



KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
MATEMATINĖS SISTEMOTYROS KATEDRA

Dalia Kursevičiūtė

**OPTIMALAUS GLOTNINIMO PARAMETRO
NUSTATYMO ALGORITMAS ADAPTYVAUS
GLOTNINIMO STRATEGIJOJE**

Magistro darbas

Vadovas
lekt. dr. V. Kravčėnkienė

KAUNAS, 2013



KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
MATEMATINĖS SISTEMOTYROS KATEDRA

TVIRTINU
Katedros vedėjas
prof. habil. dr. V. Pekarskas
2013 06 07

OPTIMALAUS GLOTNINIMO PARAMETRO
NUSTATYMO ALGORITMAS ADAPTYVAUS
GLOTNINIMO STRATEGIJOJE

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

Vadovas
lekt. dr. V. Kravčėnkiėnė
2013 06 07

Recenzentas
doc. dr. L. Bikulčienė
2013 06 07

Atliko
FMMM-1 gr. stud.
D. Kursevičiūtė
2013 05 30

KAUNAS, 2013

KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

Pirmininkas: Rimantas Rudzkis, profesorius (VU)

Sekretorius: Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)

Nariai: Jonas Valantinas, profesorius (KTU)

Vytautas Janilionis, docentas (KTU)

Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU)

Zenonas Navickas, profesorius (KTU)

Arūnas Barauskas, dr., direktoriaus pavaduotojas (UAB „Danet Baltic“)

Kursevičiūtė D. An optimal smoothing parameter determination algorithm in strategy of adaptive smoothing: Master's work in applied mathematics / supervisor lect. dr. V. Kravčėnkiėnė; Department of Mathematics Research in System, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2013. – 69 p.

SUMMARY

The improving of technology, it is also improving analysis in the engineering domain, what makes possibility to modulate the optical experiment in virtual environment. In an overview of numerical method, it was chosen finite element method (FEM). Since standard FEM analysis is based on the interpolation of nodal parameters in the domain of each element, and displacement field is continuous in the global domain, however the stress field is discontinuous at the inter-element boundaries due to the differentiation of the field of strains. To solve the problem of discontinuous field, it is used adaptive conjugate smoothing algorithm, where by the minimized functional, which describes the differences between the interpolated and initial discontinuous field, added an additional penalty term for rapid change of interpolated field.

The smoothing parameter λ can be selected for each finite element individually and its definition was determined intuitively. However it was confronted with a problem that increasing the parameter value of λ distorted physical information about the analyzed system. So in this work presented an optimal smoothing parameter detection algorithm, which helps to choose the optimal smoothing parameter value of λ , between regularized theoretical field and smoothed field.

TURINYS

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS.....	6
Ženklių, simbolių ir santrumpų sąrašas	7
ĮVADAS.....	8
1. BENDROJI DALIS	10
1.1. BAIGTINIŲ ELEMENTŲ METODAS.....	10
1.1.1. Kontinualiųjų struktūrų funkciniai matematiniai modeliai.....	10
1.1.2. Tiesinės tamprumo teorijos lygtys	11
1.1.3. Kontinuumo diskretizavimas baigtinių elementų metodu	15
1.1.4. Mišrioji poslinkių ir įtempių formuluotė	19
1.1.5. Taškų interpoliavimo metodas	21
1.1.6. Mazgais pagrįstas glotnintas taškų interpoliavimo metodas.....	22
1.1.7. Taškų interpoliavimo metodas su tolydžiuoju įtempio lauku	23
1.1.8. Tolydžio deformacijų lauko konstravimas	24
1.2. SKAITINIAI METODAI	26
1.2.1. Interpoliaciniai splainai.....	27
1.2.2. Suglodinimas.....	28
1.3. ADAPTYVUSIS JUNGTINIS GLOTNINIMO ALGORITMAS	30
1.4. OPTINIAI METODAI	32
2. TIRIAMOJI DALIS	34
2.1. Algoritmo realizacija vienmačiu atveju.....	34
2.2. Algoritmo realizacija dvimačiu atveju	40
IŠVADOS.....	46
LITERATŪRA.....	47
PRIEDAS	49

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

1.1 pav. Trimatė kontinualioji struktūra, kaip kraštinio uždavinio apibrėžimo sritis.....	10
1.2 pav. Trimatis tamprusis kūnas ir jį apibūdinantys dydžiai.....	12
1.3 pav. Elementarus tūris ir jame veikiantys įtempimai stačiakampėse koordinatėse.....	13
1.4 pav. a) Trimatė baigtinių elementų struktūra; b) Dvimatė baigtinių elementų struktūra.....	16
1.5 pav. Baigtinių elementų pavyzdys – trimatis elementas.....	17
1.6 pav. Trikampiai elementai ir suglotninti narveliai, kurie sudaryti paeiliui jungiant centroidus su mazgų apsuptais trikampiais pusiauakraštinės taškais.....	23
1.7 pav. Ω_k srities, su viduje esančiais $\Omega_{k,i}$ trikampio posričiais, kuri ribojasi su Ω_q iliustracija.....	24
1.8 pav. Suglotnintų sričių, kuriuose skaičiuojama deformacija k, I ir P taškuose, tipų iliustracija....	26
1.9 pav. Muaro efektas.....	32
2.1 pav. Vienmatė sistema sudaryta iš 3 kvadratinių baigtinių elementų ir kiekvieno elemento 3 mazgų.....	34
2.2 pav. 3 kvadratiniai elementai. Punktyrinė linija - teorinis itempių laukas, riebi ištisinė linija – glotnintas itempių laukas, plona ištisinė linija - glotnintas įtempimų laukas $\lambda_i = 0.01, 0.03, \dots, 0.13$	38
2.3 pav. Teorinis trūkus laukas (punktyrinė linija) ir regularizuotas tolydus laukas (ištisinė linija).....	38
2.4 pav. Optimali glotninimo parametro λ reikšmė.....	39
2.5 pav. a) Regularizuotas laukas (punktyrinė linija) ir glotnintas laukas, kai $\lambda = 0$ (ištisinė linija); b) Regularizuotas laukas (punktyrinė linija) ir glotnintas laukas, kai $\lambda = 0.032$ (ištisinė linija).....	39
2.6 pav. Dvimatė sistema sudaryta iš: a) 9 kvadratinių baigtinių elementų ir 49 mazgų; b) 1 kvadratinio baigtinio elemento ir 9 mazgų.....	40
2.7 pav. Įtempimo laukas.....	43
2.8 pav. Rekonstruotas įtempimo S laukas esant $\lambda = 0$	44
2.9 pav. Rekonstruotas įtempimo S laukas, kai $\lambda = 0.1; 1; 10; 0.013$	45
2.10 pav. Optimali glotninimo parametro λ reikšmė.....	45

