KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS INFORMATIKOS FAKULTETAS

Andrius Kriščiūnas

Vamzdyno trūkio vietos nustatymo algoritmo sukūrimas pagal fizikine elgsena grįstą slėgio bangos sklidimo modelį

Magistro darbas

Darbo vadovas prof. habil. dr. Rimantas Barauskas

Kaunas, 2012

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS INFORMATIKOS FAKULTETAS

Andrius Kriščiūnas

Vamzdyno trūkio vietos nustatymo algoritmo sukūrimas pagal fizikine elgsena grįstą slėgio bangos sklidimo modelį

Magistro darbas

Recenzentas

dr. Vytautas Daniulaitis 2012-05-

Vadovas

prof. habil. dr. Rimantas Barauskas 2012-05-28

Atliko

IFM-0/1 gr. stud. Andrius Kriščiūnas 2012-05-28

Turinys

1. ĮVADAS	
2. SKAIČIAVIMO METODŲ APŽVALGA PEREINAMIESIMES VAMZDYNE REALIZUOTI	S PROCESAMS
3. SLĖGIO BANGOS SKLIDIMO MATEMATINIS MODELIS	
3.1 Vamzdyno tėkmės matematinis modelis	
3.2 BE modelio sudarymas nusistovėjusiai tėkmei	
3.3 BE modelio sudarymas nenusistovėjusiai tėkmei	
3.4 Modelio teisingumas	
4. VAMZDYNO TRŪKIO VIETOS NUSTATYMO ALGORITMO SU	JDARYMAS . 19
4.1 Slėgio bangos sklidimo modelis idealizuotu atveju	
4.2 Matematinis modelis	
4.3 Paklaidų įvertinimas	
4.4 Algoritmas	
5. TRŪKIO VIETOS NUSTATYMO ALGORITMO TYRIMAS	
5.1 Programinės įranga	
5.2 Vamzdyno statinės analizės sudarymas ir teisingumo patikrinimas.	
5.3 Algoritmo tyrimas naudojant idealizuotą slėgio bangos sklidimo m	odelį 28
5.3.1 1 eksperimentas. Modelio teisingumo tikrinimas	
5.3.2 Apibendrinimas	
5.4 Algoritmo tyrimas naudojant BEM pereinamuosius procesus	
5.4.1 Integravimo žingsnio ir baigtinio elemento ilgio parinkimas	
5.4.2 2 eksperimentas – BEM modelio teisingumo patikrinimas	
5.4.3 Vamzdyno geometrijos įtakos paklaidai <i>tfiks</i> tyrimas	
5.4.4 Trūkio kryčio intensyvumo įtakos paklaidai <i>tfiks</i> tyrimas	
5.4.5 Triukšmų amplitudės įtakos paklaidai <i>tfiks</i> tyrimas	
5.4.6 Apibendrinimas	
5.5 Algoritmo optimizavimo galimybės	
6. IŠVADOS	
7. LITERATŪROS SĄRAŠAS	

Vamzdyno trūkio vietos nustatymo algoritmo sukūrimas pagal fizikine elgsena grįstą slėgio bangos sklidimo modelį

Santrauka

Darbo metu apžvelgiami metodai pereinamiesiems procesams vamzdyne realizuoti. Aprašyta vamzdyno tėkmės pereinamųjų procesų dinamika matematinės lygtys ir sudarytas baigtinių elementų modelis skaitiniam vamzdynų pereinamųjų procesų modeliavimui. Panaudojant atgalinį slėgio bangos modeliavimą esant idealizuotam slėgio bangos sklidimo modeliui, sudaromas slėgio impulso vietos nustatymo algoritmas ir įvertinamos atsirandančios paklaidos.

Realizuota programine įranga patikrinamas sudarytų modelių ir algoritmo teisingumas, bei pateikiami pasiūlymai, atsiradusioms paklaidoms mažinti.

Raktiniai žodžiai

Baigtiniai elementai, pereinamieji procesai vamzdyne, slėgio bangos modeliavimas, vamzdyno trūkio vietos nustatymas.

Algorithm for identification of pipeline rupture location based on finite element model of pressure wave propagation

Summary

During this research, the methods to realize the transient processes in piping systems are overviewed, also finite element method and idealized wave propagation of pressure mathematical models are set up.

Using the backward pressure wave modelling at idealized pressure wave propagation model, piping system rupture location algorithm and the assessment of estimated errors are set up.

With released software, the developed models and correctness of the algorithm are verified, and suggestions to reduce the resulting errors are presented.

Keywords

Finite element, transient processes in piping systems, pressure wave propagation, estimation of piping system rupture location.

SANTRUMPŲ ŽODYNAS

BE (angl. Finite Element) – baigtinis elementas.

BEM (angl. Finite Element Model) – baigtinių elementų modelis.

<u>PI</u> – programinė įranga.

SIMBOLIŲ SĄRAŠAS

- dx baigtinio elemento ilgis;
- p slėgis;
- m masė;
- ρ tankis;
- A vamzdžio skerspjūvio plotas;
- D vamzdžio sienelės ilgis;
- v skysčio tėkmės greitis;
- g laisvo kritimo pagreitis;
- f trintis;
- RE Reinoldso skaičius;
- μ skysčio dinaminis klampumo koeficientas;
- \widetilde{K} ekvivalentinis skysčio tūrinis modulis;
- *K* skysčio tūrinis modulis;
- *E* vamzdžio jungo modulis;
- *h* vamzdžio sienelės storis
- p^* pompos sukurtas slėgis;
- Δz baigtinio elemento galų vertikalus pasvirimas.
- *L* baigtinio elemento ilgis;

- w skysčio tėkmės debitas;
- $[N]^T$ elemento formos funkcijos matrica;
- c slėgio bangos greitis;
- M Vamzdyno BEM mazgų aibė
- B Vamzdyno BEM mazgų aibė
- t_B slėgio bangos sklidimo laikas baigtiniame elemente
- N-manometrų skaičius vamzdyne
- Δt_s manometruose fiksuojamų slėgio reikšmių intervalas
- P_{tr} slėgio triukšmai vamzdyne
- P_t slėgis laiko momentu t
- BX- galimų vamzdyno trūkio taškų aibė
- S atgalinė slėgio bangos impulsų aibė
- t_{tr} laiko momentas, kada fiksuojamas trūkis manometre
- t_{imp} slėgio impulso fiksavimas manometre,

 Δt_{fiks} - trūkio nustatymo paklaida dėl netiksliai užfiksuojamo trūkio dėl vamzdyne esančių triukšmų ir slėgio bangos slopimo

- Δt_{pakl} maksimali galima paklaida
- diam vamzdžio diametras
- Ls vamzdžio sienelės ilgis

1. ĮVADAS

Visame pasaulyje egzistuoja begalė vamzdynų. Vamzdynas – tai slėginė sistema, sudaryta iš tarpusavyje sujungtų vamzdžių, pompų, matavimų ir kitų įrenginių, skirta takiosioms medžiagoms gabenti. Šiuo metu įvairūs vamzdynai projektuojami taip, kad veiktų sklandžiai. Tačiau dėl techninės įrangos susidėvėjimo, nekokybiškų medžiagų, ir kt. vamzdynuose įvyksta avarijos, vamzdyno trūkiai. Šie trūkiai pastebimi bendru slėgio kritimo vamzdyno sistemoje. Norint efektyviai reaguoti į avariją ir pašalinti padarinius, visų prima, reikia tiksliai žinoti, kur įvyko skysčio nutekėjimas. Tačiau dėl sunkaus priėjimo prie viso vamzdyno, dažnai tai sunku padaryti ir nemažai laiko sugaištama ieškant nutekėjimo vietos.

Vienas iš būdų, kaip nustatyti vamzdyno trūkio vietą, tai pasinaudoti vamzdyno sistemoje esamais slėgio matavimo prietaisais - manometrais. Pagal tai, kur pirmiausia pasirodė slėgio kritimas, bandyti nustatyti vamzdyno trūkio vietą. Esant manometrams prie kiekvienos vamzdyno atkarpos galų, būtų nesunku nustatyti trūkio vietą. Tačiau tai dažnai sunku realizuoti esamoje vamzdyno infrastruktūroje ir reikalautų didelių investicijų. Dažniausiai manometrai statomi tik tam tikruose mazguose, pvz. vandentiekio vamzdynuose, prie įėjimo į namus.

Pradiniai duomenys apie vamzdyne vykstančius pereinamuosius procesus yra riboti. Praktiškai nėra galimybės išmatuoti visų pradinių slėgių, debitų ar tėkmės greičių vamzdyne. Pradines sąlygas (slėgius, debitus) galima apibrėžti tik tam tikruose taškuose kur jie yra iš anksto žinomi. Analogiškai duomenų apie vamzdyno trūkius yra dar mažiau. Nustatyti vamzdyno trūkį gali reikti net ir tokiame vamzdyne, kur trūkio aplamai nėra buvę (naujai suprojektuoti vamzdynai). Dėl šios priežasties vamzdyno trūkio nustatymas negali būti priklausomas nuo duomenų apie prieš tai vamzdynuose įvykusius trūkius.

Šio darbo tikslas yra sudaryti vamzdyno trūkio vietos nustatymo algoritmą pagal vamzdyne esančių manometrų duomenis.

