KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

Jurgita Žarinskaitė

KONVERGAVIMO GREIČIO TYRIMAS DAUGIAMAČIŲ EKSTREMALIŲJŲ REIKŠMIŲ PERKĖLIMO TEOREMOSE

Magistro darbas

Vadovas
doc.dr. A. Jokimaitis

KAUNAS, 2005

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

TVIRTINU
Katedros vedėjas
prof.dr. J.Rimas
2005 06 05

KONVERGAVIMO GREIČIO TYRIMAS DAUGIAMAČIŲ EKSTREMALIŲJŲ REIKŠMIŲ PERKĖLIMO TEOREMOSE

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

Kalbos konsultantas
dr. J.Džežulskienė
2005 05 17

Recenzentas
prof.dr. J.Sapagovas
2005 05 26

Vadovas
doc.dr. A.Jokimaitis
2005 05 26

Atliko
FMMM-3 gr. stud.
J. Žarinskaitė
2005 05 17

KAUNAS, 2005

KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

Pirmininkas:	Leonas Saulis, profesorius (VGTU)
Sekretorius:	Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)
Nariai:	Algimantas Jonas Aksomaitis, profesorius (KTU) Vytautas Janilionis, docentas (KTU) Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU) Rimantas Rudzkis, profesorius (MII) Zenonas Navickas, profesorius (KTU) Arūnas Barauskas, UAB „Elsis“ generalinio direktoriaus pavaduotojas

Žarinskaitė J. Convergence rate of the multidimensional extreme values in the transfer limit theorem: Master's work in applied mathematics / supervisor dr. doc. A. Jokimaitis; Department of Applied mathematics, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2005. – 77 p.

SUMMARY

Theory of extreme values is very important and it's use of range is very wide.

A lot of research occurrence usually is described with a few measurements (for example, testing pollution of atmosphere, usually consider all superior limits of pollution concentration, not only one war gas maximum concentration) that's why are analyzing multidimensional extreme values.

Herein work we analyze convergence rate of the multidimensional extreme values in the transfer limit theorem. We solve this problem using particular distributions.

In this work we will give nonuniform estimate of convergence rate of multidimensional extreme values in the transfer limit theorem. The estimates $\left|P(Z_{N_n} < a_n + b_n x) - \Psi(x)\right|$ and $\left|P(W_{N_n} < c_n + d_n x) - \Phi(x)\right|$ are analyzed using MATLAB.

TURINYS

Įvadas 6
1. Teorinė dalis 8
1.1. Ekstremaliųjų reikšmių schemos sąvoka 8
1.2. Kai kurie ekstremaliųjų reikšmių teorijos faktai 8
1.3. Daugiamačių ekstremaliųjų reikšmių schema 12
1.4. Perkėlimo teoremos 14
1.5. Konvergavimo greičio įvertis perkėlimo teoremose 15
1.6. Programinių priemonių pasirinkimo analizė 18
2. Tiriamoji dalis 19
2.1. Dvimačių maksimumų skirstinių konvergavimo greičio tyrimas 19
2.1.1. Dvimatis eksponentinis skirstinys 19
2.1.1.1. Centravimo ir normavimo vektorių sekų parinkimas 19
2.1.1.2. Ribinio skirstinio radimas 20
2.1.1.3. Konvergavimo greičio įverčio konstravimas 21
2.1.2. Dvimatis Pareto skirstinys 25
2.1.2.1. Centravimo ir normavimo vektorių sekų parinkimas 25
2.1.2.2. Ribinio skirstinio radimas 26
2.1.2.3. Konvergavimo greičio įverčio konstravimas 26
2.1.3. Dvimačiai atsitiktiniai dydžiai, tolygiai pasiskirstę kvadrate 31
2.1.3.1. Centravimo ir normavimo vektorių sekų parinkimas 31
2.1.3.2. Ribinio skirstinio radimas 32
2.1.3.3. Konvergavimo greičio įverčio konstravimas 32
2.2. Dvimačių minimumų skirstinių konvergavimo greičio tyrimas 36
2.2.1. Dvimačiai atsitiktiniai dydžiai, tolygiai pasiskirstę kvadrate 36
2.2.1.1. Centravimo ir normavimo vektorių sekų parinkimas 36
2.2.1.2. Ribinio skirstinio radimas 37
2.2.1.3. Konvergavimo greičio įverčio konstravimas 38
2.2.2. Dvimatis eksponentinis skirstinys 43
2.2.2.1. Centravimo ir normavimo vektorių sekų parinkimas 43
2.2.2.2. Ribinio skirstinio radimas 44
2.2.2.3. Konvergavimo greičio įverčio konstravimas 45
2.2.3. Dvimatis logistinis skirstinys 47

2.2.3.1. Centravimo ir normavimo vektorių sekų parinkimas....47
2.2.3.2. Ribinio skirstinio radimas....48
2.2.3.3. Konvergavimo greičio įverčio konstravimas....49
2.3. Geometriškai stabilieji ekstremumų skirstiniai....53
2.3.1. Geometriškai stabilus dvimatis logistinis skirstinys....53
2.3.2. Geometriškai stabilus dvimatis Pareto skirstinys....55
2.4. Netiesiškai normuoto dvimačio minimumo konvergavimo greičio įvertis....57
2.5. Programų aprašymas....66
Išvados....76
Literatūra....77
1 priedas. Rezultatų lentelės....78
2 priedas. Grafikai....102
3 priedas. Programų tekstai....109

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

1. 2.1 pav. Tiesiškai normuoto dvimačio eksponentinio maksimumo paklaidos ir paklaidos įverčio kitimas, kai n fiksuotas ... 24

2. 2.2 pav. Tiesiškai normuoto dvimačio eksponentinio maksimumo paklaidos ir paklaidos įverčio kitimas, kai x_1 ir x_2 fiksuoti ... 24

3. 2.3 pav. Tiesiškai normuoto dvimačio Pareto skirstinio maksimumo įverčio paklaidos ir paklaidos kitimas, kai n fiksuotas ... 30

4. 2.4 pav. Tiesiškai normuoto dvimačio Pareto skirstinio maksimumo įverčio paklaidos ir paklaidos kitimas, kai x_1 ir x_2 fiksuoti ... 30

5. 2.5 pav. Tiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. maksimumo paklaidos ir paklaidos įverčio kitimas, kai n fiksuotas ... 35

6. 2.6 pav. Tiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. maksimumo paklaidos ir paklaidos įverčio kitimas, kai x_1 ir x_2 fiksuoti ... 35

7. 2.7 pav. Tiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. minimumo paklaidos ir paklaidos įverčio kitimas, kai n fiksuotas ... 42

8. 2.8 pav. Tiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. minimumo paklaidos ir paklaidos įverčio kitimas, kai x_1 ir x_2 fiksuoti ... 42

9. 2.9 pav. Tiesiškai normuoto dvimačio eksponentinio minimumo paklaidos ir paklaidos įverčio kitimas, kai n fiksuotas ... 46

10. 2.10 pav. Tiesiškai normuoto dvimačio eksponentinio minimumo paklaidos ir paklaidos įverčio kitimas, kai x_1 ir x_2 fiksuoti ... 47

11. 2.11 pav. Tiesiškai normuoto dvimačio logistinio minimumo paklaidos ir paklaidos įverčio kitimas, kai n fiksuotas ... 52

12. 2.12 pav. Tiesiškai normuoto dvimačio logistinio minimumo paklaidos ir paklaidos įverčio kitimas, kai x_1 ir x_2 fiksuoti ... 52

13. 2.13 pav. Netiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. minimumo paklaidos ir paklaidos įverčio kitimas, kai n fiksuotas ... 65

14. 2.14 pav. Netiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. minimumo paklaidos ir paklaidos įverčio kitimas, kai x_1 ir x_2 fiksuoti ... 65

15. 2.15 pav. Pagrindinis meniu langas ... 66

16. 2.16 pav. Maksimumų meniu langas ... 67

17. 2.17 pav. Tiesiškai normuotų minimumų meniu langas ... 67

18. 2.18 pav. Netiesiškai normuotų minimumų meniu langas ... 68

ĮVADAS

Ekstremaliųjų reikšmių teorija yra aktuali ir svarbi, o jos taikymo sritis labai plati. Galima paminėti keletą pavyzdžių, kuomet ekstremaliųjų reikšmių teorija taikoma:

- Stichiniai gamtos reiškiniai (potvyniai, liūtys, uraganai, ekstremalios temperatūros) gali padaryti nuostolių įvairiems statiniams (bokštams, užtvankoms, gyvenamiesiems namams ir pan.). Tokių stichinių nelaimių negalima išvengti, tačiau, projektuojant statinius bei parenkant jiems statybines medžiagas, galima ir reikia atsižvelgti į minėtų stichinių nelaimių galimybę, o tai padėtų sumažinti jų padarinius. Šių problemų inžineriniam sprendimui reikalinga pakankamai tiksli teorija, kuri leistų atsižvelgti į galimų ekstremalių gamtos reiškinių poveikį.
- Atmosferos užterštumas išreiškiamas procentiniu teršalų kiekiu atmosferoje (koncentracija). Šių teršalų koncentracija nuolat matuojama. Svarbu, kad maksimali koncentracijos reikšmė neviršytų normos.
- Korozija. Paprastai laikoma, kad metalinė danga, turinti didelių korozinių dėmių, yra pažeista korozijos, jeigu kurios nors dėmės korozija prasiskverbia per visą dangos storį. Korozijos dėmių gylis yra atsitiktinis ir jis kinta, priklausomai nuo aplinkos poveikio. Šiuo atveju lemiamą įtaką turi maksimali korozijos defekto gylio reikšmė.
- Sistemų patikimumo problema. Sakysime, sistema nustoja veikusi, jei sugenda bent vienas iš jos elementų. Tada mažiausiai patikimas sistemos elementas turi lemiamos įtakos visos sistemos funkcionavimui.

Kadangi nemaža dalis tiriamų reiškinių yra aprašomi ne vienu, o keliais matavimais (pavyzdžiui, tiriant metalinių dangų koroziją, mus gali dominti ne tik korozinių dėmių gylis, bet ir jų plotas; prognozuojant potvynius, reikia atsižvelgti ne į vienos kurios nors upės maksimalų vandens lygį, bet į visų tame regione esančių upių maksimalius lygius; tiriant atmosferos užterštumą, paprastai atsižvelgiama ne į vienos kurios nors medžiagos koncentracijos maksimumą, bet į visų atmosferoje esančių teršalų koncentracijos maksimumus), tai dažnai nagrinėjamos ir daugiamatės ekstremaliosios reikšmės.

Ekstremaliųjų reikšmių teorija yra išsivysčiusi į savarankišką tikimybių teorijos šaką. Pamatus šiuolaikinei ekstremaliųjų reikšmių teorijai padėjo B.Gnedenka. Plačiau ekstremaliųjų reikšmių problemas nagrinėjo J.Galambošas, V.Zolotoriovas.

Pastaraisiais metais ekstremaliųjų reikšmių teorijos populiarumas išaugo. Matematiniuose žurnaluose nuolat pasirodo naujos publikacijos, rengiamos tarptautinės ekstremaliųjų reikšmių teorijos konferencijos. Ypač išsiskiria 1993 m. Gaitesburge (JAV) vykusi konferencija, kurioje daug dėmesio buvo skirta ekstremaliųjų reikšmių teorijos taikymams versle, astronomijoje, draudime ir kt.

Lietuvoje ekstremaliųjų reikšmių teorijos pradininku galima laikyti prof. A.Aksomaitį, kuris šioje srityje yra atlikęs daug darbų ir perskaitęs eilę pranešimų mokslinėse konferencijose. Svarbių darbų ekstremaliųjų reikšmių tematika yra paskelbę P.Gudynas, L.Sakalauskas, V.Statulevičius, R.Rudzkis ir kt.

Pažymėsime, kad pirmieji rezultatai, tiriant konvergavimo greitį ekstremaliųjų reikšmių perkėlimo teoremose, yra gauti [4], [5] darbuose. Konvergavimo greitis daugiamačių maksimumų perkėlimo teoremoje yra tirtas [3] darbe.

Šiame darbe tiriamas konvergavimo greitis daugiamačių ekstremaliųjų reikšmių perkėlimo teoremose. Šis uždavinys sprendžiamas tiriant konkrečius skirstinius. Pagrindiniai uždavinio sprendimo etapai būtų tokie:

1) normalizavimo vektorių sekų parinkimas;

2) ribinio skirstinio radimas;

3) konvergavimo greičio įverčio skaičiavimas ir konvergavimo greičio kompiuterinė analizė.

KTU konferencijoje „Matematika ir matematikos mokymas“ atliktas pranešimas magistro darbo tema „Netiesiškai normuoto dvimačio minimumo konvergavimo greičio įvertis“. Pranešimą numatoma spausdinti konferencijos darbų medžiagoje.

1. TEORINĖ DALIS

1.1. EKSTREMALIŲJŲ REIKŠMIŲ SCHEMOS SĄVOKA

Sakykime, kad $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių (a.d.) seka. Sudarykime *n* pirmųjų sekos narių variacinę eilutę

$$X_{1:n} \le X_{2:n} \le \ldots \le X_{n:n}.$$

Fiksuokime $k \in N$. Kai $n \to \infty$, a.d. $X_{k:n}$ ir $X_{n-k+1:n}$ vadinsime *k*-tosiomis ekstremaliosiomis reikšmėmis. Didžiausią ir mažiausią variacinės eilutės narius pažymėsime

$$Z_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n),$$
$$W_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

A.d. Z_n ir W_n vadinsime ekstremaliosiomis reikšmėmis arba tiesiog maksimumu ir minimumu.

Tarkime, $u_n = u_n(x)$ – tokia realaus kintamojo funkcijų seka, kad pasiskirstymo funkcijų seka

$$H_n(u_n(x)) = P(Z_n < u_n(x))$$

silpnai konverguoja į neišsigimusią pasiskirstymo funkciją $H(x)$. Taip apibrėžta struktūra Z_n kartu su prielaidomis apie a.d. seką $\{X_n, n \ge 1\}$ bei funkcijų seką $\{u_n, n \ge 1\}$ sudaro maksimumų schemą.

Analogiškai apibrėžiame minimumų schemą. Tarkime, $v_n = v_n(x)$ – tokia realaus kintamojo funkcijų seka, kad pasiskirstymo funkcijų seka

$$L_n(v_n(x)) = P(W_n < v_n(x))$$

silpnai konverguoja į neišsigimusią pasiskirstymo funkciją $L(x)$. Taip apibrėžta struktūra W_n kartu su prielaidomis apie a.d. seką $\{X_n, n \ge 1\}$ bei funkcijų seką $\{v_n, n \ge 1\}$ sudaro minimumų schemą.

Jei a.d. $\{X_n, n \ge 1\}$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę su pasiskirstymo funkcija $F(x)$, o normavimo funkcijos u_n ir v_n tiesinės, t.y.

$$u_n(x) = a_n + b_n x, \quad a_n \in R, \quad b_n > 0,$$
$$v_n(x) = c_n + d_n x, \quad c_n \in R, \quad d_n > 0,$$

tai tokia ekstremaliųjų reikšmių (maksimumų arba minimumų) schema vadinama klasikine.

Galimi įvairūs ekstremaliųjų reikšmių schemos apibendrinimai. Pavyzdžiui, normavimo funkcijos u_n ir v_n gali būti netiesinės; a.d. $\{X_n, n \ge 1\}$ gali būti daugiamačiai; variacinės eilutės ilgis gali būti ne fiksuotas, o atsitiktinis ir t.t.

1.2. KAI KURIE EKSTREMALIŲJŲ REIKŠMIŲ TEORIJOS FAKTAI

Sakykime, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – nepriklausomi, vienodai pasiskirstę a.d. su pasiskirstymo funkcija

$$F(x) = P(X_j < x), j = \overline{1, n}.$$

Pažymėkime

$$Z_n = \max(X_1, \ldots, X_n).$$

Tarkime, kad egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantų sekos $\{a_n, n \geq 1\}$ ir $\{b_n, n \geq 1\}$, kad

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n < a_n + b_n x) = H(x) \qquad \textbf{(1.1)}$$

visuose funkcijos $H(x)$ tolydumo taškuose. Sakysime, kad pasiskirstymo funkcija $F(x)$ priklauso neišsigimusio ribinio skirstinio $H(x)$ traukos sričiai (žymėsime $F \in D(H)$), jei egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantų sekos, kad tenkinama (1.1) lygybė.

Pažymėkime

$$\omega(F) = \sup\{x : F(x) < 1\},$$

$$\alpha(F) = \inf\{x : F(x) > 0\}.$$

Pateiksime paprastą ir konstruktyvų centravimo ir normavimo konstantų parinkimo būdą bei suformuluosime sąlygas, kurias turi tenkinti skirstinys F, kad jis priklausytų kurio nors neišsigimusio ribinio skirstinio traukos sričiai.

Teorema 1.1. Tarkime, $\omega(F) = \infty$ ir egzistuoja tokia teigiama konstanta α, kad

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-\alpha} \qquad \textbf{(1.2)}$$

visiems $x > 0$. Tuomet $F \in D(H_{1,\alpha})$. Čia

$$H_{1,\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0. \end{cases}$$

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$a_n = 0,$$
$$b_n = \inf\{x : 1 - F(x) \leq 1/n\}.$$

Teorema 1.2. Tarkime, $\omega(F) < \infty$, o pasiskirstymo funkcija

$$F^*(x) = F\left(\omega(F) - \frac{1}{x}\right)$$

tenkina sąlygą (1.2). Tuomet $F \in D(H_{2,\alpha})$. Čia

$$H_{2,\alpha}(x) = \begin{cases} \exp\left(-(-x)^{\alpha}\right), & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$a_n = \omega(F),$$
$$b_n = \omega(F) - \inf\{x : 1 - F(x) \le 1/n\}.$$

Teorema 1.3. Tarkime, su bet kokia baigtine konstanta α integralas

$$\int_{\alpha}^{\omega(F)} (1 - F(y))dy \tag{1.3}$$

yra baigtinis. Intervale $(\alpha(F), \omega(F))$ apibrėžkime funkciją

$$R(t) = \frac{1}{1 - F(t)} \int_{t}^{\omega(F)} (1 - F(y))dy.$$

Jei visiems realiems x egzistuoja riba

$$\lim_{t \to \omega(F)} \frac{1 - F(t + xR(t))}{1 - F(t)} = e^{-x}, \tag{1.4}$$

tai $F \in D(H_{3,\alpha})$. Čia

$$H_{3,0}(x) = \exp(-e^{-x}), x \in R.$$

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$a_n = \inf\{x : 1 - F(x) \le 1/n\},$$
$$b_n = R(a_n).$$

Teorema 1.4. Klasikinėje maksimumų schemoje egzistuoja tik trys $(H_{1,\alpha}, H_{2,\alpha}, H_{3,0})$ neišsigimusio ribinio skirstinio tipai.

Teorema 1.5. Tarkime, turime klasikinę maksimumų schemą.

1) $F \in D(H_{1,\alpha})$ tada ir tik tada, kai $\omega(F) = \infty$ ir tenkinama sąlyga (1.2);

2) $F \in D(H_{2,\alpha})$ tada ir tik tada, kai $\omega(F) < \infty$ ir funkcija

$$F^*(x) = F\left(\omega(F) - \frac{1}{x}\right), x > 0,$$

tenkina sąlygą (1.2);

3) $F \in D(H_{3,\alpha})$ tada ir tik tada, kai integralas (1.3) yra baigtinis ir tenkinama sąlyga (1.4).

1.1 – 1.5 teoremų įrodymai pateikti [2] darbe.

Tarkime, kad egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantų sekos $\{c_n, n \ge 1\}$ ir $\{d_n, n \ge 1\}$, kad

$$\lim_{n \to \infty} P(W_n < c_n + d_n x) = L(x) \tag{1.5}$$

visuose funkcijos $L(x)$ tolydumo taškuose. Čia $L(x)$ – neišsigimusi skirstinio funkcija. Sakysime, kad pasiskirstymo funkcija $F(x)$ priklauso ribinio skirstinio $L(x)$ traukos sričiai (žymėsime $F \in D(L)$), jei egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantų sekos, kad tenkinama lygybė (1.5).

Teorema 1.6. Tarkime, $\alpha(F) = \infty$ ir egzistuoja tokia teigiama konstanta γ, kad

$$\lim_{t\to\infty}\frac{F(tx)}{F(t)} = x^{-\gamma} \qquad \textbf{(1.6)}$$

visiems $x > 0$. Tuomet $F \in D(L_{1,\gamma})$. Čia

$$L_{1,\gamma}(x) = \begin{cases} 1-\exp\left(-(-x)^{\gamma}\right), & x<0, \\ 1, & x>0. \end{cases}$$

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$c_n = 0,$$
$$d_n = \sup\{x : F(x) \le 1/n\}.$$

Teorema 1.7. Tarkime, $-\infty < \alpha(F)$. Jei funkcija

$$F^*(x) = F\left(\alpha(F) - \frac{1}{x}\right), \; x<0$$

tenkina sąlygą (1.6), tuomet $F \in D(L_{2,\gamma})$. Čia

$$L_{2,\gamma}(x) = \begin{cases} 1-\exp\left(-x^{\gamma}\right), & x>0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$$

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$c_n = \alpha(F),$$
$$d_n = \sup\{x : F(x) \le 1/n\} - \alpha(F).$$

Teorema 1.8. Tarkime, su bet kokia baigtine konstanta α integralas

$$\int_{\alpha(F)}^{a} F(y)dy \qquad \textbf{(1.7)}$$

yra baigtinis. Apibrėžkime funkciją

$$r(t) = \frac{1}{F(t)}\int_{\alpha(F)}^{t} F(y)dy, \quad t > \alpha(F).$$

Jei visiems realiems x egzistuoja riba

$$\lim_{t\to\alpha(F)}\frac{F(t+xr(t))}{F(t)} = e^{x}, \qquad \textbf{(1.8)}$$

tai $F \in D(L_{3,\gamma})$. Čia

$$L_{3,0}(x) = 1 - \exp(-e^x), x \in R.$$

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$c_n = \sup\{x : F(x) \le 1/n\},$$
$$d_n = r(c_n).$$

Teorema 1.9. Klasikinėje minimumų schemoje egzistuoja tik trys $(L_{1,\gamma}, L_{2,\gamma}, L_{3,0})$ neišsigimusio ribinio skirstinio tipai.

1.6– 1.9 teoremų įrodymai pateikti [2] darbe.

1.3. DAUGIAMAČIŲ EKSTREMALIŲJŲ REIKŠMIŲ SCHEMA

Sakykime, kad $\{X_n = (X_{1,n}, X_{2,n}, \ldots, X_{m,n}), n \ge 1\}$ – m-mačių a.d. seka. Pažymėkime

$$Z_{i,n} = \max(X_{i,1}, X_{i,2}, \ldots, X_{i,n}),$$
$$W_{i,n} = \min(X_{i,1}, X_{i,2}, \ldots, X_{i,n}),\ i = 1, \ldots m.$$

Apibrėšime m-mačių a.d. pirmųjų n sekos narių maksimumą ir minimumą:

$$Z_n = (Z_{1,n}, Z_{2,n}, \ldots, Z_{m,n}),$$
$$W_n = (W_{1,n}, W_{2,n}, \ldots, W_{m,n}).$$

m-mačius a.d. Z_n ir W_n vadinsime daugiamatėmis ekstremaliosiomis reikšmėmis arba tiesiog daugiamačiu maksimumu ir daugiamačiu minimumu.

Aritmetines operacijas tarp vektorių apibrėšime pagal komponentes, t.y.

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_m + y_m),$$
$$xy = (x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_m y_m),$$
$$\frac{x}{y} = \left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \ldots, \frac{x_m}{y_m}\right),$$

o nelygybė $x<y$ reikš nelygybių sistemą $x_i < y_i, (1 \le i \le m)$. Taip pat dažnai naudojamas nulinis vektorius 0 = (0,0,...,0).

Tarkime, $\{u_n(x) = (u_{1,n}(x_1), \ldots, u_{m,n}(x_m)), n \ge 1\}$ – tokių griežtai monotoninių ir tolydžių (kiekvienos komponentės atžvilgiu) vektorinių funkcijų (jas vadinsime normalizavimo funkcijomis) seka, kad pasiskirstymo funkcijų seka

$$H_n(u_n(x)) = P(Z_n < u_n(x))$$

silpnai konverguoja į neišsigimusią m kintamųjų (m-matę) pasiskirstymo funkciją H (m-matę pasiskirstymo funkciją H vadinsime neišsigimusia, jeigu visos jos vienmatės marginaliosios pasiskirstymo funkcijos $H_i(x_i)$ $(i=1,...,m)$ yra neišsigimusios). Taip apibrėžta struktūra Z_n kartu su prielaidomis apie m-mačių a.d. seką $\{X_n, n \geq 1\}$ bei normalizavimo funkcijų seką $\{u_n(x), n \geq 1\}$ sudaro daugiamačių maksimumų schemą.

Tarkime, $\{v_n(x) = (v_{1,n}(x_1), \ldots, v_{m,n}(x_m)), n \geq 1\}$ – tokių normalizavimo funkcijų seka, kad pasiskirstymo funkcijų seka

$$L_n(v_n(x)) = P(W_n < v_n(x))$$

silpnai konverguoja į neišsigimusią m-matę pasiskirstymo funkciją L. Struktūra W_n kartu su prielaidomis apie m-mačių a.d. seką $\{X_n, n \geq 1\}$ bei normalizavimo funkcijų seką $\{v_n(x), n \geq 1\}$ sudaro daugiamačių minimumų schemą.

Jei m-mačiai a.d. $\{X_n, n \geq 1\}$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę su pasiskirstymo funkcija

$$F(x_1, \ldots, x_m) = P(X_{1,j} < x_1, \ldots, X_{m,j} < x_m), \forall j \geq 1,$$

o normalizavimo funkcijos u_n ir v_n tiesinės, t.y.

$$u_n(x) = (a_{1,n} + b_{1,n}x_1, \ldots, a_{m,n} + b_{m,n}x_m), \qquad a_{i,n} \in R, \quad b_{i,n} > 0,$$
$$v_n(x) = (c_{1,n} + d_{1,n}x_1, \ldots, c_{m,n} + d_{m,n}x_m), \qquad c_{i,n} \in R, \quad d_{i,n} > 0, \; i = 1, \ldots, m,$$

tai tokią daugiamačių ekstremaliųjų reikšmių schemą vadinsime klasikine daugiamačių ekstremaliųjų reikšmių (maksimumų arba minimumų) schema.

Tarkime, kad egzistuoja tokios centravimo ir normavimo vektorių sekos $\{a_n = (a_{1,n}, \ldots, a_{m,n})\}$, $\{b_n = (b_{1,n}, \ldots, b_{m,n}) > 0\}$, kad

$$\lim_{n \to \infty} P(Z_n < a_n + b_n x) = H(x), \qquad \textbf{(1.9)}$$

čia $H(x) = H(x_1, \ldots, x_m)$ – neišsigimusi m-matė skirstinio funkcija. Jei tenkinama (1.9) sąlyga, tai sakysime, kad pasiskirstymo funkcija $F(x)$ priklauso ribinio skirstinio $H(x)$ traukos sričiai, o patį skirstinį $H(x)$ dar vadinsime daugiamačių ekstremaliųjų reikšmių skirstiniu.

Paminėsime keletą ribinio skirstinio $H(x)$ savybių.

Teorema 1.10. Ribinė pasiskirstymo funkcija $H(x)$ yra tolydi. Jos vienmatės marginaliosios pasiskirstymo funkcijos gali būti tik trijų tipų, o būtent $H_{1,\alpha}, H_{2,\alpha}, H_{3,0}$.

Teorema 1.11. Ribinė pasiskirstymo funkcija $H(x)$ tenkina sąlygą

$$\exp\left(-\sum_{i=1}^{m} e^{-x_i}\right) \leq H(x) \leq \exp(-\exp(-\min(x_1, \ldots, x_m))).$$

1.10-1.11 teoremų įrodymai pateikti [2] darbe.

Centravimo ir normavimo vektorius galima rasti tokiu būdu: randame m-matės pasiskirstymo funkcijos $F(x)$ vienmatę marginaliąją pasiskirstymo funkciją $F_i(x_i)$ ir, taikydami teoremas 1.1-1.3, randame i-tąją centravimo ir normavimo vektoriaus komponentę. Tuo pačiu randame ir ribinio skirstinio $H(x)$ vienmatę marginaliąją pasiskirstymo funkciją $H_i(x_i)$.

<u>1 Pastaba.</u> Ribinė skirstinio funkcija $H(x)$ nėra vienareikšmiškai nusakoma jos vienmačių marginaliųjų skirstinių $H_i(x_i)$, $i=1,...m$.

<u>2 Pastaba.</u> Analogiški rezultatai gaunami daugiamačių minimumų atveju.

1.4. PERKĖLIMO TEOREMOS

Tarkime, $\{X_n = (X_{1,n}, \ldots, X_{m,n}), n \geq 1\}$ – nepriklausomi, vienodai pasiskirstę m-mačiai a.d. su skirstinio funkcija

$$F(x) = F(x_1, \ldots x_m) = P(X_{1,j} < x_1, \ldots, X_{m,j} < x_m), \forall j \geq 1,$$

Tarkime, kad egzistuoja tokios vektorių $\{a_n, n \geq 1\}$ ir $\{b_n, n \geq 1\}$ sekos, kad

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n < a_n + b_n x) = H(x), \qquad \textbf{(1.10)}$$

čia $H(x)$ – neišsigimusi m-matė skirstinio funkcija.

Tarkime, $\{N_n, n \geq 1\}$ – a.d., įgyjantis sveikas teigiamas reikšmes ir nepriklausantis nuo a.d. $\{X_n\}$. Apibrėšime šių a.d. ekstremaliąsias reikšmes:

$$Z_{N_n} = \left(\max(X_{1,1}, \ldots, X_{1,N_n}), \ldots, \max(X_{m,1}, \ldots, X_{m,N_n})\right),$$

$$W_{N_n} = \left(\min x(X_{1,1}, \ldots, X_{1,N_n}), \ldots, \min(X_{m,1}, \ldots, X_{m,N_n})\right).$$

Pažymėkime

$$A_n(nz) = P\left(\frac{N_n}{n} < z\right).$$

Tarkime, kad a.d. $\{N_n\}$ tenkina sąlygą

$$\lim_{n\to\infty} A_n(nz) = A(z) \qquad \textbf{(1.11)}$$

kiekviename funkcijos $A(z)$ tolydumo taške.

Teorema 1.12. Tarkime, galioja (1.10) lygybė. Jei tenkinama (1.11) sąlyga, tai

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_{N_n} < a_n + b_n x) = \Psi(x), \qquad \textbf{(1.12)}$$

čia skirstinio funkcija apibrėžiama formule

$$\Psi(x) = \int_0^\infty H^z(x) dA(z). \qquad \textbf{(1.13)}$$

Dabar suformuluosime perkėlimo teoremą dvimačiams minimumams, pažymėdami, kad analogiškus rezultatus galima gauti ir didesnių matavimų a.d.

Tarkime, kad egzistuoja tokios vektorių $\{c_n, n \geq 1\}$ ir $\{d_n, n \geq 1\}$ sekos, kad

$$\lim_{n\to\infty} P(W_n < c_n + d_n x) = L(x)\,; \qquad \textbf{(1.14)}$$

čia $L(x)$ – neišsigimusi dvimatė skirstinio funkcija su vienmatėmis marginaliosiomis pasiskirstymo funkcijomis $L_1(x_1)$ ir $L_2(x_2)$.

Teorema 1.13. Tarkime, galioja (1.14) lygybė. Jei tenkinama (1.11) sąlyga, tai

$$\lim_{n\to\infty} P(W_{N_n} < c_n + d_n x) = \Phi(x)\,, \qquad \textbf{(1.15)}$$

čia skirstinio funkcija apibrėžiama formule

$$\Phi(x) = 1 - \int_0^\infty \left(1 - L_1(x_1)\right)^z dA(z) - \int_0^\infty \left(1 - L_2(x_2)\right)^z dA(z) + \int_0^\infty \left(\overline{L}(x)\right)^z dA(z). \qquad \textbf{(1.16)}$$

Čia

$$\overline{L}(x) = 1 - L_1(x_1) - L_2(x_2) + L(x).$$

1.12-1.13 teoremų įrodymai pateikti [3] darbe. Vienmačių a.d. maksimumams perkėlimo teorema įrodyta [4] darbe.

1.5. KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTIS PERKĖLIMO TEOREMOSE

Nagrinėkime maksimumų schemą. Pažymėkime

$$u_n(x) = n(1 - F_n(a_n + b_n x)),$$

$$v_n(x) = u_n(x) + \ln H(x)\,,$$

$$\delta_n(x) = \max(1, e^{-v_n(x)}).$$

su tais x, su kuriais $H(x)>0$.

Teorema 1.14. Tarkime, tenkinamos (1.10), (1.12) lygybės. Tada su visais x, su kuriais $\frac{u_n(x)}{n} < \frac{1}{2}$ ir $H(x)>0$, teisingas įvertis

$$\left|P\left(Z_{N_n} < a_n + b_n x\right) - \Psi(x)\right| \le \Delta_{N_n} =$$
$$= \Delta_n(x)\int_0^\infty z\left(\delta_n(x) H(x)\right)^{z-1} dA_n(nz) + \left|\int_0^\infty \left(A_n(nz) - A(z)\right) dH^z(x)\right|. \qquad \textbf{(1.17)}$$

Čia:

$$\Delta_n(x) = H(x)\left(r_{1,n}(x) + r_{2,n}(x) + r_{1,n}(x) r_{2,n}(x)\right),$$

$$r_{1,n}(x) = \frac{2u_n^2(x)}{n} + \frac{2u_n^4(x)}{n^2} \cdot \frac{1}{1-q}, \qquad \textbf{(1.18)}$$

$$r_{2,n}(x) = \left|v_n(x)\right| + \frac{v_n^2(x)}{2} \cdot \frac{1}{1-s},$$

o konstantos 0<q<1 ir 0<s<1 parenkamos taip, kad

$$\frac{2u_n^2(x)}{3n} \le q, \qquad \frac{|v_n(x)|}{3} \le s.$$

Teoremos įrodymas pateiktas [3] darbe. Šis rezultatas grindžiamas [5] darbe įrodyta teorema.

Nagrinėkime minimumų schemą. Norėdami supaprastinti formules, apsiribosime dvimačiu atveju, tačiau ir didesnių matavimų a.d. galima gauti analogiškus rezultatus.

Sakysime $\{X_n = (X_{1,n}, X_{2,n}), n \ge 1\}$– nepriklausomi vienodai pasiskirstę dvimačiai a.d. su pasiskirstymo funkcija

$$F(x_1, x_2) = P(X_{1,n} < x_1, X_{2,n} < x_2), \ \forall n \ge 1.$$

Šios pasiskirstymo funkcijos marginaliąsias pasiskirstymo funkcijas pažymėkime atitinkamai $F_1(x_1)$ ir $F_2(x_2)$.

Pažymėkime dvimatį minimumą

$$W_n = (W_{1,n}, W_{2,n}),$$

čia

$$W_{1,n} = \min\{X_{1,1}, \ldots, X_{1,n}\},$$
$$W_{2,n} = \min\{X_{2,1}, \ldots, X_{2,n}\}.$$

Turime

$$P(W_n < x) = 1 - (1 - F_1(x_1))^n - (1 - F_2(x_2))^n + (1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + F(x_1, x_2))^n. \qquad \textbf{(1.19)}$$

Pažymėkime

$$\overline{F}(x_1, x_2) = 1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + F(x_1, x_2),$$
$$\overline{L}(x) = 1 - L_1(x_1) - L_2(x_2) + L(x),$$
$$u_{1,n}(x_1) = nF_1(c_{1,n} + d_{1,n}x_1), \qquad \textbf{(1.20)}$$
$$u_{2,n}(x_2) = nF_2(c_{2,n} + d_{2,n}x_2),$$
$$u_n(x_1, x_2) = n(1 - \overline{F}(c_n + d_n x)).$$

Kai tenkinama (1.14) lygybė, tai egzistuoja teigiamos ribos

$$\lim_{n\to\infty} u_{1,n}(x_1) = u_1(x_1),$$
$$\lim_{n\to\infty} u_{2,n}(x_2) = u_2(x_2),$$
$$\lim_{n\to\infty} u_n(x_1, x_2) = u(x_1, x_2),$$

ir

$$L(x) = 1 - e^{-u_1(x_1)} - e^{-u_2(x_2)} + e^{-u(x_1,x_2)}.$$

Pažymėkime

$$t_{1,n}(x_1) = u_{1,n}(x_1) + \ln(1 - L_1(x_1)), \text{ su tais } x_1, \text{ su kuriais } L_1(x_1) < 1;$$

$$t_{2,n}(x_2) = u_{2,n}(x_2) + \ln(1 - L_2(x_2)), \text{ su tais } x_2, \text{ su kuriais } L_2(x_2) < 1; \quad \mathbf{(1.21)}$$

$$t_n(x_1, x_2) = u_n(x_1, x_2) + \ln \overline{L}(x), \text{ su tais } (x_1,x_2), \text{ su kuriais } \overline{L}(x) > 0.$$

Pažymėkime

$$\delta_{1,n}(x_1) = \max(1, e^{-t_{1,n}(x_1)}),$$

$$\delta_{2,n}(x_2) = \max(1, e^{-t_{2,n}(x_2)}), \quad \mathbf{(1.22)}$$

$$\delta_n(x_1, x_2) = \max(1, e^{-t_n(x_1,x_2)}).$$

Teorema 1.15. Tarkime, tenkinamos (1.11), (1.14) lygybės ir $A(+0) = 0$. Su visais $x=(x_1,x_2)$, su kuriais $u_{1,n}(x_1)/n < 1/2$, $u_{2,n}(x_2)/n < 1/2$, $u_n(x_1,x_2)/n < 1/2$, $L_1(x_1) < 1$, $L_2(x_2) < 1$, $\overline{L}(x) > 0$, teisingas konvergavimo greičio įvertis

$$\left| P\left(W_{N_n} < c_n + d_n x\right) - \Phi(x_1, x_2) \right| \le \Delta_{N_n} = \Delta_{1,N_n}(x_1) + \Delta_{2,N_n}(x_2) + \Delta_{3,N_n}(x_1, x_2). \quad \mathbf{(1.23)}$$

Čia

$$\Delta_{1,N_n}(x_1) = \Delta_1'(x_1) \int_0^\infty z\left(\delta_{1,n}(x_1)(1 - L_1(x_1))\right)^{z-1} dA_n(nz) + \left| \int_0^\infty \left(A_n(nz) - A(z)\right) d\left(1 - L_1(x_1)\right)^z \right|,$$

$$\Delta_1'(x_1) = \Delta_1(x_1) + \left(1 - L_1(x_1)\right) \cdot r_{2,1,n}^2(x_1),$$

$$\Delta_1(x_1) = \left(1 - L_1(x_1)\right)\left(r_{1,1,n}(x_1) + r_{2,1,n}(x_1) + r_{1,1,n}(x_1) r_{2,1,n}(x_1)\right), \quad \mathbf{(1.24)}$$

$$r_{1,1,n}(x_1) = \frac{2u_{1,n}^2(x_1)}{n} + \frac{2u_{1,n}^4(x_1)}{n^2} \cdot \frac{1}{1 - q_1},$$

$$r_{2,1,n}(x_1) = |t_{1,n}(x_1)| + \frac{t_{1,n}^2(x_1)}{2} \cdot \frac{1}{1 - s_1},$$

konstantos $0<q_1<1$ ir $0<s_1<1$ parenkamos taip, kad

$$\frac{2u_{1,n}^2(x_1)}{3n} \le q_1, \quad \frac{|t_{1,n}(x_1)|}{3} \le s_1;$$

$$\Delta_{2,N_n}(x_2) = \Delta_2'(x_2) \int_0^\infty z\left(\delta_{2,n}(x_2)(1 - L_2(x_2))\right)^{z-1} dA_n(nz) + \left| \int_0^\infty \left(A_n(nz) - A(z)\right) d\left(1 - L_2(x_2)\right)^z \right|,$$

$$\Delta_2'(x_2) = \Delta_2(x_2) + \left(1 - L_2(x_2)\right) \cdot r_{2,2,n}^2(x_2), \quad \mathbf{(1.25)}$$

$$\Delta_2(x_2) = \left(1 - L_2(x_2)\right)\left(r_{1,2,n}(x_2) + r_{2,2,n}(x_2) + r_{1,2,n}(x_2) r_{2,2,n}(x_2)\right),$$

$$r_{1,2,n}(x_2)=\frac{2u_{2,n}^2(x_2)}{n}+\frac{2u_{2,n}^4(x_2)}{n^2}\cdot\frac{1}{1-q_2},$$

$$r_{2,2,n}(x_2)=|t_{2,n}(x_2)|+\frac{t_{2,n}^2(x_2)}{2}\cdot\frac{1}{1-s_2},$$

konstantos $0<q_2<1$ ir $0<s_2<1$ parenkamos taip, kad

$$\frac{2u_{2,n}^2(x_2)}{3n}\le q_2,\quad \frac{|t_{2,n}(x_2)|}{3}\le s_2\,;$$

$$\Delta_{3,N_n}(x_1,x_2)=\Delta_n'(x_1,x_2)\int_0^\infty z\left(\delta_n(x_1,x_2)\overline{L}(x)\right)^{z-1}dA_n(nz)+\left|\int_0^\infty\left(A_n(nz)-A(z)\right)d\left(\overline{L}(x)\right)^z\right|,$$

$$\Delta_n'(x_1,x_2)=\Delta_3(x_1,x_2)+\overline{L}(x)\cdot R_{2,n}^2(x_1,x_2),$$

$$\Delta_3(x_1,x_2)=\overline{L}(x_1,x_2)\left(R_{1,n}(x_1,x_2)+R_{2,n}(x_1,x_2)+R_{1,n}(x_1,x_2)R_{2,n}(x_1,x_2)\right), \qquad \textbf{(1.26)}$$

$$R_{1,n}(x_1,x_2)=\frac{2u_n^2(x_1,x_2)}{n}+\frac{2u_n^4(x_1,x_2)}{n^2}\cdot\frac{1}{1-q_3},$$

$$R_{2,n}(x_1,x_2)=|t_n(x_1,x_2)|+\frac{t_n^2(x_1,x_2)}{2}\cdot\frac{1}{1-s_3},$$

konstantos $0<q_3<1$ ir $0<s_3<1$ parenkamos taip, kad

$$\frac{2u_n^2(x_1,x_2)}{3n}\le q_3,\quad \frac{|t_n(x_1,x_2)|}{3}\le s_3\,.$$

Teoremos įrodymas pateiktas [6] darbe.

