=0.9;

x=X(1); y=X(2); z=X(3);

```

```

Y= [X(4), X(7), X(10);
    X(5), X(8), X(11);
    X(6), X(9), X(12)];

f=zeros(9,1);

f(1)=y;
f(2)=-pp*pp*x-dd*x*x*x+q1*y-q3*y*y*y;
f(3)=1;

%Jakobianas

Jac=[0, 1, 0;
     -pp*pp-3*dd*x*x, -q1-3*q3*y*y, 0;
     0, 0, 0];

f(4:12)=Jac*Y;

run_lyap.m

[T,Res]=lyapunov(3,@lorenz_ext,@ode45,0,0.5,200,[0 1 0],10);
plot(T,Res);
title('Liapunovo eksponenciu spektro dinamika');
xlabel('Laikas'); ylabel('Liapunovo eksponentes');

```