ŽENKLŲ, SIMBOLIŲ IR SANTRUMPŲ SĄRAŠAS

TIM	taškų interpoliavimo metodas
MG - TIM	mazgų glotninimu pagrįstas taškų interpoliavimo metodas
TIM – TĮ	taškų interpoliavimo metodas su tolydžiuoju lauku
BEM	baigtinių elementų metodas
$[D]$	operatorius, susiejanti deformacijos komponentę ir mazginius įtempimus analizuojamojo baigtinio elemento aplinkoje
σ	įtempių komponentė
$\{\varepsilon\}$	analizuojamojo baigtinio elemento apibendrintų mazgų deformacijų stulpelis
$[N]$	baigtinio elemento formos funkcijų eilutė
$D.S.$	poslinkių formuluotės procedūra
$\{s\}$	integruojamojo baigtinio elementų įtempių komponentių, ieškomų mazginių reikšmių stulpelis
x, y	dvimatės sistemos koordinatės
$\{S\}$	globalus įtempių mazginių reikšmių vektorius
λ	glotninimo parametras

ĮVADAS

Pastaruoju metu sparčiai besivystant mokslo ir technologijų amžiui, dauguma darbų persikelia į kompiuterių ekranus.

Ištobulėjus skaičiavimo technikai, inžinieriai naudoja itin daug kompiuterinės technikos programų, nes atsirado galimybė modeliuoti optinius eksperimentus virtualioje aplinkoje, naudojant skaitinius metodus. Inžinerinių problemų sprendimui praktikoje naudojami skaitiniai metodai, tokie, kaip baigtinių elementų, baigtinių skirtumų, ribinių elementų metodai, kurie ženkliai padidina inžinerinės veiklos efektyvumą. Iš jų populiariausiai naudojamas baigtinių elementų metodas (BEM). Šie metodai yra ne tik pigūs, bet ir geresni, nes jų pritaikymas duoda greitesnius išsamius rezultatus [1].

Kadangi įprastinė BEM analizė yra pagrįsta mazginių kintamųjų interpoliavimu kiekvieno elemento srityje, o poslinkių laukas yra tolydusis globalioje srityje, tačiau diferencijavimas įtempių lauką, elementų sujungimo vietose tampa trūkiu. Tad pagrindinis tikslas tampa trūkiųjų laukų (adaptyvusis) glotninimas, naudojant tokius skaitinius metodus, kurie leistų atlikti inžineriškai pagrįstą glotninimą, neiškraipantį nagrinėjamų fizikinių parametru bei tinkantį tyrimų rezultatų vizualizavimo procedūroms.

Trūkiojo lauko problemai spręsti naudojamas adaptyvusis jungtinis glotninimo inžinerinis algoritmas [2]. Prie minimizuojamo funkcionalo, aprašančio skirtumus tarp interpoliuoto ir pradinio trūkiojo lauko, pridedamas papildomas baudos narys dėl greito interpoliuojamojo lauko kitimo. Šis siūlomas algoritmas gerai atitinka BEM ideologiją, nes sprendžiant jungtinio glotninimo uždavinius globaliose srityse, formuluojama tiesinių algebrinių lygčių sistema suglotnintų mazginių parametru nustatymui.

Glotninimo parametru λ galima parinkti kiekvienam elementui individualiai ir jo tikslumas buvo nustatomas intuityviai [2], tačiau buvo susidurta su problema, kad didinant parametro λ reikšmę buvo iškraipoma fizikinė informacija apie nagrinėjamą sistemą. Tad kyla klausimas, kaip pasirinkti optimalią glotninimo parametro λ reikšmę.

Darbo tikslas – sukurti optimalaus glotninimo parametro λ nustatymo algoritmą.

Uždaviniai:

1. Susipažinti su skaitiniais metodais, ypač su BEM, ir išmokti taikyti adaptyviojo jungtinio glotninimo strategiją.
2. Trūkiųjų laukų glotninimui pritaikyti adaptyviojo jungtinio glotninimo algoritmą aukštesnės eilės baigtiniam elementui.
3. Sukurti optimalaus glotninimo parametro nustatymo algoritmą.

Šia tema buvo skaityti pranešimai ir pateikti straipsniai temomis „Nėardančios kontrolės metodų apžvalga“ leidiniui „Matematika ir matematinis modeliavimas 2012“ bei „Optimalaus glotninimo parametro nustatymo algoritmas“ („An optimal smoothing parameter determination algorithm“).

1. BENDROJI DALIS

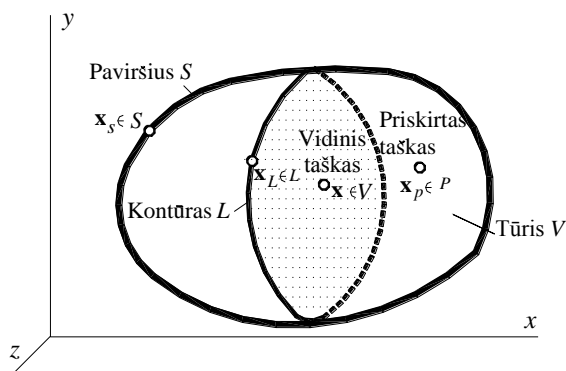
1.1. BAIGTINIŲ ELEMENTŲ METODAS

Šiuolaikinio inžinieriaus konstruktoriaus darbas vis labiau tampa neatsiejamas nuo kompiuterio. Moderni statybinių konstrukcijų teorija bei projektavimo normos leidžia išvelgti konstrukcijos atsaką į visus numatomus išorės poveikius, bet tam reikalingos tokios skaičiavimo programos, kurios realizuoja plačiai išplitusį baigtinių elementų metodą.

1.1.1. KONTINUALIŲJŲ STRUKTŪRŲ FUNKCINIAI MATEMATINIAI MODELIAI

Kalbant apie kontinualiąsias struktūras, turima omenyje kontinuumas, kuriam būdingos konkrečios fizinės savybės. Būdingas kontinualiosios struktūros pavyzdys yra tamprusis kūnas, aprašomas tamprumo teorijos lygtimis. Panašiai aprašomi ir netiesiška deformuojamo kūno bei lauko teorijos uždaviniai. Formuluojuant funkcinis modelius, apsiribojama tik bendriausiomis formaliosiomis kontinuumo savybėmis, kurios nepriklauso nuo fizinės kontinuumo prigimties. Kai kurios konkrečios savybės bus atskleistos smulkiau nagrinėjant tam tikrus kontinualiųjų struktūrų pavyzdžius [3].