Darbo tikslui įgyvendinti sprendžiami tokie uždaviniai:

- 1. apžvelgiami pagrindiniai skaičiavimo metodai skirti pereinamiesiems procesams vamzdynuose skaičiuoti;
- 2. sudaromas vamzdyno tėkmės matematinis modelis;

- sudaromi baigtinių elementų modeliai (BEM) nusistovėjusiai ir nenusistovėjusiai tėkmei aprašyti;
- sudaromas vamzdyno trūkio vietos nustatymo algoritmas, paremtas idealizuotu slėgio bangos sklidimu;
- 5. realizuojama programinė įranga (PĮ) skirta tyrinėti vamzdyne vykstančius pereinamuosius procesus, kuri įgalina:
 - a) įvesti realaus vamzdyno geometriją;
 - b) pagal įvestą geometriją sudaryti BEM esant nusistovėjusiai ir nenusistovėjusiai tėkmei;
 - c) pagal sudarytą BEM įvesti skirtingus manometrų šablonus, kuriuose bus fiksuojami slėgio pokyčiai;
 - d) sudarytame nusistovėjusios tėkmės BEM, įgalins modeliuoti vamzdyno trūkius naudojant nenusistovėjusios tėkmės BEM ir slėgio bangos sklidimą idealizuotu atveju, bei duomenis apie slėgio pokyčius išsaugos iš anksto paruoštuose manometrų šablonuose;
 - e) realizuos vamzdyno trūkio vietos nustatymo algoritmą.

2. SKAIČIAVIMO METODŲ APŽVALGA PEREINAMIESIEMS PROCESAMS VAMZDYNE REALIZUOTI

Nepastovios tėkmės (angl. *unsteady flow*) matematiniai skaičiavimai buvo atliekami jau labai seniai, ir jie pritaikomi įvairiuose uždaviniuose – optimalus vožtuvų uždarymo laikas, optimalių fizikinių parametrų vamzdžių vamzdyno sistemoje parinkimas, ir kt. [1]. Nesudėtingos geometrijos vamzdynams, skaičiavimai gali būti išreiškiami analitiškai. Labiau komplikuotose situacijose, kaip pagrindinis metodas pereinamiesiems procesams skysčių vamzdynuose modeliuoti naudojamas charakteristikų metodas (angl. *method of characteristic, MOC*) Iki šiol daug tyrimų atliekama ieškant naujų, efektyvesnių metodų skirtų įvairiems pereinamiesiems procesams skysčių vamzdynuose skaičiuoti, kurie po savęs palieka nemažai neatsakytų klausimų. Nepaisant to, charakteristikų metodas iki šiol yra naudojamas sprendžiant įvairias pereinamųjų procesų skysčiuose uždavinius. Tačiau jis turi keletą rimtų trūkumų, tokių kaip griežtas sąryšis tarp laiko ir modelio diskretizavimo žingsnių. Esant sudėtingai vamzdyno konstrukcijai, kurioje naudojami vamzdžiai su skirtingomis fizikinėmis konstantomis (diametras, sienelės storis), kaip pvz. šiluminiuose tinkluose, slėgio bangos greitis gali kisti nuo 10% iki 40%. Tai reiškia, kad fiksuotai vamzdžio atkarpai skirtingiems vamzdžiams vamzdyne, reikalingas skirtingas laiko žingsnis.

Kaip alternatyva, tradiciškai yra įgyvendinamos skaitinės schemos paremtos baigtinių skirtumų metodu (angl. *finitie difference method*), baigtinių tūrių metodu (angl. *finite volume method*) ar linijų metodu (angl. *method of lines*). D.J. Wood palygino L. Eulerio ir J.L.Lagrange formuluotėmis paremtus metodus skirtus pereinamiesiems slėgio procesams skaičiuoti [2]. Y.H . Hwang ir N.M. Chung efektyviai išplėtojo antros eilės Godunov tipo (angl. *Godunov-Type*) skaitinį metodą, ir jį pritaikė hidraulinio smūgio simuliavimui, kuris buvo greitai pritaikytas spręsti Rieman skaitiniu metodu (angl. *Ryman solver*). N. Selcuk tyrė linijų ir baigtinių skirtumų metodus, kur analizavo sprendimo tikslumus ir užduoties sprendimo laiką[3]. G.P Greyvenstein aprašė besąlyginį baigtinių skirtumų (angl. *implicite finite diference*)metodą, kuris yra teisingas tiek greitiems, tiek lėtiems pereinamiesiems procesams vamzdyne, taip pat ir nusistovėjusiai tėkmei[4].

Baigtinių elementų metodas, BEM, (angl. *finite element model, FEM*) skysčio pereinamųjų procesų vamzdynuose analizei buvo visuomet patrauklus dėl galimybės realizuoti modelį, pilnai atitinkantį realią vamzdyno sistemą. BEM įgalina naudoti struktūrinės dinamines analizes įrankius sprendžiant vamzdynų pereinamuosius procesus ir virpesių uždavinius.

Daug inžinierių į baigtinių elementų modelį žiūri kaip į labiausiai tikrovę atitinkančių iš ilgų vamzdžių sudarytų heterogeninių struktūros modelį. Nepaisant to, norint kaip kraštines sąlygas naudoti užduotą slėgį arba tėkmės greitį skirtinguose vamzdyno mazguose, BEM schema vamzdynuose vykstančiai tėkmei aprašyti negali būti tiesiogiai išreikšta priimant Galerkin vienmatės (angl. uni-dimension) spūdžios tėkmės lygtis. Su sunkumais susiduriama tada, kai tėkmės greičio patenkinimo sąlyga debitų balansui užtikrinti vamzdžių susikirtimo mazguose yra apibrėžiama anksčiau, nei gretimų mazgų suderinimo sąlyga. Egzistuoja daugybė suvaržymo lygčių į kurias turi būti atsižvelgiama. Keletas baigtinių elementų schemų skirtų skysčio ir dujų tėkmei modeliuoti buvo aprašytos A. Frid [5], J.J. Shu [6], J. Kochupillai [7], A.J. Osciadacz [8]. Ankstyvuosiuose darbuose A. Frid sudarė bendrą skaičiavimo metodą tyrinėti vienaašius tiesinius virpesius esant spūdiems skysčiams vamzdyno sistemose. Sprendimas buvo paremtas baigtinių elementų mobilumo metodu (angl. *finite element mobility method*) ir panašus į naudojamą standumo metodą (angl. stiffness method) struktūriniuose mechaniniuose baigtinių elementų modeliuose. Į modelį įtraukti elementai sudaro baigtinių, ir pusiau begalinių skysčių stulpelius, tarpines ir ribines masės spyruoklių (angl. mass-spring-damper) sistemas, vidines spyruokles ir modalinius kūnus. Vamzdynų tėkmės baigtinių elementų modelis su sluoksnine, nuo dažnio priklausančia trintimi sudarytas J.J. Shu išlaikė charakteristikų metodo tiksluma. Paremta baigtinių elementų modelių, elektronikos analogų metodologija buvo panaudota sprendžiant uždavinius susijusias su skysčių tėkme, kur slėgiai, tėkmės greičiai ir nuo dažnio priklausanti trintis buvo naudojami kraštinėms sąlygoms užduoti. Pateiktoje formuluotėje J. Kochupillai buvo tiriama skysčio struktūros sąveika su vamzdžio sienele, į tiesinių virpesių (angl. axial vibration) modelį įtraukiant kintamo greičio skystį prie vamzdžio sienelių.

Dauguma aprašytų baigtinių elementų modelių skirtų pereinamiesiems procesams vamzdynuose nagrinėti, paremti supaprastinant sistemų lygtis, kur konvekcijos ir (arba) netiesinių lygčių narių yra nepaisoma. Platų spektrą uždavinių pereinamųjų procesų modeliams apibūdino ir metodus jų sprendimui pateikė A.J. Osciadacz.

Matematinė baigtinių elementų modelio forma smarkiai priklauso nuo pasirinkto transformacijos tipo iš pagrindinių lygčių rinkinio. Atsižvelgiant į pagrindinio lygčių rinkinio supaprastinimo laipsnį, lygtys aprašančios skysčio struktūros sąveiką, gali būti tiesinės arba gana supaprastintos – netiesinės. Atlikus transformacijas lygtis išreiškiamos į pirmo ar antro laipsnio diferencialines lygtis.

Sprendimas pereinamiesiems procesams realizuoti, šiame darbe atvaizduoja baigtinių elementų modelį kaip standartines struktūrines dinamines lygtis su slėgio kintamaisiais, bei jų pirmo ir antro laipsnio išvestinėmis. Praleidžiant konvekcijos terminus, tėkmės srauto debitų kintamieji pasirodo tik netiesiniuose lygties slopimo nariuose. Baigtinių elementų modelis sudaromas naudojant pirmo laipsnio formos funkcijas slėgio aproksimacijai baigtinio elemento viduje ir nulinio laipsnio – srauto debito aproksimacijai.

3. SLĖGIO BANGOS SKLIDIMO MATEMATINIS MODELIS

3.1 Vamzdyno tėkmės matematinis modelis

Šiame darbe nagrinėsime baigtinių elementų metodu (BEM) aprašytą nepastovią tėkmę. Imkime vamzdį su jame tekančiu vienodu skysčiu. Vamzdžio skerspjūvio vienmatis elementas, kurio ilgis dx aprašomas lygtimis:

$$\begin{cases} \frac{\delta m}{\delta t} + \frac{\delta(mv)}{\delta x} = 0;\\ \frac{\delta(mv)}{\delta t} + \frac{\delta(mv^2)}{\delta x} + A\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{f}{D}\frac{mv|v|}{2} + mg\sin a = 0. \end{cases}$$
(1)

Čia p yra skysčio slėgis, $m = \rho A$ masė skysčio, kurio tankumas ρ per laiko vienetą pratekanti per vamzdžio skerspjūvio plotą A, D – vamzdžio sienelės ilgis, v – skysčio tėkmės greitis, a – vamzdžio kampas su horizontale, g - laisvo kritimo pagreitis, $f = \frac{0.3614}{RE}$ – trintis, kur $RE = \frac{\rho D |v|}{\mu}$ Reinoldso skaičius (μ - skysčio dinaminis klampumo koeficientas).