1.6. PROGRAMINIŲ PRIEMONIŲ PASIRINKIMO ANALIZĖ

Šiuo metu turimas platus programinės įrangos pasirinkimas. Mes galime naudotis tiek universaliomis programavimo kalbomis (PASCAL, C++, JAVA, t.t.), tiek universaliomis matematikos uždavinių sprendimo sistemomis (MATHCAD, MATLAB, t.t.). Duomenų analizei geriausiai naudoti duomenų analizės sistemas (SAS, SPSS, STATGRAPHICS, STATISTICA ir t.t.).

Šiame darbe naudojama matematikos uždavinių sprendimo sistema MATLAB. Ši sistema pasirinkta erdviniams brėžiniams vaizdžiai pateikti, be to, ši sistema paprasta ir naudinga daugiamačių skirstinių pjūvių analizei. Vartotojas gali nesunkiai analizuoti uždavinius, išsikviesdamas programas MATLAB komandiniame lange arba meniu bei keisdamas pradinius duomenis.

2. TIRIAMOJI DALIS

2.1. DVIMAČIŲ MAKSIMUMŲ SKIRSTINIŲ KONVERGAVIMO GREIČIO TYRIMAS

Spręsdami uždavinius apsiribosime dvimačiais a.d. $\{X_n = (X_{1,n}, X_{2,n}), n \geq 1\}$. A.d. N_n bus pasiskirstę pagal geometrinį skirstinį su parametru $p_n = \frac{1}{n}$, t.y.

$$P(N_n = k) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}, \ k = 1,2,...$$

Žymėsime $N_n \sim G(p_n)$.

Jei a.d. N_n turi geometrinį skirstinį, tai

$$\begin{aligned} &A_n(nz) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{nz}, \\ &\lim_{n\to\infty} A_n(nz) = A(z) = 1 - e^{-z}, z > 0. \end{aligned} \qquad \textbf{(2.1)}$$

2.1.1. DVIMATIS EKSPONENTINIS SKIRSTINYS

Nagrinėsime a.d., kurie turi dvimatį eksponentinį skirstinį, t.y. pasiskirstymo funkcija lygi

$$F(x_1, x_2) = \left(1 - e^{-\lambda_1 x_1}\right)\left(1 - e^{-\lambda_2 x_2}\right), \ x_1, x_2 > 0, \lambda_1, \lambda_2 > 0.$$

Vienmačiai marginalieji skirstiniai lygūs:

$$F_1(x_1) = \lim_{x_2\to\infty} F(x_1, x_2) = \left(1 - e^{-\lambda_1 x_1}\right), \ x_1 > 0, \lambda_1 > 0,$$

$$F_2(x_2) = \lim_{x_1\to\infty} F(x_1, x_2) = \left(1 - e^{-\lambda_2 x_2}\right), \ x_2 > 0, \lambda_2 > 0.$$

Paprastumo dėlei nagrinėsime atvejį, kai $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

2.1.1.1. CENTRAVIMO IR NORMAVIMO VEKTORIŲ SEKŲ PARINKIMAS

Šiame uždavinyje $\omega(F_1) = \infty, \omega(F_2) = \infty,$ taigi centravimo ir normavimo vektorių sekas bei ribinio skirstinio funkciją rasime remdamiesi 1.3 teorema. Kadangi marginalieji skirstiniai sutampa (kai dydžiai λ_1, λ_2 sutampa), tai centravimo ir normavimo vektorių sekas bei ribinio skirstinio funkciją rasime bendru atveju. Pagal (1.3) formulę integralas, kai konstanta *a* yra baigtinė (pasirenkame *a*=1), taip pat yra baigtinis:

$$\int_1^\infty \left(1 - 1 + e^{-\lambda y}\right)dy = \int_1^\infty e^{-\lambda y_1} dy = -\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda y}\Big|_1^\infty = -\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

Tada

$$R(t) = \frac{1}{1 - 1 + e^{-\lambda t}} \cdot \int_t^{\infty} e^{-\lambda y} dy = -\frac{e^{\lambda t}}{\lambda} \cdot e^{-\lambda y} \Big|_t^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Kai $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,$ tai normavimo vektoriaus b_n seka lygi

$$b_n = (b_{n,1}, b_{n,2}) = \left[R(a_{n,1}), R(a_{n,2})\right] = (1,1).$$

Ieškodami centravimo vektoriaus a_n, remsimės sąlyga

$$a_{n,i} = \inf\left\{x : 1 - F_i(x_i) \le \frac{1}{n}\right\}, i = 1,2,$$

t.y. sprendžiame lygtį

$$1 - 1 + e^{-\lambda x} = \frac{1}{n},$$

kurią išsprendę gauname

$$x = \frac{\ln n}{\lambda}.$$

Kai $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,$ marginalieji skirstiniai sutampa ir ieškoma centravimo vektorių seka lygi $a_n = (\ln n, \ln n).$

2.1.1.2. RIBINIO SKIRSTINIO RADIMAS

Žinodami centravimo ir normavimo vektorių sekas bei priėmę sąlygą $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, galime užrašyti

$$F(a_n + b_n x) = \left(1 - e^{-(\ln n + x_1)}\right)\left(1 - e^{-(\ln n + x_2)}\right), \; x_1, x_2 > 0.$$

Remiantis (2.1) formule ir 1.3 teorema, ribinio skirstinio funkcija lygi

$$H(x_1, x_2) = \exp\left\{-e^{-x_1} - e^{-x_2}\right\}.$$

Ieškome ribinės skirstinio funkcijos perkėlimo teoremoje, remdamiesi (1.13) lygybe. Turime

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_0^{\infty} \exp\left\{(-e^{-x_1} - e^{-x_2})z\right\} d\left(1 - e^{-z}\right) = \int_0^{\infty} \exp\left\{z(-1 - e^{-x_1} - e^{-x_2})\right\} dz =$$

$$= \frac{1}{1 + e^{-x_1} + e^{-x_2}}, \; x_1, x_2 \in R.$$

Taigi ribinis skirstinys perkėlimo teoremoje lygus

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_{N_n} < a_n + b_n x) = \Psi(x_1, x_2) = \frac{1}{1 + e^{-x_1} + e^{-x_2}}, \; x_1, x_2 \in R. \quad \textbf{(2.2)}$$

2.1.1.3. KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERČIO KONSTRAVIMAS

Taikydami 1.14 teoremą, įvertinsime konvergavimo greitį (2.2) lygybėje. Patogumo dėlei (1.17) formulėje įvesime pažymėjimus, kuriuos naudosime tolimesniuose skaičiavimuose:

$$\begin{aligned}
&\left|\underbrace{P(Z_{N_n} < a_n + b_n x) - \Psi(x_1, x_2)}_{tiksli\ \ reikšmė}\right| \le \underbrace{\Delta_{N_n}}_{įvertis} = \\
&= \underbrace{\Delta_n(x)\int_0^{\infty} z(\delta_n(x)H(x))^{z-1}\,dA_n(nz)}_{1\,narys} + \underbrace{\left|\int_0^{\infty}(A_n(nz) - A(z))\,dH^{z}(x)\right|}_{2\,narys}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Tikslios konvergavimo įverčio reikšmės turinys skaičiuojama šitaip:

$$\begin{aligned}
&P(Z_{N_n} < a_n + b_n x) = \sum_{j=1}^{\infty} P(N_n = j)P(Z_j < a_n + b_n x) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{j-1} F^{j}(a_n + b_n x) = \\
&= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{n}}\sum_{j=1}^{\infty}\left(F(a_n + b_n x)\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^{j} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{F(a_n + b_n x)\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}{1-F(a_n + b_n x)\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Remiantis (1.18) formule, apskaičiuosime įvertį $\Delta_n(x)$. Pirmiausia randame

$$\begin{aligned}
u_n(x) &= e^{-x_1} + e^{-x_2} - \frac{e^{-x_1-x_2}}{n}, \\
v_n(x) &= -\frac{e^{-x_1-x_2}}{n}, \\
\delta_n(x) &= \exp\left\{\frac{e^{-x_1-x_2}}{n}\right\},
\end{aligned} \tag{2.5}$$

o turėdami šiuos dydžius apskaičiuojame $\Delta_n(x)$:

$$\begin{aligned}
r_{1,n}(x) &= \frac{2u_n^2(x)}{n} + \frac{2u_n^4(x)}{n^2}\cdot\frac{1}{1-q}, \\
r_{2,n}(x) &= |v_n(x)| + \frac{v_n^2(x)}{2}\cdot\frac{1}{1-s}, \\
\Delta_n(x) &= H(x)\big(r_{1,n}(x) + r_{2,n}(x) + r_{1,n}(x)r_{2,n}(x)\big).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Apskaičiuojame pirmąjį įverčio (2.3) narį. Turime:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} z\left(\exp\left\{\frac{e^{-x_1-x_2}}{n}\right\}\cdot\exp\left\{-e^{-x_1} - e^{-x_2}\right\}\right)^{z-1} d\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right) = \\
&= \int_0^{\infty} z\left(\exp\left\{\frac{e^{-x_1-x_2}}{n} - e^{-x_1} - e^{-x_2}\right\}\right)^{z-1} d\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right) = -\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot
\end{aligned}$$

$$\cdot\int_0^\infty z\left(\exp\left\{\frac{e^{-x_1-x_2}}{n}-e^{-x_1}-e^{-x_2}\right\}\right)^{z-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}dz=-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\exp\left\{\frac{e^{-x_1-x_2}}{n}-e^{-x_1}-e^{-x_2}\right\}}\cdot$$

$$\cdot\int_0^\infty z\left(\exp\left\{\frac{e^{-x_1-x_2}}{n}-e^{-x_1}-e^{-x_2}\right\}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z dz=-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\exp\left\{\frac{e^{-x_1-x_2}}{n}-e^{-x_1}-e^{-x_2}\right\}}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\ln\left(\exp\left\{\frac{e^{-x_1-x_2}}{n}-e^{-x_1}-e^{-x_2}\right\}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)}\cdot z\left(\exp\left\{\frac{e^{-x_1-x_2}}{n}-e^{-x_1}-e^{-x_2}\right\}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z\Bigg|_0^\infty+$$

$$+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\exp\left\{\frac{e^{-x_1-x_2}}{n}-e^{-x_1}-e^{-x_2}\right\}\cdot\ln\left(\exp\left\{\frac{e^{-x_1-x_2}}{n}-e^{-x_1}-e^{-x_2}\right\}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)}\cdot$$

$$\cdot\int_0^\infty\left(\exp\left\{\frac{e^{-x_1-x_2}}{n}-e^{-x_1}-e^{-x_2}\right\}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z dz=\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\exp\left\{\frac{e^{-x_1-x_2}}{n}-e^{-x_1}-e^{-x_2}\right\}}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\ln\left(\exp\left\{\frac{e^{-x_1-x_2}}{n}-e^{-x_1}-e^{-x_2}\right\}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^2}\cdot\left(\exp\left\{\frac{e^{-x_1-x_2}}{n}-e^{-x_1}-e^{-x_2}\right\}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z\Bigg|_0^\infty=$$

$$=-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\exp\left\{\frac{e^{-x_1-x_2}}{n}-e^{-x_1}-e^{-x_2}\right\}\cdot\left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-e^{-x_1}-e^{-x_2}+\frac{e^{-x_1-x_2}}{n}\right)^2}.$$

Kadangi

$$1<-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\le\ln 4,\quad \text{kai } n\ge 2,$$

tai

$$\int_0^\infty z\left(\exp\left\{\frac{e^{-x_1-x_2}}{n}\right\}\cdot\exp\left\{-e^{-x_1}-e^{-x_2}\right\}\right)^{z-1} d\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)\le$$

$$\le\frac{\ln 4}{\exp\left\{\frac{e^{-x_1-x_2}}{n}-e^{-x_1}-e^{-x_2}\right\}\cdot\left(1+e^{-x_1}+e^{-x_2}-\frac{e^{-x_1-x_2}}{n}\right)^2}. \qquad \textbf{(2.7)}$$

Dabar apskaičiuosime ir įvertinsime antrąjį įverčio $\Delta_{N_n}(x)$ narį (2.3 formulė). Kadangi

$$\left|\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)-\left(1-e^{-z}\right)\right|\le\frac{\sqrt{e}}{n}e^{-z}(1+z),$$

tai turėsime

$$\left|\int_0^\infty\left(\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)-\left(1-e^{-z}\right)\right)d\exp\{z(-e^{-x_1}-e^{-x_2})\}\right|\le\left|\frac{\sqrt{e}}{n}\int_0^\infty e^{-z}(1+z)d\exp\{z(-e^{-x_1}-e^{-x_2})\}\right|=$$

$$=\left|\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\left(-e^{-x_1}-e^{-x_2}\right)\int_0^\infty\exp\{z\left(-1-e^{-x_1}-e^{-x_2}\right)\}(1+z)dz\right|=\left|\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{\left(-e^{-x_1}-e^{-x_2}\right)}{\left(-1-e^{-x_1}-e^{-x_2}\right)}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\int_0^\infty(1+z)d\exp\{z\left(-1-e^{-x_1}-e^{-x_2}\right)\}\right|=\left|\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{e^{-x_1}+e^{-x_2}}{1+e^{-x_1}+e^{-x_2}}\cdot(1+z)\exp\{z\left(-1-e^{-x_1}-e^{-x_2}\right)\}\Big|_0^\infty-\right.$$

$$\left.-\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{e^{-x_1}+e^{-x_2}}{1+e^{-x_1}+e^{-x_2}}\int_0^\infty\exp\{z\left(-1-e^{-x_1}-e^{-x_2}\right)\}d(1+z)\right|=\left|-\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{e^{-x_1}+e^{-x_2}}{1+e^{-x_1}+e^{-x_2}}-\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{e^{-x_1}+e^{-x_2}}{1+e^{-x_1}+e^{-x_2}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\exp\{z\left(-1-e^{-x_1}-e^{-x_2}\right)\}}{\left(-1-e^{-x_1}-e^{-x_2}\right)}\Big|_0^\infty\right|=\left|-\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{e^{-x_1}+e^{-x_2}}{1+e^{-x_1}+e^{-x_2}}-\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{e^{-x_1}+e^{-x_2}}{\left(1+e^{-x_1}+e^{-x_2}\right)^2}\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{e^{-x_1}+e^{-x_2}}{1+e^{-x_1}+e^{-x_2}}\left(1+\frac{1}{1+e^{-x_1}+e^{-x_2}}\right).$$

Taigi

$$\int_0^\infty\left(\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)-\left(1-e^{-z}\right)\right)d\exp\{z(-e^{-x_1}-e^{-x_2})\}\le\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{e^{-x_1}+e^{-x_2}}{1+e^{-x_1}+e^{-x_2}}\left(1+\frac{1}{1+e^{-x_1}+e^{-x_2}}\right). \qquad \textbf{(2.8)}$$

Iš (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) formulių gauname konvergavimo greičio įvertį:

$$\left|P(Z_{N_n}<a_n+b_nx)-\frac{1}{1+e^{-x_1}+e^{-x_2}}\right|\le\Delta_n(x)\frac{\ln 4}{\exp\left\{\frac{e^{-x_1-x_2}}{n}-e^{-x_1}-e^{-x_2}\right\}}\cdot$$

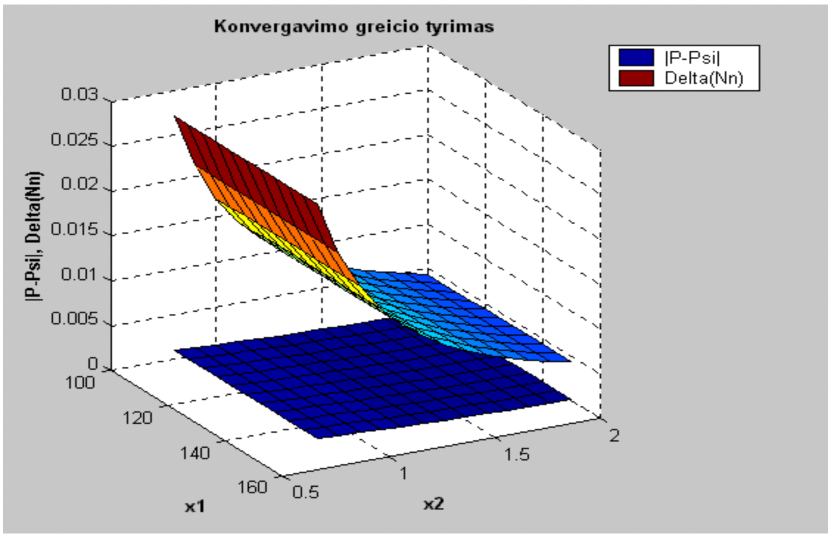
$$\cdot\frac{1}{\left(1-e^{-x_1}-e^{-x_2}+\frac{e^{-x_1-x_2}}{n}\right)^2}+\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{e^{-x_1}+e^{-x_2}}{1+e^{-x_1}+e^{-x_2}}\left(1+\frac{1}{1+e^{-x_1}+e^{-x_2}}\right). \qquad \textbf{(2.9)}$$

Iš konvergavimo greičio įverčio išraiškos (2.9), galima nustatyti paklaidos eilę n atžvilgiu, kuri šiuo atveju lygi $1/n$. Kaip paklaida priklauso nuo x_1 ir x_2, nustatysime atlikdami kompiuterinę analizę. Nagrinėjame keturis atvejus:

1) Kai n fiksuotas, o x_1 ir x_2 kinta (paviršius);
2) Kai x_1 ir x_2 fiksuoti, o n kinta (t.y. paviršiaus pjūvio analizė);
3) Kai n ir x_1 fiksuoti, o x_2 kinta (t.y. paviršiaus pjūvio analizė);
4) Kai n ir x_2 fiksuoti, o x_1 kinta (t.y. paviršiaus pjūvio analizė).

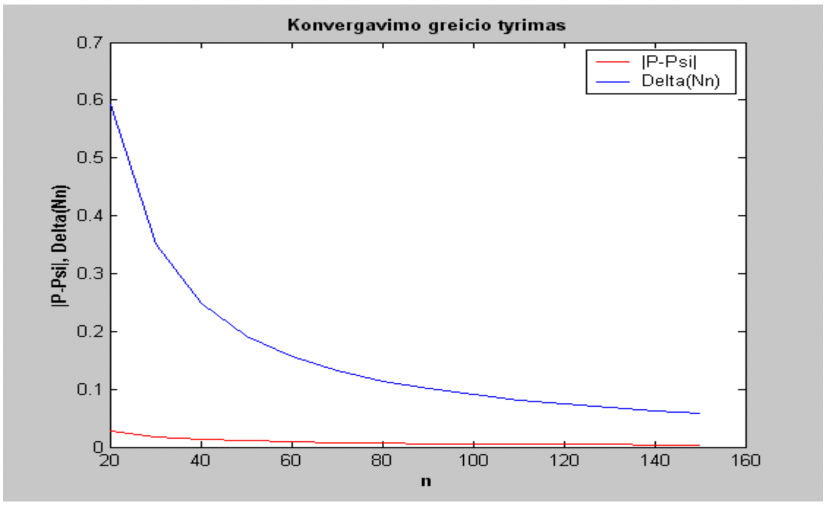
Kompiuterinės analizės rezultatus pateikiame 2.1 pav. ir 2.2 pav.

Paviršiaus tyrimo atveju, pasirenkame n=100, x_1 kinta intervale (100; 150), o x_2 kinta intervale (0.8; 2). Grafinis rezultatas atrodo taip:



2.1 pav. Tiesiškai normuoto dvimačio eksponentinio maksimumo paklaidos ir paklaidos įverčio kitimas, kai n fiksuotas

Paklaidos eilės įvertinimui tiriamas atvejis, kai x_1 ir x_2 fiksuoti, o n kinta. Tarkime, x_1=-1, x_2=100, o n kinta nuo 20 iki 150 žingsniu 10. Šiuo atveju grafinis vaizdas atrodo taip:



2.2 pav. Tiesiškai normuoto dvimačio eksponentinio maksimumo paklaidos ir paklaidos įverčio kitimas, kai x_1 ir x_2 fiksuoti

Iš pateiktų paveikslų matome, kad paklaidos reikšmė mažėja, kai x_1 ir x_2 didėja. Analogiškas rezultatas (t.y. kad paklaida mažėja) gaunamas ir tuo atveju, jei x_1 (arba x_2) būtų fiksuotas, o x_2 (arba x_1) didėtų. Šių atvejų paklaidos ir paklaidos įverčio kitimo grafikai pateikti 2 priede. Visi skaičiavimų rezultatai pateikti 1 priede lentelių pavidalu.

2.1.2. DVIMATIS PARETO SKIRSTINYS

Nagrinėsime a.d., kurie turi dvimatį Pareto skirstinį, t.y. pasiskirstymo funkcija lygi

$$F(x_1,x_2)=1-\frac{1}{1+x_1}-\frac{1}{1+x_2}+\frac{1}{1+x_1+x_2},\quad x_1,x_2>0.$$

Vienmačiai marginalieji skirstiniai lygūs:

$$F_1(x_1)=\lim_{x_2\to\infty}F(x_1,x_2)=1-\frac{1}{1+x_1},\ x_1>0,$$

$$F_2(x_2)=\lim_{x_1\to\infty}F(x_1,x_2)=1-\frac{1}{1+x_2},\ x_2>0.$$

2.1.2.1. CENTRAVIMO IR NORMAVIMO VEKTORIŲ SEKŲ PARINKIMAS

Šiame uždavinyje $\omega(F_1)=\infty,\omega(F_2)=\infty,$ taigi centravimo ir normavimo vektorių sekas bei ribinio skirstinio funkciją rasime remdamiesi 1.1 teorema. Kadangi marginalieji skirstiniai sutampa, tai centravimo ir normavimo vektorių sekas bei ribinio skirstinio funkciją rasime bendru atveju. Pagal (1.2) formulę, egzistuoja teigiama konstanta α, kad visiems $x>0$ egzistuoja riba

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1+t}{1+tx_1}=\lim_{t\to\infty}\frac{t\left(1+\frac{1}{t}\right)}{t\left(x_1+\frac{1}{t}\right)}=\frac{1}{x_1}=x_1^{-1}.$$

Taigi konstanta α=1>0. Analogiškai apskaičiuotume ribą su antruoju marginaliuoju skirstiniu ir gautume tą patį atsakymą. Iš 1.1 teoremos gauname, kad centravimo vektorių a_n seka lygi $a_n=(0,0)$.

Normavimo vektoriaus b_n seka lygi $b_n=(b_{n,1},b_{n,2})$. Ją randame išsprendę lygtį

$$b_{n,i}=\inf\left\{x:1-F_i(x_i)\le\frac{1}{n}\right\},i=1,2,$$

t.y.

$$\frac{1}{1+x_1}=\frac{1}{n},$$

$x_1 = n-1.$

Gauname, kad $b_n = (n-1, n-1)$.

Pažymėsime, kad a_n^*, b_n^* taip pat yra centravimo ir normavimo vektorių sekos, jei

$$\frac{b_n}{b_n^*} \to 1, \qquad \frac{a_n - a_n^*}{b_n} \to 0. \tag{2.10}$$

Tada turime $b_n = (n, n)$.

2.1.2.2. RIBINIO SKIRSTINIO RADIMAS

Žinodami centravimo ir normavimo vektorių sekas, galime užrašyti

$$F(a_n + b_n x) = 1 - \frac{1}{1+nx_1} - \frac{1}{1+nx_2} + \frac{1}{1+nx_1+nx_2}, \ \ x_1, x_2 > 0.$$

Remiantis 1.1 teorema, ribinio skirstinio funkcija lygi

$$H(x_1, x_2) = \exp\left\{-\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1+x_2}\right\}, \ \ x_1, x_2 > 0.$$

Remiantis (1.13) lygybe, randame ribinę skirstinio funkciją perkėlimo teoremoje:

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_0^\infty \exp\left\{\left(-\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1+x_2}\right)z\right\} d\left(1-e^{-z}\right) = \int_0^\infty \exp\left\{z\left(-1-\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1+x_2}\right)\right\} dz =$$

$$= \frac{\exp\left\{z\left(-1-\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1+x_2}\right)\right\}}{-1-\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1+x_2}}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{1+\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1+x_2}}, \ \ x_1, x_2 > 0.$$

Taigi ribinis skirstinys perkėlimo teoremoje yra lygus

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_{N_n} < a_n + b_n x) = \Psi(x_1, x_2) = \frac{1}{1+\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1+x_2}}, x_1, x_2 > 0. \tag{2.11}$$

2.1.2.3. KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERČIO KONSTRAVIMAS

Taikydami perkėlimo teoremą, įvertinsime konvergavimo greitį (2.11) lygybėje. Remiantis (1.10) formule apskaičiuosime įvertį $\Delta_n(x)$. Pirmiausia randame

$$u_n(x) = n\left(\frac{1}{1+nx_1} + \frac{1}{1+nx_2} - \frac{1}{1+n(x_1+x_2)}\right), \tag{2.12}$$

$$v_n(x) = u_n(x) - \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1 + x_2},$$

$$\delta_n(x) = \exp\{-v_n(x)\},$$

o turint šiuos dydžius bei (2.7) lygybes, apskaičiuojame $\Delta_n(x)$:

$$\Delta_n(x) = \exp\left\{-\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1 + x_2}\right\}\left(r_{1,n}(x) + r_{2,n}(x) + r_{1,n}(x)r_{2,n}(x)\right).$$

Apskaičiuojame pirmąjį įverčio (2.4) narį. Turime:

$$\int_0^{\infty} z\left(\exp\left\{-n\left(\frac{1}{1+nx_1} + \frac{1}{1+nx_2} - \frac{1}{1+nx_1+nx_2}\right) + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1+x_2}\right\}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot \exp\left\{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1+x_2}\right\}\right)^{z-1} d\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{nz}\right) =$$

$$= \int_0^{\infty} z\left(\exp\left\{-n\left(\frac{1}{1+nx_1} + \frac{1}{1+nx_2} - \frac{1}{1+nx_1+nx_2}\right)\right\}\right)^{z-1} d\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{nz}\right) =$$

$$= -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \int_0^{\infty} z\left(\exp\left\{n\left(-\frac{1}{1+nx_1} - \frac{1}{1+nx_2} + \frac{1}{1+nx_1+nx_2}\right)\right\}\right)^{z-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{nz} dz =$$

$$= -\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{\exp\left\{n\left(-\frac{1}{1+nx_1} - \frac{1}{1+nx_2} + \frac{1}{1+nx_1+nx_2}\right)\right\}}\cdot$$

$$\cdot \int_0^{\infty} z\left(\exp\left\{n\left(-\frac{1}{1+nx_1} - \frac{1}{1+nx_2} + \frac{1}{1+nx_1+nx_2}\right)\right\}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)^z dz =$$

$$= -\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{\exp\left\{n\left(-\frac{1}{1+nx_1} - \frac{1}{1+nx_2} + \frac{1}{1+nx_1+nx_2}\right)\right\}}\cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\ln\left(\exp\left\{n\left(-\frac{1}{1+nx_1} - \frac{1}{1+nx_2} + \frac{1}{1+nx_1+nx_2}\right)\right\}\cdot\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)}\cdot$$

$$\cdot \int_0^{\infty} zd\left(\exp\left\{n\left(-\frac{1}{1+nx_1} - \frac{1}{1+nx_2} + \frac{1}{1+nx_1+nx_2}\right)\right\}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)^z =$$

$$= -\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\exp\left\{n\left(-\frac{1}{1+nx_1}-\frac{1}{1+nx_2}+\frac{1}{1+nx_1+nx_2}\right)\right\}}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\left(n\left(-\frac{1}{1+nx_1}-\frac{1}{1+nx_2}+\frac{1}{1+nx_1+nx_2}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^2}.$$

Kadangi

$$1 < -\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \leq \ln 4, \quad \text{kai } n\geq 2,$$

tai

$$\int_0^\infty z\left(\exp\left\{n(z-1)\left(-\frac{1}{1+nx_1}-\frac{1}{1+nx_2}+\frac{1}{1+nx_1+nx_2}\right)\right\}d\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)\right) \leq$$

$$\leq \frac{\ln 4}{\exp\left\{n\left(-\frac{1}{1+nx_1}-\frac{1}{1+nx_2}+\frac{1}{1+nx_1+nx_2}\right)\right\}\left(n\left(-\frac{1}{1+nx_1}-\frac{1}{1+nx_2}+\frac{1}{1+nx_1+nx_2}\right)-1\right)^2}. \quad \textbf{(2.13)}$$

Dabar apskaičiuosime ir įvertinsime antrąjį įverčio $\Delta_{N_n}(x)$ narį (2.4 formulė). Kadangi

$$\left|\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)-\left(1-e^{-z}\right)\right| \leq \frac{\sqrt{e}}{n}e^{-z}(1+z),$$

tai

$$\left|\int_0^\infty\left[\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)-\left(1-e^{-z}\right)\right]d\exp\left\{\left(-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1+x_2}\right)z\right\}\right| \leq \frac{\sqrt{e}}{n}\cdot$$

$$\cdot\int_0^\infty e^{-z}(1+z)d\exp\left\{\left(-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1+x_2}\right)z\right\}\Bigg| = \frac{\sqrt{e}}{n}\left|\left(-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1+x_2}\right)\cdot\right.$$

$$\cdot\int_0^\infty e^{-z}(1+z)\exp\left\{\left(-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1+x_2}\right)z\right\}dz\Bigg| = \frac{\sqrt{e}}{n}\left|\left(-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1+x_2}\right)\cdot\right.$$

$$\cdot\int_0^\infty (1+z)\exp\left\{\left(-1-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1+x_2}\right)z\right\}dz\Bigg| = \frac{\sqrt{e}}{n}\left|\frac{\left(-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1+x_2}\right)}{\left(-1-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1+x_2}\right)}\right|.$$

$$\cdot\int_0^\infty (1+z)d\exp\left\{z\left(\frac{1}{x_1+x_2}-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}-1\right)\right\}\Bigg| = \Bigg|\frac{\sqrt{e}}{n}\frac{x_1^2+x_2^2+x_1x_2}{x_1^2+x_2^2+x_1x_2(x_1+x_2+1)}(1+z)\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{z\left(\frac{1}{x_1+x_2}-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}-1\right)\right\}\Bigg|_0^\infty - \frac{\sqrt{e}}{n}\frac{x_1^2+x_2^2+x_1x_2}{x_1^2+x_2^2+x_1x_2(x_1+x_2+1)}\cdot$$

$$\cdot\int_0^\infty \exp\left\{z\left(-1-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1+x_2}\right)\right\}dz\Bigg| = \Bigg|-\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x_1^2+x_2^2+x_1x_2}{x_1^2+x_2^2+x_1x_2(x_1+x_2+1)}-$$

$$-\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x_1^2+x_2^2+x_1x_2}{x_1^2+x_2^2+x_1x_2(x_1+x_2+1)}\cdot\frac{\exp\left\{z\left(-1-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1+x_2}\right)\right\}}{\left(-1-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1+x_2}\right)}\Bigg|_0^\infty\Bigg| =$$

$$=\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x_1^2+x_2^2+x_1x_2}{x_1^2+x_2^2+x_1x_2(x_1+x_2+1)}\cdot\left(1+\frac{x_1x_2(x_1+x_2)}{x_1^2+x_2^2+x_1x_2(x_1+x_2+1)}\right).$$

Taigi

$$\left|\int_0^\infty\left[\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)-\left(1-e^{-z}\right)\right]d\exp\left\{\left(-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1+x_2}\right)z\right\}\right| \le$$
$$\le\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x_1^2+x_2^2+x_1x_2}{x_1^2+x_2^2+x_1x_2(x_1+x_2+1)}\cdot\left(1+\frac{x_1x_2(x_1+x_2)}{x_1^2+x_2^2+x_1x_2(x_1+x_2+1)}\right). \qquad \textbf{(2.14)}$$

Iš (2.11), (2.12), (2.13), (2.14) formulių gauname konvergavimo greičio įvertį:

$$\left|P(Z_{N_n} < a_n + b_n x) - \frac{1}{1+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1+x_2}}\right| \le$$
$$\le \Delta_n(x)\cdot\frac{\ln 4}{\exp\left\{n\left(-\frac{1}{1+nx_1}-\frac{1}{1+nx_2}+\frac{1}{1+nx_1+nx_2}\right)\right\}}\cdot \qquad \textbf{(2.15)}$$
$$\cdot\frac{1}{\left(n\left(-\frac{1}{1+nx_1}-\frac{1}{1+nx_2}+\frac{1}{1+nx_1+nx_2}\right)-1\right)^2}+\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot$$
$$\cdot\frac{x_1^2+x_2^2+x_1x_2}{x_1^2+x_2^2+x_1x_2(x_1+x_2+1)}\cdot\left(1+\frac{x_1x_2(x_1+x_2)}{x_1^2+x_2^2+x_1x_2(x_1+x_2+1)}\right).$$

Iš konvergavimo greičio įverčio išraiškos (2.15), galime nustatyti paklaidos eilę n atžvilgiu, kuri lygi $1/n$. Paklaidos priklausomybę nuo x_1 ir x_2 nustatysime atlikdami kompiuterinę analizę. Nagrinėjame keturis atvejus:

1) Kai n fiksuotas, o x_1 ir x_2 kinta;

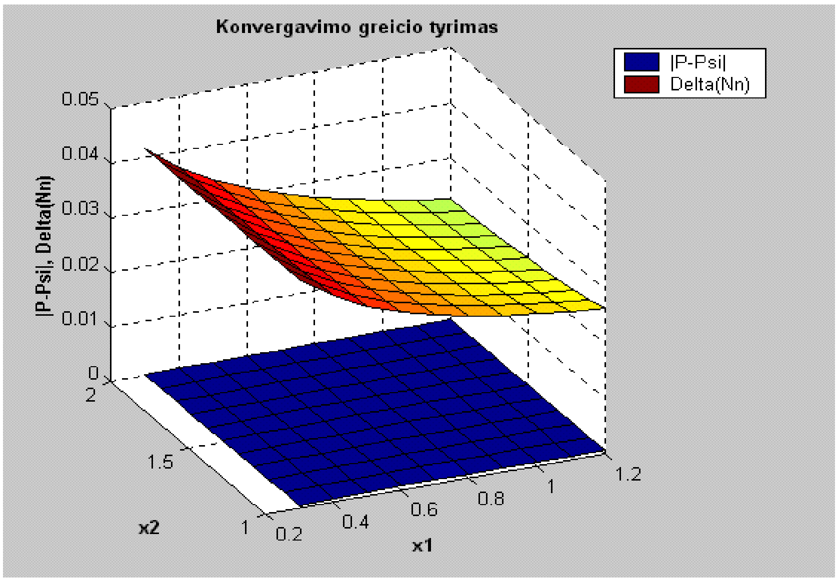
2) Kai n ir x_1 fiksuoti, o x_2 kinta;

3) Kai n ir x_2 fiksuoti, o x_1 kinta;

4) Kai x_1 ir x_2 fiksuoti, o n kinta.