Taigi nagrinėjama trimatė kontinualioji struktūra (1.1 pav.). Struktūros konfigūracija nusakoma pagal jos tūrį V ir ribojantį paviršių S . Paprastumo dėlei struktūra aprašoma globaliojoje koordinačių sistemoje $Oxyz$. Nagrinėjant laike kintančius procesus, pradinė struktūros forma yra kūno konfigūracija, apibrėžta laiko momentu $t=0$. Laisvai pasirinkto vidinio struktūros taško padėtis nusakoma koordinačių vektoriumi $\mathbf{x} \equiv \{\mathbf{x}\} = \{x, y, z\}^T$, o paviršiaus taško padėtis – vektoriumi $\mathbf{x} \equiv \{\mathbf{x}_S\} = \{x_S, y_S, z_S\}^T$ [3].



1.1 pav. Trimatė kontinualioji struktūra, kaip kraštinio uždavinio apibrėžimo sritis

Įprasta, kad kontinualioji struktūra gali būti veikiamą tūryje bei paviršiuje pasiskirsčiusių poveikių. Tūrinius poveikius žymėsime vektorine funkcija $\{\mathbf{p}\} \equiv \{\mathbf{p}(\mathbf{x})\}$, o paviršių veikiančius poveikius – vektorine funkcija $\{\mathbf{p}_S\} \equiv \{\mathbf{p}_S(\mathbf{x}_S)\}$. Tūriniai poveikiai išreiškiami poveikiu tūrio vienetui, o paviršiaus poveikiai – poveikiu ploto vienetui. Jei kontinualioji struktūra yra deformuojamas kūnas, tūriniai poveikiai išreiškia tūrinės jėgas $\{\mathbf{p}(\mathbf{x})\} \equiv \{\mathbf{b}(\mathbf{x})\}$, o paviršiaus poveikiai – paviršines jėgas $\{\mathbf{p}_S(\mathbf{x}_S)\} \equiv \{\mathbf{t}(\mathbf{x}_S)\}$. Tam tikrais atvejais struktūrą gali veikti linijose \mathbf{x}_L ar taškuose \mathbf{x}_P sutelkti poveikiai $\{\mathbf{p}_L\} \equiv \{\mathbf{p}_L(\mathbf{x}_L)\}$ ir $\{\mathbf{p}_P\} \equiv \{\mathbf{p}_P(\mathbf{x}_P)\}$ [3].

Struktūros būseną nusakoma būvio kintamaisiais – vektorine funkcija $\{\mathbf{u}\} \equiv \{\mathbf{u}(\mathbf{x})\}$. Populiariausioje tamprumo teorijos ir kitų deformuojamo kūno mechanikos uždavinių formuluotėje poslinkiais būvio kintamieji sutapatunami su poslinkių funkcijomis [3].

Kraštinis uždavinys. Funkciniai matematiniai modeliai išreiškia priklausomybes tarp nežinomų būvio kintamųjų ir žinomų išorinių poveikių funkcijų. Standartinė tokių priklausomybių išraiška, arba standartinis matematinis modelis, yra diferencialinių lygčių sistema (diferencialinė lygtis). Taikant vektorinius žymėjimus, diferencialinių lygčių sistema gali būti užrašyta matricine forma [3].

Kai uždavinys tiesinis, šias lygtis galima aprašyti tiesiniu operatoriumi $[\mathbf{L}]$ [3]:

$$[\mathbf{L}]\{\mathbf{u}(\mathbf{x})\} = \{\mathbf{p}(\mathbf{x})\}, \quad \text{čia } \mathbf{x} \in V, \quad (1.1)$$

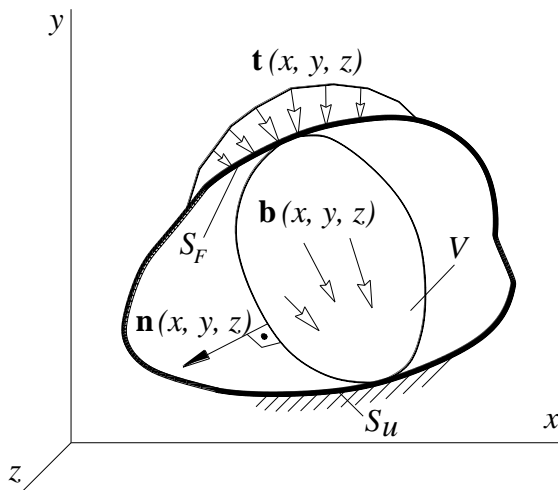
Korektiškai formuluojant, lygtys (1.1) papildomos kraštinėmis sąlygomis, apibrėžtomis kontinualiosios struktūros paviršiuje [3]:

$$[\mathbf{L}_S]\{\mathbf{u}(\mathbf{x}_S)\} = \{\mathbf{p}_S(\mathbf{x}_S)\}, \quad \text{čia } \mathbf{x}_S \in S. \quad (1.2)$$

$\{\mathbf{L}_S\}$ – analogiškas kraštinių sąlygų operatorius. Pastarasis, priklausomai nuo kraštinių sąlygų pobūdžio, gali nuskaidyti ir diferencialines, ir algebrines operacijas. Modelis, aprašytas priklausomybėmis (1.1–2), yra vadinamas *kraštiniu uždaviniu*. Esant reikalui, analogiškai (1.2), kraštinis uždavinys gali būti papildytas kraštinėmis sąlygomis paviršiaus kontūre L arba taškų aibėje P . 1.1 pav. pavaizduota trimatė kraštinė uždavinio apibrėžimo sritis [3].

1.1.2. TIESINĖS TAMPRUMO TEORIJS LYGTYS

Tamprumo teorija nagrinėja tamprųjį kūną. Kūnas aprašomas pasirinktoje globaliojoje koordinačių sistemoje. Kūno geometrija apibrėžiama tūriu V ir paviršiumi S (1.2 pav.). Paviršius dalijamas į dvi dalis S_F ir S_U [3].