Sujungiant dalines masės pokyčio δm išvestines per laiko intervalą δt elemento ilgį dx, gaunama masės pokyčio išvestinė elemente per laiko tarpą $dt : \frac{dm}{dt} = \frac{\delta m}{\delta t} + v \frac{\delta m}{\delta x}$. Pertvarkant (1) lygtį gaunama:

$$\begin{cases} \frac{1}{m}\frac{dm}{dt} + \frac{\delta v}{\delta x} = 0;\\ \frac{\delta v}{\delta t} + v\frac{\delta v}{\delta x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{f}{D}\frac{v|v|}{2} + g\sin a = 0. \end{cases}$$
(2)

Skysčio suspaudimo koeficientas, yra gaunamas iš lygybės:

$$\frac{dp}{\tilde{K}} = \frac{dm}{m}.$$
(3)

(3) formulėje $\tilde{K} = K(1 + \frac{KD}{hE})^{-1}$ yra ekvivalentinis skysčio tūrinis modulis. Čia K – skysčio tūrinis modulis, E – vamzdžio jungo modulis, h - vamzdžio sienelės storis. Ekvivalentinis skysčio tūrinis modulis apjungia skysčio tūrinį modulį ir radialinį vamzdžio išsiplėtimą.

Pertvarkant (2) lygtį ir į ją įstatant (3) lygties pažymėjimus gauname:

$$\frac{\delta p}{\delta t} + v \frac{\delta p}{\delta x} + \widetilde{K} \frac{\delta v}{\delta x} = 0; \qquad (4.1)$$

$$\begin{cases} \frac{\delta p}{\delta t} + v \frac{\delta p}{\delta x} + \tilde{K} \frac{\delta v}{\delta x} = 0; \\ \frac{\delta v}{\delta t} + v \frac{\delta v}{\delta x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{f}{D} \frac{v |v|}{2} + g \sin a = 0. \end{cases}$$
(4.1)
(4.2)

Atkreipkime dėmesį, kad $\frac{1}{\rho} = \frac{A}{m}$, todėl (4) lygtyje daugiau nenaudojamas vamzdžio skerspjūvio plotas A. Sekančiuose pertvarkymuose galima teigti, kad A yra konstanta o skysčio tankis apskaičiuojamas apjungiant skysčio prasiplėtimą tarp vamzdžio sienelių, kur r kiekvienu laiko momentu priklauso nuo pradinio slėgio ρ_0 ir slėgio pokyčio $p - p_0$ yra apskaičiuojamas:

$$\rho = \rho_0 (1 + \frac{p - p_0}{\tilde{\kappa}})^{-1}.$$
 (5)

Nuo (4) transformacijos prie struktūrinių dinaminių lygčių pereinama iš (4.1) lygčių išreiškiant $\frac{\delta v}{\delta x}$ ir pertvarkant (4.2)

$$\frac{\delta v}{\delta x} = -\frac{1}{\tilde{\kappa}} \left(\frac{\delta p}{\delta t} + v \frac{\delta p}{\delta x} \right). \tag{6}$$

Toliau (4.1) diferencijuojama pagal laika, (4.2) diferencijuojama pagal x ir sujungiama kartu, tam kad eliminuoti $\frac{\delta^2 v}{\delta x \delta t}$ ir $\frac{\delta p}{\delta x}$. Atlikus pertvarkymus gauta lygtis atrodo:

$$\begin{cases} \frac{\delta^2 p}{\delta t^2} - \left(\frac{\tilde{R}}{\rho} - v^2\right) \frac{\delta^2 p}{\delta x^2} + \left(\frac{f|v|}{D} - \frac{2v}{\tilde{R}} - \frac{2v}{\tilde{R}} \frac{\delta p}{\delta t} - \frac{1}{\tilde{R}} \frac{\delta p}{\delta t}\right) \frac{\delta p}{\delta t} + \\ + \left(\frac{fv|v|}{2D} - g\sin a + \left(\frac{\rho_0}{\rho^2} - \frac{1}{\rho} - \frac{v^2}{\tilde{K}}\right) \frac{\delta p}{\delta x}\right) \frac{\delta p}{\delta x} + 2v \frac{\delta^2 p}{\delta x \delta t} = 0; \qquad (7.1, 7.2) \\ \frac{\delta v}{\delta t} = \frac{v}{\tilde{R}} \frac{\delta p}{\delta t} - \left(\frac{1}{\rho} - \frac{v^2}{\tilde{R}}\right) \frac{\delta p}{\delta x} - \frac{f}{D} \frac{v|v|}{2} - g\sin a \end{cases}$$

Lygčių sistema (7) išsaugo visus pagrindinius principus aprašytus originalaus modelio (1) lygčių sistemoje. Esant mažam skysčio srauto greičiui lyginant su slėgio bangos sklidimo greičiu $\sqrt{\frac{\tilde{K}}{\rho}}$ ir beveik nesuspaudžiamam skysčiui, supaprastinant (7) lygtį ir praleidžiant netiesinius ir konvekcinius elementus, gaunama lygčių sistema:

$$\begin{cases} \frac{\delta^2 p}{\delta t^2} + \frac{f}{D} |v| \frac{\delta p}{\delta t} - \frac{\tilde{\kappa}}{\rho_0} \frac{\delta^2 p}{\delta x^2} = 0; \\ \frac{\delta v}{\delta t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\delta p}{\delta x} - \frac{f}{D} \frac{v|v|}{2} - g \sin a. \end{cases}$$
(8.1)

Lygčių sistema (8) pilnai atitinka visus tradicinius vamzdynų skaičiavimus, kur slėgio bangos sklidimo greitis daug kartų didesnis už vamzdyje tekančio vandens greitį. Nepaisant to, ši lygtis puikiai tinka realizuoti BE modeli.

3.2 BE modelio sudarymas nusistovėjusiai tėkmei

Nusistovėjusiai tėkmės aprašymui baigtinių elementų metodu remsimės (7) lygtimi. Nusistovėjusios tėkmės atveju, skysčio slėgis ir tėkmės greitis kiekviename vamzdyno taške yra pastovus ir nepriklausomas nuo laiko. Transformuodami (7) lygtį dešinėje pusėje paliksime su tėkme susijusius kintamuosius, o nuo laiko priklausančius kintamuosius praleisime (9).

$$\left(\frac{1}{\rho} - \frac{v^2}{\tilde{\kappa}}\right)\frac{\delta p}{\delta x} + \frac{f}{D}\frac{v|v|}{2} + g\sin a = 0.$$
(9)

Norint apibrėžti tėkmės srautą visame baigtiniame elemente, 2 lygtys yra būtinos. Integruodami (9) lygtį nuo 0 iki L ir nuo L iki 0, kur L baigtinio elemento ilgis, gauname lygčių sistemą (10).

$$\begin{cases} \int_0^L \left(\left(\frac{1}{\rho} - \frac{v_e^2}{\tilde{K}}\right) \frac{\delta p}{\delta x} + \frac{f}{D} \frac{v|v|}{2} + g \sin a = 0 \right) dx = 0, \\ \int_L^0 \left(\left(\frac{1}{\rho} - \frac{v_e^2}{\tilde{K}}\right) \frac{\delta p}{\delta x} + \frac{f}{D} \frac{v|v|}{2} + g \sin a = 0 \right) dx = 0. \end{cases}$$
(10)

Toliau išreiškiama vienmačio elemento lygtis (11).

$$\begin{cases} \frac{2D}{fL} \left(A^2 \rho - \frac{w_e^2}{\tilde{\kappa}} \right) \left(p_i - p_j \right) + \frac{2DA^2 \rho}{fL} p^* - \frac{2DA^2 \rho^2 g}{fL} \Delta z = w_i |w_i|, \\ \frac{2D}{fL} \left(A^2 \rho - \frac{w_e^2}{\tilde{\kappa}} \right) \left(p_j - p_i \right) - \frac{2DA^2 \rho}{fL} p^* + \frac{2DA^2 \rho^2 g}{fL} \Delta z = w_j |w_j|. \end{cases}$$
(11)

Šioje lygtyje p^* atitinka slėgį sukuriamą pompos, su ta sąlyga, kad pompa apibrėžiama kaip baigtinis elementas. $\Delta z = z_j - z_i$, t.y. elemento galų vertikalus pasvirimas. Skysčio tėkmės debitas baigtiniame elemente lygus $w = A\rho v = w_i = -w_j$, kur w_i ir w_j atitinka baigtinio elemento mazgų įėjimo ir išėjimo debitus.