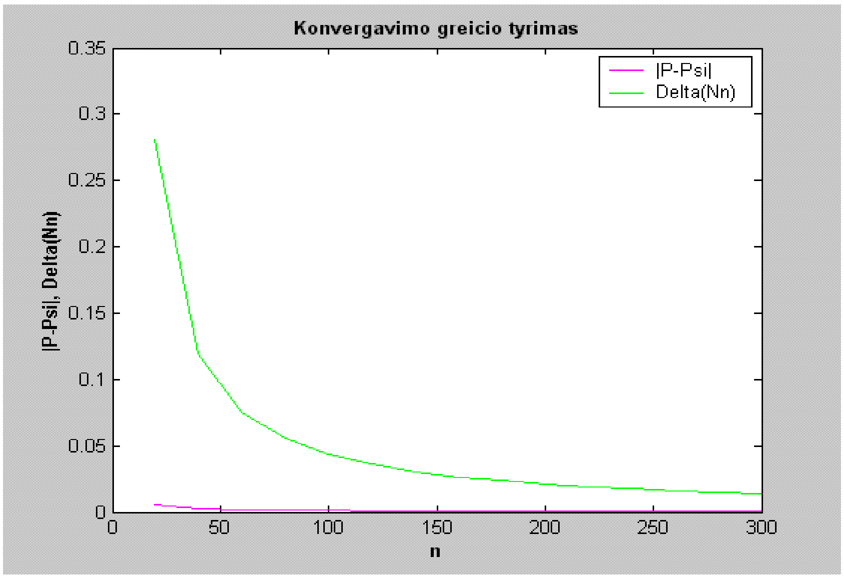
Kompiuterinės analizės rezultatus pateikiame 2.3 pav. ir 2.4 pav.

Paviršiaus tyrimo atveju, pasirenkame n=100, x_1 kinta intervale (0.3; 1.2), o x_2 kinta intervale (1;2). Grafinis rezultatas atrodo taip:



2.3 pav. Tiesiškai normuoto dvimačio Pareto skirstinio maksimumo įverčio paklaidos ir paklaidos kitimas, kai n fiksuotas

Paklaidos eilės įvertinimui tiriamas atvejis, kai x_1 ir x_2 fiksuoti, o n kinta. Tarkime, x_1=0.3, x_2=0.5, o n kinta nuo 20 iki 300 žingsniu 20. Šiuo atveju grafinis vaizdas atrodo taip:



2.4 pav. Tiesiškai normuoto dvimačio Pareto skirstinio maksimumo įverčio paklaidos ir paklaidos kitimas, kai x_1 ir x_2 fiksuoti

Matome, kad paklaidos eilė lygi $1/n$, kaip nustatėme iš konvergavimo įverčio išraiškos (2.15).

Iš pateikto 2.3 pav. matome, kad paklaidos reikšmė mažėja, kai x_1 ir x_2 didėja. Analogiškas rezultatas (t.y. kad paklaida mažėja) gaunamas ir tuo atveju, jei x_1 (arba x_2) būtų fiksuotas, o x_2 (arba x_1) didėtų. Šių atvejų paklaidos ir paklaidos įverčio kitimo grafikai pateikti 2 priede. Visi skaičiavimų rezultatai pateikti 1 priede lentelių pavidalu.

2.1.3. DVIMAČIAI ATSITIKTINIAI DYDŽIAI, TOLYGIAI PASISKIRSTĘ KVADRATE

Nagrinėsime dvimačius a.d., kurie tolygiai pasiskirstę kvadrate, t.y. pasiskirstymo funkcija lygi

$$F(x_1, x_2) = x_1 x_2, \quad 0 < x_1, x_2 < 1.$$

Vienmačiai marginalieji skirstiniai lygūs:

$$F_1(x_1) = \lim_{x_2 \to \infty} F(x_1, x_2) = x_1, \quad 0 < x_1 < 1,$$

$$F_2(x_2) = \lim_{x_1 \to \infty} F(x_1, x_2) = x_2, \quad 0 < x_2 < 1.$$

2.1.3.1. CENTRAVIMO IR NORMAVIMO VEKTORIŲ SEKŲ PARINKIMAS

Šiame uždavinyje $\omega(F_1) = 1, \omega(F_2) = 1,$ taigi centravimo ir normavimo vektorių sekas bei ribinio skirstinio funkciją rasime remdamiesi 1.2 teorema. Kadangi marginalieji skirstiniai sutampa, tai centravimo ir normavimo vektorių sekas bei ribinio skirstinio funkciją rasime bendru atveju.

Centravimo vektoriaus komponentės pagal 1.2 teoremą yra lygios

$$a_{n,i} = \omega(F), i = 1,2.$$

Taigi centravimo vektorius lygus $a_n = (1,1)$.

Normavimo vektoriaus b_n komponentės lygios

$$b_{n,i} = \omega(F) - \inf\left\{x : 1 - F_i(x_i) \le \frac{1}{n}\right\}, i = 1,2,$$

t.y. sprendžiame lygtį

$$1 - 1 + x_i = \frac{1}{n},$$

kurią išsprendę gauname

$$x_i = \frac{1}{n}.$$

Vadinasi, ieškoma normavimo vektorių seka lygi $b_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$.

2.1.3.2. RIBINIO SKIRSTINIO RADIMAS

Žinodami centravimo ir normavimo vektorių sekas, galime užrašyti

$$F(a_n + b_n x) = \left(1 + \frac{x_1}{n}\right)\left(1 + \frac{x_2}{n}\right), \qquad 0 < x_1, x_2 < 1.$$

Remiantis 1.2 teorema, ribinio skirstinio funkcija lygi

$$H(x_1, x_2) = \exp\{x_1 + x_2\}, \qquad x_1, x_2 < 0.$$

Ieškome ribinės skirstinio funkcijos perkėlimo teoremoje, remdamiesi (1.13) lygybe. Turime

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_0^\infty \exp\{(x_1 + x_2)z\} d\left(1 - e^{-z}\right) = \int_0^\infty \exp\{z(x_1 + x_2 - 1)\} dz =$$

$$= \frac{\exp\{z(x_1 + x_2 - 1)\}}{x_1 + x_2 - 1}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{1 - x_1 - x_2}, \qquad x_1, x_2 < 0.$$

Taigi ribinis skirstinys perkėlimo teoremoje lygus

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_{N_n} < a_n + b_n x) = \Psi(x_1, x_2) = \frac{1}{1 - x_1 - x_2}, \qquad x_1, x_2 < 0. \qquad \mathbf{(2.16)}$$

2.1.3.3. KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERČIO KONSTRAVIMAS

Taikydami perkėlimo teoremą, įvertinsime konvergavimo greitį (2.16) lygybėje. Remiantis (1.10) formule apskaičiuosime įvertį $\Delta_n(x)$. Pirmiausia randame

$$u_n(x) = -x_1 - x_2 - \frac{x_1 x_2}{n},$$

$$v_n(x) = -\frac{x_1 x_2}{n}, \qquad \mathbf{(2.17)}$$

$$\delta_n(x) = \exp\left\{\frac{x_1 x_2}{n}\right\},$$

o turint šiuos dydžius bei (2.7) lygybes, apskaičiuojame $\Delta_n(x)$:

$$\Delta_n(x) = \exp\{x_1 + x_2\}\left(r_{1,n}(x) + r_{2,n}(x) + r_{1,n}(x) r_{2,n}(x)\right).$$

Apskaičiuojame pirmąjį įverčio (2.4) narį. Turime:

$$\int_0^\infty z\left(\exp\left\{\frac{x_1 x_2}{n}\right\}\exp\{x_1 + x_2\}\right)^{z-1} d\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{nz}\right) = -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \int_0^\infty z \exp\left(\left\{\frac{x_1 x_2}{n} + x_1 + x_2\right\}(z-1)\right) \cdot$$

$$\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz} dz = -\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}}{\exp\left\{\frac{x_1x_2}{n}+x_1+x_2\right\}}\int_0^{\infty} z\left(\exp\left\{\frac{x_1x_2}{n}+x_1+x_2\right\}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{z} dz =$$

$$= -\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}}{\exp\left\{\frac{x_1x_2}{n}+x_1+x_2\right\}\ln\left(\exp\left\{\frac{x_1x_2}{n}+x_1+x_2\right\}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right)}\int_0^{\infty} z d\left(\exp\left\{\frac{x_1x_2}{n}+x_1+x_2\right\}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{z} =$$

$$= -\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}}{\exp\left\{\frac{x_1x_2}{n}+x_1+x_2\right\}\left(\frac{x_1x_2}{n}+x_1+x_2+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right)}\cdot z\left(\exp\left\{\frac{x_1x_2}{n}+x_1+x_2\right\}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{z}\Bigg|_0^{\infty}+$$

$$+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}}{\exp\left\{\frac{x_1x_2}{n}+x_1+x_2\right\}\left(\frac{x_1x_2}{n}+x_1+x_2+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right)}\int_0^{\infty}\left(\exp\left\{\frac{x_1x_2}{n}+x_1+x_2\right\}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{z} dz =$$

$$= \frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}}{\exp\left\{x_1+x_2+\frac{x_1x_2}{n}\right\}\left(x_1+x_2+\frac{x_1x_2}{n}+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right)\ln\left(\exp\left\{x_1+x_2+\frac{x_1x_2}{n}\right\}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right)}\cdot$$

$$\cdot\left(\exp\left\{x_1+x_2+\frac{x_1x_2}{n}\right\}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{z}\Bigg|_0^{\infty} = -\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}}{\exp\left\{x_1+x_2+\frac{x_1x_2}{n}\right\}\left(x_1+x_2+\frac{x_1x_2}{n}+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2}}.$$

Kadangi

$$1 < -\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} \le \ln 4, \quad \text{kai } n \ge 2,$$

tai

$$\int_0^{\infty} z\left(\exp\left\{\frac{x_1x_2}{n}\right\}\exp\{x_1+x_2\}\right)^{z-1} d\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right) \le \frac{\ln 4}{\exp\left\{x_1+x_2+\frac{x_1x_2}{n}\right\}\left(x_1+x_2+\frac{x_1x_2}{n}-1\right)^{2}}. \quad \mathbf{(2.18)}$$

Dabar apskaičiuosime ir įvertinsime antrąjį įverčio $\Delta_{N_n}(x)$ narį (2.4 formulė). Kadangi

$$\left|\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)-\left(1-e^{-z}\right)\right|\le\frac{\sqrt{e}}{n}e^{-z}(1+z),$$

tai turėsime

$$\left|\int_0^\infty\left[\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)-\left(1-e^{-z}\right)\right]d\exp\{z(x_1+x_2)\}\right|\le\frac{\sqrt{e}}{n}\left|\int_0^\infty e^{-z}(1+z)d\exp\{z(x_1+x_2)\}\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{e}}{n}\left|(x_1+x_2)\int_0^\infty e^{-z}(1+z)\exp\{z(x_1+x_2)\}dz\right|=\frac{\sqrt{e}}{n}\left|(x_1+x_2)\int_0^\infty(1+z)\exp\{z(x_1+x_2-1)\}dz\right|=$$

$$=\left|\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x_1+x_2}{x_1+x_2-1}\int_0^\infty(1+z)d\exp\{z(x_1+x_2-1)\}\right|=\left|\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x_1+x_2}{x_1+x_2-1}\cdot(1+z)\exp\{z(x_1+x_2-1)\}\Big|_0^\infty-\right.$$

$$\left.-\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x_1+x_2}{x_1+x_2-1}\int_0^\infty\exp\{z(x_1+x_2-1)\}d(z+1)\right|=\left|-\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x_1+x_2}{x_1+x_2-1}+\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x_1+x_2}{x_1+x_2-1}\cdot\frac{1}{x_1+x_2-1}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\exp\{z(x_1+x_2-1)\}\Big|_0^\infty\right|=\left|\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x_1+x_2}{1-x_1-x_2}-\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x_1+x_2}{(x_1+x_2-1)^2}\right|=\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x_1+x_2}{1-x_1-x_2}\left(1+\frac{1}{x_1+x_2-1}\right).$$

Taigi

$$\left|\int_0^\infty\left(\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)-\left(1-e^{-z}\right)\right)d\exp\{z(x_1+x_2)\}\right|\le\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x_1+x_2}{1-x_1-x_2}\left(1+\frac{1}{x_1+x_2-1}\right).\qquad\textbf{(2.19)}$$

Iš (2.16), (2.17), (2.18), (2.19) formulių gauname konvergavimo greičio įvertį:

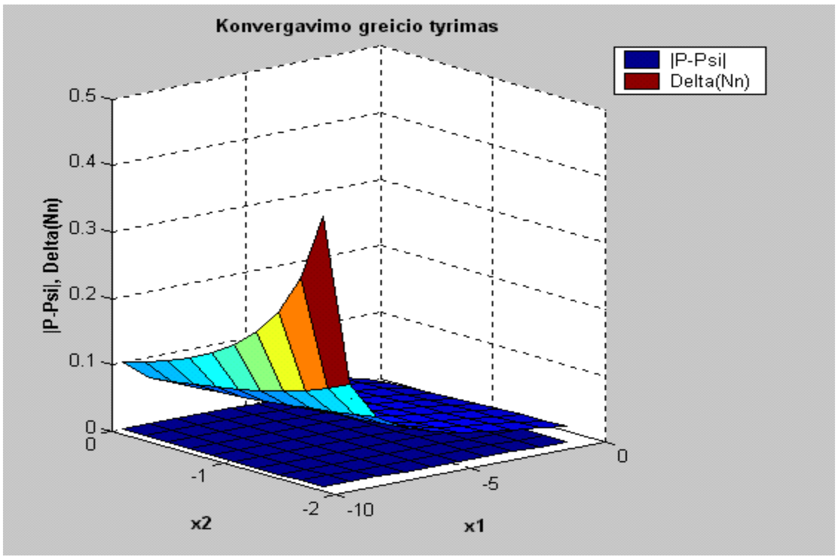
$$\left|P(Z_{N_n}<a_n+b_nx)-\frac{1}{1-x_1-x_2}\right|\le\Delta_n(x)\frac{\ln 4}{\exp\left\{x_1+x_2+\frac{x_1x_2}{n}\right\}\left(x_1+x_2+\frac{x_1x_2}{n}-1\right)^2}+$$
$$+\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x_1+x_2}{1-x_1-x_2}\left(1+\frac{1}{x_1+x_2-1}\right).\qquad\textbf{(2.20)}$$

Turėdami tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. konvergavimo greičio įvertį (2.20), atliekame konvergavimo greičio kompiuterinę analizę. Nagrinėjame keturis atvejus:

1) Kai n fiksuotas, o x_1 ir x_2 kinta;
2) Kai n ir x_1 fiksuoti, o x_2 kinta;
3) Kai n ir x_2 fiksuoti, o x_1 kinta;
4) Kai x_1 ir x_2 fiksuoti, o n kinta.

Kompiuterinės analizės rezultatus pateikiame 2.5 pav. ir 2.6 pav.

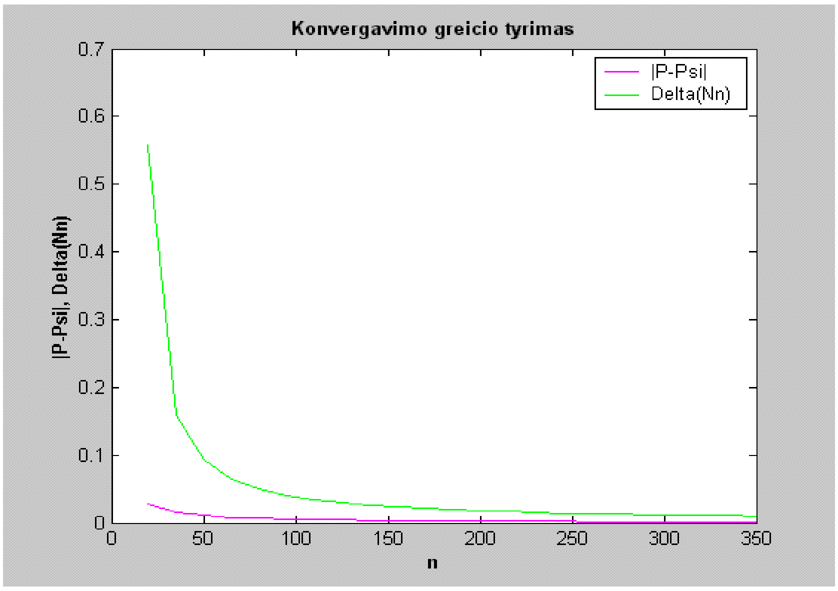
Paviršiaus tyrimo atveju pasirenkame n=500, x_1 kinta intervale (-10; -0.1), x_2 kinta intervale (-2; -0.5). Grafinis rezultatas atrodo taip:



2.5 pav. Tiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. maksimumo paklaidos ir paklaidos įverčio kitimas, kai n fiksuotas

Iš paveikslo matome, kad šiuo atveju paklaidos vienareikšmiškai prognozuoti negalime. Tam tikrame intervale paklaida mažėja, o tam tikrame - ji vėl didėja. Prie kitokių x_1 ir x_2 reikšmių galimi ir didesni paklaidos svyravimai. Tai yra dėl to, kad konvergavimo greičio įvertis yra netolygus, t.y. priklausantis nuo x_1 ir x_2 įgyjamų reikšmių. Skaičiavimų rezultatai lentelių pavidalu pateikti 1 priede.

Paklaidos eilės įvertinimui tiriame atvejį, kai x_1 ir x_2 fiksuoti, o n kinta tam tikrame intervale. Tarkime, x_1=-2, x_2=-3, o n kinta nuo 20 iki 350 žingsniu 15. Šiuo atveju grafinis vaizdas atrodo taip:



2.6 pav. Tiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. maksimumo paklaidos ir paklaidos įverčio kitimas, kai x_1 ir x_2 fiksuoti

Matome, kad paklaidos eilė lygi $1/n$, tai buvo galima nustatyti iš konvergavimo įverčio išraiškos (2.20). Visi skaičiavimų rezultatai pateikti 1 priede lentelių pavidalu. Pjūvių paklaidos ir paklaidos įverčio kitimo grafikai pateikti 2 priede.

2.2. DVIMAČIŲ MINIMUMŲ SKIRSTINIŲ KONVERGAVIMO GREIČIO TYRIMAS

2.2.1. DVIMAČIAI ATSITIKTINIAI DYDŽIAI, TOLYGIAI PASISKIRSTĘ KVADRATE

Nagrinėsime dvimačius a.d., kurie tolygiai pasiskirstę kvadrate, t.y. pasiskirstymo funkcija lygi

$$F(x_1,x_2)=x_1x_2, \quad 0<x_1,x_2<1.$$

Vienmačiai marginalieji skirstiniai lygūs:

$$F_1(x_1)=\lim_{x_2\to\infty}F(x_1,x_2)=x_1, \quad 0<x_1<1,$$

$$F_2(x_2)=\lim_{x_1\to\infty}F(x_1,x_2)=x_2, \quad 0<x_2<1.$$

2.2.1.1. CENTRAVIMO IR NORMAVIMO VEKTORIŲ SEKŲ PARINKIMAS

Šiame uždavinyje $\alpha(F_1)=0, \alpha(F_2)=0,$ taigi centravimo ir normavimo vektorių sekas bei ribinio skirstinio funkciją rasime remdamiesi 1.7 teorema. Kadangi marginalieji skirstiniai sutampa, tai centravimo ir normavimo vektorių sekas bei ribinio skirstinio funkciją rasime bendru atveju.

Sudarome funkciją $F^*(x)=F\left(-\frac{1}{x}\right)$, $x<0$, kuriai egzistuoja teigiama konstanta *α*, kad visiems *x*>0 tenkinama (1.6) sąlyga, t.y. egzistuoja riba

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{-\frac{1}{tx}}{-\frac{1}{t}}=\lim_{t\to-\infty}\frac{t}{tx}=x^{-1}.$$

Taigi konstanta *α*=1>0. Analogiškai apskaičiuotume ribą su antruoju marginaliuoju skirstiniu ir gautume tą patį atsakymą.

Centravimo vektoriaus komponentės pagal 1.7 teoremą yra lygios

$$c_{n,i}=\alpha(F_i), i=1,2.$$

Taigi centravimo vektorius lygus c_n = (0,0).

Normavimo vektoriaus d_n komponentės lygios

$$d_{n,i}=\sup\{x:F_i(x_i)\le 1/n\}-\alpha(F_i),\ i=1,2,$$

t.y. sprendžiame lygtį

$$1-\frac{1}{1+x_i}=\frac{1}{n},$$

kurią išsprendę gauname

$$x_i = \frac{1}{n-1}.$$

Vadinasi, ieškoma normavimo vektorių seka lygi $d_n = \left[\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-1}\right]$.

Pažymėsime, kad c_n^*, d_n^* taip pat yra centravimo ir normavimo vektorių sekos, jei

$$\frac{d_n}{d_n^*} \to 1, \qquad \frac{c_n - c_n^*}{d_n} \to 0. \tag{2.21}$$

Todėl galime laikyti, kad $d_n = \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$, kadangi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

2.2.1.2. RIBINIO SKIRSTINIO RADIMAS

Žinodami centravimo ir normavimo vektorių sekas, galime užrašyti

$$F(c_n + d_n x) = \frac{x_1}{n} \cdot \frac{x_2}{n}, \qquad 0 < x_1, x_2 < 1.$$

Tada

$$P(W_n < c_n + d_n x) = 1 - \left(1 - \frac{x_1}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{x_2}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{x_1}{n} - \frac{x_2}{n} + \frac{x_1}{n} \cdot \frac{x_2}{n}\right)^n, 0 < x_1, x_2 < 1.$$

Šiuo atveju ribinio skirstinio funkcija lygi

$$L(x_1, x_2) = \lim_{n\to\infty} P(W_n < c_n + d_n x) = 1 - e^{-x_1} - e^{-x_2} + e^{-x_1 - x_2},\ x_1, x_2 > 0.$$

Ieškome ribinės skirstinio funkcijos perkėlimo teoremoje, remdamiesi (1.16) lygybe. Turime

$$\Phi(x_1, x_2) = 1 - \int_0^\infty e^{-x_1 z} d\left(1 - e^{-z}\right) - \int_0^\infty e^{-x_2 z} d\left(1 - e^{-z}\right) + \int_0^\infty e^{-(x_2 + x_2) z} d\left(1 - e^{-z}\right) =$$

$$= 1 - \int_0^\infty e^{-z(x_1+1)} dz - \int_0^\infty e^{-z(x_2+1)} dz + \int_0^\infty e^{-z(x_1+x_2+1)} dz = 1 - \frac{1}{1+x_1} - \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_1+x_2},\ x_1, x_2 > 0.$$

Taigi

$$\lim_{n\to\infty} P(W_{N_n} < c_n + d_n x) = \Phi(x_1, x_2) = 1 - \frac{1}{1+x_1} - \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_1+x_2},\ x_1, x_2 > 0. \tag{2.22}$$

2.2.1.3. KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERČIO KONSTRAVIMAS

Taikydami 1.15 teoremą, įvertinsime konvergavimo greitį (2.22) lygybėje. Patogumo dėlei (1.23) formulėje įvesime pažymėjimus, kuriuos naudosime tolimesniuose skaičiavimuose:

$$\underbrace{\left|P(W_{N_n} < c_n + d_n x) - \Phi(x_1, x_2)\right|}_{tiksli\ reikšmė} \le \underbrace{\Delta_{N_n}}_{įvertis} = \Delta_{1,N_n} + \Delta_{2,N_n} + \Delta_{3,N_n}. \qquad \mathbf{(2.23)}$$

Tikslios konvergavimo įverčio reikšmės turinys skaičiuojamas šitaip:

$$\begin{aligned}
&P(W_{N_n} < c_n + d_n x) = \sum_{j=1}^{\infty} P(N_n = j) P(W_j < c_n + d_n x) = \\
&= 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{j-1} \left(1 - F_1(c_n + d_n x_1)\right)^j - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{j-1} \left(1 - F_2(c_n + d_n x_2)\right)^j + \\
&+ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{j-1} \left(\overline{F}(c_n + d_n x)\right)^j = 1 - \frac{1 - F_1(c_n + d_n x_1)}{1 + (n-1)F_1(c_n + d_n x_1)} - \\
&- \frac{1 - F_2(c_n + d_n x_2)}{1 + (n-1)F_2(c_n + d_n x_2)} + \frac{\overline{F}(c_n + d_n x)}{1 + (n-1)\left(1 - \overline{F}(c_n + d_n x)\right)}.
\end{aligned} \qquad \mathbf{(2.24)}$$

Remiantis (1.24) formule, apskaičiuosime įvertį Δ_{1,N_n}, pažymėdami, kad analogiškai apskaičiuotume Δ_{2,N_n}. Pirmiausia randame

$$\begin{aligned}
&u_{1,n}(x_1) = x_1, \\
&t_{1,n}(x_1) = 0, \\
&\delta_{1,n}(x_1) = 1,
\end{aligned} \qquad \mathbf{(2.25)}$$

o turėdami šiuos dydžius apskaičiuojame $\Delta_1'(x_1)$:

$$\begin{aligned}
&r_{1,1,n}(x_1) = \frac{2x_1^2}{n} + \frac{2x_1^4}{n^2} \cdot \frac{1}{1 - q_1}, \\
&r_{2,1,n}(x) = 0, \\
&q_1 = \frac{2x_1^2}{3n}, \\
&\Delta_1'(x_1) = e^{-x_1} r_{1,1,n}(x_1).
\end{aligned} \qquad \mathbf{(2.26)}$$

Apskaičiuojame pirmąjį įverčio Δ_{1,N_n} narį (1.24 formulė). Turime:

$$\int_0^{\infty} z\left(e^{-x_1}\right)^{z-1} d\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{nz}\right) = -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \int_0^{\infty} z e^{-x_1(z-1)} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{nz} dz =$$

$$=-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-x_1}}\int_0^\infty z\left(e^{-x_1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z dz=-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-x_1}\ln\left(e^{-x_1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)}\int_0^\infty zd\left(e^{-x_1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z=$$

$$=\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-x_1}\left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-x_1\right)}\int_0^\infty\left(e^{-x_1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z dz=\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-x_1}\left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-x_1\right)^2}\left(e^{-x_1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z\Bigg|_0^\infty=$$

$$=-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-x_1}\left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-x_1\right)^2}.$$

Kadangi

$$1<-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\leq\ln 4,\quad \text{kai } n\geq 2,$$

tai

$$\int_0^\infty ze^{-x_1(z-1)}d\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)\leq\frac{\ln 4}{e^{-x_1}\left(1+x_1\right)^2}. \tag{2.27}$$

Dabar apskaičiuosime ir įvertinsime antrąjį įverčio Δ_{1,N_n} narį (1.24 formulė). Kadangi

$$\left|\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)-\left(1-e^{-z}\right)\right|\leq\frac{\sqrt{e}}{n}e^{-z}\left(1+z\right),$$

tai

$$\left|\int_0^\infty\left[\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)-\left(1-e^{-z}\right)\right]de^{-x_1z}\right|\leq\frac{\sqrt{e}}{n}\left|\int_0^\infty e^{-z}(1+z)de^{-x_1z}\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{e}}{n}\left|(-x_1)\int_0^\infty e^{-z(1+x_1)}(1+z)dz\right|=\frac{\sqrt{e}}{n}\left|\frac{x_1}{1+x_1}\int_0^\infty(1+z)de^{-z(1+x_1)}\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{e}}{n}\left|\frac{x_1}{1+x_1}\left((1+z)e^{-z(1+x_1)}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty e^{-z(1+x_1)}d(1+z)\right)\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{e}}{n}\left|\frac{x_1}{1+x_1}\left(-1+\frac{e^{-z(1+x_1)}}{1+x_1}\Bigg|_0^\infty\right)\right|=\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x_1}{1+x_1}\left(1+\frac{1}{1+x_1}\right).$$

Taigi

$$\left|\int_0^\infty \left(\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)-\left(1-e^{-z}\right)\right)de^{-x_1 z}\right| \le \frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x_1}{1+x_1}\left(1+\frac{1}{1+x_1}\right). \qquad \textbf{(2.28)}$$

Iš (2.24), (2.25), (2.26), (2.27), (2.28) formulių gauname konvergavimo greičio įverčio narį Δ_{1,N_n}:

$$\Delta_{1,N_n} = e^{-x_1}\left(\frac{2x_1^2}{n}+\frac{2x_1^4}{n^2}\cdot\frac{1}{1-q_1}\right)\cdot\frac{\ln 4}{e^{-x_1}\left(1+x_1\right)^2}+\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x_1}{1+x_1}\left(1+\frac{1}{1+x_1}\right). \qquad \textbf{(2.29)}$$

Analogiškai gauname konvergavimo greičio įverčio narį Δ_{2,N_n}:

$$\Delta_{2,N_n} = e^{-x_2}\left(\frac{2x_2^2}{n}+\frac{2x_2^4}{n^2}\cdot\frac{1}{1-q_2}\right)\cdot\frac{\ln 4}{e^{-x_2}\left(1+x_2\right)^2}+\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x_2}{1+x_2}\left(1+\frac{1}{1+x_2}\right). \qquad \textbf{(2.30)}$$

Apskaičiuojame Δ_{3,N_n}. Pirmiausia randame

$$\begin{aligned} &u_n(x_1,x_2) = x_1 + x_2 - \frac{x_1x_2}{n}, \\ &t_n(x_1,x_2) = u_n(x_1,x_2) - x_1 - x_2 = \frac{x_1x_2}{n}, \qquad \textbf{(2.31)} \\ &\delta_n(x_1,x_2) = \max\left(1, e^{-t_n(x_1,x_2)}\right) = e^{-t_n(x_1,x_2)} = \exp\left\{-u_n(x_1,x_2)+x_1+x_2\right\}, \end{aligned}$$

o turėdami šiuos dydžius apskaičiuojame $\Delta_3'(x_1,x_2)$:

$$\Delta_3'(x_1,x_2) = e^{-x_1-x_2}\left(R_{1,n}(x_1,x_2)+R_{2,n}(x_1,x_2)+R_{1,n}(x_1,x_2)R_{2,n}(x_1,x_2)\right), \qquad \textbf{(2.32)}$$

čia $R_{1,n}(x_1,x_2)$, $R_{2,n}(x_1,x_2)$ apskaičiuojami pagal (1.26) formules.

Apskaičiuojame pirmąjį įverčio Δ_{3,N_n} narį (1.24 formulė). Turime:

$$\int_0^\infty z\exp\left\{\left(-u_n(x_1,x_2)+x_1+x_2-x_1-x_2\right)(z-1)\right\}d\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)=$$

$$=\int_0^\infty z\exp\left\{-u_n(x_1,x_2)(z-1)\right\}d\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)=-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\int_0^\infty ze^{-u_n(x_1,x_2)(z-1)}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}dz=$$

$$=-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-u_n(x_1,x_2)}}\int_0^\infty z\left(e^{-u_n(x_1,x_2)}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z dz=-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-u_n(x_1,x_2)}\ln\left(e^{-u_n(x_1,x_2)}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)}\cdot$$

$$\cdot\int_0^\infty zd\left(e^{-u_n(x_1,x_2)}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z=\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-u_n(x_1,x_2)}\left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-u_n(x_1,x_2)\right)}.$$

$$\cdot\int_0^\infty\left(e^{-u_n(x_1,x_2)}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z dz=\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-u_n(x_1,x_2)}\left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-u_n(x_1,x_2)\right)^2}\cdot$$

$$\cdot\left(e^{-u_n(x_1,x_2)}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z\Bigg|_0^\infty=-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-u_n(x_1,x_2)}\left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-u_n(x_1,x_2)\right)^2}.$$

Kadangi

$$1<-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\le\ln 4,\quad \text{kai } n\geq 2,$$

tai

$$\int_0^\infty ze^{-u_n(x_1,x_2)(z-1)}d\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)\le\frac{\ln 4}{e^{-u_n(x_1,x_2)}\left(1+u_n(x_1,x_2)\right)^2}. \qquad \textbf{(2.33)}$$

Antrasis įverčio Δ_{3,N_n} narys apskaičiuojamas kaip ir Δ_{1,N_n} antrasis narys, tad galiausiai iš (2.31), (2.32), (2.33) gaunamas konvergavimo greičio įverčio narys Δ_{3,N_n} :

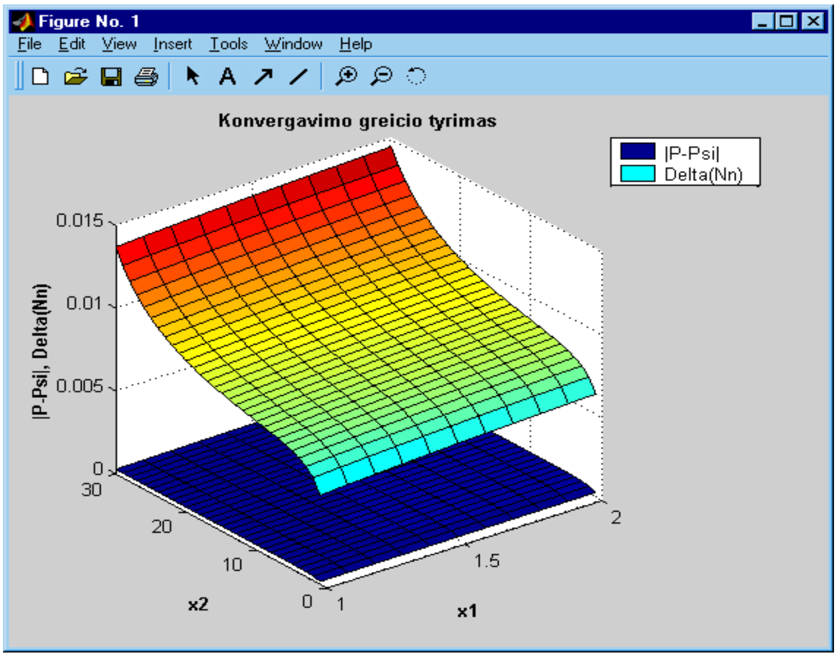
$$\Delta_{3,N_n}=e^{-x_1-x_2}\left(R_{1,n}(x_1,x_2)+R_{2,n}(x_1,x_2)+R_{1,n}(x_1,x_2)R_{2,n}(x_1,x_2)\right)\cdot$$
$$\cdot\frac{\ln 4}{e^{-u_n(x_1,x_2)}\left(1-u_n(x_1,x_2)\right)^2}+\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x_1+x_2}{1+x_1+x_2}\left(1+\frac{1}{1+x_1+x_2}\right). \qquad \textbf{(2.34)}$$

Turėdami Δ_{1,N_n} , Δ_{2,N_n} ir Δ_{3,N_n} , gauname tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. konvergavimo greičio įvertį (2.23) minimumų atveju, atliekame konvergavimo greičio kompiuterinę analizę. Nagrinėjame keturis atvejus:

1) Kai n fiksuotas, o x_1 ir x_2 kinta;
2) Kai n ir x_1 fiksuoti, o x_2 kinta;
3) Kai n ir x_2 fiksuoti, o x_1 kinta;
4) Kai x_1 ir x_2 fiksuoti, o n kinta.

Kompiuterinės analizės rezultatus pateikiame 2.7 pav. ir 2.8 pav.

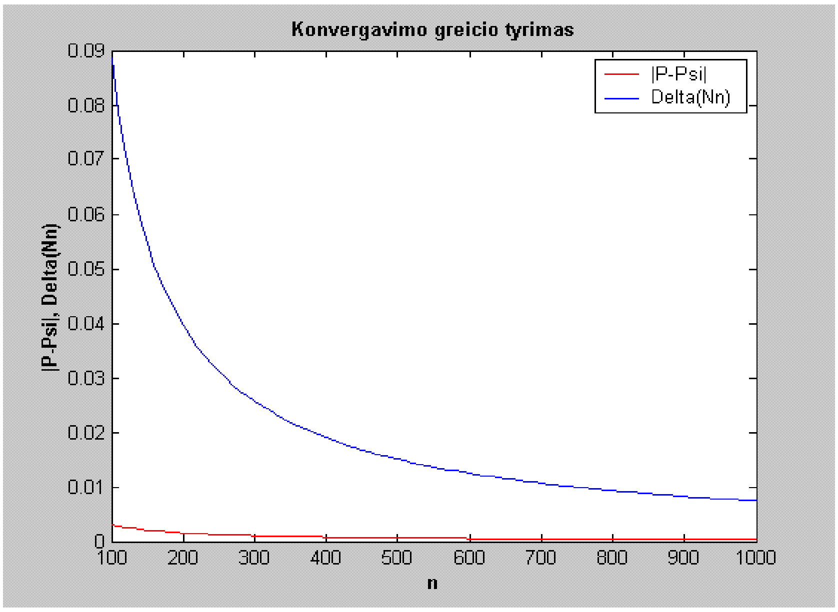
Paviršiaus tyrimo atveju pasirenkame n=1000, x_1 kinta intervale (1;2), o x_2 kinta intervale (1;31). Grafinis rezultatas atrodo taip:



2.7 pav. Tiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. minimumo paklaidos ir paklaidos įverčio kitimas, kai n fiksuotas

Iš paveikslo matome, kad šiuo atveju paklaida mažėja kai x_1 ir (arba) x_2 mažėja. Skaičiavimų rezultatai lentelių pavidalu pateikti 1 priede.

Paklaidos eilės įvertinimui tiriame atvejį, kai x_1 ir x_2 fiksuoti, o n kinta tam tikrame intervale. Tarkime, x_1=1, x_2=7, o n kinta nuo 100 iki 1000 žingsniu 50. Šiuo atveju grafinis vaizdas atrodo taip:



2.8 pav. Tiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. minimumo paklaidos ir paklaidos įverčio kitimas, kai x_1 ir x_2 fiksuoti

Matome, kad paklaidos eilė lygi $1/n$. Skaičiavimų rezultatai pateikti 1 priede lentelių pavidalu.

Pjūvių analizės rezultatai pateikti prieduose, t.y. skaičiavimų rezultatai lentelių pavidalu yra 1 priede, o paklaidos ir paklaidos įverčio kitimo grafikai yra 2 priede.

2.2.2. DVIMATIS EKSPONENTINIS SKIRSTINYS

Nagrinėsime a.d., kurie turi dvimatį eksponentinį skirstinį, t.y. pasiskirstymo funkcija lygi

$$F(x_1,x_2)=\left(1-e^{-\lambda_1 x_1}\right)\left(1-e^{-\lambda_2 x_2}\right),\ x_1,x_2>0,\lambda_1,\lambda_2>0.$$

Vienmačiai marginalieji skirstiniai lygūs:

$$F_1(x_1)=\lim_{x_2\to\infty}F(x_1,x_2)=\left(1-e^{-\lambda_1 x_1}\right),\ x_1>0,\lambda_1>0,$$

$$F_2(x_2)=\lim_{x_1\to\infty}F(x_1,x_2)=\left(1-e^{-\lambda_2 x_2}\right),\ x_2>0,\lambda_2>0.$$

Tarkime, kad $\lambda_1=\lambda_2=1$.

2.2.2.1. CENTRAVIMO IR NORMAVIMO VEKTORIŲ SEKŲ PARINKIMAS

Šiame uždavinyje $\alpha(F_1)=0,\alpha(F_2)=0$, taigi centravimo ir normavimo vektorių sekas bei ribinio skirstinio funkciją rasime remdamiesi 1.7 teorema. Kadangi marginalieji skirstiniai sutampa, tai centravimo ir normavimo vektorių sekas bei ribinio skirstinio funkciją rasime bendru atveju.

Sudarome funkciją $F^*(x)=F\left(-\frac{1}{x}\right),\ x<0$, kuriai egzistuoja teigiama konstanta *α*, kad visiems x>0 tenkinama (1.6) sąlyga, t.y. egzistuoja riba

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{1-e^{(tx)^{-1}}}{1-e^{t^{-1}}}=\lim_{t\to-\infty}\frac{(tx)^{-1}}{t^{-1}}=x^{-1}.$$

Taigi konstanta α=1>0. Analogiškai apskaičiuotume ribą su antruoju marginaliuoju skirstiniu ir gautume tą patį atsakymą.