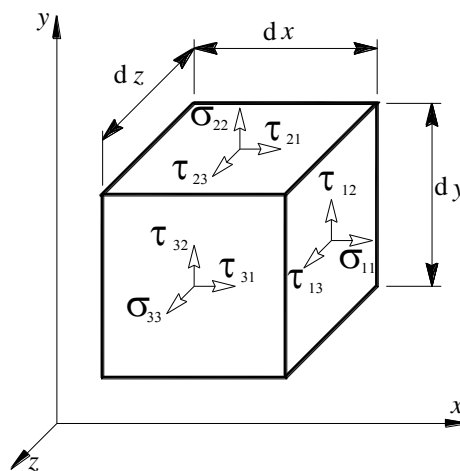
1.2 pav. Trimatis tamprusis kūnas ir jį apibūdinantys dydžiai

Aprašant kontinualiąsias struktūras, įprasta vienodos fizinės prigimties dydžius žymėti vektorių funkcijomis arba tiesiog vektoriais. Tokiu būdu dalyje S_F veikiančios paviršinės jėgos bus aprašomos vektoriumi $\{\mathbf{t}\}$, o dalyje S_U yra užduodami poslinkiai – vektoriumi $\{\mathbf{u}_p\}$. Nulinės jėgos (neapkrautas paviršius) ar nuliniai poslinkiai (kūno atramos) yra atskiri išorinių poveikių atvejai. Paviršiuje užduotos priklausomybės vadinamos kraštinėmis (priklausomai nuo jų pobūdžio statinėmis arba kinematinėmis) sąlygomis. Išoriniai poveikiai taip pat gali veikti kūną per tūryje V susidarancias tūrines jėgas. Tas jėgas nusako vektorius $\{\mathbf{b}\}$. Laisvai pasirinkto taško nagrinėjamame kūne padėtis apibrėžiama koordinačių vektoriumi $\{\mathbf{x}\}$, o išorinio paviršiaus normalė apibrėžiama normalės vektoriumi $\{\mathbf{n}\}$ [3].

Erdvinio tamprumo teorijos uždavinio lygtys stačiakampėje koordinačių sistemoje. Klasikinė tamprumo teorijos uždavinio formuluotė užrašoma stačiakampėje koordinačių sistemoje $Oxyz$. Esant erdviniam uždaviniui, taško padėtis nusakoma trimis koordinatėmis x, y, z . Koordinačių vektorius užrašomas tokiu pavidalu $\{\mathbf{x}\} = \{x, y, z\}^T$, o normalus vektorius - $\{\mathbf{n}\} = \{n_x, n_y, n_z\}^T$. Išorinių poveikių vektoriai taip pat užrašomi trimis dedamosiomis, nukreiptomis koordinačių kryptimis $\{\mathbf{b}\} = \{b_x, b_y, b_z\}^T$, $\{\mathbf{t}\} = \{t_x, t_y, t_z\}^T$ ir $\{\mathbf{u}\} = \{u_{px}, u_{py}, u_{pz}\}^T$ [3].

Deformuojant kūną, jo būvį nusako susidarantys įtempimai, deformacijos ir poslinkiai. Įtempimų būvis aprašomas įtempimų tenzoriumi, o deformuotas būvis deformacijų tenzoriumi. Užrašant lygtis matricine forma įtempimai žymimi vektoriumi $\{\sigma\}$, o deformacijos vektoriumi $\{\varepsilon\}$. Poslinkiai žymimi vektoriumi $\{\mathbf{u}\}$. Visi būvio kintamieji yra koordinačių $\{\mathbf{x}\}$ funkcijos, t.y., $\{\sigma\} = \{\sigma(x)\}$, $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon(x)\}$ ir $\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{u}(x)\}$. Išorinio poveikio vektoriai taip pat priklauso nuo koordinačių. Paprastumo dėlei tekste priklausomybė nuo koordinačių bus žymima tik išskirtiniais atvejais [3].

Įtempimai taške $\{\mathbf{x}\}$ išreiškia įtempimų atstojamąsias elementaraus stačiakampio gretasienio sienelėse (1.3 pav.). Įtempimų dedamosios σ_{ij} žymimos dviem indeksais. Pirmasis indeksas i žymi koordinatinių aščių aikštelę, o antrasis indeksas j įtempimų kryptį. Susitarta indeksus žymėti skaičiais didėjančia tvarka, ($i, j = 1, 2, 3$) arba atitinkančiomis koordinatės raidėmis ($i, j = x, y, z$). Įvertinus šiuos žymėjimus ir tangentinių įtempimų simetriją, įtempimų vektoriai užrašomi kaip $\{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\}^T$ arba $\{\sigma\} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}\}^T$. Deformacijų vektoriai žymimi analogiškai $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}\}^T$ arba $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^T$. Tuo pat būdu žymimas ir poslinkių vektorius $\{\mathbf{u}\} = \{u_1, u_2, u_3\}^T$ arba $\{\mathbf{u}\} = \{u_x, u_y, u_z\}^T$ [3].



1.3 pav. Elementarus tūris ir jame veikiančios įtempimai stačiakampėse koordinatėse

Deformuojamo kūno mechanikos lygtys susieja būvio kintamuosius ir išorinio poveikio rodiklius kūno taške $\{\mathbf{x}\}$. Lygčių sistemą sudaro trys lygčių grupės - statikos, geometrinės ir fizinės lygtys. Statikos lygtys nusako ryšį tarp įtempimų $\{\sigma\}$ ir išorinių apkrovų $\{\mathbf{b}\}$, geometrinės lygtys nusako ryšį tarp poslinkių $\{\mathbf{u}\}$ ir deformacijų $\{\varepsilon\}$, o fizinės lygtys - tarp įtempimų $\{\sigma\}$ ir deformacijų $\{\varepsilon\}$. Tiesinėje tamprumo teorijoje visos lygtys yra tiesinės, o fizinės lygtys nusako tiesiškai tampraus kūno priklausomybes, išreiškiamas Huko (Hooke) dėsnium [3].

Tamprumo teorijos uždavinys yra kraštinis uždavinys, kurį sudaro kūno tūryje V galiojančios lygtys bei kontūre S užduotos statinės ir kinematinės kraštinės sąlygos. Statinės kraštinės sąlygos išreiškia ryšį tarp įtempimų $\{\sigma\}$ ir paviršinių apkrovų $\{\mathbf{t}\}$ ant paviršiaus S_F , o kinematinės sąlygos - tarp poslinkių $\{\mathbf{u}\}$ ir duotų poslinkių $\{\mathbf{u}_p\}$ ant paviršiaus S_U [3].