Įvedus pažymėjimą *C*, išreikštą (13) lygtyje, netiesinė (angl. *non-linear*) baigtinių elementų lygtis (14) išreiškiama iš (12) lygties

$$C = p_i - p_j + p^* - \rho g \Delta z. \tag{13}$$

$$\begin{cases} sgn(C)\sqrt{|C|}\sqrt{\frac{2D}{fL}\left(A^{2}\rho - \frac{w_{e}^{2}}{\tilde{K}}\right)} = w_{i}, \\ -sgn(C)\sqrt{|C|}\sqrt{\frac{2D}{fL}\left(A^{2}\rho - \frac{w_{e}^{2}}{\tilde{K}}\right)} = w_{j}. \end{cases}$$
(14)

Baigtinio elemento matrica išreiškiama (14) lygtimi.

$$[K_T^e] = \sqrt{\frac{D}{2fL|C|} \left(A^2 \rho - \frac{w_e^2}{\widetilde{K}} \right)} \begin{bmatrix} 1 & -1\\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$
(15)

Atitinkami struktūriniai vektoriai yra surenkami iš (14) elemento lygties ir (15) tangentinės matricos. Siekiant gauti teisingus nusistovėjusios tėkmės rezultatus, atliekamos Newton-Raphson iteracijos, kur nežinomos debitų reikšmės yra atnaujinamos su kiekviena Newton-Raphson iteracija $w_e^{(n)} = w_i^{(n-1)}$, čia n - iteracijos numeris.

Atliekant pirmą iteraciją, esant horizontaliam vamzdžiui ir neapibrėžtiems slėgiams baigtinio elemento galuose, (13) lygtyje apskaičiuojamas koeficientas C yra lygus 0, todėl (15) lygtis tampa neapibrėžta. Priimtinas sprendimas pirmoje iteracijoje išvengti neapibrėžtumo yra (12) lygtyje dešinėje pusėje esančias debitų sandaugas $w_i|w_i|$ ir $w_j|w_j|$ pakeisti į w_i ir w_j , bei atlikti priskyrimą $w_e = 0$.

3.3 BE modelio sudarymas nenusistovėjusiai tėkmei

Vienmačio, L ilgio baigtinio elemento lygtis (18) yra gaunama panaudojant Garlekin svertinių likučių (angl. *weighted residual*) formuluotes (7.1) lygčiai.

$$A\int_{0}^{L}[N]^{T} \begin{pmatrix} \frac{\delta^{2}p}{\delta t^{2}} - \left(\frac{\widetilde{R}}{\rho} - v_{e}^{2}\right)\frac{\delta^{2}p}{\delta x^{2}} + \left(\frac{f|v_{e}|}{D} - \frac{2v_{e}}{\widetilde{R}}\frac{\delta p}{\delta t} - \frac{1}{\widetilde{R}}\frac{\delta p}{\delta t}\right)\frac{\delta p}{\delta t} + \\ + \left(\frac{fv_{e}|v_{e}|}{2D} - g\sin a + \left(\frac{\rho_{0}}{\rho^{2}} - \frac{1}{\rho} - \frac{v^{2}}{\widetilde{K}}\right)\frac{\delta p}{\delta x}\right)\frac{\delta p}{\delta x} + 2v_{e}\frac{\delta^{2}p}{\delta x\delta t}\end{pmatrix} (18)$$

Šioje lygtyje $[N]^T = [1 - x/L, x/L]$ – elemento formos funkcijos matrica, kuri yra naudojama slėgio interpoliavimui mazguose kaip $p(x) = [N]\{P^e\}$.

Siekiant išvengti neapibrėžtumo tėkmės greitis v_e ir masės tankumas ρ atitinka reikšmes visame baigtiniame elemente. (18) lygtyje esantis terminas su $\frac{\delta^2 p}{\delta x^2}$ yra integruojamas dalimis: $-A \int_0^L [N]^T \left(\frac{\tilde{K}}{\rho} - v_e^2\right) \frac{\delta^2 p}{\delta x^2} = -A \left(\frac{\tilde{K}}{\rho} - v_e^2\right) [N]^T \frac{\delta p}{\delta x} \Big|_0^L - A \left(\frac{\tilde{K}}{\rho} - v_e^2\right) \int_0^L \frac{\delta [N]^T}{\delta x} \frac{\delta p}{\delta x} dx =$ $= -A \left(\frac{\tilde{K}}{\rho} - v_e^2\right) \left(\frac{1}{\rho} - \frac{v_e^2}{\tilde{K}}\right)^{-1} \left(-\frac{f}{D} \frac{v_e |v_e|}{2} - g \sin a\right) [N]^T \Big|_0^L - A \left(\frac{\tilde{K}}{\rho} - v_e^2\right) \int_0^L \frac{\delta [N]^T}{\delta x} \frac{\delta [N]}{\delta x} dx \{P^e\}, \quad \text{kur}$ reikšmė $\frac{\delta p}{\delta x} = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{v_e^2}{\tilde{K}}\right)^{-1} \left(-\frac{\rho_0 f}{D} \frac{v |v|}{2} - \rho_0 g \sin a\right)$ yra išreiškiama iš 10 lygties, priimant kad $\frac{\delta v}{\delta t} =$ 0. Tai garantuoja, kad modeliuojant pereinamuosius procesus bus pradedama nuo pradinių sąlygų apskaičiuotų atliekant nusistovėjusios tėkmės skaičiavimus.

Galiausiai lygčių sistema (7) aprašyta baigtiniam elementui atrodo:

$$\begin{cases} [M^e]\{\dot{P^e}\} + [C^e(\dot{P^e}, P^e)]\{\dot{P^e}\} + [K^e(P^e)]\{P^e\} + \{Q^e\} = 0 \\ \dot{v_e} = G \end{cases}$$
(19.1, 19.2)

(19) lygčių sistemoje vektoriai ir matricos apskaičiuojami pagal (20) lygtis:

$$\begin{split} [M^{e}] &= A \int_{0}^{L} [N]^{T} [N] dx = \frac{AL}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \approx \frac{AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ [C^{e}] &= AL \left(\frac{f|v_{e}|}{D} - \frac{2v}{R} \frac{p_{e2} - p_{e1}}{L} - \frac{1}{R} \frac{\dot{p}_{e1} + \dot{p}_{e2}}{2} \right) \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} + Av_{e} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \\ [K^{e}] &= \frac{A}{L} \left(\frac{R}{\rho} - v_{e}^{2} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{A}{2} \left(\frac{f}{D} \frac{v_{e}|v_{e}|}{2} - g \sin a + \frac{p_{0}}{p^{2}} - \frac{1}{\rho} - \frac{v_{e}^{2}}{R} \right) \frac{p_{e2} - p_{e1}}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \\ [Q^{e}] &= A \widetilde{K} \left(\frac{p^{*}}{L} - \frac{fv_{e}|v_{e}|}{2D} - g \sin a \right) \left\{ \frac{1}{-1} \right\}; \\ G^{e} &= \frac{v_{e}}{R} \frac{p_{1} + p_{2}}{2} - \left(\frac{1}{\rho} - \frac{v_{e}^{2}}{R} \right) \frac{p_{2} - p_{1}}{L} - \frac{f}{D} \frac{v_{e}|v_{e}|}{2} - g \sin a^{2}; \end{split}$$

(20) lygtyse p^* atitinka slėgio pokytį sukurtą pompos, su ta sąlyga, kad pompa išreiškiama kaip baigtinis elementas.

Atliekant supaprastinimus priimtus (8) lygtyje, baigtinio elemento lygtys tradiciniams vamzdynams išreiškiamos (21) lygtyse:

$$\begin{bmatrix} M^{e} \end{bmatrix} = \frac{AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} C^{e} \end{bmatrix} = \frac{ALf|v_{e}|}{2D} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} K^{e} \end{bmatrix} = \frac{A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\{Q^{e}\} = A\widetilde{K} \left(\frac{p^{*}}{L} - \frac{fv_{e}|v_{e}|}{2D} - g\sin a\right) \left\{\frac{1}{-1}\right\};$$

$$G^{e} = \frac{v_{e}}{\widetilde{K}} \frac{p_{1} + p_{2}}{2} - \frac{p_{2} - p_{1}}{\rho_{0}L} - \frac{f}{D} \frac{v_{e}|v_{e}|}{2} - g\sin a^{2}.$$
(21)

Iš lygčių sistemos (19) pirmoji lygtis (19.1) yra surenkama į konstrukcijos lygtį ir sprendžiama visai vamzdyno sistemai, tuo tarpu (19.2) lygtis yra sprendžiama kiekvienam elementui atskirai. (20) ir (21) lygtyse turėtume atkreipti dėmesį, kad nėra jokių algebrinių sąryšių, kurie užtikrintų tėkmės debitų balanso sąlygą mazguose su kaimyniniais elementais. Tačiau esant

beveik nespūdiems skysčiaus, kaip pvz. šiluminių trasų vamzdynuose, iškraipymas yra itin mažas ir į jį galima neatsižvelgti.

Vamzdyno atkirtimo taškuose priimama gerai žinoma bangos neatspindėjimo (angl. *non-reflecting boundary*) sąlyga (18).

$$\sqrt{\frac{\tilde{\kappa}}{\rho}}\frac{\delta p}{\delta x} + \frac{\delta p}{\delta t} = 0.$$
(22)

3.4 Modelio teisingumas

Slėgio bangos sklidimo matematinis modelis buvo patikrintas darbo vadovo mokslo tiriamajame darbe "Skaitinio modelio ir programinės įrangos pereinamųjų slėgio virpesių vamzdyne apskaičiavimui sukūrimas" [9]. Atliekant eksperimentus Marijampolės ir Vilniaus miesto šiluminių trasų vamzdynuose, bei lyginant apskaičiuotus ir išmatuotus pereinamuosius procesus, gauti vienodi rezultatai.