Centravimo vektoriaus komponentės pagal 1.7 teoremą yra lygios

$$c_{n,i}=\alpha(F_i),i=1,2.$$

Taigi centravimo vektorius lygus c_n = (0,0).

Normavimo vektoriaus d_n komponentės lygios

$$d_{n,i}=\sup\{x:F_i(x_i)\le 1/n\}-\alpha(F_i),\ i=1,2,$$

t.y. sprendžiame lygtį

$$1-e^{-x}=\frac{1}{n},$$

kurią išsprendę gauname

$$x=-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Taigi ieškoma normavimo vektorių seka būtų $d_n = \left[-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right), -\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$.

Kadangi

$$\ln(1 \pm x) \sim \pm x, \ kai \ x \to 0,$$

tai galime laikyti, kad $d_n = \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$, nes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty} \ln e = 1 \quad \text{ir} \quad \frac{1}{n} \to 0, \ kai \ \ n \to \infty.$$

2.2.2.2. RIBINIO SKIRSTINIO RADIMAS

Žinodami centravimo ir normavimo vektorių sekas, galime užrašyti

$$F(c_n + d_n x) = \left(1 - e^{-\frac{x_1}{n}}\right)\left(1 - e^{-\frac{x_2}{n}}\right), \ x_1, x_2 > 0.$$

Tada

$$P(W_n < c_n + d_n x) = 1 - \left(1 - 1 + e^{-\frac{x_1}{n}}\right)^n - \left(1 - 1 + e^{-\frac{x_2}{n}}\right)^n +$$

$$+\left(1 - 1 + e^{-\frac{x_1}{n}} - 1 + e^{-\frac{x_1}{n}} + 1 - e^{-\frac{x_1}{n}} - e^{-\frac{x_1}{n}} + e^{-\frac{x_1}{n}-\frac{x_2}{n}}\right)^n = 1 - e^{-x_1} - e^{-x_2} + e^{-x_1-x_2}, \ x_1, x_2 > 0.$$

Šiuo atveju ribinio skirstinio funkcija lygi

$$L(x_1, x_2) = P(W_n < c_n + d_n x) = 1 - e^{-x_1} - e^{-x_2} + e^{-x_1-x_2}, \ x_1, x_2 > 0.$$

Ieškome ribinės skirstinio funkcijos perkėlimo teoremoje, remdamiesi (1.16) lygybe. Turime

$$\Phi(x_1, x_2) = 1 - \int_0^\infty e^{-x_1 z} d\left(1 - e^{-z}\right) - \int_0^\infty e^{-x_2 z} d\left(1 - e^{-z}\right) + \int_0^\infty e^{-(x_2 + x_2)z} d\left(1 - e^{-z}\right) =$$

$$= 1 - \int_0^\infty e^{-z(x_1+1)} dz - \int_0^\infty e^{-z(x_2+1)} dz + \int_0^\infty e^{-z(x_1+x_2+1)} dz = 1 - \frac{1}{1+x_1} - \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_1+x_2}, \ x_1, x_2 > 0.$$

Taigi

$$\lim_{n\to\infty} P(W_{N_n} < c_n + d_n x) = \Phi(x_1, x_2) = 1 - \frac{1}{1+x_1} - \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_1+x_2}, \ \ x_1, x_2 > 0. \qquad \textbf{(2.35)}$$

2.2.2.3. KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERČIO KONSTRAVIMAS

Taikydami 1.15 teoremą, įvertinsime konvergavimo greitį (2.35) lygybėje. Kadangi

$$L(x_1,x_2)=P\left(W_n<c_n+d_nx\right)=1-e^{-x_1}-e^{-x_2}+e^{-x_1-x_2},\ x_1,x_2>0,$$

t.y.

$$\left|P\left(W_n<c_n+d_nx\right)-L\left(x_1,x_2\right)\right|=0,\ \ \forall n,$$

tai konvergavimo greičio išraiška supaprastėja, t.y.

$$\left|P(W_{N_n}<c_n+d_nx)-\Phi(x_1,x_2)\right|\le\Delta_{N_n}=\Delta_1(x_1)+\Delta_2(x_2)+\Delta_3(x_1,x_2),$$

kur

$$\Delta_1(x_1)=\left|\int_0^\infty(A_n(nz)-A(z))d\left(1-L_1(x_1)\right)^z\right|,$$

$$\Delta_2(x_2)=\left|\int_0^\infty(A_n(nz)-A(z))d\left(1-L_2(x_2)\right)^z\right|,$$

$$\Delta_3(x_1,x_2)=\left|\int_0^\infty(A_n(nz)-A(z))d\left(\overline{L}(x_1,x_2)\right)^z\right|.$$

Randame $\Delta_1(x_1)$ narį. Kadangi

$$\left|\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)-\left(1-e^{-z}\right)\right|\le\frac{\sqrt{e}}{n}e^{-z}\left(1+z\right),$$

tai turėsime

$$\left|\int_0^\infty\left[\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)-\left(1-e^{-z}\right)\right]de^{-x_1z}\right|\le\frac{\sqrt{e}}{n}\left|\int_0^\infty e^{-z}(1+z)de^{-x_1z}\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{e}}{n}\left|(-x_1)\int_0^\infty e^{-z(1+x_1)}(1+z)dz\right|=\frac{\sqrt{e}}{n}\left|\frac{x_1}{1+x_1}\int_0^\infty(1+z)de^{-z(1+x_1)}\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{e}}{n}\left|\frac{x_1}{1+x_1}(1+z)e^{-z(1+x_1)}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty e^{-z(1+x_1)}dz\right|=\frac{\sqrt{e}}{n}\left|\frac{x_1}{1+x_1}\left(-1+\frac{e^{-z(1+x_1)}}{1+x_1}\Big|_0^\infty\right)\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x_1}{1+x_1}\left(1+\frac{1}{1+x_1}\right).$$

Taigi

$$\Delta_1(x_1)\le\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x_1}{1+x_1}\left(1+\frac{1}{1+x_1}\right).\tag{2.36}$$

Analogiškai randamami $\Delta_2(x_2)$, $\Delta_3(x_1,x_2)$ nariai, t.y. turime

$$\Delta_2(x_2) \le \frac{\sqrt{e}}{n} \cdot \frac{x_2}{1+x_2}\left(1+\frac{1}{1+x_2}\right). \tag{2.37}$$

$$\Delta_3(x_1,x_2) \le \frac{\sqrt{e}}{n} \cdot \frac{x_1+x_2}{1+x_1+x_2}\left(1+\frac{1}{1+x_1+x_2}\right). \tag{2.38}$$

Vadinasi, konvergavimo greitis (2.35) lygybėje yra lygus

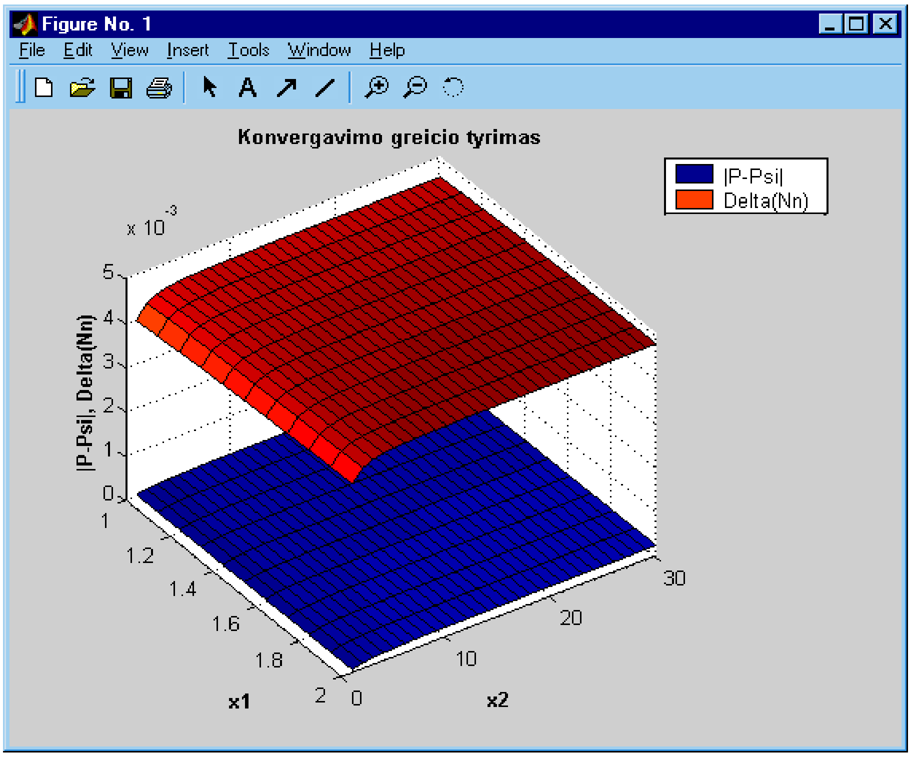
$$\begin{aligned}\left|P(W_{N_n} < c_n + d_n x) - \Phi(x_1,x_2)\right| \le \Delta_{N_n} &= \frac{\sqrt{e}}{n} \cdot \frac{x_1}{1+x_1}\left(1+\frac{1}{1+x_1}\right) + \\ &+ \frac{\sqrt{e}}{n} \cdot \frac{x_2}{1+x_2}\left(1+\frac{1}{1+x_2}\right) + \frac{\sqrt{e}}{n} \cdot \frac{x_1+x_2}{1+x_1+x_2}\left(1+\frac{1}{1+x_1+x_2}\right).\end{aligned} \tag{2.39}$$

Turėdami dvimačių eksponentinių a.d. minimumo konvergavimo greičio įvertį (2.39), atliekame konvergavimo greičio kompiuterinę analizę. Nagrinėjame keturis atvejus:

1) Kai n fiksuotas, o x_1 ir x_2 kinta;
2) Kai n ir x_1 fiksuoti, o x_2 kinta;
3) Kai n ir x_2 fiksuoti, o x_1 kinta;
4) Kai x_1 ir x_2 fiksuoti, o n kinta.

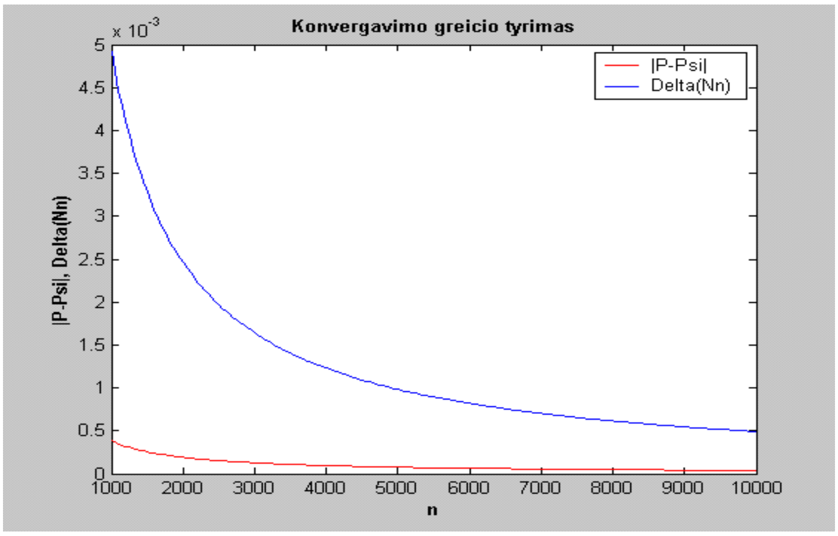
Kompiuterinės analizės rezultatus pateikiame 2.9 pav. ir 2.10 pav.

Paviršiaus tyrimo atveju pasirenkame n=1000, x_1 kinta intervale (1; 2), o x_2 kinta intervale (1; 30). Grafinis rezultatas atrodo taip:



2.9 pav. Tiesiškai normuoto dvimačio eksponentinio minimumo paklaidos ir paklaidos įverčio kitimas, kai n fiksuotas

Paklaidos eilės įvertinimui tiriame atvejį, kai x_1 ir x_2 fiksuoti, o n kinta tam tikrame intervale. Tarkime, x_1=9, x_2=15, o n kinta nuo 1000 iki 10000 žingsniu 500. Šiuo atveju grafinis vaizdas atrodo taip:



2.10 pav. Tiesiškai normuoto dvimačio eksponentinio minimumo paklaidos ir paklaidos įverčio kitimas, kai x_1 ir x_2 fiksuoti

Matome, kad paklaidos eilė lygi $1/n$. Skaičiavimų rezultatai pateikti 1 priede lentelių pavidalu.

Pjūvių analizės rezultatai pateikti prieduose, t.y. skaičiavimų rezultatai lentelių pavidalu yra 1 priede, o paklaidos ir paklaidos įverčio kitimo grafikai yra 2 priede.

2.2.3. DVIMATIS LOGISTINIS SKIRSTINYS

Nagrinėsime a.d., kurie turi dvimatį logistinį skirstinį, t.y. pasiskirstymo funkcija lygi

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{1+e^{-x_1}+e^{-x_2}}, \quad x_1, x_2 \in R.$$

Vienmačiai marginalieji skirstiniai lygūs:

$$F_1(x_1) = \lim_{x_2 \to \infty} F(x_1, x_2) = \frac{1}{1+e^{-x_1}}, \quad x_1 \in R,$$

$$F_2(x_2) = \lim_{x_1 \to \infty} F(x_1, x_2) = \frac{1}{1+e^{-x_2}}, \quad x_2 \in R.$$

2.2.3.1. CENTRAVIMO IR NORMAVIMO VEKTORIŲ SEKŲ PARINKIMAS

Šiame uždavinyje $\alpha(F_1) = -\infty, \alpha(F_2) = -\infty,$ taigi centravimo ir normavimo vektorių sekas bei ribinio skirstinio funkciją rasime remdamiesi 1.8 teorema. Kadangi marginalieji skirstiniai sutampa, tai centravimo ir normavimo vektorių sekas bei ribinio skirstinio funkciją rasime bendru atveju.

Pagal (1.7) formulę, integralas, kai konstanta a yra baigtinė (pasirenkame a=0), taip pat yra baigtinis:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+e^{-x}} = \int_{-\infty}^{0} \left(1+e^{-x}\right)^{-1} dx = \left(\ln\left(1+e^{-x}\right)+x\right)\Big|_{-\infty}^{0} = \ln 2.$$

Tada

$$r(t) = \left(1+e^{-t}\right)\cdot \int_{-\infty}^{t} \frac{dy}{1+e^{-y}} = \left(1+e^{-t}\right)\cdot\left(\ln\left(1+e^{-x}\right)+x\right)\Big|_{-\infty}^{t} = \left(1+e^{-t}\right)\cdot\left(\ln\left(1+e^{-t}\right)+t\right), t > -\infty$$

tenkina 1.8 teoremą, nes

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{1+e^{-t}}{1+e^{-(t+xr(t))}} = e^{x} \ , \ \forall x.$$

Ieškodami centravimo vektoriaus c_n, remsimės sąlyga

$$c_n = \sup\{x : F_i(x) \le 1/n\},\ i = 1,2,$$

t.y. sprendžiame lygtį

$$\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1}{n},$$

kurią išsprendę gauname

$$x = -\ln(n-1) \sim -\ln n.$$

Vadinasi, ieškoma centravimo vektorių seka lygi $c_n = (-\ln n, -\ln n)$.

Normavimo vektoriaus d_n seka bus lygi

$$d_{n,i} = \left(1+e^{\ln n}\right)\left(\ln\left(1+e^{\ln n}\right)-\ln n\right) = (1+n)\left(\ln(1+n)-\ln n\right) = (1+n)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = (1+n)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Iš (2.21) gauname, kad $d_{n,i} = 1$ taip pat yra normavimo konstanta, kadangi

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Vadinasi, centravimo vektorius lygus d_n=(1,1).

2.2.3.2. RIBINIO SKIRSTINIO RADIMAS

Žinodami centravimo ir normavimo vektorių sekas, galime užrašyti

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{1+ne^{-x_1}+ne^{-x_2}},\ \ x_1, x_2 \in R.$$

Tada

$$P(W_n < c_n + d_n x) = 1 - \left(1 - \frac{1}{1+ne^{-x_1}}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{1+ne^{-x_2}}\right)^n +$$

$$+\left(1 - \frac{1}{1+ne^{-x_1}} - \frac{1}{1+ne^{-x_2}} + \frac{1}{1+n\left(e^{-x_2}+e^{-x_2}\right)}\right)^n, \; x_1, x_2 \in R.$$

Šiuo atveju ribinio skirstinio funkcija lygi

$$L(x_1, x_2) = \lim_{n\to\infty} P(W_n < c_n + d_n x) = 1 - \exp\{-e^{x_1}\} - \exp\{-e^{x_2}\} + \exp\{-e^{x_1+x_2}\}, \; x_1, x_2 \in R.$$

Ieškome ribinės skirstinio funkcijos perkėlimo teoremoje, remdamiesi (1.16) lygybe. Turime

$$\Phi(x_1, x_2) = 1 - \int_0^\infty \exp\{-ze^{x_1}\} d\left(1-e^{-z}\right) - \int_0^\infty \exp\{-ze^{x_2}\} d\left(1-e^{-z}\right) + \int_0^\infty \exp\{-z\left(e^{x_1}+e^{x_2}\right)\} d\left(1-e^{-z}\right) =$$

$$= 1 - \int_0^\infty \exp\{-z\left(1+e^{x_1}\right)\} dz - \int_0^\infty \exp\{-z\left(1+e^{x_2}\right)\} dz + \int_0^\infty \exp\{-z\left(1+e^{x_1}+e^{-x_2}\right)\} dz =$$

$$= 1 - \frac{1}{1+e^{x_1}} - \frac{1}{1+e^{x_2}} + \frac{1}{1+e^{x_1}+e^{x_2}}, \quad x_1, x_2 \in R.$$

Taigi

$$\lim_{n\to\infty} P(W_{N_n} < c_n + d_n x) = \Phi(x_1, x_2) = 1 - \frac{1}{1+e^{x_1}} - \frac{1}{1+e^{x_2}} + \frac{1}{1+e^{x_1}+e^{x_2}}, \; x_1, x_2 \in R. \quad \textbf{(2.40)}$$

2.2.3.3. KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERČIO KONSTRAVIMAS

Remiantis (1.18) formule, apskaičiuosime įvertį Δ_{1,N_n}, pažymėdami, kad analogiškai apskaičiuotume $\Delta_{2,N_n}, \Delta_{3,N_n}$. Pirmiausia randame

$$u_{1,n}(x_1) = \frac{n}{1+ne^{-x_1}},$$

$$t_{1,n}(x_1) = u_{1,n}(x_1) - e^{x_1}, \quad \textbf{(2.41)}$$

$$\delta_{1,n}(x_1) = \max\left(1, e^{-t_{1,n}(x_1)}\right) = e^{-t_{1,n}(x_1)} = \exp\left\{e^{x_1} - u_{1,n}(x_1)\right\},$$

o turėdami šiuos dydžius apskaičiuojame $\Delta_1(x_1)$:

$$\Delta_1(x_1) = \exp\{-e^{x_1}\}\left(r_{1,1,n}(x_1) + r_{2,1,n}(x_1) + r_{1,1,n}(x_1) r_{2,1,n}(x_1)\right), \quad \textbf{(2.42)}$$

čia $r_{1,1,n}(x_1)$, $r_{2,1,n}(x_1)$ apskaičiuojami pagal (1.24) formules.

Apskaičiuojame pirmąjį įverčio Δ_{1,N_n} narį (1.24 formulė). Turime:

$$\int_0^\infty z\exp\left\{-(z-1)\left(e^{x_1}-u_{1,n}(x_1)-e^{x_1}\right)\right\}d\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)=$$

$$=-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\int_0^\infty z\exp\left\{-(z-1)u_{1,n}(x_1)\right\}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}dz=$$

$$=-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\exp\left\{-u_{1,n}(x_1)\right\}}\int_0^\infty z\left(\exp\left\{-u_{1,n}(x_1)\right\}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z dz=$$

$$=-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\exp\left\{-u_{1,n}(x_1)\right\}\ln\left(\exp\left\{-u_{1,n}(x_1)\right\}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)}\int_0^\infty zd\left(\exp\left\{-u_{1,n}(x_1)\right\}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z=$$

$$=\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\exp\left\{-u_{1,n}(x_1)\right\}\left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-u_{1,n}(x_1)\right)}\int_0^\infty\left(\exp\left\{-u_{1,n}(x_1)\right\}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z dz=$$

$$=\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\exp\left\{-u_{1,n}(x_1)\right\}\left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-u_{1,n}(x_1)\right)^2}\left(\exp\left\{-u_{1,n}(x_1)\right\}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z\Bigg|_0^\infty=$$

$$=-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\exp\left\{-u_{1,n}(x_1)\right\}\left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-u_{1,n}(x_1)\right)^2}.$$

Kadangi

$$1<-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\le\ln 4,\quad \text{kai } n\ge 2,$$

tai

$$\int_0^\infty z\exp\left\{-u_{1,n}(x_1)(z-1)\right\}d\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)\le\frac{\ln 4}{e^{-u_{1,n}(x_1)}\left(1+u_{1,n}(x_1)\right)^2}. \qquad \textbf{(2.43)}$$

Dabar apskaičiuosime ir įvertinsime antrąjį įverčio Δ_{1,N_n} narį . Kadangi

$$\left|\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)-\left(1-e^{-z}\right)\right|\le\frac{\sqrt{e}}{n}e^{-z}(1+z),$$

tai

$$\left|\int_0^\infty\left[\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)-\left(1-e^{-z}\right)\right]d\exp\left\{-ze^{x_1}\right\}\right|\le\frac{\sqrt{e}}{n}\left|\int_0^\infty e^{-z}(1+z)d\exp\left\{-ze^{x_1}\right\}\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{e}}{n}\left|(-e^{x_1})\int_0^\infty\exp\left\{-z\left(1+e^{x}\right)\right\}(1+z)dz\right|=\frac{\sqrt{e}}{n}\left|\frac{e^{x_1}}{1+e^{x_1}}\int_0^\infty(1+z)d\exp\left\{-z\left(1+e^{x}\right)\right\}\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{e}}{n}\left|\frac{e^{x_1}}{1+e^{x_1}}\left((1+z)\exp\left\{-z\left(1+e^{x}\right)\right\}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty\exp\left\{-z\left(1+e^{x}\right)\right\}d(1+z)\right)\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{e}}{n}\left|\frac{e^{x_1}}{1+e^{x_1}}\left(-1+\frac{\exp\left\{-z\left(1+e^{x}\right)\right\}}{1+e^{x_1}}\Bigg|_0^\infty\right)\right|=\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{e^{x_1}}{1+e^{x_1}}\left(1+\frac{1}{1+e^{x_1}}\right).$$

Taigi

$$\left|\int_0^\infty\left(\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)-\left(1-e^{-z}\right)\right)d\exp\left\{-ze^{x_1}\right\}\right|\le\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{e^{x_1}}{1+e^{x_1}}\left(1+\frac{1}{1+e^{x_1}}\right). \qquad \mathbf{(2.44)}$$

Iš (2.41), (2.42), (2.43), (2.44) formulių gauname konvergavimo greičio įverčio narį Δ_{1,N_n}:

$$\Delta_{1,N_n}=\exp\left\{-e^{x_1}\right\}\left(r_{1,1,n}(x_1)+r_{2,1,n}(x_1)+r_{1,1,n}(x_1)r_{2,1,n}(x_1)\right)\cdot$$
$$\cdot\frac{\ln 4}{e^{-u_{1,n}(x_1)}\left(1+u_{1,n}(x_1)\right)^2}+\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{e^{x_1}}{1+e^{x_1}}\left(1+\frac{1}{1+e^{x_1}}\right). \qquad \mathbf{(2.45)}$$

Analogiškai gauname konvergavimo greičio įverčio narį Δ_{2,N_n}:

$$\Delta_{2,N_n}=\exp\left\{-e^{x_2}\right\}\left(r_{2,1,n}(x_2)+r_{2,2,n}(x_2)+r_{2,1,n}(x_2)r_{2,2,n}(x_2)\right)\cdot$$
$$\cdot\frac{\ln 4}{e^{-u_{2,n}(x_2)}\left(1+u_{2,n}(x_2)\right)^2}+\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{e^{x_2}}{1+e^{x_2}}\left(1+\frac{1}{1+e^{x_2}}\right). \qquad \mathbf{(2.46)}$$

Analogiškai gauname konvergavimo greičio įverčio narį Δ_{3,N_n}:

$$\Delta_{3,N_n}=\exp\left\{-e^{x_1}-e^{x_2}\right\}\left(R_{1,n}(x_1,x_2)+R_{2,n}(x_1,x_2)+R_{1,n}(x_1,x_2)R_{2,n}(x_1,x_2)\right)\cdot$$
$$\cdot\frac{\ln 4}{e^{-u_n(x_1,x_2)}\left(1+u_n(x_1,x_2)\right)^2}+\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{e^{x_1}+e^{x_2}}{1+e^{x_1}+e^{x_2}}\left(1+\frac{1}{1+e^{x_1}+e^{x_2}}\right). \qquad \mathbf{(2.47)}$$

Turėdami Δ_{1,N_n}, Δ_{2,N_n} ir Δ_{3,N_n}, gauname a.d., turinčių dvimatį logistinį skirstinį, minimumo konvergavimo greičio įvertį (2.23) ir atliekame konvergavimo greičio kompiuterinę analizę. Nagrinėjame keturis atvejus:

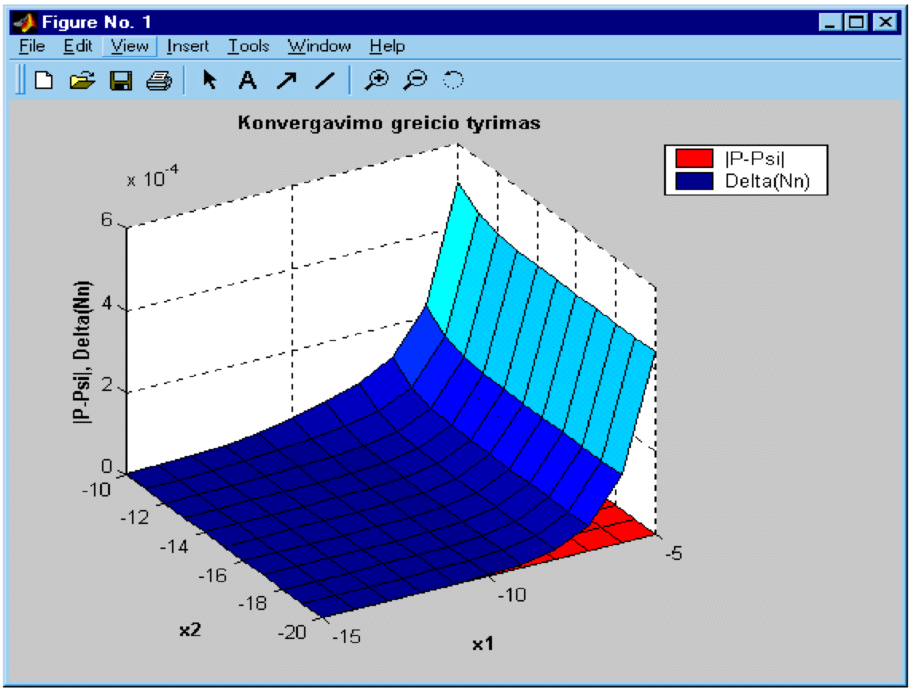
1) Kai n fiksuotas, o x_1 ir x_2 kinta;
2) Kai n ir x_1 fiksuoti, o x_2 kinta;

3) Kai n ir x_2 fiksuoti, o x_1 kinta;

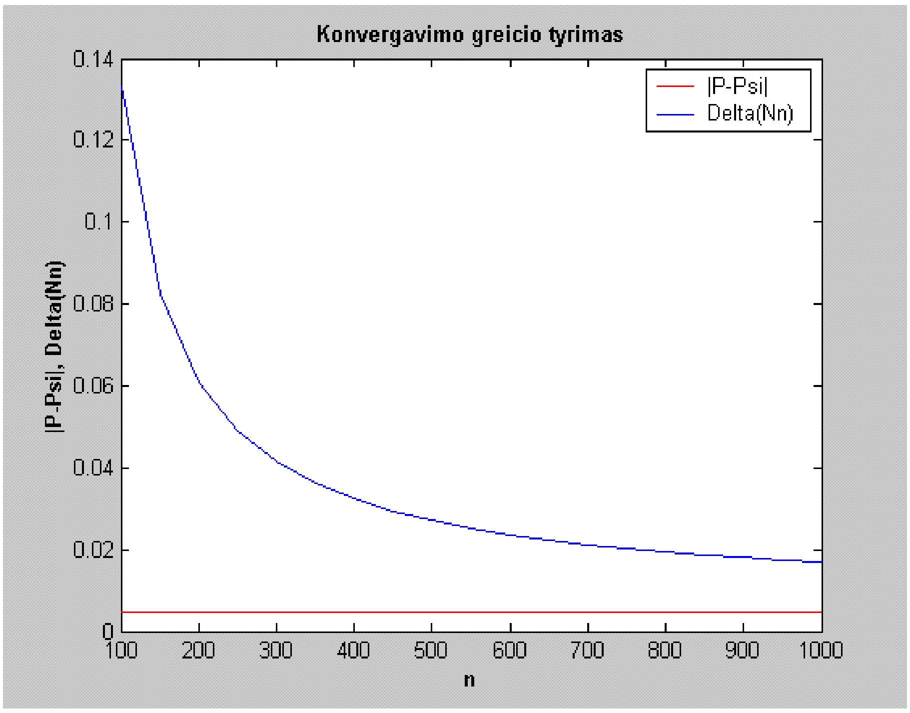
4) Kai x_1 ir x_2 fiksuoti, o n kinta.

Kompiuterinės analizės rezultatus pateikiame 2.11 pav. ir 2.12 pav.

Paviršiaus tyrimo atveju pasirenkame n=500, x_1 kinta intervale (-10; -0.1), o x_2 kinta intervale (2; -0.5). Grafinis rezultatas atrodo taip:



2.11 pav. Tiesiškai normuoto dvimačio logistinio minimumo paklaidos ir paklaidos įverčio kitimas, kai n fiksuotas



2.12 pav. Tiesiškai normuoto dvimačio logistinio minimumo paklaidos ir paklaidos įverčio kitimas, kai x_1 ir x_2 fiksuoti

Matome, kad paklaidos eilė lygi $1/n$. Skaičiavimų rezultatai pateikti 1 priede lentelių pavidalu.

Pjūvių analizės rezultatai pateikti prieduose, t.y. skaičiavimų rezultatai lentelių pavidalu yra 1 priede, o paklaidos ir paklaidos įverčio kitimo grafikai yra 2 priede.

2.3. GEOMETRIŠKAI STABILIEJI EKSTREMUMŲ SKIRSTINIAI

2.3.1. GEOMETRIŠKAI STABILUS DVIMATIS LOGISTINIS SKIRSTINYS

Nagrinėsime a.d., kurie turi dvimatį logistinį skirstinį, t.y. pasiskirstymo funkcija lygi

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{1+e^{-x_1}+e^{-x_2}}, \quad x_1, x_2 \in R.$$

Vienmačiai marginalieji skirstiniai lygūs:

$$F_1(x_1) = \lim_{x_2 \to \infty} F(x_1, x_2) = \frac{1}{1+e^{-x_1}}, \quad x_1 \in R,$$

$$F_2(x_2) = \lim_{x_1 \to \infty} F(x_1, x_2) = \frac{1}{1+e^{-x_2}}, \quad x_2 \in R.$$

Kadangi $\omega(F_1) = \infty, \omega(F_2) = \infty,$ tai centravimo ir normavimo vektorių sekas bei ribinio skirstinio funkciją rasime remdamiesi 1.3 teorema. Pagal (1.3) formulę integralas

$$\int_a^\infty \left(1 - \frac{1}{1+e^{-y}}\right) dy = \int_a^\infty \frac{e^{-y}}{1+e^{-y}}\, dy = -\int_a^\infty \frac{d(1+e^{-y})}{1+e^{-y}} = -\ln\left(1+e^{-y}\right)\Big|_a^\infty = \ln\left(1+e^{-a}\right)$$

yra baigtinis, kai konstanta a yra baigtinė. Tada

$$R(t) = \frac{1}{1-\frac{1}{1+e^{-t}}} \cdot \int_t^\infty \left(1 - \frac{1}{1+e^{-y}}\right) dy = \frac{1+e^{-t}}{e^{-t}} \int_t^\infty \frac{e^{-y}}{1+e^{-y}}\, dy = -\frac{1+e^{-t}}{e^{-t}} \int_t^\infty \frac{d(1+e^{-y})}{1+e^{-y}} =$$

$$= -\frac{1+e^{-t}}{e^{-t}} \ln\left(1+e^{-y}\right)\Big|_t^\infty = \frac{1+e^{-t}}{e^{-t}} \ln(1+e^{-t}).$$

Ieškodami centravimo vektoriaus a_n, remsimės sąlyga

$$a_{n,i} = \inf\left\{x : 1 - F_i(x_i) \le \frac{1}{n}\right\}, i = 1,2,$$

t.y. sprendžiame lygtį

$$1 - \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1}{n},$$

kurią išsprendę gauname

$$x = \ln(n-1).$$

Vadinasi, ieškoma centravimo vektorių seka būtų $a_n = [\ln(n-1), \ln(n-1)]$, tačiau pagal (2.10) galime laikyti, kad

$$a_n = [\ln(n-1), \ln(n-1)] \;\rightarrow\; a_n^* = [\ln n, \ln n].$$

Ieškodami normavimo vektoriaus b_n, remsimės sąlyga

$$b_{n,i} = R(a_{n,i}), i = 1,2.$$

Gauname

$$b_{n,i} = \frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Iš (2.10) išplaukia, kad $b_{n,i} = 1$ taip pat yra normavimo konstanta, kadangi

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Vadinasi, centravimo vektorius lygus b_n=(1,1).

Žinodami centravimo ir normavimo vektorių sekas, galime užrašyti

$$F(a_n + b_n x) = \frac{1}{1+\frac{e^{-x_1}}{n}+\frac{e^{-x_2}}{n}}.$$

Remiantis lygybe

$$H(x) = \lim_{n\to\infty} P(Z_n < a_n + b_n x) = \lim_{n\to\infty} F^n(a_n + b_n x),$$

ribinio skirstinio funkcija bus lygi

$$H(x_1, x_2) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{e^{-x_1}}{n}+\frac{e^{-x_2}}{n}}\right)^n = \exp\left\{-e^{-x_1} - e^{-x_2}\right\}, \;\; x_1, x_2 \in R.$$

Ieškome ribinės skirstinio funkcijos perkėlimo teoremoje. Turime

$$P(Z_{N_n} < \ln n + x) = \sum_{j\geq 1}\left(\frac{1}{1+\frac{e^{-x_1}}{n}+\frac{e^{-x_2}}{n}}\right)^j \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{j-1} =$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{e^{-x_1}}{n}+\frac{e^{-x_2}}{n}}\cdot\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{e^{-x_1}}{n}+\frac{e^{-x_2}}{n}}\right)}=$$

$$=\frac{1}{n+e^{-x_1}+e^{-x_2}}\cdot\frac{n+e^{-x_1}+e^{-x_2}}{1+e^{-x_1}+e^{-x_2}}=\frac{1}{1+e^{-x_1}+e^{-x_2}}=\Psi(x_1,x_2),\; x_1,x_2\in R.$$

Kadangi dvimačio logistinio skirstinio atveju tiesiškai normuoto maksimumo $\left(Z_{N_n}-a_n\right)/b_n$ skirstinio funkcija kiekvienam n sutampa su ribine skirstinio funkcija $\Psi(x_1,x_2)$ (kai a.d. $N_n\sim G(p_n),$ kur $p_n=\frac{1}{n}$), tai logistinis skirstinys yra maks-stabilus. Šiuo atveju paklaidos $\left|P(Z_{N_n}<a_n+b_nx)-\Psi(x_1,x_2)\right|$ vertinti nereikia, kadangi ji lygi nuliui su visais n.

2.3.2. GEOMETRIŠKAI STABILUS DVIMATIS PARETO SKIRSTINYS

Nagrinėsime a.d., kurie turi dvimatį Pareto skirstinį, t.y. pasiskirstymo funkcija lygi

$$F(x_1,x_2)=1-\frac{1}{1+x_1}-\frac{1}{1+x_2}+\frac{1}{1+x_1+x_2},\quad x_1,x_2\in R.$$

Vienmačiai marginalieji skirstiniai lygūs:

$$F_1(x_1)=\lim_{x_2\to\infty}F(x_1,x_2)=1-\frac{1}{1+x_1},\; x_1\in R,$$

$$F_2(x_2)=\lim_{x_1\to\infty}F(x_1,x_2)=1-\frac{1}{1+x_2},\; x_2\in R.$$

Kadangi $\alpha(F_1)=0,\alpha(F_2)=0,$ tai centravimo ir normavimo vektorių sekas bei ribinio skirstinio funkciją rasime remdamiesi 1.7 teorema. Sudarome funkciją $F_i{}^*(x_i)$:

$$F_i^*(x_i)=F_i\left(-\frac{1}{x_i}\right)=1-\frac{1}{1-\frac{1}{x_i}},\; x_i<0.$$

Kadangi

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{1-\frac{1}{1-\frac{1}{tx_i}}}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{t}}}=\lim_{t\to-\infty}\frac{t}{tx_i}=x_i^{-1},\forall x_i>0,$$

tai (1.6) sąlyga yra tenkinama.