Tamprumo teorijos uždavinio priklausomybės išreiškiamos lygčių sistema, kurią sudaro 3 statikos, arba Navje (Navier) lygtys, geometrinės, arba Košy (Cauchy) lygtys ir 6 fizinės lygtys [3].

$$\begin{cases} [\mathbf{A}]\{\boldsymbol{\sigma}\} = -\{\mathbf{b}\} & (1.3a) \\ [\mathbf{A}]^T \{\mathbf{u}\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \{0\} & \{x\} \in V, & (1.3b) \\ [\mathbf{D}]\{\boldsymbol{\sigma}\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \{0\} & (1.3c) \end{cases}$$

su statinėmis kraštinėmis sąlygomis

$$[\mathbf{N}]\{\boldsymbol{\sigma}\} = \{\mathbf{t}\} \quad \{x\} \in S_F \quad (1.4)$$

ir kinematinėmis kraštinėmis sąlygomis

$$\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{u}_P\} \quad \{x\} \in S_U, \quad (1.5)$$

čia matrica $[\mathbf{A}]$ žymi lygčių diferencialinį operatorių, $[\mathbf{D}]$ yra tamprumo konstantų matrica, o $[\mathbf{N}]$ yra algebrinis operatorius sudarytas iš normalės vektoriaus dedamųjų [3].

Tam tikrais atvejais fizinės lygtys gali būti išreikštos atvirkštine priklausomybe [3]:

$$[\mathbf{D}]^{-1}\{\boldsymbol{\varepsilon}\} - \{\boldsymbol{\sigma}\} = \{\mathbf{0}\} \quad \{x\} \in V, \quad (1.6)$$

Matrica $[\mathbf{D}]$ literatūroje dar vadinama tampraus kūno slankumo, o $[\mathbf{D}]^{-1}$ standumo matrica [3].

Praktinis uždavinio (1.3-5), kuriame yra palyginti didelis nežinomųjų skaičius, nagrinėjimas nėra patogus, todėl egzistuoja kitokios šio uždavinio formuluotės su vieno tipo kintamaisiais. Labiausiai paplitusi yra tamprumo teorijos uždavinio formuluotė poslinkiais, kur yra tik nežinomieji poslinkiai $\{\mathbf{u}\}$. Tokiu atveju naudojant fizines ir geometrines lygtis galima išeliminuoti įtempimus ir deformacijas, o statikos lygtį (1.3a) bei statines kraštines sąlygas (1.4) išreikšti per poslinkius. Tamprumo teorijoje uždavinio formuluotė poslinkiais, užrašoma tokiu būdu [3]:

$$[\mathbf{A}][\mathbf{D}]^{-1}[\mathbf{A}]^T \{\mathbf{u}\} = -\{\mathbf{b}\} \quad \{x\} \in V, \quad (1.7a)$$

$$[\mathbf{N}][\mathbf{D}]^{-1}[\mathbf{A}]^T \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{t}\} \quad \{x\} \in S_F \quad (1.7b)$$

$$\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{u}_P\} \quad \{x\} \in S_U, \quad (1.7c)$$

čia lygtys (1.7a) dar yra vadinamos Lamé lygtimis. Konkrečios jų išraiškos priklauso nuo konkrečios koordinačių sistemos ar dalinio uždavinio atvejo, apsiribojamo plačiausiai naudojamomis stačiakampe koordinačių sistemomis. Pateikiamos erdvinio uždavinio formuluotės [3].

Naudojant aptartus žymėjimus, tampraus kūno lygtys (1.3) įgauna tokį pavidalą [3]:
statikos lygtys:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix}; \quad (1.8a)$$

geometrinės lygtys:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \{\mathbf{0}\}; \quad (1.8b)$$

fizinės lygtys – tiesioginis Huko dėsnis

$$\frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}; \quad (1.8c)$$

ir atvirkštinis Huko dėsnis

$$\frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}. \quad (1.8d)$$

Čia E yra medžiagos tamprumo, arba Jungo (Young), modulis, o ν – skersinių deformacijų, arba Puasono (Poisson's) koeficientas [3].

1.1.3. KONTINUUMO DISKRETIZAVIMAS BAIGTINIŲ ELEMENTŲ METODAS

Kraštinio uždavinio transformacija į algebrinį pavidalą yra tapatinama su kontinualaus modelio diskretizavimu [3].

Terminas *diskretusis* šiuo atveju apibūdina struktūras (objektus ar reiškinius), kurios aprašomos baigtinių skaičiumi kintamųjų ar kitų rodiklių. Tokios struktūros yra sudarytos iš įvairių smulkesnių sudėtinių detalių – elementų [3].

Taigi kraštinis uždavinys pakeičiamas tiesinių algebrinių lygčių sistema

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (1.9)$$

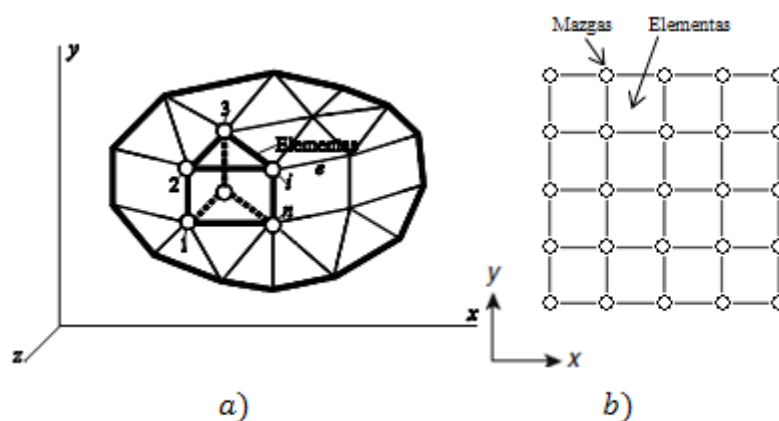
kur \mathbf{K} - lygčių operatorius (matrica), \mathbf{U} - nežinomųjų vektorius o \mathbf{F} - laisvųjų narių vektorius [3].

1.1.3.1. BEM IDĖJA

Tarp šiuo metu naudojamų skaitinių diskretizavimo metodų ryškiai dominuoja baigtinių elementų metodas (BEM). Šis metodas apjungia daugelį savybių, būdingų matematiškai pagrįstiems skaitiniams diferencialinių lygčių sprendimo metodams, taip pat ir žmogaus intuicija grindžiamiems inžineriniams metodams [3].