4. VAMZDYNO TRŪKIO VIETOS NUSTATYMO ALGORITMO SUDARYMAS

Vamzdyno trūkio nustatymo algoritmo paremtas idėja: jei turėdami informacija apie vamzdyno trūkį galime sumodeliuoti slėgio bangą ir ją užfiksuoti manometruose, reiškiasi turi būti ir atvirkštinė galimybė – panaudojant atgalinį slėgio bangos modeliavimą lokalizuoti vamzdyno trūkį (Pav. 1).



Pav. 1 Vamzdyno trūkio vietos nustatymo schema

Atgaliniam slėgio bangos modeliavimui, remsimės idealizuotu slėgio bangos sklidimo modeliu.

4.1 Slėgio bangos sklidimo modelis idealizuotu atveju

ilgis.

Iš (8) lygties matome, kad nors slėgio pokytis Δp laikui bėgant kinta, tačiau slėgio bangos sklidimo greitis yra pastovus ir nuo laiko nepriklausomas (23).

$$c = \frac{\tilde{R}}{\rho_0} = const.$$
 (23)

Iš BEM sudarome tinklinę struktūrą G(M, B), kur viršūnių aibė M atitinka BE modelio mazgų aibę, o briaunų aibė B – baigtinių elementų aibę. n ir m atitinkamai BE modelio mazgų ir baigtinių elementų skaičius.

Laiko intervalas $t_{B[i]}$, čia i = 0..m, kurį sklis slėgio impulsas atkarpoje B[i] apskaičiuojamas (24) lygtyje.

$$t_{B[i]} = c_{B[i]} L[i].$$
 (24)

Čia $c_{B[i]}$ atitinka slėgio bangos sklidimo greitį briaunoje i, tuo tarpu L[i] yra briaunos

Priimant, kad vamzdyno trūkis įvyksta baigtiniame elemente, jis sukels slėgio pokyčio impulsą kuris nuvilnys per visą vamzdyną.

4.2 Matematinis modelis

Kiekviename vamzdyne esančiame manometre I_j (j = 0..N), čia N-manometrų skaičius vamzdyne), žingsniu Δt_s yra fiksuojamos slėgio reikšmės P_{t_i} , kur $t_i \in (t_0 ... t_{\infty})$. Esant idealizuotam slėgio bangos sklidimui, trūkį manometre I_j laiko momentu t_i galime fiksuoti, kai tenkinama sąlyga $P_{t_i} \neq P_{t_{i-1}}$. Realiame vamzdyne, atsiranda slėgio triukšmai P_{tr} , ir vamzdyno trūkis užfiksuojamas kai tenkinama sąlyga (25).

$$t_{tr} = t$$
, kai $P_{I_t} < P_{I_0} - P_{tr}$ (25)

Sudarant vamzdyno trūkio vietos nustatymo algoritmą, naudojamas idealizuotas slėgio bangos sklidimo modelis, o galimai atsirandančios paklaidos dėl per didelio Δt_s žingsnio (1 tipas), per mažo manometrų skaičiaus vamzdyne (2 tipas) ir (25) sąlygos (3 tipas) įvertinamos vėliau. Esant idealizuotam slėgio bangos sklidimui, fiksuojamas tik bangos impulsas. Tačiau norint vėliau įvertinti dėl (25) lygties atsirandančias paklaidas, iš vamzdyno geometrijos sudaromas BEM, kur atliekant statinę analizę apskaičiuojami nusistovėję slėgiai ir tėkmės greičiai baigtiniuose elementuose.

Algoritmas paremtas atvirkštinio nagrinėjimo algoritmų sudarymo metodu, kuomet pradedama nuo tikslo ir einama atgaline kryptimi į uždavinio formuluotę. Tikslas apibrėžiamas kaip vamzdyną paveikusio slėgio impulso sukelti pokyčiai manometruose I laiko momentais t_{I_j} , tuo tarpu formuluotė atitinka baigtini elementą B[x], kur įvyko vamzdyno trūkis. Akivaizdu, kad nustatyto trūkio galimas perimetras bus lygus baigtinio elemento ilgiui L[x].

Pradiniu laiko momentu max (t_{l_j}) , priimame, kad vamzdyno trūkis gali įvykti bet kuriame vamzdyno taške (26) (Pav. 2).



Pav. 2 Trūkio nustatymo algoritmas pradiniu laiko momentu $\max(t_{I_i})$

$$BX = B \tag{26}$$

Čia BX atitinka galimų vamzdyno trūkių aibę. Galima teigti, kad vamzdyno trūkis įvyko ne vėliau, nei buvo užfiksuotas pirmame manometre (27), bei įvyko arčiausiai šio manometro, kur atstumas įvertinamas laiko intervalu $t_{B[i]}$ kurį sklis slėgio impulsas atkarpoje B[i](28).

$$t_x <= \min(t_{I_i}). \tag{27}$$

$$t_{B[i]} = c_{B[i]} L[i]. \tag{28}$$

Čia t_x atitinka vamzdyno trūkio momentą. Iš (27) lygties seka, kad baigtinių elementų aibė *BM*, iš kurių slėgio bangos impulsas gali pasiekti manometrus laiko intervalais $t_{I_j} - \min(t_{I_j})$ negali būti vamzdyno trūkio taškais (28).

$$B[x] \notin BM, BX = B \cap BM \tag{29}$$

Suformavus slėgio bangos impulsų aibę S ir laiko momentais $[\max(t_{I_j}) \dots t_{I_i} \dots \min(t_{I_j})]$ įtraukiant impulsus iš manometrų I_j atliekamas atgalinis slėgio bangų modeliavimas. Bangoms pasiekus vamzdyno atsišakojimą impulsas modeliuojamas abiem kryptimis, tuo tarpu impulsams susikirtus – modeliavimas nutraukiamas. Laiko momentu min (t_{I_j}) gaunama situacija atitinkanti (27) lygtį (Pav. 3).



Pav. 3 Trūkio nustatymo algoritmas $min(t_{I_i})$ laiko momentu

Laiko momentu min (t_{I_j}) į aibę S įtraukiamas paskutinis manometras. Toliau atliekant modeliavimą ir aibę *BM* papildant slėgio impulsų pasiektais elementais, trūkis fiksuojamas laiko momentu t_x , kai aibės *BM* elementai sudarys jungųjį grafą, o B[x] yra vėliausiai į aibę *BM* įtrauktas elementas (Pav. 4).



Pav. 4 Trūkio nustatymo algoritmas t_x , laiko momentu

Atkreipkime dėmesį, kad dėl tinklinės vamzdyno struktūros gali susidaryti situacija, kai slėgio bangos impulsai susikirs skirtingose vamzdyno atkarpose. Tokiu atveju vamzdyno trūkis bus fiksuojamas abiejuose atkarpose (Pav. 5). Į tai reiktų atsižvelgti organizuojant manometrų išdėstymą vamzdyne.



Pav. 5 Tinklinės vamzdyno struktūros poveikis trūkio nustatymo algoritmui

4.3 Paklaidų įvertinimas

Nustatant vamzdyno trūkio vietą, gali atsirasti trijų tipų trūkių fiksavimo paklaidos dėl:

- a) 1 tipas per didelio Δt_s slėgio matavimo žingsnio manometruose;
- b) 2 tipas –per mažo manometrų skaičiaus N;
- c) 3 tipas –vamzdyne esančių triukšmų ir slėgio bangos slopimo (25).

Įvertinant paklaidas sudaroma galimų trūkio taškų aibe $BX \in B$.

Paklaida dėl per didelio matavimo žingsnio Δt_s įvertinama į *BX* aibę įtraukiant elementus, kuriuos slėgio impulsas gali pasiekti per Δt_s žingsnį (Pav. 6).



Pav. 6 Paklaidos dėl per didelio Δt_s žingsnio įvertinimas

Įvykus vamzdyno trūkiui vamzdyno atkarpoje, kurioje nėra manometro, vamzdyno trūkis fiksuojamas atsišakojime, o visa likusi atkarpa įtraukiama į aibę *BX* (Pav. 7).



Pav. 7 Paklaidos dėl per mažo manometrų skaičiaus įvertinimas

Dėl vamzdyno atsišakojimų, galimų slėgio atspindžių susiliejimo su slėgio banga prieš užfiksuojant trūkį ir natūralaus vamzdyno aptarnavimo, laiko intervalas tarp (25) lygtyje fiksuojamo trūkio t_{tr} ir realiai pasiekusio slėgio impulso t_{imp} gali skirtis. Laiko intervalas Δt_{fiks} , kurį į aibę BX įtraukiamos galimos trūkio vietos, apskaičiuojama pagal formulę (28).

$$\Delta t_{fiks} = \max(t_{tr_i} - t_{imp_i}) - \min(t_{tr_i} - t_{imp_i})$$
(28)

(28) lygtyje min $(t_{tr} - t_{imp})$ atitinka minimalų laiko intervalą, nuo tada, kai slėgio impulsas pasiekė *i*-tąjį manometrą ir jame buvo užfiksuotas, tuo tarpu max $(t_{tr} - t_{imp})$ – maksimalų, kur i = 1..N, čia N - manometrų skaičius vamzdyne. Šiai paklaidai priskiriama iš anksto žinoma reikšmė. Jei ši reikšmė nėra žinoma, ją nustatom atsitiktinai modeliuojant vamzdyno sistemoje įvairius trūkius ir lyginant reikšmes t_{imp_i} ir t_{tr_i} , kur t_{imp_i} atitinka slėgio bangos sklidimą idealizuotu atveju, t_{tr_i} - slėgio bangos sklidimą naudojant BEM modelį. Iš principo užtenka atlikti slėgio bangos modeliavimus iš tolimiausių vamzdyno atkarpų ir fiksuoti vamzdyno galuose esančius skirtumus.