Centravimo vektorius c_n yra lygus

$$c_n = (0,0).$$

Ieškodami normavimo vektoriaus d_n , remsimės sąlyga

$$d_{n,i} = \sup\{x : F_i(x_i) \le 1/n\} - \alpha(F_i),\ i = 1,2,$$

t.y. sprendžiame lygtį

$$1 - \frac{1}{1 + x_i} = \frac{1}{n},$$

kurią išsprendę gauname

$$x_i = \frac{1}{n-1}.$$

Vadinasi, ieškoma normavimo vektorių seka būtų $d_n = \left[\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-1}\right]$. Remiantis (2.21) lygybe, galime laikyti, kad $d_n = \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$, kadangi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

Žinodami centravimo ir normavimo vektorių sekas, galime užrašyti pasiskirstymo funkciją

$$F(c_n + d_n x) = 1 - \frac{1}{1 + \frac{x_1}{n}} - \frac{1}{1 + \frac{x_2}{n}} + \frac{1}{1 + \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n}}.$$

Turime

$$P(W_n < c_n + d_n x) = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{x_1}{n}\right)^n} - \frac{1}{\left(1 + \frac{x_2}{n}\right)^n} + \frac{1}{\left(1 + \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n}\right)^n}.$$

Remiantis lygybe

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} P(W_n < c_n + d_n x),$$

ribinio skirstinio funkcija lygi

$$L(x_1, x_2) = 1 - e^{-x_1} - e^{-x_2} + e^{-x_1 - x_2}, \quad x_1, x_2 \in R.$$

Ieškome ribinės skirstinio funkcijos perkėlimo teoremoje. Turime

$$P\left(W_{N_n} < \frac{x}{n}\right) = 1 - \sum_{j\ge1}\left(\frac{1}{1+\frac{x_1}{n}}\right)^j \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{j-1} - \sum_{j\ge1}\left(\frac{1}{1+\frac{x_2}{n}}\right)^j \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{j-1} +$$

$$+\sum_{j\ge1}\left(\frac{1}{1+\frac{x_1}{n}+\frac{x_2}{n}}\right)^j \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{j-1} = 1 - \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{x_1}{n}}\cdot\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{x_1}{n}\right)} -$$

$$-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{x_2}{n}}\cdot\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{x_2}{n}\right)} + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{x_1}{n}+\frac{x_2}{n}}\cdot\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{x_1}{n}+\frac{x_2}{n}\right)} =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+x_1}\cdot\frac{n+x_1}{1+x_1} - \frac{1}{n+x_2}\cdot\frac{n+x_2}{1+x_2} + \frac{1}{n+x_1+x_2}\cdot\frac{n+x_1+x_2}{1+x_1+x_2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{1+x_1} - \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_1+x_2} = \Phi(x_1, x_2),\ x_1, x_2 \in R\ .$$

Kadangi dvimačio Pareto skirstinio atveju tiesiškai normuoto minimumo $\left(W_{N_n} - c_n\right)/ d_n$ skirstinio funkcija kiekvienam n sutampa su ribine skirstinio funkcija $\Phi(x_1, x_2)$ (kai a.d. $N_n \sim G(p_n),$ kur $p_n = \frac{1}{n}$), tai dvimatis Pareto skirstinys yra geometriškai mini-stabilus. Šiuo atveju paklaidos $\left|P(W_{N_n} < c_n + d_n x) - \Phi(x_1, x_2)\right|$ vertinti nereikia, kadangi ji lygi nuliui su visais n.

2.4. NETIESIŠKAI NORMUOTO DVIMAČIO MINIMUMO KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTIS

Tarkime, kad egzistuoja tokia normalizavimo funkcijų seka $\{\tau_n(x_1,x_2) = (\tau_{1,n}(x_1), \tau_{2,n}(x_2))\}$, kad egzistuoja riba

$$\lim_{n\to\infty} P\left(W_n < \tau_n(x_1, x_2)\right) = L(x_1, x_2), \qquad \textbf{(2.48)}$$

čia $L(x_1, x_2)$ – neišsigimusi dvimatė pasiskirstymo funkcija.

Pažymėkime

$$\overline{F}(x_1, x_2) = 1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + F(x_1, x_2),$$

$$\overline{L}(x_1, x_2) = 1 - L_1(x_1) - L_2(x_2) + L(x_1, x_2),$$

$$u_{1,n}(x_1) = nF_1\left(\tau_{1,n}(x_1)\right),$$

$$u_{2,n}(x_2) = nF_2\left(\tau_{2,n}(x_2)\right),$$

$$u_n(x_1,x_2)=n\left(1-\overline{F}\left(\tau_n(x_1,x_2)\right)\right).$$

Kai tenkinama (2.48) lygybė, egzistuoja teigiamos ribos

$$\lim_{n\to\infty} u_{1,n}(x_1)=u_1(x_1),$$

$$\lim_{n\to\infty} u_{2,n}(x_2)=u_2(x_2),$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x_1,x_2)=u(x_1,x_2),$$

ir

$$L(x_1,x_2)=1-e^{-u_1(x_1)}-e^{-u_2(x_2)}+e^{-u(x_1,x_2)}.$$

Pažymėkime

$t_{1,n}(x_1)=u_{1,n}(x_1)+\ln\left(1-L_1(x_1)\right)$, su tais x_1, su kuriais $L_1(x_1)<1$;

$t_{2,n}(x_2)=u_{2,n}(x_2)+\ln\left(1-L_2(x_2)\right)$, su tais x_2, su kuriais $L_2(x_2)<1$;

$t_n(x_1,x_2)=u_n(x_1,x_2)+\ln\overline{L}(x_1,x_2)$, su tais (x_1,x_2), su kuriais $\overline{L}(x_1,x_2)>0$.

Pažymėkime

$$\delta_{1,n}(x_1)=\max(1,e^{-t_{1,n}(x_1)}),$$

$$\delta_{2,n}(x_2)=\max(1,e^{-t_{2,n}(x_2)}),$$

$$\delta_n(x_1,x_2)=\max(1,e^{-t_n(x_1,x_2)}).$$

Teorema 2.1. Tarkime, tenkinama (2.48) lygybė, (1.11) sąlyga ir $A(+0)=0$. Su visais $x=(x_1,x_2)$, su kuriais $u_{1,n}(x_1)/n<1/2$, $u_{2,n}(x_2)/n<1/2$, $u_n(x_1,x_2)/n<1/2$, $L_1(x_1)<1$, $L_2(x_2)<1$, $\overline{L}(x_1,x_2)>0$, teisingas konvergavimo greičio įvertis

$$\left|P\left(W_{N_n}<\tau_n(x_1,x_2)\right)-\Phi(x_1,x_2)\right|\le\Delta_{N_n}=\Delta_{1,N_n}+\Delta_{2,N_n}+\Delta_{3,N_n}.$$

Čia

$$\Delta_{1,N_n}=\Delta_1'(x_1)\int_0^\infty z\left(\delta_{1,n}(x_1)\left(1-L_1(x_1)\right)\right)^{z-1}dA_n(nz)+\left|\int_0^\infty\left(A_n(nz)-A(z)\right)d\left(1-L_1(x_1)\right)^z\right|,$$

$$\Delta_1'(x_1)=\Delta_1(x_1)+\left(1-L_1(x_1)\right)r_{2,1,n}^2(x_1),$$

$$\Delta_1(x_1)=\left(1-L_1(x_1)\right)\left(r_{1,1,n}(x_1)+r_{2,1,n}(x_1)+r_{1,1,n}(x_1)r_{2,1,n}(x_1)\right),$$

$$r_{1,1,n}(x_1)=\frac{2u_{1,n}^2(x_1)}{n}+\frac{2u_{1,n}^4(x_1)}{n^2}\cdot\frac{1}{1-q_1},$$

$$r_{2,1,n}(x_1)=|t_{1,n}(x_1)|+\frac{t_{1,n}^2(x_1)}{2}\cdot\frac{1}{1-s_1},$$

konstantos $0<q_1<1$ ir $0<s_1<1$ parenkamos taip, kad

$$\frac{2u_{1,n}^2(x_1)}{3n} \le q_1, \quad \frac{|t_{1,n}(x_1)|}{3} \le s_1 ;$$

$$\Delta_{2,N_n} = \Delta_2'(x_2)\int_0^\infty z\big(\delta_{2,n}(x_2)(1-L_2(x_2))\big)^{z-1} dA_n(nz) + \left|\int_0^\infty \big(A_n(nz)-A(z)\big)d\big(1-L_2(x_2)\big)^z\right|,$$

$$\Delta_2'(x_2) = \Delta_2(x_2) + \big(1-L_2(x_2)\big)r_{2,2,n}^2(x_2),$$

$$\Delta_2(x_2) = \big(1-L_2(x_2)\big)\big(r_{1,2,n}(x_2) + r_{2,2,n}(x_2) + r_{1,2,n}(x_2)r_{2,2,n}(x_2)\big),$$

$$r_{1,2,n}(x_2) = \frac{2u_{2,n}^2(x_2)}{n} + \frac{2u_{2,n}^4(x_2)}{n^2}\cdot\frac{1}{1-q_2},$$

$$r_{2,2,n}(x_2) = |t_{2,n}(x_2)| + \frac{t_{2,n}^2(x_2)}{2}\cdot\frac{1}{1-s_2},$$

konstantos $0<q_2<1$ ir $0<s_2<1$ parenkamos taip, kad

$$\frac{2u_{2,n}^2(x_2)}{3n} \le q_2, \quad \frac{|t_{2,n}(x_2)|}{3} \le s_2 ;$$

$$\Delta_{3,N_n} = \Delta_n'(x_1,x_2)\int_0^\infty z\big(\delta_n(x_1,x_2)\overline{L}(x_1,x_2)\big)^{z-1} dA_n(nz) + \left|\int_0^\infty \big(A_n(nz)-A(z)\big)d\big(\overline{L}(x_1,x_2)\big)^z\right|,$$

$$\Delta_n'(x_1,x_2) = \Delta_3(x_1,x_2) + \overline{L}(x_1,x_2)R_{2,n}^2(x_1,x_2),$$

$$\Delta_3(x_1,x_2) = \overline{L}(x_1,x_2)\big(R_{1,n}(x_1,x_2) + R_{2,n}(x_1,x_2) + R_{1,n}(x_1,x_2)R_{2,n}(x_1,x_2)\big),$$

$$R_{1,n}(x_1,x_2) = \frac{2u_n^2(x_1,x_2)}{n} + \frac{2u_n^4(x_1,x_2)}{n^2}\cdot\frac{1}{1-q_3},$$

$$R_{2,n}(x_1,x_2) = |t_n(x_1,x_2)| + \frac{t_n^2(x_1,x_2)}{2}\cdot\frac{1}{1-s_3},$$

konstantos $0<q_3<1$ ir $0<s_3<1$ parenkamos taip, kad

$$\frac{2u_n^2(x_1,x_2)}{3n} \le q_3, \quad \frac{|t_n(x_1,x_2)|}{3} \le s_3.$$

Įrodymas. Turime

$$\begin{aligned} \left|P\big(W_{N_n} < \tau_n(x_1,x_2)\big) - \Phi(x_1,x_2)\right| &\le \left|\sum_{j\ge1}\big(1-F_1(\tau_{1,n}(x_1))\big)^j P(N_n=j) - \int_0^\infty \big(1-L_1(x_1)\big)^z dA(z)\right| + \\ &+ \left|\sum_{j\ge1}\big(1-F_2(\tau_{2,n}(x_2))\big)^j P(N_n=j) - \int_0^\infty \big(1-L_2(x_2)\big)^z dA(z)\right| + \end{aligned} \qquad \textbf{(2.49)}$$

$$+\left|\sum_{j\geq 1}\left(\overline{F}\left(\tau_n(x_1,x_2)\right)\right)^j P\left(N_n=j\right)-\int_0^{\infty}\left(\overline{L}(x_1,x_2)\right)^z dA(z)\right|.$$

Įvertinsime pirmąjį (2.49) nelygybės dešiniosios pusės dėmenį.

$$\left|\sum_{j\geq 1}\left(1-F_1\left(\tau_{1,n}(x_1)\right)\right)^j P\left(N_n=j\right)-\int_0^{\infty}\left(1-L_1(x_1)\right)^z dA(z)\right|\leq$$

$$\leq\left|\sum_{j\geq 1}\left(1-F_1\left(\tau_{1,n}(x_1)\right)\right)^j P\left(N_n=j\right)-\sum_{j\geq 1}\left(1-L_1(x_1)\right)^{\frac{j}{n}} P\left(N_n=j\right)\right|+ \quad \textbf{(2.50)}$$

$$+\left|\sum_{j\geq 1}\left(1-L_1(x_1)\right)^{\frac{j}{n}} P\left(N_n=j\right)-\int_0^{\infty}\left(1-L_1(x_1)\right)^z dA(z)\right|.$$

Įvertinsime pirmąjį (2.50) nelygybės dešiniosios pusės dėmenį. Pasinaudoję nelygybe

$$\left|u^{\alpha}-v^{\alpha}\right|\leq\begin{cases}\alpha\left(\max(u,v)\right)^{\alpha-1}\left|u-v\right|, & jei\ \alpha\geq 1,\\ \alpha\left(\max(u,v)\right)^{\alpha-1}\left|\log u-\log v\right|, & jei\,\alpha<1,\end{cases} \quad \textbf{(2.51)}$$

kuri teisinga su visais $0 < u,v < 1$, gauname:

$$\left|\sum_{j\geq 1}\left(1-F_1\left(\tau_{1,n}(x_1)\right)\right)^j P\left(N_n=j\right)-\sum_{j\geq 1}\left(1-L_1(x_1)\right)^{\frac{j}{n}} P\left(N_n=j\right)\right|\leq$$

$$\leq\sum_{j\geq 1}\left|\left(\left(1-F_1\left(\tau_{1,n}(x_1)\right)\right)^n\right)^{\frac{j}{n}}-\left(1-L_1(x_1)\right)^{\frac{j}{n}}\right|P\left(N_n=j\right)\leq\left|\log\left(1-F_1\left(\tau_{1,n}(x_1)\right)\right)^n-\log\left(1-L_1(x_1)\right)\right|\cdot$$

$$\cdot\sum_{j<n}\frac{j}{n}\left[\max\left(\left(1-L_1(x_1)\right),\left(1-F_1\left(\tau_{1,n}(x_1)\right)\right)^n\right)\right]^{\frac{j}{n}}P\left(N_n=j\right)+\left|\left(1-F_1\left(\tau_{1,n}(x_1)\right)\right)^n-\left(1-L_1(x_1)\right)\right|\cdot$$

$$\cdot\sum_{j\geq n}\frac{j}{n}\left[\max\left(\left(1-L_1(x_1)\right),\left(1-F_1\left(\tau_{1,n}(x_1)\right)\right)^n\right)\right]^{\frac{j}{n}-1}P\left(N_n=j\right).$$

Kadangi

$$\left(1-F_1\left(\tau_{1,n}(x_1)\right)\right)^n\leq e^{-u_{1,n}(x_1)},$$

tai

$$\left(1-F_1\left(\tau_{1,n}(x_1)\right)\right)^n\leq\left(1-L_1(x_1)\right)e^{-t_{1,n}(x_1)}.$$

Iš čia gauname, kad

$$\max\left(\left(1-L_1(x_1)\right),\left(1-F_1\left(\tau_{1,n}(x_1)\right)\right)^n\right)\leq\delta_{1,n}(x_1)\left(1-L_1(x_1)\right). \quad \textbf{(2.52)}$$

Taikydami nelygybę

$$\left|\log\left(1-t\right)+t\right|\leq t^2,\ \ 0\leq t\leq\frac{1}{2},$$

gauname

$$\left| n\log\left(1-F_1\left(\tau_{1,n}(x_1)\right)\right)-\log\left(1-L_1(x_1)\right)\right| \le \frac{u_{1,n}^2(x_1)}{n}+\left|t_{1,n}(x_1)\right|. \qquad \mathbf{(2.53)}$$

Atsižvelgę į nelygybes (2.52), (2.53), gauname

$$\left|\sum_{j\ge 1}\left(1-F_1\left(\tau_{1,n}(x_1)\right)\right)^j P\left(N_n=j\right)-\sum_{j\ge 1}\left(1-L_1(x_1)\right)^{\frac{j}{n}} P\left(N_n=j\right)\right| \le \delta_{1,n}(x_1)\left(1-L_1(x_1)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{u_{1,n}^2(x_1)}{n}+\left|t_{1,n}(x_1)\right|\right)\int_0^1 z\left(\delta_{1,n}(x_1)\left(1-L_1(x_1)\right)\right)^{z-1} dA_n(nz)+\Delta_1(x_1)\int_1^\infty z\left(\delta_{1,n}(x_1)\left(1-L_1(x_1)\right)\right)^{z-1} dA_n(nz).$$

Kadangi

$$\delta_{1,n}(x_1)\left(1-L_1(x_1)\right)\left(\frac{u_{1,n}^2(x_1)}{n}+\left|t_{1,n}(x_1)\right|\right) \le \Delta_1(x_1)+\left(1-L_1(x_1)\right)r_{2,1,n}^2(x_1),$$

tai iš čia gauname, kad

$$\left|\sum_{j\ge 1}\left(1-F_1\left(\tau_{1,n}(x_1)\right)\right)^j P\left(N_n=j\right)-\sum_{j\ge 1}\left(1-L_1(x_1)\right)^{\frac{j}{n}} P\left(N_n=j\right)\right| \le$$

$$\le\left(\Delta_1(x_1)+\left(1-L_1(x_1)\right)r_{2,1,n}^2(x_1)\right)\int_0^\infty z\left(\delta_{1,n}(x_1)\left(1-L_1(x_1)\right)\right)^{z-1} dA_n(nz). \qquad \mathbf{(2.54)}$$

Įvertinsime antrąjį (2.50) nelygybės dešiniosios pusės dėmenį. Turime

$$\left|\sum_{j\ge 1}\left(1-L_1(x_1)\right)^{\frac{j}{n}} P\left(N_n=j\right)-\int_0^\infty \left(1-L_1(x_1)\right)^z dA(z)\right| =$$

$$=\left|\int_0^\infty \left(1-L_1(x_1)\right)^z d\left(A_n(nz)-A(z)\right)\right| = \left|\int_0^\infty \left(A_n(nz)-A(z)\right) d\left(1-L_1(x_1)\right)^z\right|. \qquad \mathbf{(2.55)}$$

Iš (2.50), (2.54) ir (2.55) nelygybių gauname (2.49) nelygybės dešiniosios pusės pirmojo dėmens įvertį Δ_{1,N_n}. Analogiškai gauname ir (2.49) nelygybės dešiniosios pusės antrojo ir trečiojo dėmenų įverčius Δ_{2,N_n}, Δ_{3,N_n} ir tuo pačiu įvertį Δ_{N_n}.

Teorema įrodyta.

Pavyzdys 2.1. Nagrinėkime dvimačius a.d., kurie tolygiai pasiskirstę kvadrate, t.y. pasiskirstymo funkcija lygi

$$F(x_1,x_2)=x_1x_2, \quad 0<x_1,x_2<1.$$

Vienmačiai marginalieji skirstiniai lygūs:

$$F_1(x_1)=\lim_{x_2\to\infty} F(x_1,x_2)=x_1, \quad 0<x_1<1,$$

$$F_2(x_2)=\lim_{x_1\to\infty} F(x_1,x_2)=x_2, \quad 0<x_2<1.$$

Parenkame normalizavimo funkcijų seką $\tau_n(x_1, x_2) = \left(1 - e^{-\frac{x_1}{n}}, 1 - e^{-\frac{x_2}{n}}\right)$.

Pažymime

$$u_{1,n}(x_1) = n\left(1 - e^{-\frac{x_1}{n}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} u_1(x_1) = x_1,$$

$$u_{2,n}(x_2) = n\left(1 - e^{-\frac{x_2}{n}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} u_2(x_2) = x_2,$$

$$u_n(x_1, x_2) = n\left(1 - e^{-\frac{x_1}{n}-\frac{x_2}{n}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} u(x_1, x_2) = x_1 + x_2.$$

Tuomet ribinio skirstinio funkcija yra lygi:

$$L(x_1, x_2) = 1 - e^{-x_1} - e^{-x_2} + e^{-x_1 - x_2},\ x_1, x_2 > 0.$$

Ieškome ribinės skirstinio funkcijos perkėlimo teoremoje, remdamiesi (1.16) lygybe. Turime

$$\Phi(x_1, x_2) = 1 - \int_0^\infty e^{-x_1 z} d\left(1 - e^{-z}\right) - \int_0^\infty e^{-x_2 z} d\left(1 - e^{-z}\right) + \int_0^\infty e^{-(x_2 + x_2)z} d\left(1 - e^{-z}\right) =$$

$$= 1 - \int_0^\infty e^{-z(x_1+1)} dz - \int_0^\infty e^{-z(x_2+1)} dz + \int_0^\infty e^{-z(x_1+x_2+1)} dz = 1 - \frac{1}{1+x_1} - \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_1+x_2},\ x_1, x_2 > 0.$$

Taigi

$$\lim_{n\to\infty} P\left(W_{N_n} < \tau_n(x_1, x_2)\right) = \Phi(x_1, x_2) = 1 - \frac{1}{1+x_1} - \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_1+x_2},\ x_1, x_2 > 0. \qquad \textbf{(2.56)}$$

Taikydami 2.1 teoremą, įvertinsime konvergavimo greitį (2.56) lygybėje.

Apskaičiuosime įvertį Δ_{1,N_n}, pažymėdami, kad analogiškai apskaičiuotume Δ_{2,N_n} ir Δ_{3,N_n}. Pirmiausia randame

$$t_{1,n}(x_1) = u_{1,n}(x_1) - x_1,$$

$$\delta_{1,n}(x_1) = \max(1, e^{-t_{1,n}(x_1)}) = e^{-t_{1,n}(x_1)} = e^{x_1 - u_{1,n}(x_1)},$$

$$\Delta_1(x_1) = e^{-x_1}\left(r_{1,1,n}(x_1) + r_{2,1,n}(x_1) + r_{1,1,n}(x_1) r_{2,1,n}(x_1)\right),$$

čia $r_{1,1,n}(x_1)$, $r_{1,1,n}(x_1)$ apskaičiuojami pagal 2.1 teoremos pažymėjimus.

Apskaičiuojame pirmąjį įverčio Δ_{1,N_n} narį. Turime:

$$\int_0^\infty z \exp\left\{\left(-u_{1,n}(x_1) + x_1 - x_1\right)(z-1)\right\} d\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{nz}\right) =$$

$$=\int_0^\infty z\exp\{-u_{1,n}(x_1)(z-1)\}d\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)=-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\int_0^\infty ze^{-u_{1,n}(x_1)(z-1)}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}dz=$$

$$=-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-u_{1,n}(x_1)}}\int_0^\infty z\left(e^{-u_{1,n}(x_1)}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z dz=-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-u_{1,n}(x_1)}\ln\left(e^{-u_{1,n}(x_1)}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)}\cdot$$

$$\cdot\int_0^\infty zd\left(e^{-u_{1,n}(x_1)}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z=\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-u_{1,n}(x_1)}\left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-u_{1,n}(x_1)\right)}\cdot$$

$$\cdot\int_0^\infty\left(e^{-u_{1,n}(x_1)}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z dz=\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-u_{1,n}(x_1)}\left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-u_{1,n}(x_1)\right)^2}\cdot$$

$$\cdot\left(e^{-u_{1,n}(x_1)}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^z\Bigg|_0^\infty=-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{e^{-u_{1,n}(x_1)}\left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-u_{1,n}(x_1)\right)^2}.$$

Kadangi

$$1<-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\le\ln 4,\quad \text{kai } n\ge 2,$$

tai

$$\int_0^\infty ze^{-u_{1,n}(x_1)(z-1)}d\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)\le\frac{\ln 4}{e^{-u_{1,n}(x_1)}\left(1+u_{1,n}(x_1)\right)^2}. \qquad \textbf{(2.57)}$$

Dabar apskaičiuosime ir įvertinsime antrąjį įverčio Δ_{1,N_n} narį. Kadangi

$$\left|\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)-\left(1-e^{-z}\right)\right|\le\frac{\sqrt{e}}{n}e^{-z}(1+z),$$

tai

$$\left|\int_0^\infty\left[\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)-\left(1-e^{-z}\right)\right]de^{-x_1z}\right|\le\frac{\sqrt{e}}{n}\left|\int_0^\infty e^{-z}(1+z)de^{-x_1z}\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{e}}{n}\left|(-x_1)\int_0^{\infty}e^{-z(1+x_1)}(1+z)dz\right|=\frac{\sqrt{e}}{n}\left|\frac{x_1}{1+x_1}\int_0^{\infty}(1+z)de^{-z(1+x_1)}\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{e}}{n}\left|\frac{x_1}{1+x_1}\left((1+z)e^{-z(1+x_1)}\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}e^{-z(1+x_1)}d(1+z)\right)\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{e}}{n}\left|\frac{x_1}{1+x_1}\left(-1+\frac{e^{-z(1+x_1)}}{1+x_1}\Big|_0^{\infty}\right)\right|=\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x_1}{1+x_1}\left(1+\frac{1}{1+x_1}\right).$$

Taigi

$$\left|\int_0^{\infty}\left(\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{nz}\right)-\left(1-e^{-z}\right)\right)de^{-x_1 z}\right|\leq\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x_1}{1+x_1}\left(1+\frac{1}{1+x_1}\right). \qquad \textbf{(2.58)}$$

Iš (2.26), (2.57), (2.58) formulių gauname konvergavimo greičio įverčio narį Δ_{1,N_n} :

$$\Delta_{1,N_n}=\Delta_1(x_1)\cdot\frac{\ln 4}{e^{-u_{1,n}(x_1)}\left(1+u_{1,n}(x_1)\right)^2}+\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x_1}{1+x_1}\left(1+\frac{1}{1+x_1}\right). \qquad \textbf{(2.59)}$$

Analogiškai gauname konvergavimo greičio įverčio narį Δ_{2,N_n} :

$$\Delta_{2,N_n}=\Delta_2(x_2)\cdot\frac{\ln 4}{e^{-u_{2,n}(x_2)}\left(1+u_{2,n}(x_2)\right)^2}+\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x_2}{1+x_2}\left(1+\frac{1}{1+x_2}\right). \qquad \textbf{(2.60)}$$

Analogiškai gauname konvergavimo greičio įverčio narį Δ_{3,N_n} :

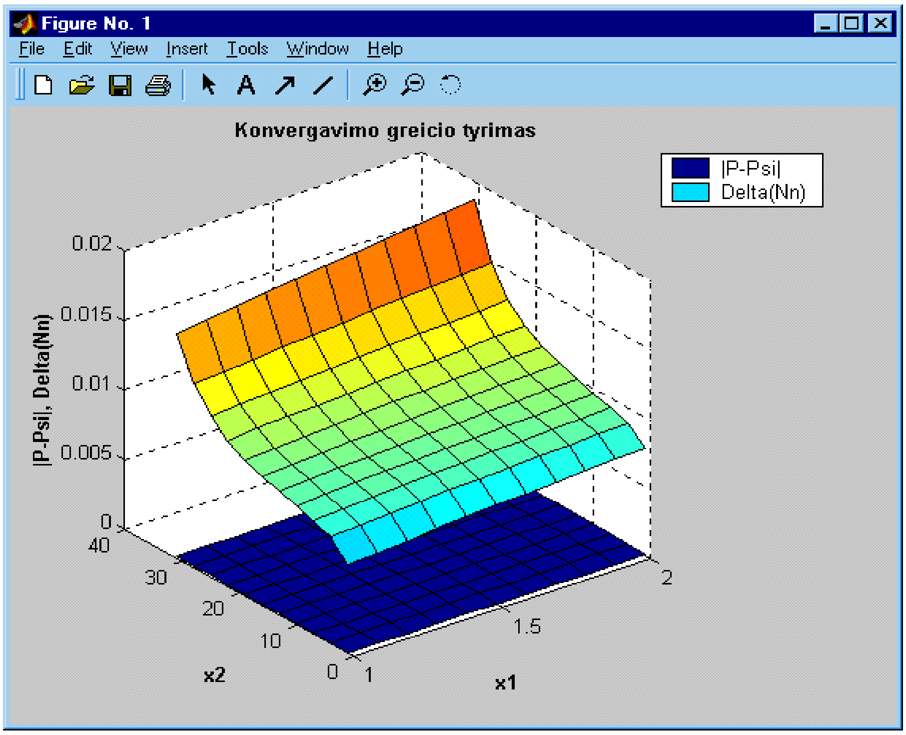
$$\Delta_{3,N_n}=\Delta_3(x_1,x_2)\cdot\frac{\ln 4}{e^{-u_n(x_1,x_2)}\left(1+u_n(x_1,x_2)\right)^2}+\frac{\sqrt{e}}{n}\cdot\frac{x_1+x_2}{1+x_1+x_2}\left(1+\frac{1}{1+x_1+x_2}\right). \qquad \textbf{(2.61)}$$

Turėdami Δ_{1,N_n} , Δ_{2,N_n} , Δ_{3,N_n} , gauname netiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. minimumo konvergavimo greičio įvertį Δ_{N_n} . Atliekama konvergavimo greičio kompiuterinė analizė, nagrinėjant keturis atvejus:

1) Kai n fiksuotas, o x_1 ir x_2 kinta;
2) Kai n ir x_1 fiksuoti, o x_2 kinta;
3) Kai n ir x_2 fiksuoti, o x_1 kinta;
4) Kai x_1 ir x_2 fiksuoti, o n kinta.

Kompiuterinės analizės rezultatus pateikiame 2.13 pav. ir 2.14 pav.

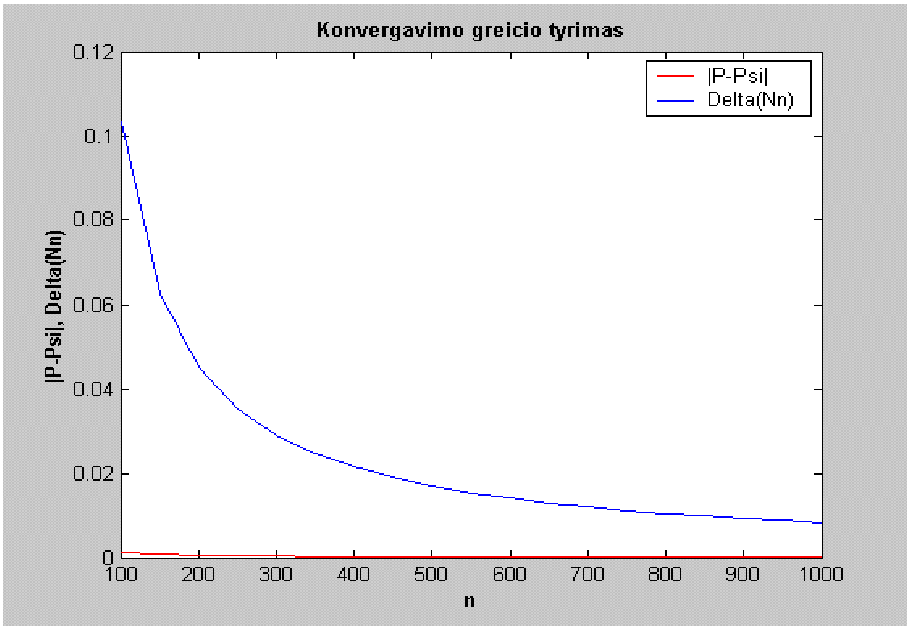
Paviršiaus tyrimo atveju pasirenkame n=1000, x_1 kinta intervale (1;2), o x_2 kinta intervale (1;31). Grafinis rezultatas atrodo taip:



2.13 pav. Netiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. minimumo paklaidos ir paklaidos įverčio kitimas, kai n fiksuotas

Iš paveikslo matome, kad šiuo atveju paklaida mažėja kai x_1 ir (arba) x_2 mažėja. Skaičiavimų rezultatai lentelių pavidalu pateikti 1 priede.

Paklaidos eilės įvertinimui tiriame atvejį, kai x_1 ir x_2 fiksuoti, o n kinta tam tikrame intervale. Tarkime, x_1=1, x_2=7, o n kinta nuo 100 iki 1000 žingsniu 50. Šiuo atveju grafinis vaizdas atrodo taip:



2.14 pav. Netiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d.minimumo konvergavimo greičio tyrimas, kai x_1 ir x_2 fiksuoti

Matome, kad paklaidos eilė lygi $1/n$. Skaičiavimų rezultatai pateikti 1 priede lentelių pavidalu.

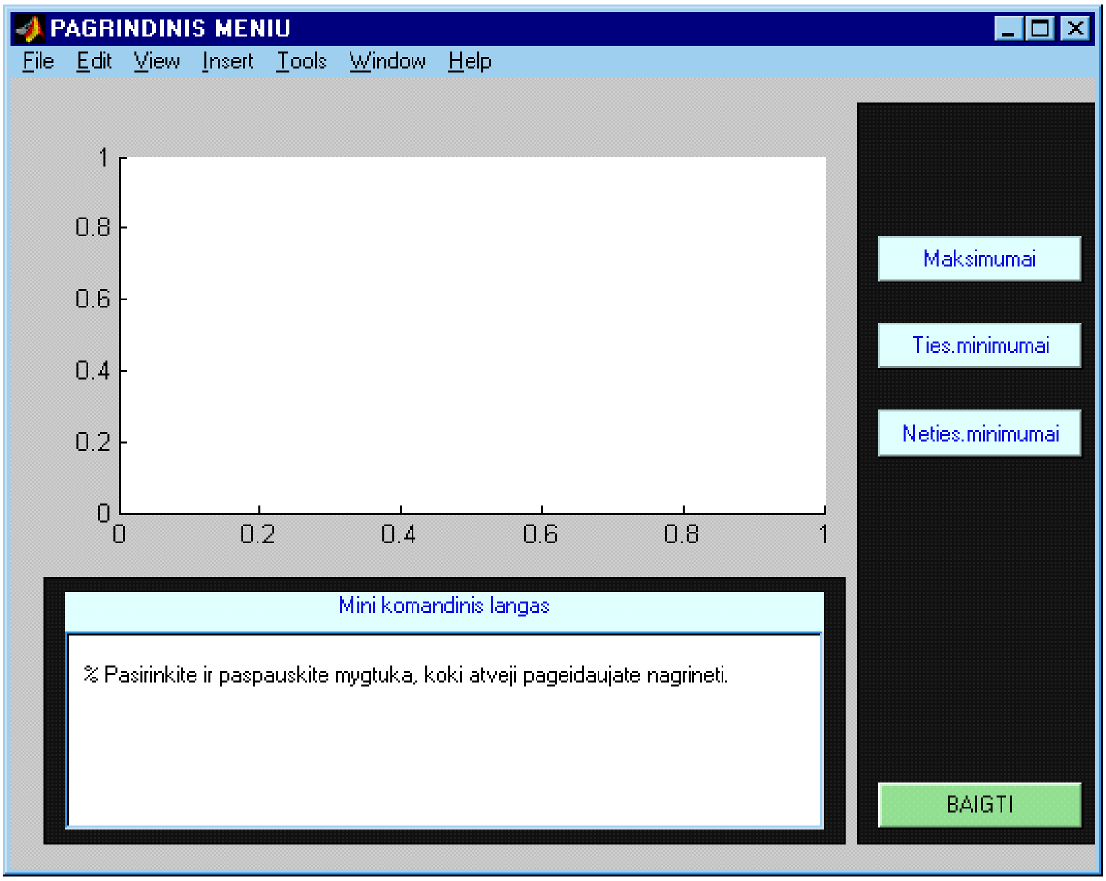
Pjūvių analizės rezultatai pateikti prieduose, t.y. skaičiavimų rezultatai lentelių pavidalu yra 1 priede, o paklaidos ir paklaidos įverčio kitimo grafikai yra 2 priede.

2.5. PROGRAMŲ APRAŠYMAS

Programos, skirtos daugiamačių skirstinių konvergavimo greičiui ištirti, parašytos MATLAB sistema. Galima nagrinėti daugiamačių skirstinių (daugiamačio eksponentinio skirstinio, daugiamačio Pareto skirstinio, daugiamačio logistinio skirstinio ir tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d.) tiesiškai normuotų maksimumų, minimumų bei netiesiškai normuotų minimumų konvergavimo greitį. Kiekvienam uždaviniui galima nagrinėti šias problemas:

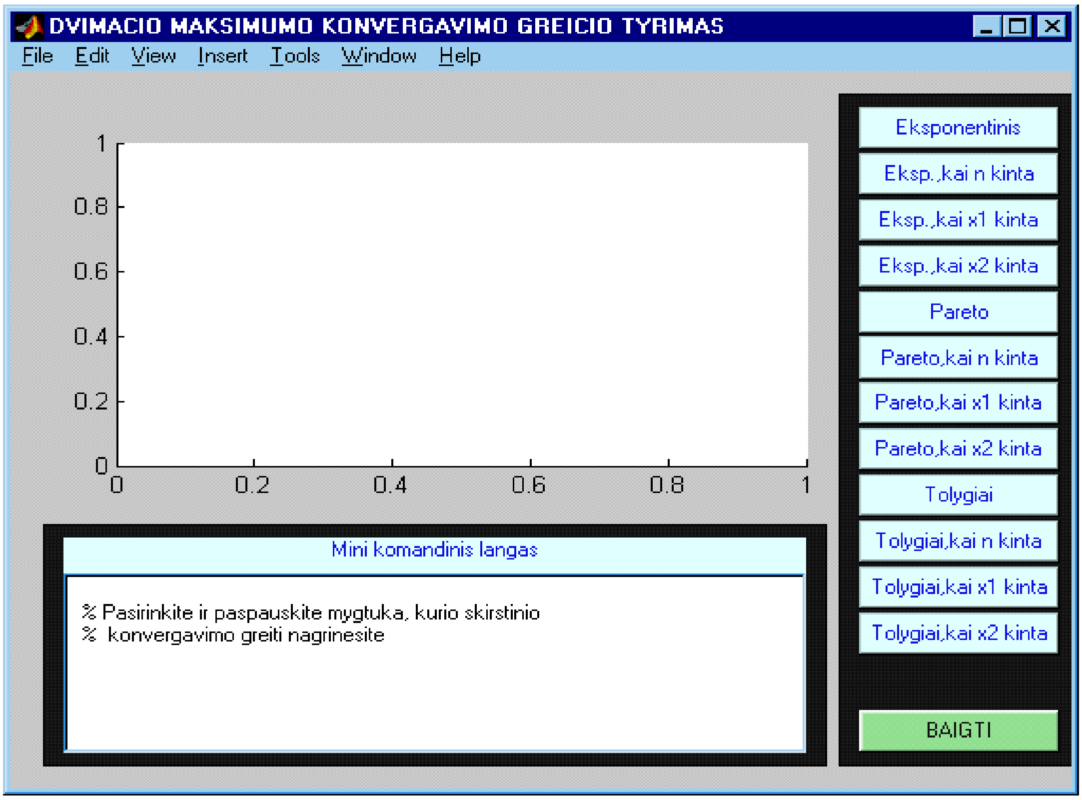
1. Kai n fiksuotas, o x_1 ir x_2 kinta;
2. Kai n ir x_1 fiksuoti, o x_2 kinta;
3. Kai n ir x_2 fiksuoti, o x_1 kinta;
4. Kai x_1 ir x_2 fiksuoti, o n kinta.