Sprendžiant BEM, realus objektas modeliuojamas elementų rinkiniu. Inžineriniu požiūriu baigtinis elementas suprantamas kaip realiai egzistuojantis tam tikros formos ir baigtinių matmenų elementas (geometrinė figūra arba idealizuotos realios konstrukcijos elementas). Matematinio požiūriu tas pats elementas suvokiamas kaip matematinės abstrakcijos rezultatas. Rinkinio sudarymo procedūros nepriklauso nuo požiūrio ir nuo konkretaus elemento sudarymo būdo [3].

Įprasta prisilaikyti tokių diskretizavimo taisyklių. Objektas (struktūra) sudalijama į baigtinį skaičių elementarių geometrinių figūrų, vadinamų baigtiniais elementais. Dvimatėse struktūrose baigtiniais elementais parenkami trikampiai ir keturkampiai, o trimatėse struktūrose – įvairios prizmės, apribotos trikampiais ir keturkampiais paviršiais (1.4 pav.). Paprastai elementų geometrija ribojama tiesiomis linijomis, tačiau sudėtingesni elementai formuojami ir iš kreivų linijų ir paviršių [3].

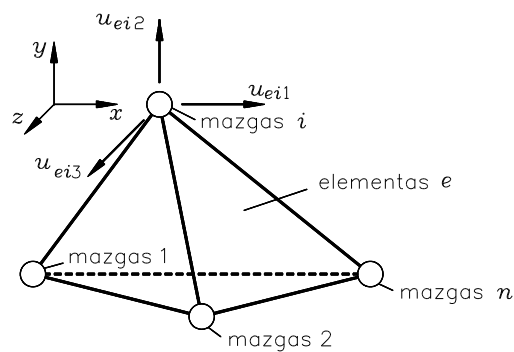


1.4 pav. a) Trimatė baigtinių elementų struktūra; b) Dvimatė baigtinių elementų struktūra

Elemente, paprastai elemento paviršiuje, pažymimi tam tikri taškai, vadinami mazgais. Mazgai yra skirti elemento geometrijai, būvio kintamiesiems ar kitiems rodikliams apibrėžti. Daroma

prielaida, kad elementai tarpusavyje jungiami tik per elemento išorėje esančius mazgus. Elementų forma ir mazgų išsidėstymas turi garantuoti vienareikšmiškus elemento formos ir būvio kintamųjų atvaizdus bei reikiamą tolydumą elementų tarpusavio sujungimuose. Šioms sąlygoms įvykdyti yra suformuluoti griežti kriterijai, tačiau patys paprasčiausi reikalavimai rekomenduoja vengti mažų atstumų tarp mazgų ir smailių kampų tarp elemento briaunų [3].

Panagrinėsime diskretųjį elementą, priskirdami jam indeksą e ($e = 1, 2, \dots, r$), kur r – bendras struktūros elementų skaičius (1.5 pav.). Paprastumo dėlei nagrinėsime struktūrą, sudarytą iš vienodų elementų, o visi elementai bus aprašyti vienoje globaliojoje Dekarto koordinačių sistemoje $Oxyz$. Elemente pažymime n mazgų, kiekvienam mazgui priskirdami indeksą i ($i = 1, 2, \dots, n$) [3].



1.5 pav. Baigtinių elementų pavyzdys – trimatis elementas

Elemento modelį susiesime su būvio kintamųjų, deformuojamo kūno atveju poslinkiu vektorine funkcija $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \{u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}), \dots, u_j(\mathbf{x}), \dots, u_m(\mathbf{x})\}^T$. Čia indeksas j ($j = 1, 2, \dots, m$) žymi vektoriaus komponentes (kintamuosius). Kiekviena funkcija u_j elemento e mazge i gali būti apibūdinta skaliaru U_{ij}^e . Visos viename mazge i identifikuotos reikšmės sudaro vektorių $\mathbf{U}_i^e = \{U_{i1}^e, U_{i2}^e, \dots, U_{ij}^e, \dots, U_{im}^e\}^T$. Lygiai taip pat visame elemente veikiančius parametrus galime sujungti į vieną vektorių $\mathbf{U}^e = \{U_1^e, U_2^e, \dots, U_i^e, \dots, U_n^e\}^T$, kuris turi $n \cdot m$ narių [3].

1.1.3.2. KONTINUUMO ELEMENTAI

Metodai, nagrinėjantys kraštinio uždavinio sprendimą apytiksliai pasirenkant sprendinį, yra vadinama *pusiauanaliziniais* metodais [3].

Pats paprasčiausias apytikslis kraštinio uždavinio sprendimas – pasirinkti ieškomosios funkcijos $f(\mathbf{x})$ išraišką, naudojant vieną iš matematikoje jau žinomų funkcijų, dažniausiai daugianarį, turintį baigtinį narių skaičių [3]:

$$f(\mathbf{x}) \approx \alpha_0 + \alpha_1 f_1(\mathbf{x}) + \alpha_2 f_2(\mathbf{x}) + \dots + \alpha_1 f_1(\mathbf{x}) + \dots + \alpha_n f_n(\mathbf{x}) \quad \square \quad (1.10)$$

Ši išraiška pasirenkama taip, kad visada tapatingai tenkintų kraštines sąlygas. Taigi funkcijos $f(x)$ radimas pakeičiamas į koeficientų $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n$, kuriems apskaičiuoti visada gali būti sudaryta $n+1$ skaičius algebrinių lygčių, nustatymu. Taigi diferencialinės lygties sprendimas pakeičiamas tiesinių lygčių sistemos sprendimu [3].

BEM taip pat remiasi pusiauanalizinių metodų idėja. Esminis skirtumas glūdi funkcijos apibrėžimo srityje – tolydi išraiška (1.10) keičiama analogiška išraiška, galiojančia tik vieno elemento ribose [3]:

$$u^e(\mathbf{x}) = \alpha_1^e f_1^e(\mathbf{x}) + \alpha_2^e f_2^e(\mathbf{x}) + \dots + \alpha_i^e f_i^e(\mathbf{x}) + \dots + \alpha_n^e f_n^e(\mathbf{x}). \quad (1.11)$$

Funkcijų f_i^e vaidmenį atlieka matematiškai gerai išnagrinėtos funkcijos su žinomomis tolydumo savybėmis. Konstruojant sprendinius, dažnai naudojami įprasti laipsniniai daugianariai [3]:

$$u^e(\mathbf{x}) = \alpha_1^e + \alpha_2^e x + \alpha_3^e y + \alpha_4^e z + \alpha_5^e xyz + \dots \quad (1.12)$$

Taikant BEM, kraštinio uždavinio sprendinys užsiduodamas (aproksimuojamas) diskretiškai tolydžioms funkcijoms. Tolydumas elemente apsprendžiamas funkcijų $f_i^e(\mathbf{x})$ savybėmis, o tolydumą, tiksliau, trūkius tarp elementų tenka nagrinėti papildomai, laikantis tam tikrų reikalavimų [3].