Reikia pastebėti, kad įvertinamos 1 ir 3 tipo paklaidas sumuojasi (29),

$$\Delta t_{pakl} = \Delta t_{fiks} + \Delta t_s \tag{29}$$

čia Δt_{pakl} – maksimali galima paklaida, tuo tarpu 2 tipo paklaida įvertinama tik vėliau ir su visais elementais iš aibės BT. Galimas klaidų įvertinimo scenarijus pateiktas Pav. 8.





4.4 Algoritmas

Trūkio vietos nustatymo algoritmą galima suskaldyti į keturis pagrindinius žingsnius: vamzdyno analizė, trūkio identifikavimas, trūkio vietos nustatymas ir paklaidų įvertinimas. Detali algoritmo schema pateikiama Pav. 9.



Pav. 9 Detali vamzdyno trūkio vietos nustatymo schema

Iš Pav. 9 matome, kad vamzdyno analizė, kuri reikalauja didelių matematinių skaičiavimų (BEM sudarymas, Δt_{fiks} paklaidos įvertinimas), gali būti atliekama nepriklausomai nuo kitų žingsnių, tuo tarpu trūkio identifikavimas pritaikytas veikti foniniame rėžime. kai užfiksavus trūkį iškviečiamas trūkio nustatymo algoritmas.

5. TRŪKIO VIETOS NUSTATYMO ALGORITMO TYRIMAS

5.1 Programinės įranga

Kuriant programinę įrangą (PĮ) programavimo kalbai pasirinkti buvo svarstoma tarp JAVA ir MATLAB. Kaip pagrindinius MATLAB privalumus galima išskirti itin greitus skaičiavimus ir sąlyginai nesudėtingą programavimą matematiniams uždaviniams spręsti. Tačiau įvertinant, kad MATLAB yra mokama, tuo tarpu JAVA kalba turi priemones sudarytam algoritmui realizuoti, pasirinkta JAVA programavimo kalba. Matricų daugybai naudojamas JAMA matricų paketas, diferencialinėmis lygtims spręsti – Michael Thomas Flanagan's JAVA mokslinių skaičiavimų biblioteka. Diferencialinės lygtys sprendžiamos ketvirtos eilės Rungės ir Kutos metodu. Tarpiniams rezultatams saugoti naudojama duomenų bazė SQLite.

PĮ buvo projektuojama taip, kad tarpiniai žingsniai būtų saugomi duomenų bazėje. Taip atsiranda galimybė kiekviename žingsnyje naudoti vis kitus duomenis (geometrijai sudaryti skirtingus BEM, priskirti skirtingus manometrų šablonus, modeliuoti slėgio bangą idealizuotu ir BEM rezultatus išsaugant skirtinguose manometrų šablonuose ir kt.). Tokiu būdu realizuojamas patogus įrankis pereinamiesiems procesams vamzdyne modeliuoti ir tirti.

5.2 Vamzdyno statinės analizės sudarymas ir teisingumo patikrinimas

Vamzdyno statinė analizė atliekama pagal iš (8) lygčių sistemos sudarytą BEM nusistovėjusiai tėkmei apskaičiuoti. Vamzdyną sudaro tiekimo ir grįžtamoji vamzdyno dalys, tarpusavyje sujungtos imtuvais. BEM imtuvai atitinka ekvivalentinius vamzdžio elementus. Skaičiuojant nusistovėjusią tėkmę, kraštinėmis sąlygomis užduodami slėgiai arba tėkmės debitai tiriamo vamzdyno fragmento atkirtimo nuo likusio vamzdyno taškuose. Statinės analizės sudarymui buvo pasirinktas Vilniaus miesto šiluminių trasų vamzdyno fragmentas (Pav. 10).



Pav. 10 Pradinė vamzdyno geometrija

Pav. 10 mėlynos spalvos segmentai atitinka vamzdžius kurių: diametras diam = 0.1(m), sienelės ilgis Ls = 0.0035(m); atitinkamai geltonos spalvos: diam = 0.5(m), Ls = 0.0063(m). Geltonais apskritimais pavaizduoti imtuvai, kurių diam = 0.5(m) ir Ls = 0.003(m). Mėlynais apskritimas vaizduojami mazgai su užduotais slėgiais arba tėkmės debitais. Šiame modelyje kaip pradiniai duomenys vamzdyno atkirtimo taškuose užduodami slėgiai P = 500000 (Pa) tiekimo vamzdyne, ir neigiami debitai $w = -10 (m^2/h)$ grįžtamajame. Statinei analizei atlikti naudojamos fizikinės konstantos: $E = 2.1^{11} (N/m^2)$, $K = 2.2^9 (N/m^2)$, $\rho = 995(kg/m^3)$ ir $\mu = 5.47^{-4} (N * S/m^2)$.

Iš pateiktos geometrijos ir pradinių duomenų sudarius BEM bei atlikus statinę analizę, gaunamas modelis, kur kiekviename baigtiniame elemente apibrėžiami tėkmės greičiai ir slėgiai (Pav. 11).



Pav. 11 Sudarytas BEM nusistovėjusiai tėkmei vamzdyne

Pav. 11 juodi taškeliai atitinka BEM mazgus. Atsitiktiniuose taškuose pamatavus slėgius ir tėkmės greičius matome, kad yra tenkinamos slėgio reikšmių darnos ir debitų balanso sąlygas vamzdyno konstrukcijos mazguose. Slėgio reikšmės tolygiai pasiskirsto ir yra artimoms užduotoms reikšmėms $P \approx 500000 (Pa)$, tuo tarpu tėkmė vamzdyne vyksta iš įėjimo į išėjimo vamzdyną (užduotas neigiamas debitas išėjimo vamzdyno atkirtimo taškuose).

5.3 Algoritmo tyrimas naudojant idealizuotą slėgio bangos sklidimo modelį

Atliekant trūkio nustatymo algoritmo tyrimą esant idealizuotam slėgio bangos sklidimo modeliui, iš pasirinktų trūkių taškų modeliuojami slėgio impulsai, ir žiūrima kaip pagal manometruose fiksuojamus duomenis nustatomas trūkio taškas. Atkreipkime dėmesį, kad esant idealizuotam slėgio bangos modeliavimui, 3 tipo paklaida $t_{fiks} = 0$. Atliekant eksperimentus naudojami 5.2 skyrelyje atliktos statinės vamzdyno analizės duomenys.

5.3.1 1 eksperimentas. Modelio teisingumo tikrinimas

1 eksperimente atliekamas modelio teisingumo patikrinimas laiko momentu $t_{tr} = 0.1(s)$ sužadinant slėgio impulsą taške B[x]. Skirtinguose manometrų šablonuose 3(s) intervalą fiksuojamos slėgio reikšmės $\Delta t_s = 0.001(s)$ tikslumu. Pav. 12 pateikiamas atliekamo eksperimento vamzdyno fragmentas ir taškas B[x].



Pav. 12 Eksperimentas 1, pradiniai duomenys (1 bandymas)

Modeliuojant slėgio impulsą slėgio duomenys buvo fiksuojami esant 3 manometrų išdėstymams (*Testas-1*, *Testas-2*, *Testas-3*). Pav.13 pateiktas slėgio impulso frontas esant manometrų išdėstymui *Testas-1*.



Pav. 13 Slėgio impulso frontas esant Testas-1 manometrų šablonui

Iš Pav. 13 matome, kad sklindant slėgio impulsui trūkis manometruose *M1* ir *M2* fiksuojamas laiko momentais $t_{tr[M1]} = 0.503$ (s) ir $t_{tr[M2]} = 0.588$ (s). Laukiami ir gauti trūkio nustatymo algoritmo rezultatai pateikiami Pav. 14.



Pav. 14 Eksperimentas 1. Laukiami ir gauti rezultatai esant Testas-2 manometrų šablonui

Iš Pav. 14 matome, kad laukiami ir gauti rezultatai atitinka. Užfiksuotas trūkis ties tašku, kur vamzdynas atsišakoja su atkarpa, kurioje nėra manometrų, ir ši atkarpa, įvertinus 2 tipo (žr. 4.3 sk.) paklaidą, įtraukiama kaip galima trūkio lokacija.



Pav.15 pateiktas slėgio impulso frontas esant manometrų išdėstymui Testas-2.

Pav. 15 Eksperimentas 1. Slėgio impulso frontas esant Testas-2 manometrų šablonui

Iš Pav. 15 matome, kad sklindant slėgio impulsui trūkis manometruose *M1*, *M2*, *M3* ir *M4* fiksuojamas laiko momentais $t_{tr[M1]} = 0.588$ (s), $t_{tr[M2]} = 0.248$ (s), $t_{tr[M3]} = 0.367$ (s) ir $t_{tr[M4]} = 0.503$ (s). Laukiami ir gauti trūkio nustatymo rezultatai pateikiami Pav. 16.