Sukurta sąsaja su vartotoju, t.y. meniu. Pagrindinis meniu langas atrodo taip:



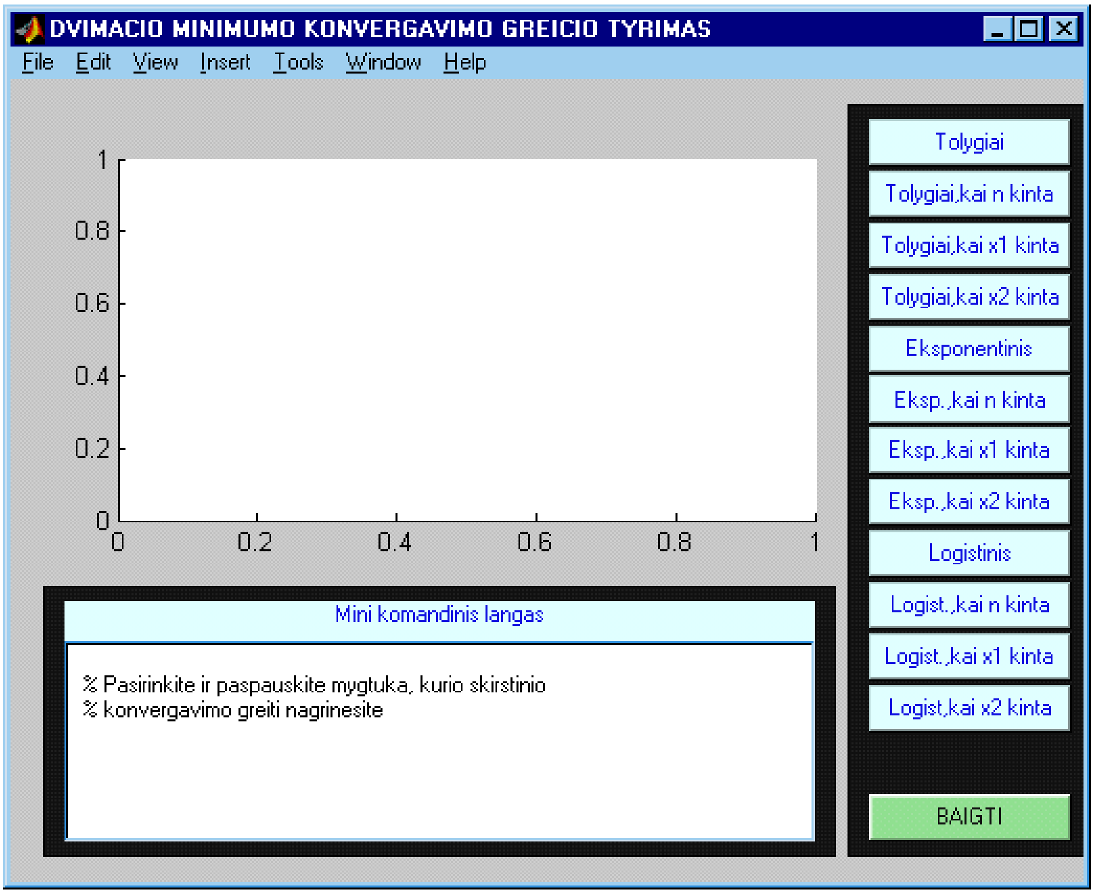
2.15 pav. Pagrindinis meniu langas

Pirmiausia meniu vartotojas gali pasirinkti kokiu atveju (tiesiškai normuoto maksimumo, tiesiškai ar netiesiškai normuoto minimumo) konvergavimo greitį tirs. Pasirinkus mygtuką „Maksimumai“, išvysime meniu langą



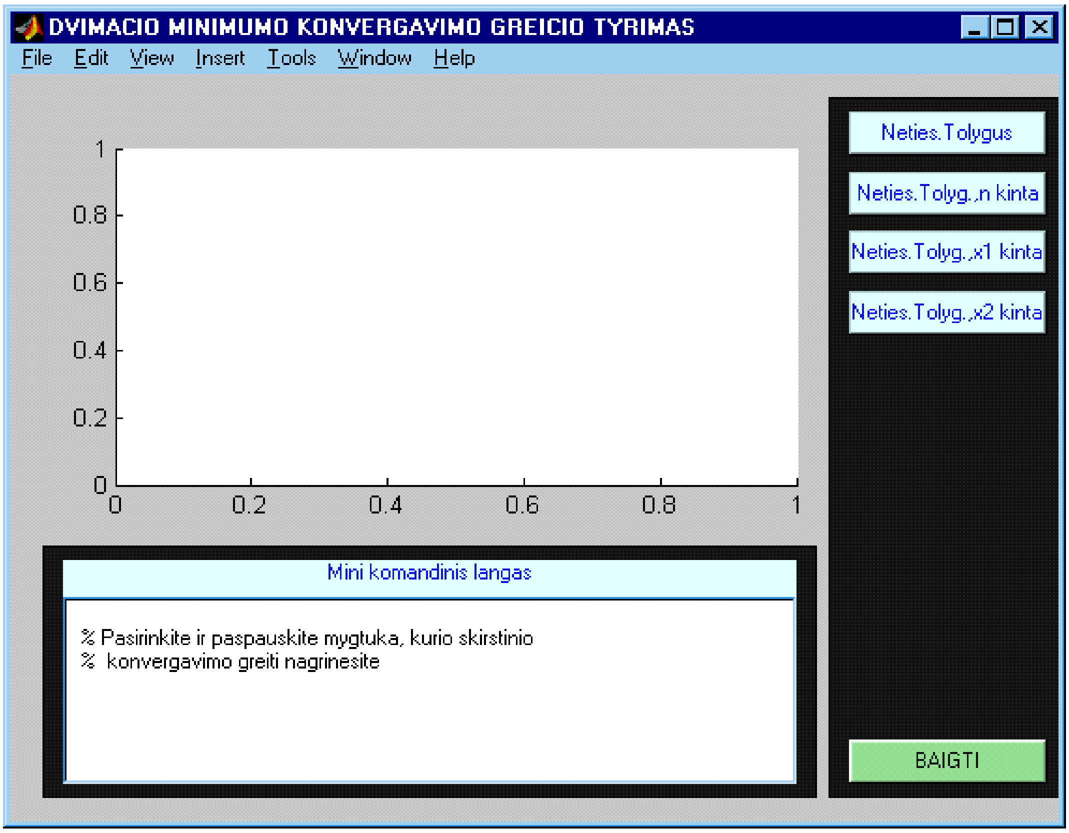
2.16 pav. Maksimumų meniu langas

Pasirinkus mygtuką „Ties.minimumai“, išvysime meniu langą



2.17 pav. Tiesiškai normuotų minimumų meniu langas

Pasirinkus mygtuką „Neties.minimumai“, išvysime meniu langą



2.18 pav. Netiesiškai normuotų minimumų meniu langas

Kiekvienu atveju vartotojas gali paspausti dešinėje esančius mygtukus, norėdamas atlikti ant mygtuko parašyto skirstinio tam tikro atvejo konvergavimo tyrimą. Norint atlikti analizę su kitais parametrais (kitom n, x_1, x_2 reikšmėm), jas galima pakeisti mini komandiniame lange esančioje komandinėje eilutėje, ir, paspaudus pelės klavišą ant brėžinio, bus atliktas tyrimas su naujais parametrais. Jei su pasirinktais duomenimis sprendimas įmanomas, vartotojas ekrane pamatys tiriamo skirstinio konvergavimo greičio grafiką, o MATLAB komandiniame lange galės pasižiūrėti $|P(Z_{N_n} < a_n + b_n x) - \Psi(x_1, x_2)|$ (arba $|P(W_{N_n} < c_n + d_n x) - \Phi(x_1, x_2)|$) ir $\Delta_{N_n}(x_1, x_2)$ apskaičiuotas reikšmes. Jei su pasirinktais duomenimis sprendimas neįmanomas (pvz.: jei x_1 ar x_2 įgyja negalimas reikšmes, jei $\Delta_{N_n}(x_1, x_2) < 0$ ar $\Delta_{N_n}(x_1, x_2) > 1$ ir pan.), tai vartotojas mini komandiniame lange pamatys pranešimą „Su pasirinktais duomenimis skaičiavimai negalimi!!!“ ir programa darbą nutrauks.

Mygtukai apima šias programas:

- eksp (n, pr1, zingsnis1, pb1, pr2, zingsnis2, pb2) – ši programa tiria dvimačio eksponentinio skirstinio konvergavimo greitį, kai n fiksuotas. Norint pakeisti parametrus, reikia nurodyti:

  n – norimą n reikšmę,

  pr1 – x_1 kitimo intervalo pradžią,

zingsnis1 - x_1 kitimo intervalo žingsnį,

pb1 - x_1 kitimo intervalo pabaigą,

pr2 – x_2 kitimo intervalo pradžią,

zingsnis2 – x_2 kitimo intervalo žingsnį,

pb2 – x_2 kitimo intervalo pabaigą.

- eksp_*x*1 (*x*2, *n*, pr, zingsnis, pb) – ši programa tiria dvimačio eksponentinio skirstinio konvergavimo greitį, kai x_1 kinta (t.y. n ir x_2 fiksuoti). Norint pakeisti parametrus, reikia nurodyti:

  *x*2 – norimą x_2 reikšmę,

  n – norimą n reikšmę,

  pr – x_1 kitimo intervalo pradžią,

  zingsnis - x_1 kitimo intervalo žingsnį,

  pb - x_1 kitimo intervalo pabaigą.

- eksp_*x*2 (*x*1, *n*, pr, zingsnis, pb) – ši programa tiria dvimačio eksponentinio skirstinio konvergavimo greitį, kai x_2 kinta (t.y. n ir x_1 fiksuoti). Norint pakeisti parametrus, reikia nurodyti:

  *x*1 – norimą x_1 reikšmę,

  n – norimą n reikšmę,

  pr – x_2 kitimo intervalo pradžią,

  zingsnis – x_2 kitimo intervalo žingsnį,

  pb – x_2 kitimo intervalo pabaigą.

- eksp_*n* (*x*1, *x*2, pr, zingsnis, pb) – ši programa tiria dvimačio eksponentinio skirstinio konvergavimo greitį, kai n kinta (t.y. x_1 ir x_2 fiksuoti). Norint pakeisti parametrus, reikia nurodyti:

  *x*1 – norimą x_1 reikšmę,

  *x*2 – norimą x_2 reikšmę,

  pr – n kitimo intervalo pradžią,

  zingsnis – n kitimo intervalo žingsnį,

  pb – n kitimo intervalo pabaigą.

- pareto (*n*, pr1, zingsnis1, pb1, pr2, zingsnis2, pb2) – ši programa tiria dvimačio Pareto skirstinio konvergavimo greitį, kai n fiksuotas. Šiuo atveju būtina, kad $x_1>0$ ir $x_2>0$. Norint pakeisti parametrus, reikia nurodyti:

  n – norimą n reikšmę,

  pr1 – x_1 kitimo intervalo pradžią,

  zingsnis1 - x_1 kitimo intervalo žingsnį, pb1 - x_1 kitimo intervalo pabaigą,

pr2 – x_2 kitimo intervalo pradžią,

zingsnis2 – x_2 kitimo intervalo žingsnį,

pb2 – x_2 kitimo intervalo pabaigą.

- pareto_x1 (x2, n, pr, zingsnis, pb) – ši programa tiria dvimačio Pareto skirstinio konvergavimo greitį, kai x_1 kinta (t.y. n ir x_2 fiksuoti). Šiuo atveju būtina, kad $x_1>0$ ir $x_2>0$. Norint pakeisti parametrus, reikia nurodyti:

  x2 – norimą x_2 reikšmę,

  n – norimą n reikšmę,

  pr – x_1 kitimo intervalo pradžią,

  zingsnis - x_1 kitimo intervalo žingsnį,

  pb - x_1 kitimo intervalo pabaigą.

- pareto_x2 (x1, n, pr, zingsnis, pb) – ši programa tiria dvimačio Pareto skirstinio konvergavimo greitį, kai x_2 kinta (t.y. n ir x_1 fiksuoti). Šiuo atveju būtina, kad $x_1>0$ ir $x_2>0$. Norint pakeisti parametrus, reikia nurodyti:

  x1 – norimą x_1 reikšmę,

  n – norimą n reikšmę,

  pr – x_2 kitimo intervalo pradžią,

  zingsnis – x_2 kitimo intervalo žingsnį,

  pb – x_2 kitimo intervalo pabaigą.

- pareto_n (x1, x2, pr, zingsnis, pb) – ši programa tiria dvimačio Pareto skirstinio konvergavimo greitį, kai n kinta (t.y. x_1 ir x_2 fiksuoti). Šiuo atveju būtina, kad $x_1>0$ ir $x_2>0$. Norint pakeisti parametrus, reikia nurodyti:

  x1 – norimą x_1 reikšmę,

  x2 – norimą x_2 reikšmę,

  pr – n kitimo intervalo pradžią,

  zingsnis – n kitimo intervalo žingsnį,

  pb – n kitimo intervalo pabaigą.

- tolygiai (n, pr1, zingsnis1, pb1, pr2, zingsnis2, pb2) – ši programa tiria tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. konvergavimo greitį, kai n fiksuotas. Šiuo atveju būtina, kad $x_1<0$ ir $x_2<0$. Norint pakeisti parametrus, reikia nurodyti:

  n – norimą n reikšmę,

  pr1 – x_1 kitimo intervalo pradžią,

  zingsnis1 - x_1 kitimo intervalo žingsnį,

  pb1 - x_1 kitimo intervalo pabaigą,

pr2 – x_2 kitimo intervalo pradžią,

zingsnis2 – x_2 kitimo intervalo žingsnį,

pb2 – x_2 kitimo intervalo pabaigą.

- tolygiai_*x*1 (*x*2, *n*, pr, zingsnis, pb) – ši programa tiria tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. konvergavimo greitį, kai x_1 kinta (t.y. n ir x_2 fiksuoti). Šiuo atveju būtina, kad $x_1<0$ ir $x_2<0$. Norint pakeisti parametrus, reikia nurodyti:

  *x*2 – norimą x_2 reikšmę,

  n – norimą n reikšmę,

  pr – x_1 kitimo intervalo pradžią,

  zingsnis - x_1 kitimo intervalo žingsnį,

  pb - x_1 kitimo intervalo pabaigą.

- tolygiai_*x*2 (*x*1, *n*, pr, zingsnis, pb) – ši programa tiria tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. konvergavimo greitį, kai x_2 kinta (t.y. n ir x_1 fiksuoti). Šiuo atveju būtina, kad $x_1<0$ ir $x_2<0$. Norint pakeisti parametrus, reikia nurodyti:

  *x*1 – norimą x_1 reikšmę,

  n – norimą n reikšmę,

  pr – x_2 kitimo intervalo pradžią,

  zingsnis – x_2 kitimo intervalo žingsnį,

  pb – x_2 kitimo intervalo pabaigą.

- tolygiai_*n* (*x*1, *x*2, pr, zingsnis, pb) – ši programa tiria tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. konvergavimo greitį, kai n kinta (t.y. x_1 ir x_2 fiksuoti). Šiuo atveju būtina, kad $x_1<0$ ir $x_2<0$. Norint pakeisti parametrus, reikia nurodyti:

  *x*1 – norimą x_1 reikšmę,

  *x*2 – norimą x_2 reikšmę,

  pr – n kitimo intervalo pradžią,

  zingsnis – n kitimo intervalo žingsnį,

  pb – n kitimo intervalo pabaigą.

- min_tolygiai (*n*, pr1, zingsnis1, pb1, pr2, zingsnis2, pb2) – ši programa tiria tiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. konvergavimo greitį, kai n fiksuotas. Šiuo atveju būtina, kad $x_1>0$ ir $x_2>0$. Norint pakeisti parametrus, reikia nurodyti:

  n – norimą n reikšmę,

  pr1 – x_1 kitimo intervalo pradžią,

  zingsnis1 - x_1 kitimo intervalo žingsnį,

  pb1 - x_1 kitimo intervalo pabaigą,

  pr2 – x_2 kitimo intervalo pradžią,

zingsnis2 – x_2 kitimo intervalo žingsnį,

pb2 – x_2 kitimo intervalo pabaigą.

- min_tolyg_n (x1, x2, pr, zingsnis, pb) – ši programa tiria tiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. konvergavimo greitį, kai n kinta (t.y. x_1 ir x_2 fiksuoti). Šiuo atveju būtina, kad $x_1>0$ ir $x_2>0$. Norint pakeisti parametrus, reikia nurodyti:

  x1 – norimą x_1 reikšmę,

  x2 – norimą x_2 reikšmę,

  pr – n kitimo intervalo pradžią,

  zingsnis - n kitimo intervalo žingsnį,

  pb - n kitimo intervalo pabaigą.

- min_tolyg_x1 (x2, n, pr, zingsnis, pb) – ši programa tiria tiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. konvergavimo greitį, kai x_1 kinta (t.y. n ir x_2 fiksuoti). Šiuo atveju būtina, kad $x_1>0$ ir $x_2>0$. Norint pakeisti parametrus, reikia nurodyti:

  x2 – norimą x_2 reikšmę,

  n – norimą n reikšmę,

  pr – x_1 kitimo intervalo pradžią,

  zingsnis – x_1 kitimo intervalo žingsnį,

  pb – x_1 kitimo intervalo pabaigą.

- min_tolyg_x2 (x1, n, pr, zingsnis, pb) – ši programa tiria tiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. konvergavimo greitį, kai x_2 kinta (t.y. n ir x_1 fiksuoti). Šiuo atveju būtina, kad $x_1>0$ ir $x_2>0$. Norint pakeisti parametrus, reikia nurodyti:

  x1 – norimą x_1 reikšmę,

  n – norimą n reikšmę,

  pr – x_2 kitimo intervalo pradžią,

  zingsnis – x_2 kitimo intervalo žingsnį,

  pb – x_2 kitimo intervalo pabaigą.

- min_eksp (n, pr1, zingsnis1, pb1, pr2, zingsnis2, pb2) – ši programa tiria tiesiškai normuotų dvimačio eksponentinio skirstinio konvergavimo greitį, kai n fiksuotas. Šiuo atveju būtina, kad $x_1>0$ ir $x_2>0$. Norint pakeisti parametrus, reikia nurodyti:

  n – norimą n reikšmę,

  pr1 – x_1 kitimo intervalo pradžią,

  zingsnis1 - x_1 kitimo intervalo žingsnį,

  pb1 - x_1 kitimo intervalo pabaigą,

  pr2 – x_2 kitimo intervalo pradžią,

  zingsnis2 – x_2 kitimo intervalo žingsnį, pb2 – x_2 kitimo intervalo pabaigą.

- min_eksp_*n* (*x*1, *x*2, pr, zingsnis, pb) – ši programa tiria tiesiškai normuotų dvimačio eksponentinio skirstinio konvergavimo greitį, kai n kinta (t.y. x_1 ir x_2 fiksuoti). Šiuo atveju būtina, kad $x_1>0$ ir $x_2>0$. Norint pakeisti parametrus, reikia nurodyti:

  *x*1 – norimą x_1 reikšmę,

  *x*2 – norimą x_2 reikšmę,

  pr – n kitimo intervalo pradžią,

  zingsnis - n kitimo intervalo žingsnį,

  pb - n kitimo intervalo pabaigą.

- min_eksp_*x*1 (*x*2, *n*, pr, zingsnis, pb) – ši programa tiria tiesiškai normuotų dvimačio eksponentinio skirstinio konvergavimo greitį, kai x_1 kinta (t.y. n ir x_2 fiksuoti). Šiuo atveju būtina, kad $x_1>0$ ir $x_2>0$. Norint pakeisti parametrus, reikia nurodyti:

  *x*2 – norimą x_2 reikšmę,

  n – norimą n reikšmę,

  pr – x_1 kitimo intervalo pradžią,

  zingsnis – x_1 kitimo intervalo žingsnį,

  pb – x_1 kitimo intervalo pabaigą.

- min_eksp_*x*2 (*x*1, *n*, pr, zingsnis, pb) – ši programa tiria tiesiškai normuotų dvimačio eksponentinio skirstinio konvergavimo greitį, kai x_2 kinta (t.y. n ir x_1 fiksuoti). Šiuo atveju būtina, kad $x_1>0$ ir $x_2>0$. Norint pakeisti parametrus, reikia nurodyti:

  *x*1 – norimą x_1 reikšmę,

  n – norimą n reikšmę,

  pr – x_2 kitimo intervalo pradžią,

  zingsnis – x_2 kitimo intervalo žingsnį,

  pb – x_2 kitimo intervalo pabaigą.

- min_log (*n*, pr1, zingsnis1, pb1, pr2, zingsnis2, pb2) – ši programa tiria tiesiškai normuotų dvimačio logistinio skirstinio konvergavimo greitį, kai n fiksuotas. Norint pakeisti parametrus, reikia nurodyti:

  n – norimą n reikšmę,

  pr1 – x_1 kitimo intervalo pradžią,

  zingsnis1 - x_1 kitimo intervalo žingsnį,

  pb1 - x_1 kitimo intervalo pabaigą,

  pr2 – x_2 kitimo intervalo pradžią,

  zingsnis2 – x_2 kitimo intervalo žingsnį,

  pb2 – x_2 kitimo intervalo pabaigą.

- min_log_*n* (*x*1, *x*2, pr, zingsnis, pb) – ši programa tiria tiesiškai normuotų dvimačio logistinio skirstinio konvergavimo greitį, kai *n* kinta (t.y. x_1 ir x_2 fiksuoti). Norint pakeisti parametrus, reikia nurodyti:

  *x*1 – norimą x_1 reikšmę,

  *x*2 – norimą x_2 reikšmę,

  pr – *n* kitimo intervalo pradžią,

  zingsnis - *n* kitimo intervalo žingsnį,

  pb - *n* kitimo intervalo pabaigą.

- min_log_*x*1 (*x*2, *n*, pr, zingsnis, pb) – ši programa tiria tiesiškai normuotų dvimačio logistinio skirstinio konvergavimo greitį, kai x_1 kinta (t.y. *n* ir x_2 fiksuoti). Norint pakeisti parametrus, reikia nurodyti:

  *x*2 – norimą x_2 reikšmę,

  n – norimą *n* reikšmę,

  pr – x_1 kitimo intervalo pradžią,

  zingsnis – x_1 kitimo intervalo žingsnį,

  pb – x_1 kitimo intervalo pabaigą.

- min_log_*x*2 (*x*1, *n*, pr, zingsnis, pb) – ši programa tiria tiesiškai normuotų dvimačio logistinio skirstinio konvergavimo greitį, kai x_2 kinta (t.y. *n* ir x_1 fiksuoti). Norint pakeisti parametrus, reikia nurodyti:

  *x*1 – norimą x_1 reikšmę,

  n – norimą *n* reikšmę,

  pr – x_2 kitimo intervalo pradžią,

  zingsnis – x_2 kitimo intervalo žingsnį,

  pb – x_2 kitimo intervalo pabaigą.

- neties_tolyg (*n*, pr1, zingsnis1, pb1, pr2, zingsnis2, pb2) – ši programa tiria netiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. konvergavimo greitį, kai *n* fiksuotas. Šiuo atveju būtina, kad $x_1>0$ ir $x_2>0$. Norint pakeisti parametrus, reikia nurodyti:

  n – norimą *n* reikšmę,

  pr1 – x_1 kitimo intervalo pradžią,

  zingsnis1 - x_1 kitimo intervalo žingsnę,

  pb1 - x_1 kitimo intervalo pabaigą,

  pr2 – x_2 kitimo intervalo pradžią,

  zingsnis2 – x_2 kitimo intervalo žingsnį,

  pb2 – x_2 kitimo intervalo pabaigą.

- neties_tolyg_*n* (x1, x2, pr, zingsnis, pb) – ši programa tiria netiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. konvergavimo greitį, kai n kinta (t.y. x_1 ir x_2 fiksuoti). Šiuo atveju būtina, kad x_1>0 ir x_2>0. Norint pakeisti parametrus, reikia nurodyti:

  x1 – norimą x_1 reikšmę,

  x2 – norimą x_2 reikšmę,

  pr – n kitimo intervalo pradžią,

  zingsnis - n kitimo intervalo žingsnį,

  pb - n kitimo intervalo pabaigą.

- neties_tolyg_x1 (x2, n, pr, zingsnis, pb) – ši programa tiria netiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. konvergavimo greitį, kai x_1 kinta (t.y. n ir x_2 fiksuoti). Šiuo atveju būtina, kad x_1>0 ir x_2>0. Norint pakeisti parametrus, reikia nurodyti:

  x2 – norimą x_2 reikšmę,

  n – norimą n reikšmę,

  pr – x_1 kitimo intervalo pradžią,

  zingsnis – x_1 kitimo intervalo žingsnį,

  pb – x_1 kitimo intervalo pabaigą.

- neties_tolyg_x2 (x1, n, pr, zingsnis, pb) – ši programa tiria netiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. konvergavimo greitį, kai x_2 kinta (t.y. n ir x_1 fiksuoti). Šiuo atveju būtina, kad x_1>0 ir x_2>0. Norint pakeisti parametrus, reikia nurodyti:

  x1 – norimą x_1 reikšmę,

  n – norimą n reikšmę,

  pr – x_2 kitimo intervalo pradžią,

  zingsnis – x_2 kitimo intervalo žingsnį,

  pb – x_2 kitimo intervalo pabaigą.

IŠVADOS

1. Eksponentinių dvimačių ekstremaliųjų reikšmių (tiek maksimumo, tiek minimumo) atveju konvergavimo greičio įverčio eilė n atžvilgiu yra lygi $1/n$. Maksimumų schemos atveju paklaida mažėja, kai argumentai x_1 arba (ir) x_2 didėja, o minimumų schemos atveju – atvirkščiai.
2. Tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. ekstremaliųjų reikšmių (tiek maksimumo, tiek minimumo) atveju konvergavimo greičio įverčio eilė n atžvilgiu yra lygi $1/n$. Maksimumų schemos atveju paklaidos kitimas nėra nusakomas vienareikšmiškai, o minimumų schemos atveju paklaida mažėja, kai argumentai x_1 arba (ir) x_2 mažėja .
3. Pareto dvimačių maksimumų atveju konvergavimo greičio įverčio eilė n atžvilgiu yra lygi $1/n$, o paklaida mažėja, kai argumentai x_1 arba (ir) x_2 didėja.
4. Dvimatis Pareto skirstinys yra geometriškai mini-stabilus.
5. Dvimatis logistinis skirstinys yra geometriškai maks-stabilus.
6. Logistinių dvimačių minimumų atveju konvergavimo greičio įverčio eilė n atžvilgiu yra lygi $1/n$, o paklaidos kitimas nėra nusakomas vienareikšmiškai.
7. Daugiamačio maksimumo matavimų skaičius nekeičia konvergavimo greičio įverčio struktūros. Tuo tarpu daugiamačių minimumų konvergavimo greičio įverčio struktūra tiesiogiai priklauso nuo matavimų skaičiaus, todėl net nelabai didelis matavimų skaičius gali pastebimai pabloginti konvergavimo greičio įverčio tikslumą.

LITERATŪRA

1. Baršauskienė V., Mačerinskienė I., Studijų darbų parengimo tvarka // K.:Technologija, 2002, 79p.
2. Jokimaitis A., Daugiamačių atsitiktinių dydžių ekstremaliųjų reikšmių asimptotika // Disertacija mokslų daktaro laipsniui, 1998, p.51-58.
3. Jokimaitis A., Die Konvergenzgeschwindigkeit der Verteilung des Maximums der Zufallsvektoren // Lietuvos matematikos rinkinys, 1992, 32 (2), p.229-236.
4. Аксомайтис А., О сходимости распределений экстремальных независимых случайных величин // Lietuvos matematikos rinkinys, 1990, 30 (2), p.219-231.
5. Аксомайтис А., Неравномерная скорость сходимости в предельной теореме макс-схемы // Lietuvos matematikos rinkinys, 1988, 28, p.211-215.
6. Галамбош Я., Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик.– М.:Наука, 1984. 349 с.
7. Гнеденко Б.В., Гнеденко Д.Б., О распределениях Лапласа и логистическом как предельных в теории вероятностей // Сердика, 1982, 8, с.229-234.

1 PRIEDAS

1 lentelė

Tiesiškai normuoto dvimačio eksponentinio skirstinio maksimumo konvergavimo greičio tyrimo, kai *n* fiksuotas, $|P(Z_{N_n} < a_n + b_n x) - \Psi(x_1, x_2)|$*10^-4^ rezultatai

x_2 \ x_1	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150
0.8	9.641	9.641	9.641	9.641	9.641	9.641	9.641	9.641	9.641	9.641	9.641
0.9	8.379	8.379	8.379	8.379	8.379	8.379	8.379	8.379	8.379	8.379	8.379
1	7.252	7.252	7.252	7.252	7.252	7.252	7.252	7.252	7.252	7.252	7.252
1.1	6.253	6.253	6.253	6.253	6.253	6.253	6.253	6.253	6.253	6.253	6.253
1.2	5.371	5.371	5.371	5.371	5.371	5.371	5.371	5.371	5.371	5.371	5.371
1.3	4.597	4.597	4.597	4.597	4.597	4.597	4.597	4.597	4.597	4.597	4.597
1.4	3.921	3.921	3.921	3.921	3.921	3.921	3.921	3.921	3.921	3.921	3.921
1.5	3.334	3.334	3.334	3.334	3.334	3.334	3.334	3.334	3.334	3.334	3.334
1.6	2.827	2.827	2.827	2.827	2.827	2.827	2.827	2.827	2.827	2.827	2.827
1.7	2.390	2.390	2.390	2.390	2.390	2.390	2.390	2.390	2.390	2.390	2.390
1.8	2.015	2.015	2.015	2.015	2.015	2.015	2.015	2.015	2.015	2.015	2.015
1.9	1.695	1.695	1.695	1.695	1.695	1.695	1.695	1.695	1.695	1.695	1.695
2	1.423	1.423	1.423	1.423	1.423	1.423	1.423	1.423	1.423	1.423	1.423

2 lentelė

Tiesiškai normuoto dvimačio eksponentinio skirstinio maksimumo konvergavimo greičio tyrimo, kai *n* fiksuotas, $\Delta_{N_n}(x_1, x_2)$*10^-2^ rezultatai

x_2 \ x_1	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150
0.8	2.71	2.71	2.71	2.71	2.71	2.71	2.71	2.71	2.71	2.71	2.71
0.9	2.12	2.12	2.12	2.12	2.12	2.12	2.12	2.12	2.12	2.12	2.12
1	1.71	1.71	1.71	1.71	1.71	1.71	1.71	1.71	1.71	1.71	1.71
1.1	1.41	1.41	1.41	1.41	1.41	1.41	1.41	1.41	1.41	1.41	1.41
1.2	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19

1.3	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02
1.4	0.88	0.88	0.88	0.88	0.88	0.88	0.88	0.88	0.88	0.88	0.88
1.5	0.78	0.78	0.78	0.78	0.78	0.78	0.78	0.78	0.78	0.78	0.78
1.6	0.68	0.68	0.68	0.68	0.68	0.68	0.68	0.68	0.68	0.68	0.68
1.7	0.61	0.61	0.61	0.61	0.61	0.61	0.61	0.61	0.61	0.61	0.61
1.8	0.54	0.54	0.54	0.54	0.54	0.54	0.54	0.54	0.54	0.54	0.54
1.9	0.49	0.49	0.49	0.49	0.49	0.49	0.49	0.49	0.49	0.49	0.49
2	0.44	0.44	0.44	0.44	0.44	0.44	0.44	0.44	0.44	0.44	0.44

3 lentelė

Tiesiškai normuoto dvimačio eksponentinio skirstinio maksimumo konvergavimo greičio tyrimo, kai *n* ir x_1 fiksuoti, rezultatai

x_1	n	x_2	$\lvert P(Z_{N_n} < a_n + b_n x) - \Psi(x_1, x_2) \rvert * 10^{-3}$	$\Delta_{N_n}(x_1, x_2)$
5	100	0.8	0.9698	0.0284
		0.9	0.8439	0.0221
		1	0.7315	0.0178
		1.1	0.6318	0.0147
		1.2	0.5437	0.0124
		1.3	0.4663	0.0106
		1.4	0.3988	0.0092
		1.5	0.3400	0.0081
		1.6	0.2891	0.0072
		1.7	0.2453	0.0064
		1.8	0.2076	0.0057
		1.9	0.1754	0.0051
		2	0.1479	0.0046

4 lentelė

Tiesiškai normuoto dvimačio eksponentinio skirstinio maksimumo konvergavimo greičio tyrimo, kai *n* ir x_2 fiksuoti, rezultatai

x_1	n	x_2	$\lvert P(Z_{N_n} < a_n + b_n x) - \Psi(x_1, x_2) \rvert * 10^{-3}$	$\Delta_{N_n}(x_1, x_2)$
1	100	10	0.7253	0.0171

1.1			0.6253	0.0141
1.2			0.5371	0.0119
1.3			0.4597	0.0102
1.4			0.3921	0.0089
1.5			0.3334	0.0078
1.6			0.2827	0.0069
1.7			0.2390	0.0061
1.8			0.2015	0.0054
1.9			0.1695	0.0049
2			0.1423	0.0044

5 lentelė

Tiesiškai normuoto dvimačio eksponentinio skirstinio maksimumo konvergavimo greičio tyrimo, kai x_1 ir x_2 fiksuoti, rezultatai

x_1	x_2	n	$\lvert P(Z_{N_n} < a_n + b_n x) - \Psi(x_1, x_2) \rvert$	$\Delta_{N_n}(x_1, x_2)$
-1	100	20	0.0277	0.5935
		30	0.0183	0.3504
		40	0.0136	0.2483
		50	0.0108	0.1921
		60	0.0090	0.1567
		70	0.0077	0.1322
		80	0.0067	0.1144
		90	0.0060	0.1008
		100	0.0054	0.0901
		110	0.0049	0.0814
		120	0.0045	0.0743
		130	0.0041	0.0683
		140	0.0038	0.0632
		150	0.0036	0.0588
		160	0.0034	0.0550

6 lentelė

Tiesiškai normuoto dvimačio Pareto skirstinio maksimumo konvergavimo greičio tyrimo, kai *n* fiksuotas, $|P(Z_{N_n} < a_n + b_n x) - \Psi(x_1, x_2)|$*10^{-4} rezultatai

x_1 \ x_2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2
1	5.701	7.123	7.992	8.430	8.560	8.484	8.275	7.984	7.648	7.290
1.1	4.999	6.355	7.241	7.744	7.962	7.978	7.857	7.648	7.384	7.088
1.2	4.413	5.692	6.573	7.115	7.394	7.481	7.423	7.290	7.088	6.848
1.3	3.921	5.121	5.982	6.543	6.864	7.004	7.012	6.927	6.778	6.587
1.4	3.504	4.626	5.458	6.025	6.374	6.554	6.608	6.569	6.465	6.315
1.5	3.148	4.196	4.995	5.559	5.925	6.134	6.223	6.222	6.155	6.042
1.6	2.843	3.821	4.584	5.138	5.513	5.743	5.860	5.889	5.854	5.772
1.7	2.579	3.492	4.218	4.760	5.138	5.382	5.519	5.573	5.565	5.509
1.8	2.350	3.203	3.893	4.418	4.795	5.048	5.201	5.276	5.289	5.255
1.9	2.149	2.947	3.602	4.110	4.483	4.741	4.906	4.995	5.026	5.012
2	1.973	2.719	3.341	3.830	4.197	4.458	4.631	4.733	4.778	4.780

7 lentelė

Tiesiškai normuoto dvimačio Pareto skirstinio maksimumo konvergavimo greičio tyrimo, kai *n* fiksuotas, $\Delta_{N_n}(x_1, x_2)$*10^{-2} rezultatai

x_1 \ x_2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2
1	4.19	3.77	3.48	3.26	3.09	2.97	2.86	2.78	2.72	2.66
1.1	4.18	3.75	3.45	3.23	3.05	2.91	2.80	2.72	2.64	2.58
1.2	4.18	3.74	3.43	3.20	3.02	2.87	2.76	2.66	2.58	2.52
1.3	4.17	3.73	3.42	3.18	2.9	2.84	2.72	2.62	2.53	2.46
1.4	4.17	3.73	3.41	3.16	2.97	2.81	2.68	2.58	2.49	2.41
1.5	4.16	3.72	3.40	3.15	2.95	2.79	2.65	2.54	2.45	2.37
1.6	4.16	3.72	3.39	3.14	2.93	2.77	2.63	2.52	2.42	2.34
1.7	4.16	3.71	3.38	3.13	2.92	2.75	2.61	2.49	2.39	2.31

1.8	4.16	3.71	3.38	3.12	2.91	2.74	2.59	2.47	2.37	2.28
1.9	4.16	3.71	3.37	3.11	2.90	2.72	2.58	2.46	2.35	2.26
2	4.16	3.71	3.37	3.11	2.89	2.71	2.57	2.44	2.33	2.24

8 lentelė

Tiesiškai normuoto dvimačio Pareto skirstinio maksimumo konvergavimo greičio tyrimo, kai *n* ir x_1 fiksuoti, rezultatai

x_1	n	x_2	$\lvert P(Z_{N_n} < a_n + b_n x) - \Psi(x_1, x_2) \rvert * 10^{-3}$	$\Delta_{N_n}(x_1, x_2)$
2.5	300	0.9	0.1174	0.0084
		1.2	0.1264	0.0072
		1.5	0.1262	0.0065
		1.8	0.1214	0.0059
		2.1	0.1145	0.0055
		2.4	0.1068	0.0052
		2.7	0.0990	0.0050
		3	0.0915	0.0048
		3.3	0.0846	0.0047
		3.6	0.0782	0.0046
		3.9	0.0723	0.0045
		4.2	0.0670	0.0044
		4.5	0.0622	0.0044
		4.8	0.0578	0.0043
		5.1	0.0538	0.0043
		5.4	0.0502	0.0042
		5.7	0.0469	0.0042
		6	0.0440	0.0041
		6.3	0.0412	0.0041
		6.6	0.0387	0.0041
		6.9	0.0365	0.0041

9 lentelė

Tiesiškai normuoto dvimačio Pareto skirstinio maksimumo konvergavimo greičio tyrimo, kai *n* ir x_2 fiksuoti, rezultatai

x_1	n	x_2	$\lvert P(Z_{N_n} < a_n + b_n x) - \Psi(x_1, x_2) \rvert * 10^{-3}$	$\Delta_{N_n}(x_1, x_2)$
0.9	200	2.5	0.1761	0.0126
1.4			0.1904	0.0100
1.9			0.1789	0.0087
2.4			0.1601	0.0078
2.9			0.1410	0.0073
3.4			0.1236	0.0070
3.9			0.1085	0.0067
4.4			0.0956	0.0066
4.9			0.0846	0.0064
5.4			0.0753	0.0063
5.9			0.0674	0.0062
6.4			0.0606	0.0062
6.9			0.0547	0.0061
7.4			0.0496	0.0061
7.9			0.0452	0.0060
8.4			0.0413	0.0060
8.9			0.0379	0.0060
9.4			0.0349	0.0060
9.9			0.0323	0.0059

10 lentelė

Tiesiškai normuoto dvimačio Pareto skirstinio maksimumo konvergavimo greičio tyrimo, kai x_1 ir x_2 fiksuoti, rezultatai

x_1	x_2	n	$\lvert P(Z_{N_n} < a_n + b_n x) - \Psi(x_1, x_2) \rvert$	$\Delta_{N_n}(x_1, x_2)$
0.3	0.5	20	0.0059	0.2805
		40	0.0030	0.1195
		60	0.0020	0.0756
		80	0.0015	0.0553

		100	0.0012	0.435
		120	0.0010	0.0359
		140	0.0009	0.0306
		160	0.0008	0.0266
		180	0.0007	0.0235
		200	0.0006	0.0211
		220	0.0005	0.0192
		240	0.0005	0.0175
		260	0.0005	0.0161
		280	0.0004	0.0150
		300	0.0004	0.0139