Išraiškos (1.12) nėra patogios baigtiniams elementams sudaryti. Baigtinių elementų metodo praktikoje įprasta naudoti interpoliacines išraiškas, kur figūruoja funkcijų ar jų išvestinių mazginės reikšmės. Apsiribojant vien funkcijų reikšmėmis, mazguose u_i^e ($i=1, n$) nagrinėjama funkcija aprašoma tokia apytiksle išraiška [3]:

$$u^e(\mathbf{x}) = N_1^e(\mathbf{x})U_1^e + N_2^e(\mathbf{x})U_2^e + \dots + N_i^e(\mathbf{x})U_i^e + \dots + N_n^e(\mathbf{x})U_n^e. \quad (1.13)$$

Funkcijų $N_i^e(\mathbf{x})$ šeima yra vadinama elemento formos funkcijomis. Formos funkcijos užima išskirtinę vietą BEM teorijoje ir praktikoje. Šios funkcijos turi užtikrinti išraiškos (1.13) logiką elemento mazguose, t.y. $U^e(\mathbf{x}_i) = U_i^e$. Tai reiškia, kad formos funkcijos pasižymi specialiomis savybėmis [3]:

$$N_i^e(\mathbf{x}_i) = 1 \quad (1.14a)$$

$$N_i^e(\mathbf{x}_j) = 0 \quad (1.14b)$$

Savybės (1.14) yra naudojamos formos funkcijų $N_i^e(\mathbf{x})$ šeimai sudaryti, kai $i=1, 2, \dots, n$ [3].

Apibendrinami išraišką (1.13) baigtiniam elementui e , užrašysime matricine forma [3]:

$$\mathbf{u}^e(\mathbf{x}) = [\mathbf{N}^e(\mathbf{x})] \mathbf{U}^e \quad (1.15)$$

Čia $[\mathbf{N}^e(\mathbf{x})]$ yra elemento formos funkcijų matrica, o \mathbf{U}^e elemento – mazginių nežinomųjų vektorius.

Užsidavus (1.15) analogiškai modeliui (1.9) sudaromas elemento e modelis [3]:

$$[\mathbf{K}^e] \mathbf{U}^e = \mathbf{F}^e \quad (1.16)$$

Standartinės surinkimo procedūros pagalba gaunamas modelis (1.9). Tokiu būdu kuriant baigtinio elemento modelį visos dimensijos sutelkiamos į vieną elementą, kurio geometrija, fizinės savybės ir išraiška (1.15) nulemia jo galutinį modelį (1.16) [3].

1.1.3.3. TIESIOGINIAI METODAI

Būdai, kuriais tiesiogiai sudaromos BEM priklausomybės bei į jas įeinančios matricos ir vektoriai, įprastai vadinami *tiesioginiais* baigtinių elementų formavimo metodais. Tokie metodai žinomi daugeliui inžinierių ir taikomi inžinerinėje praktikoje. Vieni jų yra visiškai savarankiški, kiti gali būti BE metodo pavienės versijos. Pakanka žinoti norimą matematinio modelio formą, ar užrašyti konkrečias priklausomybes – sudarytojo reikalas. Būtent tokie metodai buvo vienas iš BEM atsiradimo šaltinių [3].

Tiesioginių metodų esmę sudaro tai, kad tiesiogiai panaudojamos fizinės nagrinėjamų elementų savybės, įgalinančios sudaryti fiziškai pagrįstus matematinius modelius. Toks požiūris leidžia aprašyti realiai egzistuojančias sistemas, kurių analiziniai modeliai būtų per daug sudėtingi. Šį būdą sėkmingai pritaikė inžinieriams. Tam gali būti naudojami teoriniai samprotavimai ar praktinių stebėjimų rezultatai [3].

Sudarant tiesinius statikos uždavinio modelius žinoma, kad tai turi būti tiesinių algebrinių lygčių sistema:

$$[K^e]U^e = F^e \quad (1.17)$$

čia U^e – yra nežinomųjų vektorius, K^e – koeficientų matrica, F^e – laisvųjų narių mazguose pridėtų poveikių vektorius. Taigi elemento modeliui sudaryti reikia suformuoti $[K^e]$ ir $[F^e]$. Sugalvojus kokį nors tiesioginį būdą šiems dydžiams apskaičiuoti (ar nustatyti eksperimentiškai), mūsų uždavinys yra išspręstas [3].

1.1.4. MIŠRIOJI POSLINKIŲ IR ĮTEMPIŲ FORMULUOTĖ

Trūkiųjų laukų sprendimui galima naudoti mišriąsias baigtinių elementų formuluotes. Poslinkiai ir įtempimai yra interpoliuojami nepriklausomai, t.y. naudojant nepriklausomas formos funkcijų rinkinius. Mazginiai taškai bei poslinkių ir įtempimų interpoliacijos polinomų eilė bendruoju atveju gali nesutapti, jie parenkami laisvai [4].

Matricomis tai užrašoma taip [4]:

$$\{\hat{\sigma}\} = [N_\sigma]\{\Sigma^e\}, \{u\} = [N_u]\{U^e\}, \quad (1.18)$$

čia $\{\Sigma^e\}$ yra mazginiai įtempiai, $\{U^e\}$ yra mazginiai poslinkiai. Ženklas " \wedge " virš įtempių rašomas tam, kad būtų galima atskirti formos funkcijomis $[N_\sigma]$ nepriklausomai interpoliuotas jų reikšmes nuo reikšmių, gautų išreiškiant įtempimus formos funkcijomis $[N_u]$ interpoliuotais poslinkiais [4]:

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [D][L]\{u\} = [D][B]\{U^e\}, \\ [D]^{-1}\{\sigma\} &= [L]\{u\} = [B]\{U^e\}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

čia $[D]$ yra standumo koeficientų matrica, $[L]$ yra reikiamo pavidalo diferencijavimo operatorius, deformacijos $\{u\} = [N]\{U^e\}$, matrica $[B] = [L][N]$.