Pav. 16 Eksperimentas 1. Laukiami ir gauti rezultatai esant manometrų išdėstymui Testas-2

Iš Pav. 16 matome, kad laukiami ir gauti rezultatai atitinka. Kaip ir esant manometrų išdėstymui *Testas-1*, užfiksuotas trūkis ties tašku, kur vamzdynas atsišakoja su atkarpa, kurioje nėra manometrų, tik esant šiam manometrų išdėstymui, įvertinant 2 tipo paklaidą trūkis nustatomas kur kas tiksliau. Pav. 17 pateikiamas slėgio impulso frontas esant *Testas-3* manometrų išdėstymui.



Pav. 17 Eksperimentas 1. Slėgio impulso frontas esant Testas-3 manometrų šablonui

Esant manometrų išdėstymui *Testas-3*, slėgio impulsas fiksuojamas manometruose *M1*, *M2*, *M3*,*M4* ir M5 laiko momentais $t_{tr[M1]} = 0.588$ (s), $t_{tr[M2]} = 0.113$ (s), $t_{tr[M3]} = 0.475$ (s), $t_{tr[M4]} = 0.643$ (s) ir $t_{tr[M5]} = 0.503$ (s). Laukiami ir gauti trūkio nustatymo rezultatai pateikiami Pav. 18.



Pav. 18 Eksperimentas 1. Laukiami ir gauti rezultatai esant manometrų išdėstymui Testas-3

Iš Pav. 18 matome, kad trūkis patenka tarp manometrų, ir 2 tipo paklaida lygi 0, tuo tarpu trūkio lokacija užfiksuojama tiksliai.

5.3.2 Apibendrinimas

Esant idealizuotam slėgio bangos sklidimui, trūkio nustatymo algoritmas veikia tinkamai. Trūkiui esant atkarpoje kurioje nėra manometrų, trūkis fiksuojas atkarpos gale, tuo tarpu trūkio lokacijai papuolant tarp manometrų, jis fiksuojamas tiksliai – 1 tipo paklaida praktiškai neįtakoja rezultatų dėl mažos Δt_s reikšmės (žr. 4.3 sk.).

5.4 Algoritmo tyrimas naudojant BEM pereinamuosius procesus

5.4.1 Integravimo žingsnio ir baigtinio elemento ilgio parinkimas

Parenkant integravimo žingsnį t_{int} ir BE ilgio L, naudojami 5.2 skyrelyje atliktos statinės analizės duomenys pasirinktame taške modeliuojama banga, kai per 0.1 (s) slėgis nukrenta

nuo 500 000 (Pa) iki 400 000 (Pa). Vamzdyno galuose esančiuose manometruose fiksuojamos slėgio reikšmės. Parenkant integravimo žingsnį $t_{int} = 1 \ (ms)$ ir 3 (m) BE ilgį $L = 3 \ (m)$, bei patikrinant jo konvergavimo sąlygą su dvigubai mažesnėmis reikšmėmis $t_{int} = 0.5 \ (ms)$ ir $L = 1.5 \ (m)$, gauti konvergavimo sąlygą tenkinantys rezultatai (Pav. 19).



Pav. 19 Modelio konvergavimo sąlygos patikrinimas

5.4.2 2 eksperimentas – BEM modelio teisingumo patikrinimas

Atliekant t_{fiks} paklaidos įvertinimą buvo pasirinktas slenkstinė trūkio riba, kai per 0.1 (s) slėgis taške nukrenta iki 400 000 (Pa) esant 1000 (Pa) slėgio triukšmams. Apskaičiuota paklaida lygi $t_{fiks} = 102$ (*ms*). Atliekant eksperimentus tikimasi, kad visi staigesni trūkiai paklius į galimų vamzdyno trūkių aibę *BX*.

2 eksperimente atliekamas modelio teisingumo patikrinimas laiko momentu $t_{tr} = 0.1(s)$ sužadinant slėgio krytį taške B[x]. Skirtinguose manometrų šablonuose *Testas-BE-1*, *Testas-Be-2* ir *Testas-BE-3* 3(s) intervalą fiksuojamos slėgio reikšmės 0.001(s) tikslumu. Pav. 20 pateikiamas atliekamo eksperimento vamzdyno fragmentas ir taškas B[x].



Pav. 20 Eksperimentas 2. Pradiniai duomenys

Modeliuojant pereinamuosius procesus vamzdyne *Testas-BE-1* šablono manometruose užfiksuotos slėgio reikšmės pateikiamos Pav. 21.



Pav. 21 Eksperimentas 2. Slėgio impulso frontas esant BE-Testas-1 manometrų šablonui

Sklindant slėgio impulsui trūkis manometruose *M1*, *M2*, *M3*, *M4*,*M5* ir *M6* fiksuojamas laiko momentais $t_{tr[M1]} = 0.74$ (s), $t_{tr[M2]} = 0.692$ (s), $t_{tr[M3]} = 0.556$ (s), $t_{tr[M4]} = 0.46$ (s), $t_{tr[M5]} = 0.503$ (s) ir $t_{tr[M6]} = 0.334$ (s) (Pav. 21). Laukiami ir gauti trūkio nustatymo rezultatai pateikiami Pav. 22.



Pav. 22 Eksperimentas 2. Laukiami ir gauti rezultatai esant manometrų išdėstymui BE-Testas-1

Iš Pav.22 matome, kad trūkio lokacija ir fiksavimo taškas skyrėsi, tačiau įvertinus paklaidą, trūkis pateko į tarp aibės *BX* elementų. *Testas-BE-*2 šablono manometruose užfiksuotos slėgio reikšmės pateikiamos Pav. 23.



Pav. 23 Eksperimentas 2. Slėgio impulso frontas esant BE-Testas-2 manometrų šablonui

Iš 23 Pav. matome, kad trūkis buvo fiksuojamas manometruose *M1*, *M2*, *M3* laiko momentais $t_{tr[M1]} = 0.624$ (s), $t_{tr[M2]} = 0.556$ (s), $t_{tr[M3]} = 0.334$ (s). Laukiami ir gauti trūkio nustatymo rezultatai pateikiami Pav. 24.



Pav. 24 Eksperimentas 2. Laukiami ir gauti rezultatai esant manometrų išdėstymui BE-Testas-2

Iš Pav.24 matome, kad įvertinus paklaidas trūkis pateko tarp aibės *BX* elementų. Galime pastebėti kaip esant mažam manometrų skaičiui išauga galimų trūkio taškų aibės *BX* elementų skaičius. *Testas-BE-*3 šablono manometruose užfiksuotos slėgio reikšmės pateikiamos Pav. 25.



Pav. 25 Eksperimentas 2. Slėgio impulso frontas esant BE-Testas-3 manometrų šablonui

Manometruose M1 ir M2 fiksuojamos trūkis fiksuojamas laiko momentais $t_{tr[M1]} =$ 0.740 (s) ir $t_{tr[M2]} =$ 0.460 (s) (Pav.25). Laukiami ir gauti trūkio nustatymo rezultatai pateikiami Pav. 26.



Pav. 26 Eksperimentas 2. Laukiami ir gauti rezultatai esant manometrų išdėstymui BE-Testas-3

Iš Pav.26 matome, kad įvertinus paklaidas trūkis pateko tarp galimų trūkio lokacijų. Galime pastebėti, kad nors trūkio taškas su visais manometrų šablonais patenka į galimų vamzdyno taškų aibę *BX*, jis visuomet fiksuojamas arčiau artimiausio manometro, nei jį tikimasi užfiksuoti. Taip yra todėl, kad tolimesniuose manometruose intervalas tarp laiko momento, kai slėgio impulsas pasiekia manometrą ir jį užfiksuoja, yra didesnis.

5.4.3 Vamzdyno geometrijos įtakos paklaidai t_{fiks} tyrimas

Atliekant paklaidos t_{fiks} (žr. 4.3 sk.). priklausomybės nuo vamzdyno geometrijos tyrimą, analizuojama kaip vamzdyno atsišakojimai ją įtakoja. Esant vienodam atstumui tarp tolimiausių vamzdyno taškų (594 m) palaipsniui įtraukiama vis daugiau vamzdyno atsišakojimų ir kiekvienoje iteracijoje apskaičiuojama paklaida t_{fiks} . Tyrimas buvo atliekamas atliekamas modeliuojant pereinamuosius procesus, kai pasirinktame taške per 0.1 (s) slėgis nukrenta nuo 500 000 (Pa) iki 400 000 (Pa). Pav. 27 pateikiama BEM sudarytas 1 iteracijoje.



Pav. 27 Vamzdyno geometrijos įtakos paklaidai tyrimas - BEM 1 iteracijoje

Pav. 27 pateikti manometrai kur atliekama slėgio analizė iteracijų metu. Pav. 28 pateiktos slėgio matavimo reikšmės pirmoje iteracijoje.





Pav. 28 Vamzdyno geometrijos įtakos paklaidai tyrimas -fiksuojami trūkiai 1 iteracijoje

Iš Pav. 28 matome, kad slėgio trūkio fiksavimas esant 1 iteracijoje fiksuojamas laiko momentais $t_{tr[1]} = 0.535$ (s) ir $t_{tr[2]} = 0.538$ (s). Pav. 29 pateikiamas BEM 10 iteracijoje, kur pažymėtos kiekvienoje iteracijoje į modelį įtrauktos atkarpos.



Pav. 29 Vamzdyno geometrijos įtakos paklaidai tyrimas - BEM 10 iteracijoje

Pav. 29 matome, kad nors modelio bendra geometrija yra didesnė, bet atstumas tarp analizuojamų taškų yra tas pats. Pav. 30 pateiktos slėgio matavimo reikšmės 10 iteracijoje.