11 lentelė

Tiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. maksimumo konvergavimo greičio tyrimo, kai *n* fiksuotas, $|\,P(Z_{N_n} < a_n + b_n x) - \Psi(x_1, x_2)\,|$ rezultatai

x_2 \ x_1	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
-1.9	0.0074	0.0072	0.0070	0.0068	0.0065	0.0061	0.0057	0.0053	0.0048	0.0043
-1.7	0.0075	0.0073	0.0071	0.0068	0.0065	0.0062	0.0057	0.0052	0.0047	0.0041
-1.5	0.0076	0.0074	0.0071	0.0069	0.0066	0.0062	0.0058	0.0052	0.0046	0.0039
-1.3	0.0076	0.0074	0.0072	0.0070	0.0066	0.0063	0.0058	0.0052	0.0045	0.0037
-1.1	0.0077	0.0075	0.0073	0.0070	0.0067	0.0063	0.0058	0.0052	0.0044	0.0035
-0.9	0.0078	0.0076	0.0074	0.0071	0.0068	0.0064	0.0059	0.0052	0.0044	0.0032
-0.7	0.0079	0.0077	0.0075	0.0072	0.0069	0.0065	0.0060	0.0053	0.0043	0.0030
-0.5	0.0080	0.0078	0.0076	0.0074	0.0070	0.0066	0.0061	0.0053	0.0043	0.0028
-0.3	0.0081	0.0080	0.0078	0.0075	0.0072	0.0068	0.0062	0.0054	0.0043	0.0026
-0.1	0.0083	0.0081	0.0079	0.0076	0.0073	0.0069	0.0064	0.0056	0.0044	0.0025

12 lentelė

Tiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. maksimumo konvergavimo greičio tyrimo, kai *n* fiksuotas, $\Delta_{N_n}(x_1, x_2)$ rezultatai

x_2 / x_1	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
-1.9	0.4150	0.1534	0.0972	0.0727	0.0589	0.0498	0.0433	0.0380	0.0330	0.0275
-1.7	0.3133	0.1380	0.0911	0.0694	0.0567	0.0483	0.0420	0.0369	0.0320	0.0263
-1.5	0.2523	0.1255	0.0858	0.0663	0.0547	0.0468	0.0408	0.0358	0.0309	0.0251
-1.3	0.2117	0.1151	0.0810	0.0635	0.0528	0.0453	0.0396	0.0347	0.0298	0.0238
-1.1	0.1826	0.1064	0.0768	0.0610	0.0510	0.0439	0.0384	0.0336	0.0286	0.0224
-0.9	0.1608	0.0990	0.0730	0.0586	0.0493	0.0426	0.0372	0.0324	0.0274	0.0209
-0.7	0.1437	0.0925	0.0695	0.0563	0.0476	0.0412	0.0360	0.0312	0.0260	0.0191
-0.5	0.1301	0.0869	0.0663	0.0542	0.0460	0.0399	0.0348	0.0300	0.0246	0.0172
-0.3	0.1189	0.819	0.0634	0.0522	0.0444	0.0385	0.0335	0.0286	0.0230	0.0150
-0.1	0.1094	0.0774	0.0607	0.0502	0.0429	0.0372	0.0322	0.0271	0.0211	0.0125

13 lentelė

Tiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. maksimumo konvergavimo greičio tyrimo, kai *n* ir x_1 fiksuoti, rezultatai

x_1	n	x_2	$\lvert P(Z_{N_n} < a_n + b_n x) - \Psi(x_1, x_2) \rvert$	$\Delta_{N_n}(x_1, x_2)$
-1	100	-10	0.0078	-0.1707
		-9.5	0.0077	0.1273
		-9	0.0076	0.1023
		-8.5	0.0075	0.0860
		-8	0.0074	0.0745
		-7.5	0.0072	0.0659
		-7	0.0071	0.0593
		-6.5	0.0069	0.0539
		-6	0.0068	0.0495
		-5.5	0.0066	0.0457

		-5	0.0064	0.0424

14 lentelė

Tiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. maksimumo konvergavimo greičio tyrimo, kai n ir x_2 fiksuoti, rezultatai

x_1	n	x_2	$\lvert P(Z_{N_n} < a_n + b_n x) - \Psi(x_1, x_2) \rvert$	$\Delta_{N_n}(x_1, x_2)$
-10	100	-1	0.0078	0.1707
-9			0.0076	0.1023
-8			0.0074	0.0745
-7			0.0071	0.0593
-6			0.0068	0.0495
-5			0.0064	0.0424
-4			0.0059	0.0367
-3			0.0052	0.0313
-2			0.0044	0.0249
-1			0.0033	0.0143

15 lentelė

Tiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. maksimumo konvergavimo greičio tyrimo, kai x_1 ir x_2 fiksuoti, rezultatai

x_1	x_2	n	$\lvert P(Z_{N_n} < a_n + b_n x) - \Psi(x_1, x_2) \rvert$	$\Delta_{N_n}(x_1, x_2)$
-2	-3	20	0.0267	0.5517
		35	0.0152	0.1554
		50	0.0106	0.0900
		65	0.0082	0.0633
		80	0.0066	0.0488
		95	0.0056	0.0397
		110	0.0048	0.0334
		125	0.0042	0.0289
		140	0.0038	0.0254
		155	0.0034	0.0227

		170	0.0031	0.0205
		185	0.0029	0.0187
		200	0.0026	0.0172
		215	0.0025	0.0159
		230	0.0023	0.0148
		245	0.0022	0.0138
		260	0.0020	0.0130
		275	0.0019	0.0122
		290	0.0018	0.0116
		305	0.0017	0.0110
		320	0.0017	0.0104
		335	0.0016	0.0100
		350	0.0015	0.0095

16 lentelė

Tiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. minimumo konvergavimo greičio tyrimo, kai *n* fiksuotas, $|P(W_{N_n} < c_n + d_n x) - \Phi(x_1, x_2)|$ *10^{-3} rezultatai

x_1 \ x_2	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28
1	0.1668	0.1801	0.1922	0.2033	0.2133	0.2133	0.2224	0.2308	0.2383	0.2452
1.1	0.3070	0.3340	0.3593	0.3832	0.4055	0.4055	0.4265	0.4462	0.4647	0.4821
1.2	0.3122	0.3410	0.3684	0.3942	0.4187	0.4187	0.4419	0.4639	0.4847	0.5044
1.3	0.3059	0.3347	0.3622	0.3882	0.4130	0.4130	0.4365	0.4589	0.4801	0.5003
1.4	0.2992	0.3277	0.3549	0.3807	0.4053	0.4053	0.4287	0.4510	0.4722	0.4924
1.5	0.2935	0.3216	0.3485	0.3741	0.3984	0.3984	0.4216	0.4436	0.4646	0.4846
1.6	0.2888	0.3166	0.3432	0.3684	0.3925	0.3925	0.4154	0.4372	0.4580	0.4779
1.7	0.2850	0.3125	0.3388	0.3638	0.3876	0.3876	0.4103	0.4319	0.4525	0.4721
1.8	0.2818	0.3091	0.3351	0.3599	0.3835	0.3835	0.4059	0.4273	0.4477	0.4672
1.9	0.2791	0.3062	0.3320	0.3566	0.3800	0.3800	0.4022	0.4234	0.4437	0.4629
2	0.2768	0.3037	0.3293	0.3537	0.3770	0.3770	0.3991	0.4201	0.4402	0.4593

17 lentelė

Tiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. minimumo konvergavimo greičio tyrimo, kai *n* fiksuotas, $\Delta_{N_n}(x_1, x_2)$ rezultatai

x_1 \ x_2	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28
1	0.0054	0.0055	0.0056	0.0057	0.0058	0.0058	0.0059	0.0060	0.0061	0.0061
1.1	0.0069	0.0070	0.0071	0.0072	0.0073	0.0074	0.0075	0.0075	0.0076	0.0076
1.2	0.0074	0.0075	0.0076	0.0077	0.0078	0.0079	0.0079	0.0080	0.0081	0.0081
1.3	0.0077	0.0078	0.0079	0.0080	0.0081	0.0082	0.0083	0.0083	0.0084	0.0085
1.4	0.0081	0.0082	0.0083	0.0084	0.0084	0.0085	0.0086	0.0087	0.0087	0.0088
1.5	0.0084	0.0085	0.0086	0.0087	0.0088	0.0089	0.0090	0.0090	0.0091	0.0091
1.6	0.0089	0.0090	0.0091	0.0092	0.0093	0.0094	0.0094	0.0095	0.0096	0.0096
1.7	0.0096	0.0097	0.0098	0.0099	0.0099	0.0100	0.0101	0.0102	0.0102	0.0103
1.8	0.0105	0.0106	0.0107	0.0108	0.0109	0.0110	0.0111	0.0111	0.0112	0.0112
1.9	0.0121	0.0122	0.0123	0.0123	0.0124	0.0125	0.0126	0.0126	0.0127	0.0128
2	0.0148	0.0149	0.0150	0.0151	0.0152	0.0152	0.0153	0.0154	0.0154	0.0155

18 lentelė

Tiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. minimumo konvergavimo greičio tyrimo, kai *n* ir x_1 fiksuoti, rezultatai

x_1	n	x_2	$\lvert P(W_{N_n} < c_n + d_n x) - \Phi(x_1, x_2) \rvert * 10^{-3}$	$\Delta_{N_n}(x_1, x_2)$
0.5	1000	5	0.1489	0.0064
		6	0.1482	0.0066
		7	0.1468	0.0067
		8	0.1451	0.0068
		9	0.1435	0.0069
		10	0.1418	0.0070
		11	0.1403	0.0071
		12	0.1389	0.0072
		13	0.1375	0.0074

		14	0.1363	0.0075
		15	0.1352	0.0076
		16	0.1342	0.0077
		17	0.1332	0.0079
		18	0.1323	0.0080
		19	0.1315	0.0082
		20	0.1307	0.0084
		21	0.1300	0.0086
		22	0.1293	0.0089
		23	0.1287	0.0091
		24	0.1281	0.0095
		25	0.1276	0.0098
		26	0.1271	0.0103
		27	0.1266	0.0108
		28	0.1261	0.0113
		29	0.1257	0.0121
		30	0.1253	0.0130

19 lentelė

Tiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. minimumo konvergavimo greičio tyrimo, kai *n* ir x_2 fiksuoti, rezultatai

x_1	n	x_2	$\lvert P(W_{N_n} < c_n + d_n x) - \Phi(x_1, x_2) \rvert * 10^{-3}$	$\Delta_{N_n}(x_1, x_2)$
10	1000	2	0.5378	0.0085
11			0.5354	0.0086
12			0.5327	0.0087
13			0.5300	0.0088
14			0.5272	0.0089
15			0.5246	0.0091
16			0.5220	0.0092
17			0.5195	0.0093
18			0.5171	0.0095

19			0.5149	0.0097
20			0.5127	0.0099
21			0.5107	0.0101
22			0.5087	0.0103
23			0.5069	0.0106
24			0.5051	0.0109
25			0.5035	0.0113
26			0.5019	0.0117
27			0.5004	0.0122
28			0.4989	0.0128
29			0.4976	0.0135
30			0.4963	0.0144

20 lentelė

Tiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. minimumo konvergavimo greičio tyrimo, kai x_1 ir x_2 fiksuoti, rezultatai

x_1	x_2	n	$\lvert P(W_{N_n} < c_n + d_n x) - \Phi(x_1, x_2) \rvert$	$\Delta_{N_n}(x_1, x_2)$
1	7	100	0.0032	0.0886
		150	0.0021	0.0546
		200	0.0016	0.0396
		250	0.0013	0.0311
		300	0.0010	0.0256
		350	0.0009	0.0218
		400	0.0008	0.0190
		450	0.0007	0.0168
		500	0.0006	0.0151
		550	0.0006	0.0136
		600	0.0005	0.0125
		650	0.0005	0.0115
		700	0.0004	0.0107
		750	0.0004	0.0099

		800	0.0004	0.0093
		850	0.0004	0.0087
		900	0.0003	0.0082
		950	0.0003	0.0078
		1000	0.0003	0.0074

21 lentelė

Tiesiškai normuoto dvimačio eksponentinio skirstinio minimumo konvergavimo greičio tyrimo, kai *n* fiksuotas, $|P(W_{N_n} < c_n + d_n x) - \Phi(x_1, x_2)|$ rezultatai

x_1 \ x_2	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
1	0.1182	0.1297	0.1407	0.1511	0.1609	0.1701	0.1789	0.1872	0.1951	0.2025
1.1	0.1200	0.1317	0.1428	0.1534	0.1633	0.1727	0.1817	0.1901	0.1981	0.2057
1.2	0.1212	0.1330	0.1442	0.1549	0.1649	0.1745	0.1835	0.1920	0.2001	0.2078
1.3	0.1220	0.1339	0.1452	0.1559	0.1660	0.1756	0.1847	0.1933	0.2015	0.2092
1.4	0.1226	0.1346	0.1459	0.1567	0.1668	0.1765	0.1856	0.1943	0.2025	0.2102
1.5	0.1230	0.1350	0.1464	0.1572	0.1674	0.1771	0.1863	0.1950	0.2032	0.2110
1.6	0.1234	0.1354	0.1468	0.1576	0.1679	0.1776	0.1868	0.1955	0.2038	0.2116
1.7	0.1236	0.1357	0.1471	0.1580	0.1682	0.1780	0.1872	0.1959	0.2042	0.2121
1.8	0.1238	0.1359	0.1474	0.1582	0.1685	0.1783	0.1875	0.1962	0.2046	0.2124
1.9	0.1240	0.1361	0.1475	0.1584	0.1687	0.1785	0.1877	0.1965	0.2048	0.2127
2	0.1241	0.1362	0.1477	0.1586	0.1689	0.1787	0.1880	0.1967	0.2051	0.2130

22 lentelė

Tiesiškai normuoto dvimačio eksponentinio skirstinio minimumo konvergavimo greičio tyrimo, kai *n* fiksuotas, $\Delta_{N_n}(x_1, x_2)$ rezultatai

x_1 \ x_2	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
1	0.0045	0.0045	0.0046	0.0046	0.0046	0.0047	0.0047	0.0047	0.0047	0.0047
1.1	0.0045	0.0046	0.0046	0.0046	0.0046	0.0047	0.0047	0.0047	0.0047	0.0047

1.2	0.0045	0.0046	0.0046	0.0046	0.0046	0.0047	0.0047	0.0047	0.0047	0.0047
1.3	0.0045	0.0046	0.0046	0.0046	0.0046	0.0047	0.0047	0.0047	0.0047	0.0047
1.4	0.0045	0.0046	0.0046	0.0046	0.0047	0.0047	0.0047	0.0047	0.0047	0.0047
1.5	0.0045	0.0046	0.0046	0.0046	0.0047	0.0047	0.0047	0.0047	0.0047	0.0047
1.6	0.0045	0.0046	0.0046	0.0046	0.0047	0.0047	0.0047	0.0047	0.0047	0.0047
1.7	0.0045	0.0046	0.0046	0.0046	0.0047	0.0047	0.0047	0.0047	0.0047	0.0047
1.8	0.0045	0.0046	0.0046	0.0046	0.0047	0.0047	0.0047	0.0047	0.0047	0.0047
1.9	0.0045	0.0046	0.0046	0.0046	0.0047	0.0047	0.0047	0.0047	0.0047	0.0047
2	0.0045	0.0046	0.0046	0.0046	0.0047	0.0047	0.0047	0.0047	0.0047	0.0047

23 lentelė

Tiesiškai normuoto dvimačio eksponentinio skirstinio minimumo konvergavimo greičio tyrimo, kai *n* ir x_1 fiksuoti, rezultatai

x_2	n	x_1	$\lvert P(W_{N_n} < c_n + d_n x) - \Phi(x_1, x_2) \rvert * 10^{-3}$	$\Delta_{N_n}(x_1, x_2)$
1	1000	1	0.0660	0.0042
		2	0.1245	0.0045
		3	0.1564	0.0046
		4	0.1750	0.0047
		5	0.1868	0.0047
		6	0.1946	0.0047
		7	0.2002	0.0047
		8	0.2042	0.0047
		9	0.2072	0.0047
		10	0.2096	0.0047
		11	0.2114	0.0047
		12	0.2129	0.0047
		13	0.2141	0.0047
		14	0.2150	0.0047
		15	0.2158	0.0047
		16	0.2165	0.0047

		17	0.2171	0.0048
		18	0.2176	0.0048
		19	0.2181	0.0048
		20	0.2184	0.0048
		21	0.2188	0.0048
		22	0.2191	0.0048
		23	0.2193	0.0048
		24	0.2195	0.0048
		25	0.2197	0.0048
		26	0.2199	0.0048
		27	0.2201	0.0048
		28	0.2202	0.0048
		29	0.2204	0.0048
		30	0.2205	0.0048

24 lentelė

Tiesiškai normuoto dvimačio eksponentinio skirstinio minimumo konvergavimo greičio tyrimo, kai n ir x_2 fiksuoti, rezultatai

x_1	n	x_2	$\lvert P(W_{N_n} < c_n + d_n x) - \Phi(x_1, x_2) \rvert * 10^{-3}$	$\Delta_{N_n}(x_1, x_2)$
1	1000	2	0.0660	0.0042
2			0.1245	0.0045
3			0.1564	0.0046
4			0.1750	0.0047
5			0.1868	0.0047
6			0.1946	0.0047
7			0.2002	0.0047
8			0.2042	0.0047
9			0.2072	0.0047
10			0.2096	0.0047
11			0.2114	0.0047
12			0.2129	0.0047

13			0.2141	0.0047
14			0.2150	0.0047
15			0.2158	0.0048
16			0.2165	0.0048
17			0.2171	0.0048
18			0.2176	0.0048
19			0.2181	0.0048
20			0.2184	0.0048
21			0.2188	0.0048
22			0.2191	0.0048
23			0.2193	0.0048
24			0.2195	0.0048
25			0.2197	0.0048
26			0.2199	0.0048
27			0.2201	0.0048
28			0.2202	0.0048
29			0.2204	0.0048
30			0.2205	0.0048

25 lentelė

Tiesiškai normuoto dvimačio logistinio skirstinio minimumo konvergavimo greičio tyrimo, kai *n* fiksuotas, $|P(W_{N_n} < c_n + d_n x) - \Phi(x_1, x_2)|$ *10^{-4} rezultatai

x_1 \ x_2	-20	-19	-18	-17	-16	-15	-14	-13	-12	-11
-15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-14	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
-13	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
-12	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004
-11	0.0008	0.0010	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011
-10	0.0015	0.0022	0.0027	0.0029	0.0030	0.0030	0.0031	0.0031	0.0031	0.0030
-9	0.0022	0.0042	0.0061	0.0073	0.0079	0.0082	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083
-8	0.0027	0.0061	0.0113	0.0165	0.0199	0.0215	0.0222	0.0224	0.0225	0.0225

-7	0.0029	0.0073	0.0165	0.0307	0.0449	0.0541	0.0585	0.0603	0.0609	0.0610
-6	0.0030	0.0079	0.0199	0.0449	0.0835	0.1221	0.1471	0.1590	0.1637	0.1651
-5	0.0030	0.0082	0.0215	0.0541	0.1221	0.2270	0.3318	0.3996	0.4317	0.4436

26 lentelė

Tiesiškai normuoto dvimačio logistinio skirstinio minimumo konvergavimo greičio tyrimo, kai *n* fiksuotas, $\Delta_{N_n}(x_1, x_2)$ *10^{-3} rezultatai

x_2 / x_1	-20	-19	-18	-17	-16	-15	-14	-13	-12	-11
-15	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004	0.0011	0.0030	0.0081	0.0221	0.0601	0.1634
-14	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004	0.0011	0.0030	0.0081	0.0221	0.0601	0.1634
-13	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004	0.0011	0.0030	0.0082	0.0221	0.0601	0.1634
-12	0.0001	0.0001	0.0002	0.0005	0.0012	0.0031	0.0082	0.0222	0.0602	0.1634
-11	0.0001	0.0002	0.0003	0.0006	0.0013	0.0032	0.0083	0.0223	0.0603	0.1635
-10	0.0003	0.0004	0.0005	0.0008	0.0015	0.0034	0.0086	0.0226	0.0606	0.1638
-9	0.0004	0.0007	0.0010	0.0015	0.0023	0.0042	0.0093	0.0233	0.0613	0.1646
-8	0.0005	0.0010	0.0019	0.0028	0.0040	0.0061	0.0114	0.0254	0.0634	0.1666
-7	0.0008	0.0015	0.0028	0.0051	0.0077	0.0109	0.0167	0.0309	0.0690	0.1722
-6	0.0015	0.0023	0.0040	0.0077	0.0138	0.0210	0.0296	0.0453	0.0839	0.1873
-5	0.0034	0.0042	0.0061	0.0109	0.0210	0.0375	0.0571	0.0805	0.1230	0.2278

27 lentelė

Tiesiškai normuoto dvimačio logistinio skirstinio minimumo konvergavimo greičio tyrimo, kai *n* ir x_1 fiksuoti, rezultatai

x_1	n	x_2	$\lvert P(W_{N_n} < c_n + d_n x) - \Phi(x_1, x_2) \rvert$ *10^{-3}	$\Delta_{N_n}(x_1, x_2)$
-6	1000	-20	0.0000	0.0000
		-19	0.0000	0.0000
		-18	0.0000	0.0000
		-17	0.0000	0.0000
		-16	0.0000	0.0000

		-15	0.0000	0.0000
		-14	0.0000	0.0000
		-13	0.0000	0.0000
		-12	0.0000	0.0000
		-11	0.0000	0.0000
		-10	0.0000	0.0001
		-9	0.000	0.0002
		-8	0.0003	0.0004
		-7	0.0007	0.0009
		-6	0.0012	0.0017
		-5	0.0018	0.0025

28 lentelė

Tiesiškai normuoto dvimačio logistinio skirstinio minimumo konvergavimo greičio tyrimo, kai n ir x_2 fiksuoti, rezultatai

x_1	n	x_2	$\lvert P(W_{N_n} < c_n + d_n x) - \Phi(x_1, x_2) \rvert * 10^{-3}$	$\Delta_{N_n}(x_1, x_2)$
-15	1000	-7	0.0003	0.0000
-14			0.0008	0.0000
-13			0.0023	0.0000
-12			0.0061	0.0000
-11			0.0164	0.0000
-10			0.0432	0.0000
-9			0.1085	0.0002
-8			0.2447	0.0003
-7			0.4545	0.0006
-6			0.6626	0.0009
-5			0.7917	0.0011

29 lentelė

Tiesiškai normuoto dvimačio logistinio skirstinio minimumo konvergavimo greičio tyrimo, kai x_1 ir x_2 fiksuoti, rezultatai

x_1	x_2	n	$\lvert P(W_{N_n} < c_n + d_n x) - \Phi(x_1, x_2) \rvert$	$\Delta_{N_n}(x_1, x_2)$
-1	2	100	0.0047	0.1331
		150	0.0047	0.0824
		200	0.0047	0.0609
		250	0.0047	0.0490
		300	0.0047	0.0415
		350	0.0048	0.0362
		400	0.0048	0.0324
		450	0.0048	0.0295
		500	0.0048	0.0271
		550	0.0048	0.0253
		600	0.0048	0.0237
		650	0.0048	0.0224
		700	0.0048	0.0213
		750	0.0048	0.0203
		800	0.0048	0.0195
		850	0.0048	0.0188
		900	0.0048	0.0181
		950	0.0048	0.0175
		1000	0.0048	0.0170

30 lentelė

Netiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. minimumo konvergavimo greičio tyrimo, kai *n* fiksuotas, $\lvert P(W_{N_n} < c_n + d_n x) - \Phi(x_1, x_2) \rvert$ *10^{-3} rezultatai

x_2 / x_1	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28
1	0.0278	0.0328	0.0375	0.0419	0.0460	0.0499	0.0536	0.0570	0.0602	0.0632

1.1	0.0978	0.1078	0.1171	0.1260	0.1343	0.1421	0.1495	0.1564	0.1630	0.1692
1.2	0.1128	0.1239	0.1345	0.1444	0.1538	0.1627	0.1710	0.1789	0.1864	0.1935
1.3	0.1182	0.1297	0.1407	0.1511	0.1609	0.1701	0.1789	0.1872	0.1951	0.2025
1.4	0.1207	0.1324	0.1436	0.1542	0.1642	0.1737	0.1827	0.1911	0.1992	0.2068
1.5	0.1220	0.1339	0.1452	0.1559	0.1660	0.1756	0.1847	0.1933	0.2015	0.2092
1.6	0.1228	0.1348	0.1462	0.1569	0.1671	0.1768	0.1860	0.1946	0.2029	0.2107
1.7	0.1234	0.1354	0.1468	0.1576	0.1679	0.1776	0.1868	0.1955	0.2038	0.2116
1.8	0.1237	0.1358	0.1472	0.1581	0.1684	0.1781	0.1873	0.1961	0.2044	0.2123
1.9	0.1240	0.1361	0.1475	0.1584	0.1687	0.1785	0.1877	0.1965	0.2048	0.2127
2	0.1242	0.1363	0.1478	0.1587	0.1690	0.1788	0.1880	0.1968	0.2052	0.2131

31 lentelė

Netiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. minimumo konvergavimo greičio tyrimo, kai *n* fiksuotas, $\Delta_{N_n}(x_1, x_2)$ rezultatai

x_2 / x_1	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28
1	0.0064	0.0065	0.0067	0.0069	0.0070	0.0072	0.0073	0.0074	0.0075	0.0076
1.1	0.0077	0.0079	0.0080	0.0081	0.0083	0.0084	0.0085	0.0086	0.0087	0.0087
1.2	0.0082	0.0084	0.0085	0.0086	0.0087	0.0088	0.0089	0.0090	0.0091	0.0092
1.3	0.0086	0.0087	0.0088	0.0089	0.0091	0.0092	0.0093	0.0093	0.0094	0.0095
1.4	0.0089	0.0090	0.0092	0.0093	0.0094	0.0095	0.0096	0.0097	0.0098	0.0099
1.5	0.0093	0.0094	0.0096	0.0097	0.0098	0.0099	0.0100	0.0101	0.0102	0.0103
1.6	0.0098	0.0100	0.0101	0.0102	0.0103	0.0104	0.0106	0.0107	0.0107	0.0108
1.7	0.0105	0.0107	0.0108	0.0109	0.0111	0.0112	0.0113	0.0114	0.0115	0.0116
1.8	0.0115	0.0117	0.0119	0.0120	0.0122	0.0123	0.0124	0.0125	0.0127	0.0128
1.9	0.0132	0.0134	0.0136	0.0137	0.0139	0.0141	0.0142	0.0144	0.0146	0.0147
2	0.0162	0.0164	0.0167	0.0169	0.0172	0.0174	0.0177	0.0179	0.0182	0.0184

32 lentelė

Netiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. minimumo konvergavimo greičio tyrimo, kai n ir x_1 fiksuoti, rezultatai

x_1	n	x_2	$\lvert P(W_{N_n} < c_n + d_n x) - \Phi(x_1, x_2) \rvert * 10^{-4}$	$\Delta_{N_n}(x_1, x_2)$
0.5	1000	5	0.4483	0.0095
		6	0.4739	0.0098
		7	0.4914	0.0101
		8	0.5038	0.0104
		9	0.5130	0.0106
		10	0.5200	0.0108
		11	0.5254	0.0110
		12	0.5297	0.0112
		13	0.5331	0.0115
		14	0.5359	0.0117
		15	0.5382	0.0119
		16	0.5402	0.0122
		17	0.5418	0.0125
		18	0.5432	0.0128
		19	0.5444	0.0132
		20	0.5455	0.0135
		21	0.5464	0.0140
		22	0.5472	0.0144
		23	0.5479	0.0150
		24	0.5485	0.0156
		25	0.5490	0.0163
		26	0.5495	0.0171
		27	0.5500	0.0180
		28	0.5504	0.0192
		29	0.5507	0.0205
		30	0.5511	0.0222

33 lentelė

Netiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. minimumo konvergavimo greičio tyrimo, kai n ir x_2 fiksuoti, rezultatai

x_1	n	x_2	$\lvert P(W_{N_n} < c_n + d_n x) - \Phi(x_1, x_2) \rvert * 10^{-3}$	$\Delta_{N_n}(x_1, x_2)$
10	1000	2	0.2096	0.0127
11			0.2114	0.0129
12			0.2129	0.0131
13			0.2141	0.0134
14			0.2150	0.0136
15			0.2158	0.0139
16			0.2165	0.0141
17			0.2171	0.0145
18			0.2176	0.0148
19			0.2181	0.0152
20			0.2184	0.0156
21			0.2188	0.0160
22			0.2191	0.0166
23			0.2193	0.0172
24			0.2195	0.0179
25			0.2197	0.0187
26			0.2199	0.0196
27			0.2201	0.0207
28			0.2202	0.0220
29			0.2204	0.0236
30			0.2205	0.0256

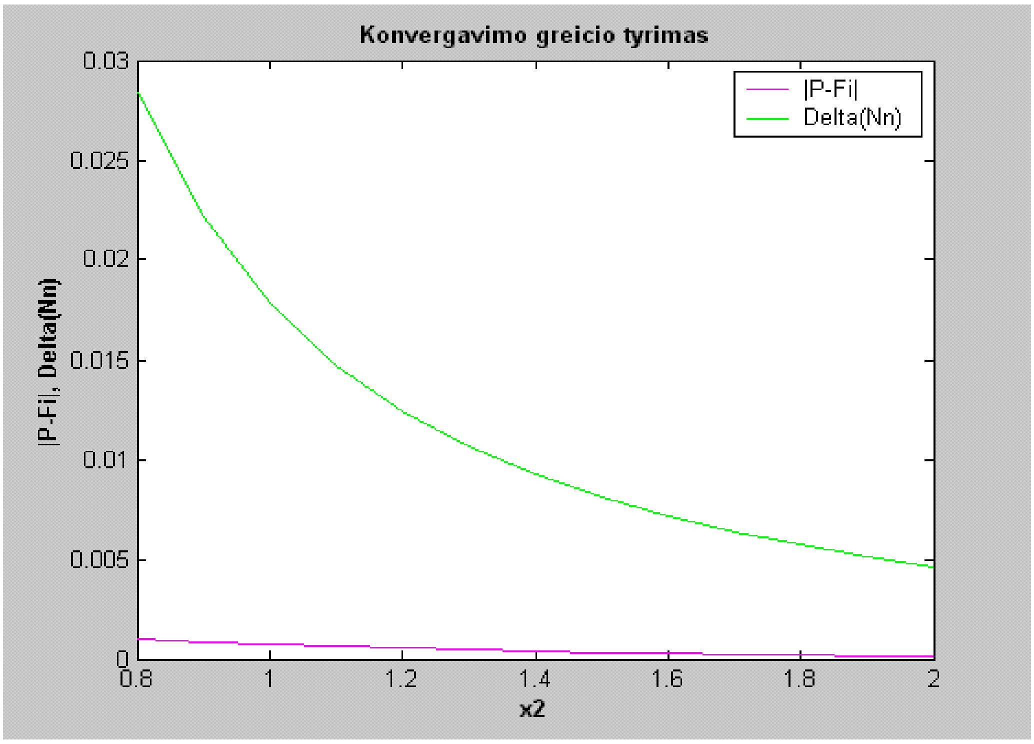
34 lentelė

Netiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. minimumo konvergavimo greičio tyrimo, kai x_1 ir x_2 fiksuoti, rezultatai

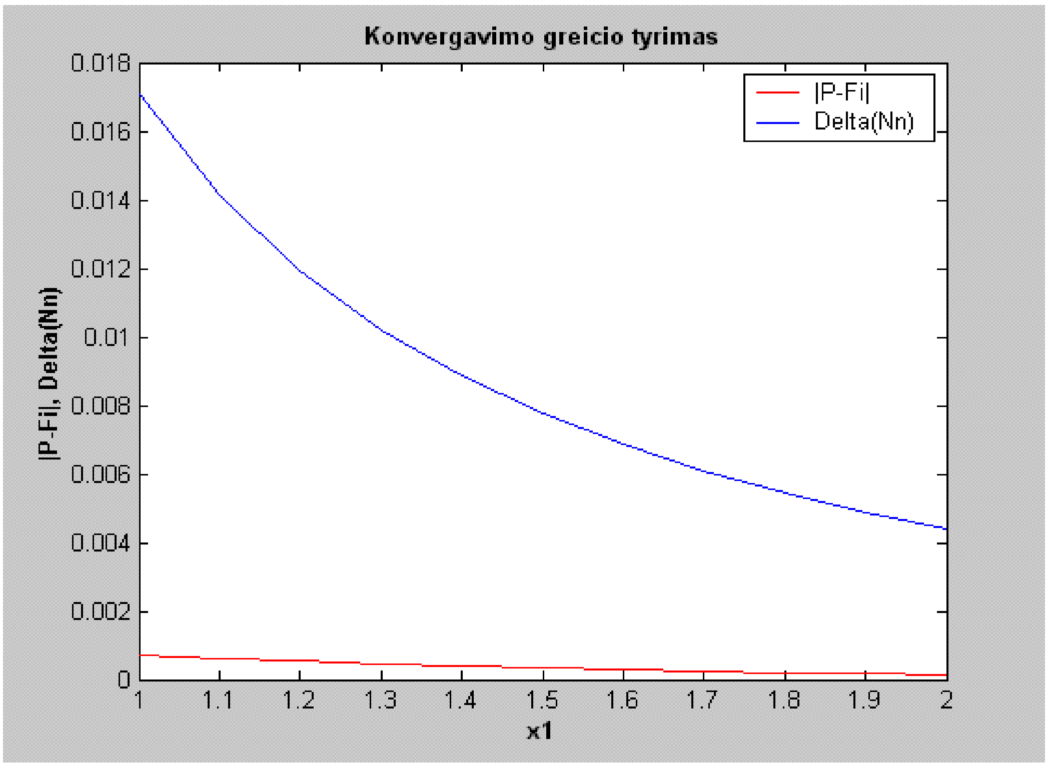
x_1	x_2	n	$\lvert P(W_{N_n} < c_n + d_n x) - \Phi(x_1, x_2) \rvert$	$\Delta_{N_n}(x_1, x_2)$
1	7	100	0.0011	0.1033
		150	0.0008	0.0627

		200	0.0006	0.0452
		250	0.0005	0.0354
		300	0.0004	0.0291
		350	0.0003	0.0247
		400	0.0003	0.0214
		450	0.0003	0.0190
		500	0.0002	0.0170
		550	0.0002	0.0154
		600	0.0002	0.0141
		650	0.0002	0.0130
		700	0.0002	0.0120
		750	0.0002	0.0112
		800	0.0001	0.0105
		850	0.0001	0.0098
		900	0.0001	0.0093
		950	0.0001	0.0088
		1000	0.0001	0.0083

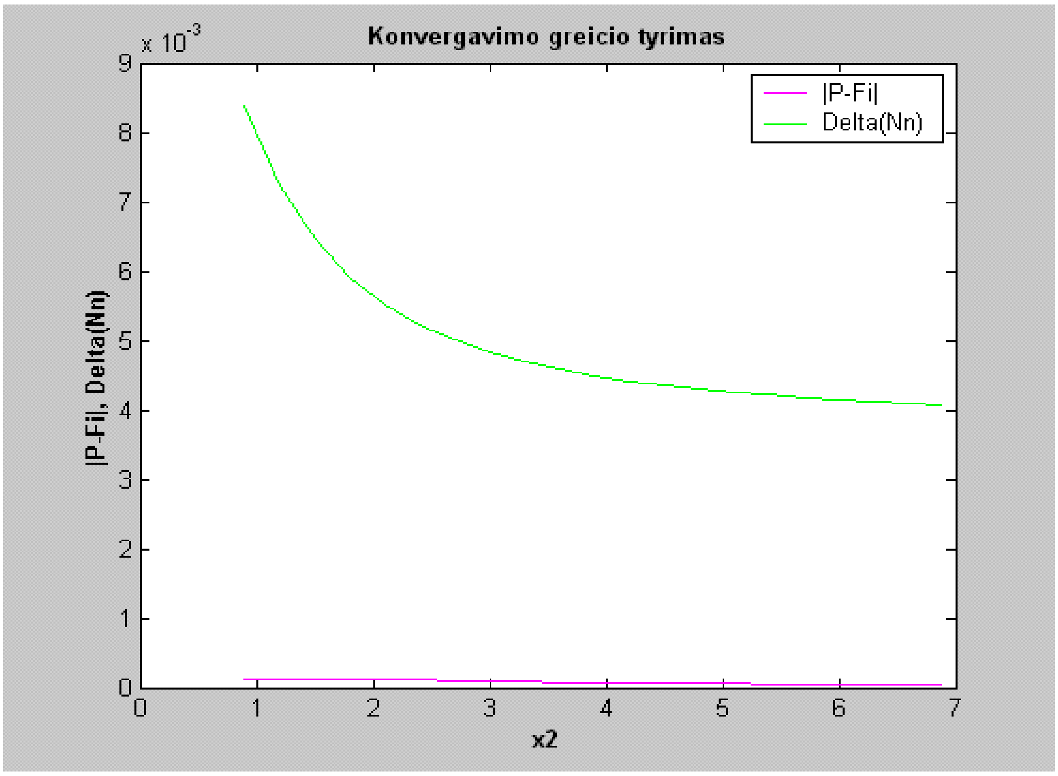
2 PRIEDAS



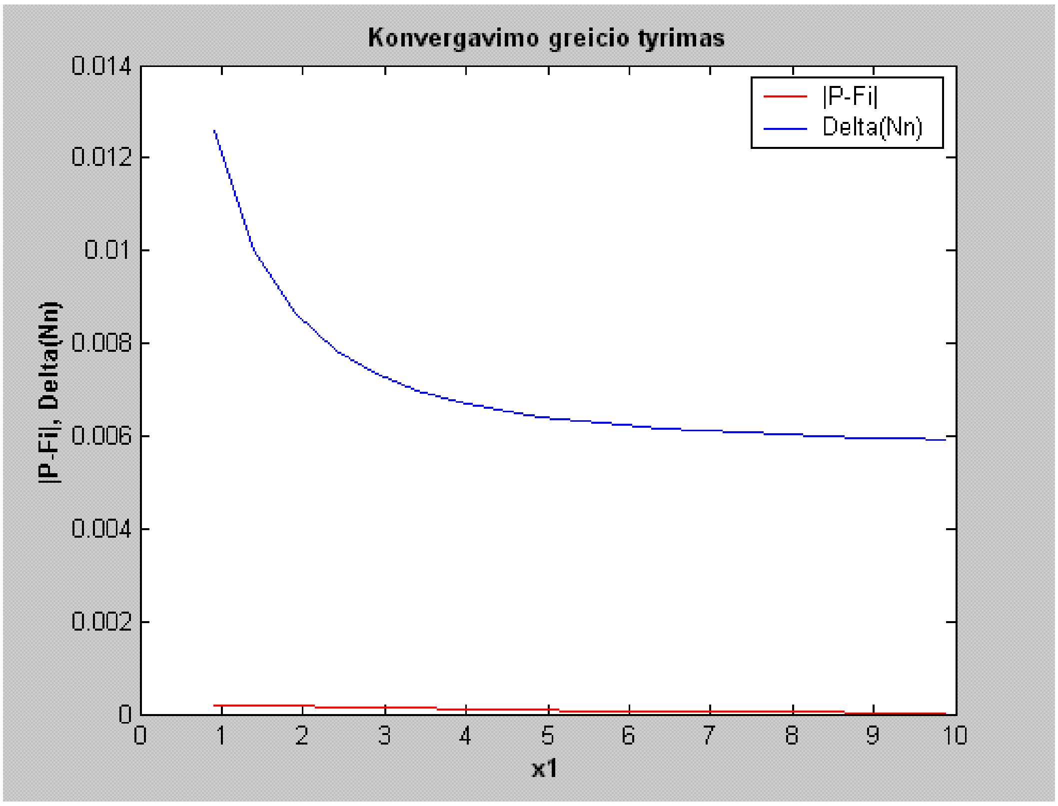
1 pav. Tiesiškai normuoto dvimačio eksponentinio skirstinio maksimumo konvergavimo greičio tyrimas, kai n ir x_1 fiksuoti



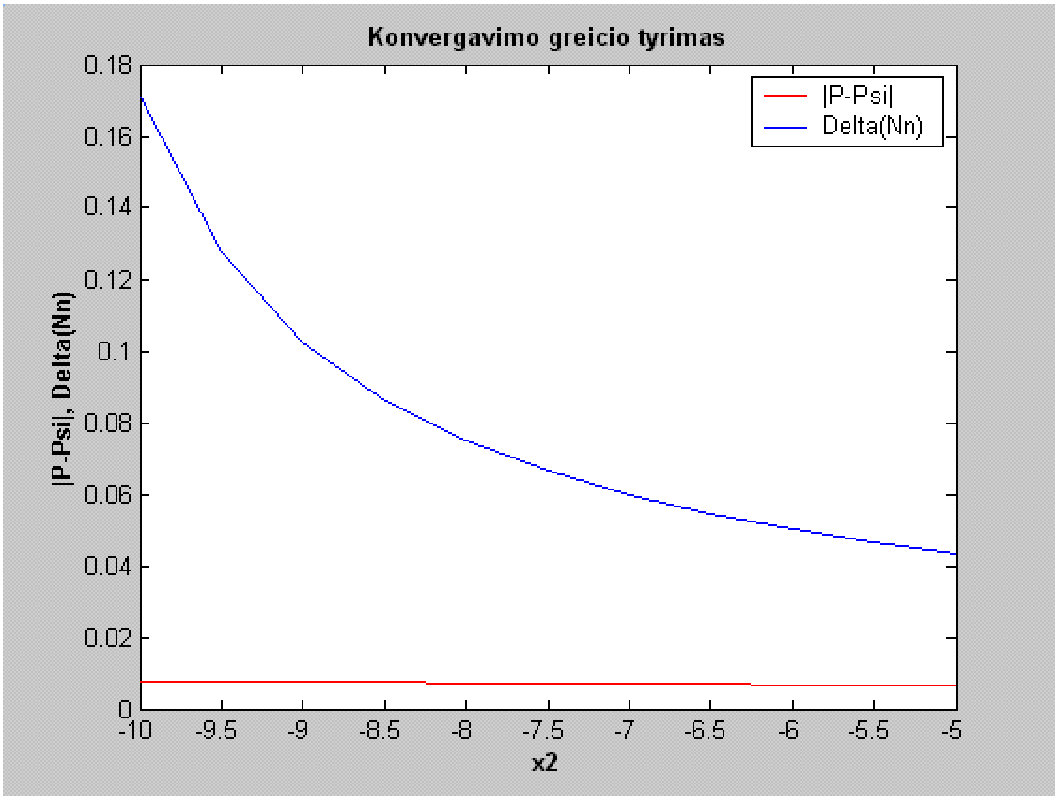
2 pav. Tiesiškai normuoto dvimačio eksponentinio skirstinio maksimumo konvergavimo greičio tyrimas, kai n ir x_2 fiksuoti



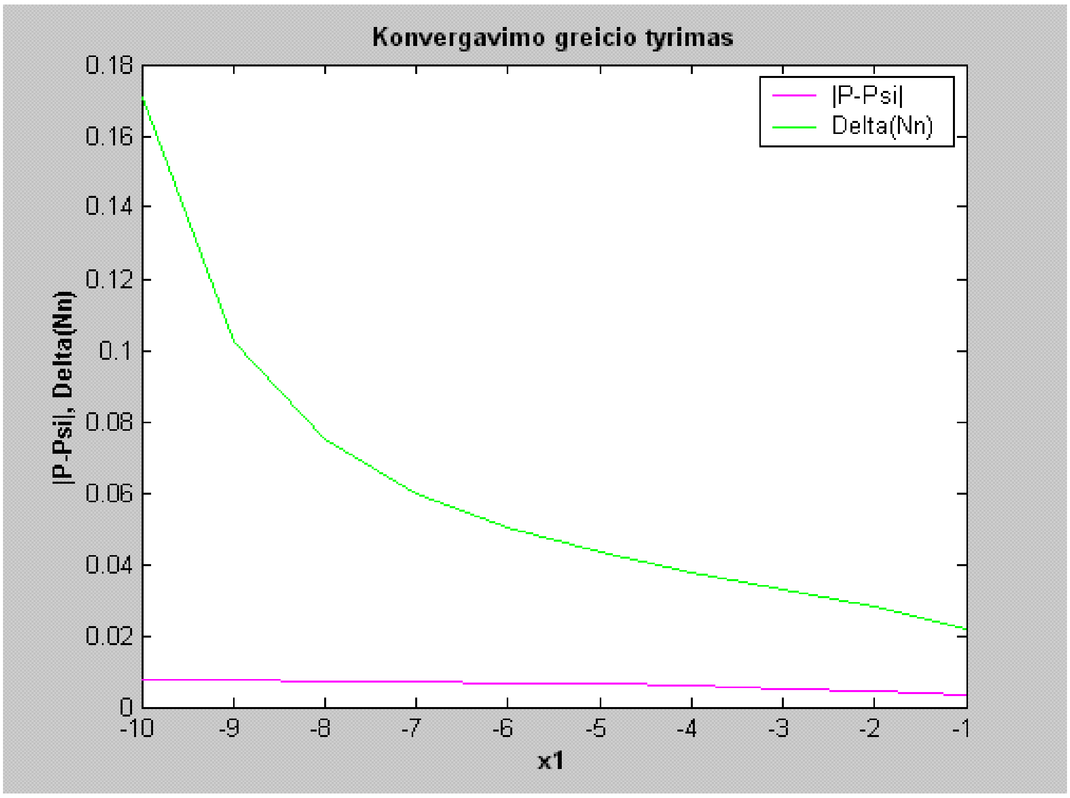
3 pav. Tiesiškai normuoto dvimačio Pareto skirstinio maksimumo konvergavimo greičio tyrimas, kai n ir x_1 fiksuoti



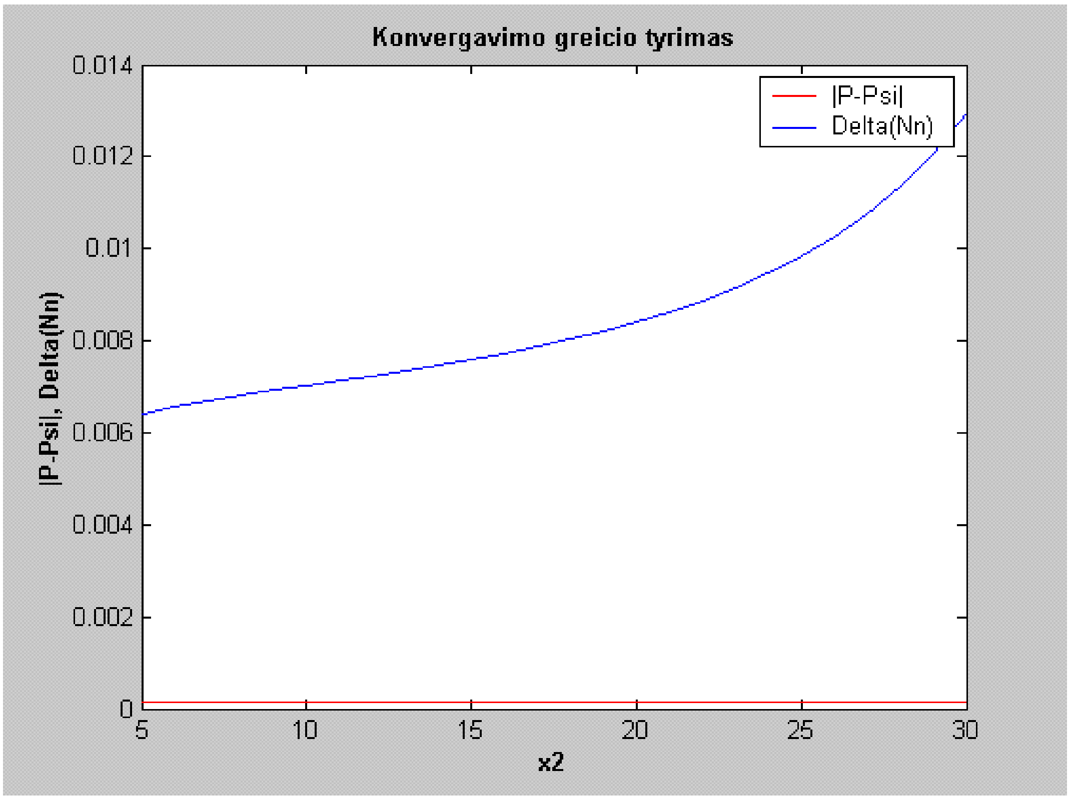
4 pav. Tiesiškai normuoto dvimačio Pareto skirstinio maksimumo konvergavimo greičio tyrimas, kai n ir x_2 fiksuoti



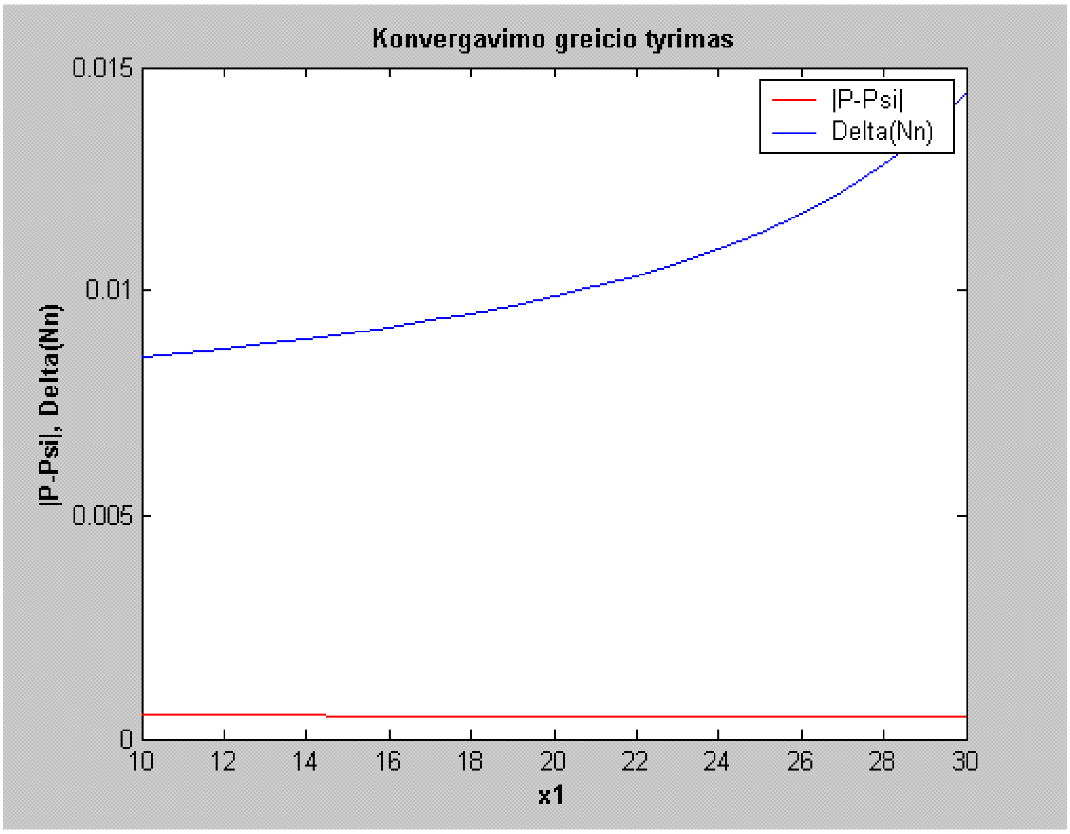
5 pav. Tiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. maksimumo konvergavimo greičio tyrimas, kai n ir x_1 fiksuoti



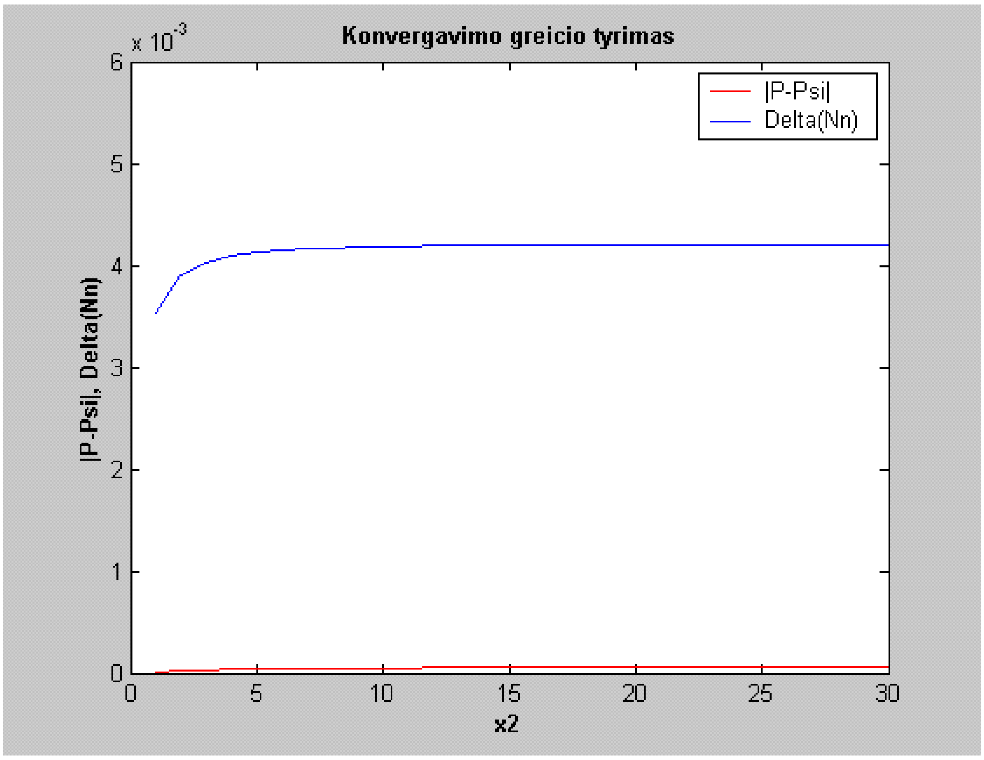
6 pav. Tiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. maksimumo konvergavimo greičio tyrimas, kai n ir x_2 fiksuoti



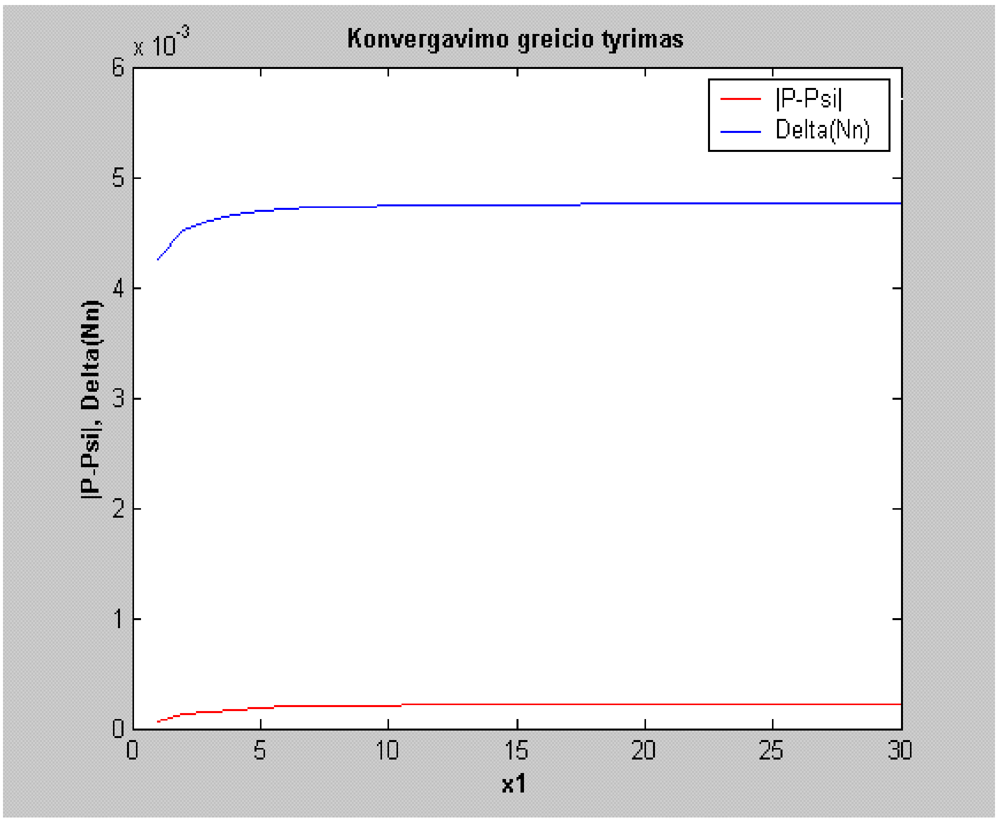
7 pav. Tiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. minimumo konvergavimo greičio tyrimas, kai n ir x_1 fiksuoti



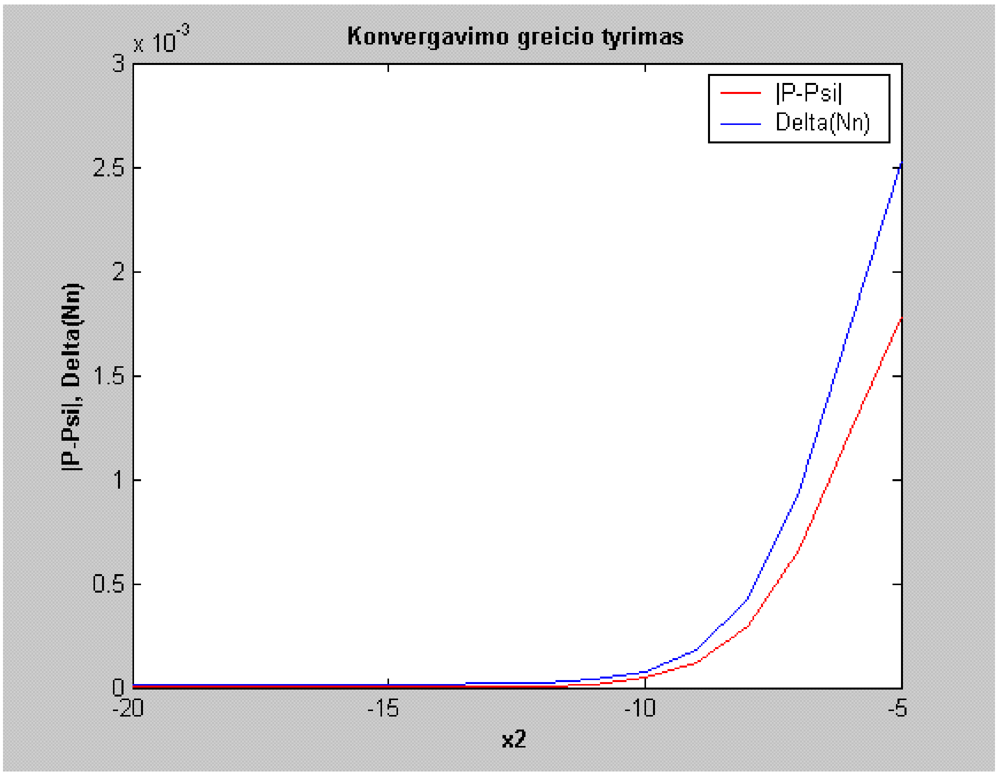
8 pav. Tiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. minimumo konvergavimo greičio tyrimas, kai n ir x_2 fiksuoti



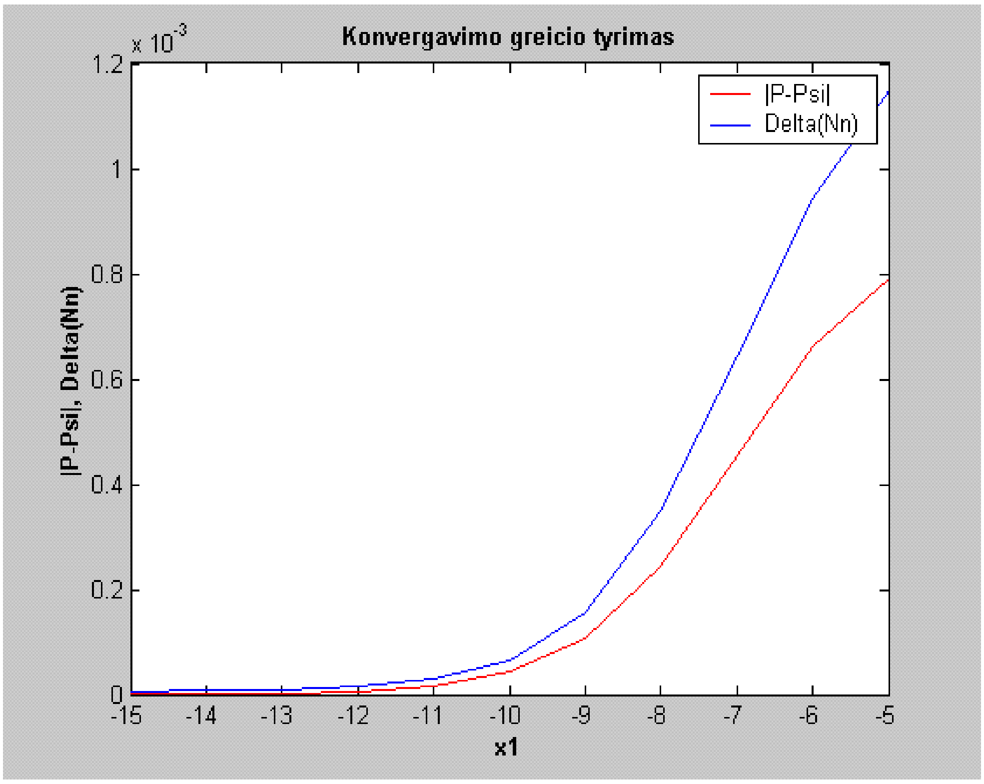
9 pav. Tiesiškai normuoto dvimačio eksponentinio skirstinio minimumo konvergavimo greičio tyrimas, kai n ir x_1 fiksuoti



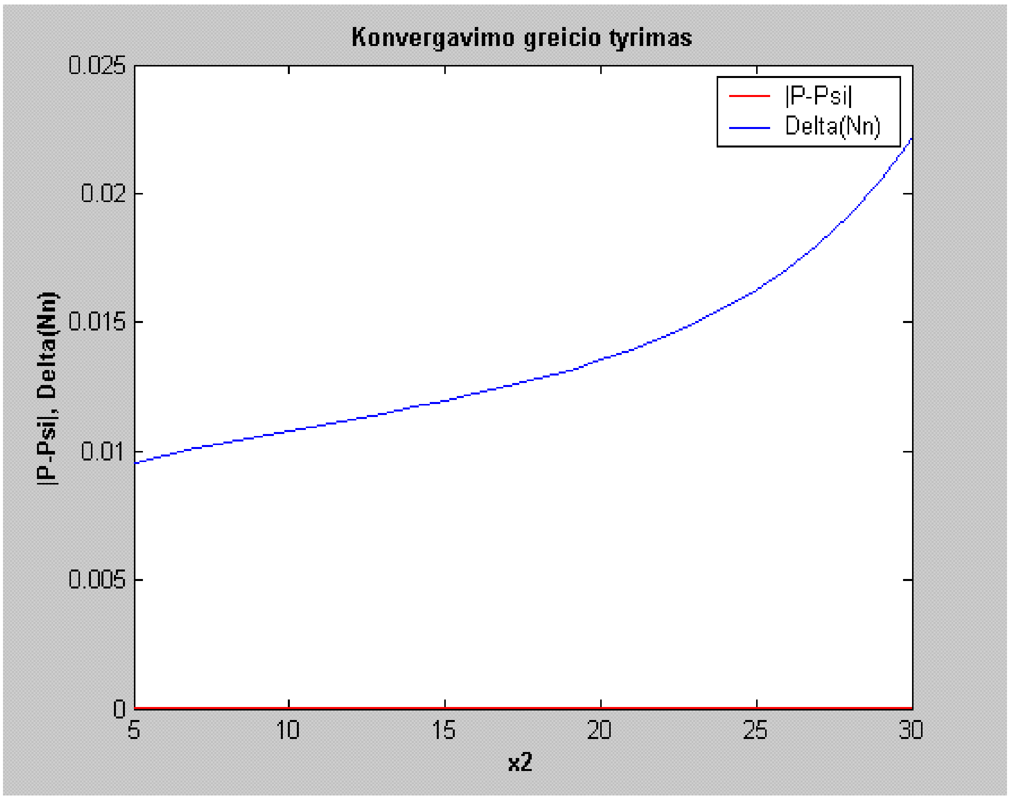
10 pav. Tiesiškai normuoto dvimačio eksponentinio skirstinio minimumo konvergavimo greičio tyrimas, kai n ir x_2 fiksuoti



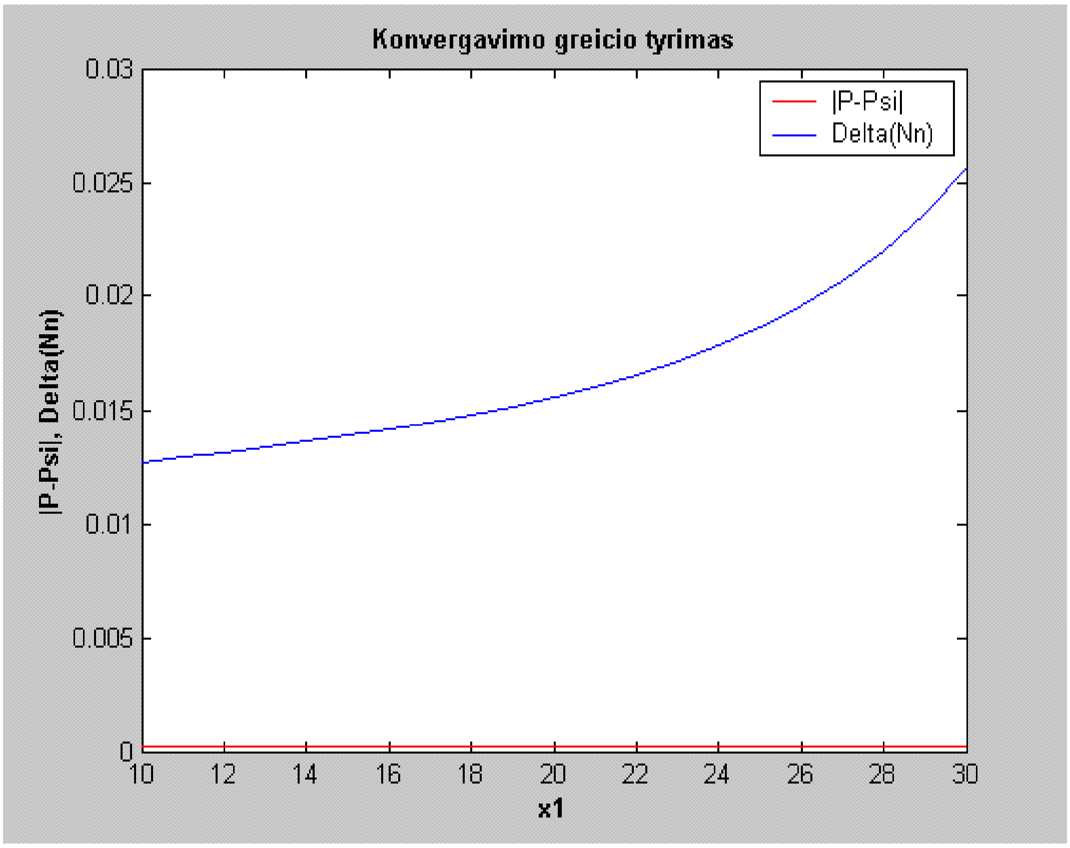
11 pav. Tiesiškai normuoto dvimačio logistinio skirstinio minimumo konvergavimo greičio tyrimas, kai n ir x_1 fiksuoti



12 pav. Tiesiškai normuoto dvimačio logistinio skirstinio minimumo konvergavimo greičio tyrimas, kai n ir x_2 fiksuoti



13 pav. Netiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. minimumo konvergavimo greičio tyrimas, kai n ir x_1 fiksuoti



14 pav. Netiesiškai normuotų tolygiai kvadrate pasiskirsčiusių a.d. minimumo konvergavimo greičio tyrimas, kai n ir x_2 fiksuoti

3 PRIEDAS

1) Failo ‘eksp.m’ turinys

```
function eksp(n,pr1,zingsnis1,pb1,pr2,zingsnis2,pb2)
[x,y]=meshgrid(pr1:zingsnis1:pb1,pr2:zingsnis2:pb2);
an=[log(n),log(n)]; bn=[1,1];
[k,g]=size(x);
for i=1:k
 for j=1:g
  Psi=1./(1+exp(-x)+exp(-y));
  if or(Psi(i,j)>1, Psi(i,j)<0)
   error('Su pasirinktais duomenimis skaiciavimai negalimi Psi!!!')
  else
   F=(1-exp(-(an(1)+bn(1)*x))).*(1-exp(-(an(2)+bn(2)*y)));
   if or(F(i,j)>1, F(i,j)<0)
    error('Su pasirinktais duomenimis skaiciavimai negalimi F!!!')
   else
    P=(1/(n-1))*(F.*(1-1/n))./(1-F.*(1-1/n));
    if or(P(i,j)>1, P(i,j)<0)
     error('Su pasirinktais duomenimis skaiciavimai negalimi P!!!')
    else
     skirt=abs(P-Psi);
     if or(skirt(i,j)>1, skirt(i,j)<0)
      error('Su pasirinktais duomenimis skaiciavimai negalim skirti!!!')
     else
      H=exp(-exp(-x)-exp(-y));
      if or(H(i,j)<0, H(i,j)>1)
       error('Su pasirinktais duomenimis skaiciavimai negalimi H!!!')
      else
       u=exp(-x)+exp(-y)-exp(-x-y)/n;
       if (u(i,j)/n)>=0.5
        error('Su pasirinktais duomenimis skaiciavimai negalimi u!!!')
       else
        v=-exp(-x-y)/n;      q=(2*u.^2)/(3*n);
```

```
     if or(q(i,j)>1, q(i,j)<0)
      error('Su pasirinktais duomenimis skaiciavimai negalimi q!!!')
     else
      s=abs(v)/3;
      if or(s(i,j)>1, s(i,j)<0)
       error('Su pasirinktais duomenimis skaiciavimai negalimi s!!!')
      else
       r1=2.*(u.^2)/n+2.*(u.^4)/(n^2)*1./(1-q);
       r2=abs(v)+(v.^2)/2*1./(1-s);   Delta_n=H.*(r1+r2+r1.*r2);
       narys1=log(4)./(exp(-exp(-x)-exp(-y)+exp(-x-y)/n).*(1-exp(-x)-exp(-y)+exp(-x-y)/n).^2);
       narys2=abs((sqrt(2.718)/n).*(exp(-x)+exp(-y))./(1+exp(-x)+exp(-y)).*(1+(1./(1+exp(-x)+
                  exp(-y)))));
       Delta_Nn=Delta_n.*narys1+narys2;
       if or(Delta_Nn(i,j)>1, Delta_Nn(i,j)<0)
        error('Su pasirinktais duomenimis skaiciavimai negalimi Delta_Nn!!!')
       else
        surf(x,y,skirt)
        title('Konvergavimo greicio tyrimas','Fontsize',10,'Fontweight','Bold');
        Xlabel('x1','Fontsize',10,'Fontweight','Bold');
        Ylabel('x2','Fontsize',10,'Fontweight','Bold');
        Zlabel('|P-Psi|, Delta(Nn)','Fontsize',10,'Fontweight','Bold');
        hold on
        surf(x,y,Delta_Nn)
        legend('|P-Psi|','Delta(Nn)');
        hold off
       end
      end
     end
    end
   end
  end
 end
end
```

```
  end
end
end
disp('Tiksli konvergavimo greicio reiksme')
disp(skirt)
disp('Konvergavimo greicio ivertis')
disp(Delta_Nn)
```

2) <u>Failo 'eksp_x1.m' turinys</u>

```
function eksp_x1(y,n,pr,zingsnis,pb)
x=[pr:zingsnis:pb];
an=[log(n),log(n)]; bn=[1,1];
for i=1:length(x)
 Psi=1./(1+exp(-x)+exp(-y));
 if or(Psi(i)>1, Psi(i)<0)
  error('Su pasirinktais duomenimis skaiciavimai negalimi Psi!!!')
 else
  F=(1-exp(-(an(1)+bn(1)*x))).*(1-exp(-(an(2)+bn(2)*y)));
  if or(F(i)>1, F(i)<0)
   error('Su pasirinktais duomenimis skaiciavimai negalimi F!!!')
  else
   P=(1/(n-1))*(F.*(1-1/n))./(1-F.*(1-1/n));
   if or(P(i)>1, P(i)<0)
    error('Su pasirinktais duomenimis skaiciavimai negalimi P!!!')
   else
    skirt=abs(P-Psi);
    if or(skirt(i)>1, skirt(i)<0)
     error('Su pasirinktais duomenimis skaiciavimai negalimi Skirt!!!')
    else
     H=exp(-exp(-x)-exp(-y));
     if or(H(i)<0, H(i)>1)
      error('Su pasirinktais duomenimis skaiciavimai negalimi H!!!')
     else
      u=exp(-x)+exp(-y)-exp(-x-y)/n;
```

```
if (u(i)/n)>=0.5
 error('Su pasirinktais duomenimis skaiciavimai negalimi u!!!')
else
 v=-exp(-x-y)/n;     q=(2*u.^2)/(3*n);
 if or(q(i)>1,q(i)<0)
  error('Su pasirinktais duomenimis skaiciavimai negalimi q!!!')
 else
  s=abs(v)/3;
  if or(s(i)>1,s(i)<0)
   error('Su pasirinktais duomenimis skaiciavimai negalimi s!!!')
  else
   r1=2.*(u.^2)/n+2.*(u.^4)/(n^2)*1./(1-q);
   r2=abs(v)+(v.^2)/2*1./(1-s);   Delta_n=H.*(r1+r2+r1.*r2);
   narys1=log(4)./(exp(-exp(-x)-exp(-y)+exp(-x-y)/n).*(1-exp(-x)-exp(-y)+exp(-x-y)/n).^2);
   narys2=abs((sqrt(2.718)/n).*(exp(-x)+exp(-y))./(1+exp(-x)+exp(-y)).*(1+(1./(1+exp(-x)+
                   +exp(-y)))));
   Delta_Nn=Delta_n.*narys1+narys2;
   if or(Delta_Nn(i)>1, Delta_Nn(i)<0)
    error('Skaiciavimai negalimi,igyjamos negalimos reiksmes Delta_Nn!!!')
   else
    plot(x,skirt,'r')
    title('Konvergavimo greicio tyrimas','Fontsize',10,'Fontweight','Bold');
    Xlabel('x1','Fontsize',10,'Fontweight','Bold');
    Ylabel('|P-Psi|, Delta(Nn)','Fontsize',10,'Fontweight','Bold');
    hold on
    plot(x,Delta_Nn,'b')
    legend('|P-Psi|','Delta(Nn)');
    hold off
   end
  end
 end
end
end
```

```
    end
   end
  end
 end
end
disp('Tiksli konvergavimo greicio reiksme')
disp(skirt)
disp('Konvergavimo greicio ivertis')
disp(Delta_Nn)
```

3) **<u>Failo ‘eksp_x2.m’ turinys</u>**

```
function eksp_x2(x,n,pr,zingsnis,pb)
y=[pr:zingsnis:pb];
an=[log(n),log(n)]; bn=[1,1];
for i=1:length(y)
 Psi=1./(1+exp(-x)+exp(-y));
 if or(Psi(i)>1, Psi(i)<0)
  error('Su pasirinktais duomenimis skaiciavimai negalimi Psi!!!')
 else
  F=(1-exp(-(an(1)+bn(1)*x))).*(1-exp(-(an(2)+bn(2)*y)));
  if or(F(i)>1, F(i)<0)
   error('Su pasirinktais duomenimis skaiciavimai negalimi F!!!')
  else
   P=(1/(n-1))*(F.*(1-1/n))./(1-F.*(1-1/n));
   if or(P(i)>1, P(i)<0)
    error('Su pasirinktais duomenimis skaiciavimai negalimi P!!!')
   else
    skirt=abs(P-Psi);
    if or(skirt(i)>1, skirt(i)<0)
     error('Su pasirinktais duomenimis skaiciavimai negalimi Skirt!!!')
    else
     H=exp(-exp(-x)-exp(-y));
     if or(H(i)<0, H(i)>1)
      error('Su pasirinktais duomenimis skaiciavimai negalimi H!!!')
```

```
else
 u=exp(-x)+exp(-y)-exp(-x-y)/n;
 if (u(i)/n)>=0.5
  error('Su pasirinktais duomenimis skaiciavimai negalimi u!!!')
 else
  v=-exp(-x-y)/n;    q=(2*u.^2)/(3*n);
  if or(q(i)>1, q(i)<0)
   error('Su pasirinktais duomenimis skaiciavimai negalimi q!!!')
  else
   s=abs(v)/3;
   if or(s(i)>1,s(i)<0)
    error('Su pasirinktais duomenimis skaiciavimai negalimi s!!!')
   else
    r1=2.*(u.^2)/n+2.*(u.^4)/(n^2)*1./(1-q);
    r2=abs(v)+(v.^2)/2*1./(1-s);     Delta_n=H.*(r1+r2+r1.*r2);
    narys1=log(4)./(exp(-exp(-x)-exp(-y)+exp(-x-y)/n).*(1-exp(-x)-exp(-y)+exp(-x-y)/n).^2);
    narys2=abs((sqrt(2.718)/n).*(exp(-x)+exp(-y))./(1+exp(-x)+exp(-y)).*(1+(1./(1+exp(-x)+
                    +exp(-y)))));
    Delta_Nn=Delta_n.*narys1+narys2;
    if or(Delta_Nn(i)>1, Delta_Nn(i)<0)
     error('Su pasirinktais duomenimis skaiciavimai negalimi Delta_Nn!!!')
    else
     plot(y,skirt,'m')
     title('Konvergavimo greicio tyrimas','Fontsize',10,'Fontweight','Bold');
     Xlabel('x2','Fontsize',10,'Fontweight','Bold');
     Ylabel('|P-Psi|, Delta(Nn)','Fontsize',10,'Fontweight','Bold');
     hold on
     plot(y,Delta_Nn,'g')
     legend('|P-Psi|','Delta(Nn)');
     hold off
    end
   end
  end
```

```
      end
     end
    end
   end
  end
 end
end
disp('Tiksli konvergavimo greicio reiksme')
disp(skirt)
disp('Konvergavimo greicio ivertis')
disp(Delta_Nn)
```

<u>PASTABA.</u> Pilnas programos tekstas pridėtas CD, pridėtame prie darbo.