Pav. 30 Vamzdyno geometrijos įtakos paklaidai tyrimas -fiksuojami trūkiai 10 iteracijoje

Iš Pav. 30 matome, kad trūkis 10 iteracijoje fiksuojamas laiko momentais $t_{tr[1]} = 0.565$ (s) ir $t_{tr[2]} = 0.5569$ (s). Lyginant su pirma iteracija, trūkis 0.3 (s) vėliau. Atlikus visas 10 iteracijų kaip kiekvienoje iteracijoje keičiasi t_{fiks} pavaizduota Pav. 31.



Pav. 31Vamzdyno geometrijos įtaka paklaidai

Iš Pav. 31 matome, kad t_{fiks} tiesiškai priklauso nuo vamzdyno geometrijos atsišakojimų.

5.4.4 Trūkio kryčio intensyvumo įtakos paklaidai t_{fiks} tyrimas

Priklausomybės nuo trūkio intensyvumo tyrimui naudojamas 5.4.3 sk. 10 iteracijoje sudarytame BEM (Pav. 29). Atliekant 20 iteracijų, kai triukšmų amplitudė lygi 10000 Pa ir trūkio pradinis laiko momentu $t_{tr} = 0.1$ (s). 1 iteracijoje slėgis nukrenta per 0.01 (s) nuo 500 000 iki 400 000 Pa. Su kiekviena iteracija trūkio intensyvumo žingsnis didinamas 0.01 (s). Pav. 32 pavaizduota ties kuriomis vietomis fiksuojamas trūkis 1 iteracijoje.



Slėgio duomenys manometruose

Pav. 32 Vamzdyno trūkio intensyvumo įtakos paklaidai tyrimas -fiksuojami trūkiai 1 iteracijoje

Iš Pav. 33 matome, kad trūkis 1 iteracijoje fiksuojamas laiko momentais $t_{tr[1]} = 0.543$ (s) ir $t_{tr[2]} = 0.547$ (s). Pav. 33 pavaizduota ties kuriomis vietomis fiksuojamas trūkis 1 metu.



Slėgio duomenys manometruose



Iš Pav. 33 matome, kad trūkis 1 iteracijoje fiksuojamas laiko momentais $t_{tr[1]} = 0.590$ (s) ir $t_{tr[2]} = 0.594$ (s). Atkreipkime dėmesį, kad slėgio kryčio pokytis skyrėsi 19 (ms), tuo tarpu trūkio fiksavimo skirtumas išaugo iki 47(ms). Paklaidos t_{fiks} priklausomybės grafikas nuo trūkio intensyvumo pateikiamas Pav. 34.



Pav. 34 Trūkio kryčio trukmės įtaka paklaidai t_{fiks}

Iš Pav. 35 matome, kad t_{fiks} tiesiškai priklauso nuo trūkio kryčio trukmės.

5.4.5 Triukšmų amplitudės įtakos paklaidai t_{fiks} tyrimas

Priklausomybės nuo trūkio amplitudės tyrimui naudojamas 5.4.3 sk. 10 iteracijoje sudarytas BEM (Pav. 36). Esant slėgio kryčiui kai per 0.1 (s) nuo slėgis nukrenta nuo 500 000 iki 400 000 Pa, 20 iteracijų atliekamas trūkio nustatymas palaipsniui didinant slėgio amplitudę nuo 1000 Pa iki 20000 Pa, 1000 Pa intervalu.



Pav. 35 Triukšmų amplitudės įtaka paklaidai t_{fiks}

5.4.6 Apibendrinimas

Atlikus modelio teisingumo tikrinimą gauti teigiami rezultatai, nustatytas trūkis patenka tarp galimų trūkio lokacijų. Tačiau reikia pastebėti, kad skaičiavimai buvo atliekami Vilniaus miesto vamzdyno fragmente ir skaičiuojant paklaidą t_{fiks} buvo pasirinkta santykinai nedidelė (1000 Pa) slėgio triukšmų amplitudė. Iš atliktų tyrimų matome, kad visi veiksniai (geometrijos išsišakojimai, trūkio intensyvumas, triukšmų amplitudė) tiesiškai įtakoją t_{fiks} paklaidą. Iš to galima daryti išvadą, kad didesniems vamzdynams su didesne triukšmų amplitude ši paklaida smarkiai išaugs ir algoritmo efektyvumas prastės.

5.5 Algoritmo optimizavimo galimybės

Egzistuoja kelios galimybės algoritmo optimizavimui. Viena iš jų, tai 3 tipo paklaidos t_{fiks} sumažinimas (žr. 4.3 sk.). Detaliau išanalizavus algoritmą tampa akivaizdu, kad kiekviename vamzdyno baigtiniame elemente galima vertinti paklaidą tik tarp jam gretimų manometrų, tuo tarpu

susitikus bangoms kaip prioritetinę, bangą imti tą, kuri užfiksuojama anksčiausiai. Siekiant optimizuoti t_{fiks} paklaidos išaugimą dėl geometrijos (žr. 4.4 sk.), parenkant prioritetinę bangą reiktėtų įvertinti ne tik laiko momentą t_{tr} , bet ir bangos nueitą kelią. Tačiau paklaida dėl slėgio triukšmų amplitudės (žr. 4.5 sk.) liktų neįvertinta, todėl atgaliniam slėgio bangos modeliavimui siūloma naudoti BEM pereinamuosius procesus. Tokiu būdų į algoritmo kintamuosius atsirastų galimybė įtraukti ne tik laiko, bet ir slėgio komponentę. Taip atsirastų galimybė optimizuoti 1 ir 2 tipo paklaidas (žr. 3 sk.).

6. IŠVADOS

Apžvelgus metodus pereinamiesiems procesams vamzdyne realizuoti, sudaryti BEM ir idealizuotos slėgio bangos sklidimo matematiniai modeliai, bei vamzdyno trūkio vietos nustatymo algoritmas. Algoritmas paremtas atgaliniu slėgio bangos modeliavimu panaudojant idealizuotą slėgio bangos sklidimo modelį.

Realizuota programine įranga modeliuojant vamzdyne pereinamuosius procesus BEM ir idealizuotu slėgio bangos sklidimo modeliu pamatėme, kad idealizuotu slėgio bangos sklidimo atveju algoritmas nustato vamzdyno trūkį, bei įvertindamas paklaidas dėl per mažo manometrų skaičiaus ir slėgio reikšmių matavimo žingsnio, pateikia galimų trūkio lokacijų aibę. Eksperimento metu pademonstruota, kad algoritmas veikia korektiškai, ir trūkis nustatomas tiksliai jei jis papuola tiesiogiai tarp manometrų. Trūkio taškui esant vamzdyno atkarpoje, kurios galuose nėra manometrų, atkarpa įtraukiama kaip galima trūkio lokacija. Į tai reikia atsižvelgti organizuojant manometrų išdėstymus vamzdyne.

Naudojant BEM slėgio bangos sklidimo modelį pamatėme, kad dėl vamzdyne esančių triukšmų ir slėgio bangos slopimo atsiranda trūkio fiksavimo paklaida. Atliktas eksperimentas parodė, kad sudarytas trūkio nustatymo algoritmas šią paklaidą įvertina, ir trūkis patenka į galimų trūkio lokacijų aibę. Trūkio fiksavimo paklaidos tyrimas parodė, kad geometrijos išsišakojimai, trūkio intensyvumas, triukšmų amplitudė tiesiogiai ją įtakoja, ir didėjant šiems parametrams algoritmo efektyvumas prastėja (didėja galimų trūkio lokacijų aibė). Detaliai išanalizavus trūkio nustatymo algoritmą, buvo pateikti pasiūlymai algoritmo optimizavimui, kad jis tiesiogiai nebūtų priklausomas nuo šių parametrų.

7. LITERATŪROS SĄRAŠAS

[1] Wylie, B ,Streeter, V., Fluid Transients in Systems, Prentice-Hall, New York. 1993

[2] Wood, D.J., Lingireddy, S., Boulos, P.F., Karney, B.W., Mcpherson, D.L, "Numerical methods for modeling transient flow in distribution systems", Journal of American Water Works Association, 2005

[3] Selcuk, N., Tarhan, T., Tanrikulu, S., "Comparison of method of lines and finite difference solutions of 2-D Navier–Stokes equations for transient laminar pipe flow", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002

[4] Greyvenstein, G.P., "An implicit method for the analysis of transient flows in pipe networks", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002

[5] Frid, A. (1989), "Fluid vibration in piping systems—A structural mechanics approach, I Theory", Journal of Sound and Vibration, 1989

[6] Shu, J.J. (2003)," A Finite Element Model and Electronic Analogue of Pipeline Pressure Transients With Frequency-Dependent Friction", Transactions of the ASME, Journal of Fluids Engineering, 2003

[7]Kochupillai, J., Ganesan, N., Padmanabhan, C. (2005), "A new finite element formulation based on the velocity of flow for water hammer problems", International Journal of Pressure Vessels and Piping, 2005

[8] Osciadacz, A.J.(1996), "Different transient models—limitations, advantages and disadvantages", Twenty-eighth Annual Meeting of Pipeline Simulation Interest Group, San Francisco, 1996

[9] Barauskas, R., "Skaitinio modelio ir programinės įrangos pereinamųjų slėgio virpesių vamzdyne apskaičiavimui sukūrimas - mokslo tiriamojo darbo ataskaita ", Kauno technologijos universitetas, sisteminės analizės katedra, 2010