Mišriąją baigtinių elementų formuluotę poslinkiais ir įtempimais vienam baigtiniam elementui išreiškiama tokia matricine lygtimi [4]:

$$\begin{bmatrix} [A^e] & [C^e] \\ [C^e]^T & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Sigma^e\} \\ \{U^e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F^e\} \end{Bmatrix}, \quad (1.20)$$

$$\text{kur } [A^e] = -\int_V [N_\sigma]^T [D]^{-1} [N_\sigma] dV, [C^e] = \int_V [N_\sigma]^T [B] dV, [C^e]^T \{\Sigma^e\} = \{F^e\}.$$

Elementų matricos $[A^e]$ ir $[C^e]$ į atitinkamas konstrukcijos matricas surenkamos taip pat kaip ir poslinkių formuluotėje, ieškant atitikmenų tarp globalinių ir lokalinių mazgų numerių bei sumuojant blokus į reikiamas konstrukcijos matricos pozicijas [4].

Surinkę konstrukcijos matricas, gauname tokio pavidalo lygtį [4]:

$$\begin{bmatrix} [A] & [C] \\ [C]^T & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Sigma\} \\ \{U\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F\} \end{Bmatrix}. \quad (1.21)$$

Poslinkių formuluotėje būtina ir pakankama sąlyga, kad egzistuotų vienintelis uždavinio sprendinys, buvo ta, kad konstrukcijos matrica nebūtų išsigimusi. Mišriojoje formuluotėje ši sąlyga taip pat yra būtina prasmingam sprendiniui gauti, tačiau vien jos nepakanka. Papildoma sąlyga gaunama iš lygčių sistemos [4]:

$$\begin{cases} [H]\{U\} = \{F\} \\ [C][C]^T \{\Sigma\} = [C]\{F\} \end{cases} \quad (1.22)$$

$$\text{čia } [H] = -[C]^T [A]^{-1} [C].$$

Jeigu mazginių įtempimų ir neįtvirtintų poslinkių $\left(\{U_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \neq 0 \right)$ dedamųjų skaičių konstrukcijoje atitinkamai pažymėsime n_σ , n_u , tai (1.22) lygties išsprendžiamumo sąlygą galima užrašyti taip [4]:

$$n_\sigma \geq n_u. \quad (1.23)$$

1.1.5. TAŠKŲ INTERPOLIAVIMO METODAS

Taškų interpoliavimo metode (TIM) daugianariai naudojami tarnauti kaip pagrindinės funkcijos kuriant formos funkcijas. Tarkime, kad $u(x)$ – tolydi funkcija, kuri yra poslinkio komponentė. Ji gali būti aproksimuota apie x [5]:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n p_i(x)a_i = p^T(x)a \quad (1.24)$$

kur $p_i(x)$ yra daugianario $x = [x, y, z]^T$ pagrindinė funkcija, n yra daugianarių išraiškų skaičius, o $a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}^T$, kurioje a_i yra atitinkamas koeficientas, turimas būti dar tik determinuoti. Polinomo pagrindas $p_i(x)$ yra paprastai sudėtas naudojant Paskalio trikampus, o pilnam pagrindui teikiama pirmenybė dėl aukščiausios galimos nuoseklumo tvarkos reikalavimo. Pilno daugianario pagrindas iš 1 tvarkos ir 2 tvarkos trimatėje erdvėje gali būti užrašytas tokiomis formomis [5]:

$$p^T(x) = \{1 \quad x \quad y \quad z\} \quad (1.25a)$$

$$p^T(x) = \{1 \quad x \quad y \quad z \quad x^2 \quad y^2 \quad z^2 \quad xy \quad yz \quad zx\} \quad (1.25b)$$

čia (1.25a) pilnos 1-os tvarkos bazės, o (1.25b) pilnos 2-os tvarkos bazės.

(1.24) lygties koeficientai a gali būti determinuoti verčiami $u(x)$ būti mazginiais poslinkiais šiuose n mazguose paremtoje x srityje, kuri priveda prie šių n lygčių [5]:

$$\begin{aligned} u(x_1, y_1, z_1) &= a_1 + a_2x_1 + a_3y_1 + a_4z_1 + \dots + a_n p_n(x_1) \\ u(x_2, y_2, z_2) &= a_1 + a_2x_2 + a_3y_2 + a_4z_2 + \dots + a_n p_n(x_2) \\ &\dots \\ u(x_n, y_n, z_n) &= a_1 + a_2x_n + a_3y_n + a_4z_n + \dots + a_n p_n(x_n) \end{aligned} \quad (1.26)$$

Matricinėje formoje gali būti užrašoma taip [5]:

$$U_S = P_n a, \quad (1.27)$$

kur U_S yra mazginių poslinkių vektorius paremtoje srityje

$$U_S = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad \dots \quad u_n\}^T \quad (1.28)$$

P_n polinominė matrica [5]:

$$P_n = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & \dots & p_n(x_1) \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & \dots & p_n(x_2) \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 & \dots & p_n(x_3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & y_n & z_n & \dots & p_n(x_n) \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

Priimant P_n^{-1} egzistavimą, a unikalus sprendinys gali būti gaunamas [5]:

$$a = P_n^{-1}U_S \quad (1.30)$$

(1.30) lygtį įstačius į (1.24) gauname [5]:

$$u(x) = P^T(x)P_n^{-1}U_S = \sum_{i=1}^n \varphi_i u_i = \Phi^T(x)U_S \quad (1.31)$$

kur $\Phi(x)$ yra formos funkcijų TIM vektorius [5]:

$$\Phi^T(x) = \{\varphi_1(x) \quad \varphi_2(x) \quad \dots \quad \varphi_n(x)\} \quad (1.32)$$

1.1.6. MAZGAIS PAGRĪSTAS GLOTNINTAS TAŠKŲ INTERPOLIAVIMO METODAS

Mazgais pagrįstame glotnintame taškų interpoliavimo metode (MG-TIM), probleminė sritis yra pirmiausia diskretizuota trikampių narvelių fono grupės, kaip parodyta 1.6 pav [6, 7, 8].

Poslinkiai narveliuose aproksimuoti naudojantis TIM formos funkcijomis [6, 7, 8]:

$$\bar{u} = \sum_{i \in n_e} \Phi_i(x) \bar{d}_i, \quad (1.33)$$

kur n_e yra mazgų grupė lokaliai paremtoje srityje, turinčią x , kuris apskritai yra už narvelio, \bar{d}_i yra poslinkių vektorius mazgų grupės, o

$$\Phi_i(x) = \begin{bmatrix} \varphi_i(x) & 0 \\ 0 & \varphi_i(x) \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

yra formos funkcijų matrica mazgams i , kuri sukonstruota paprastai naudojant TIM procedūrą, ir todėl yra delta funkcijos savybė [6, 7, 8].

Probleminė sritis Ω padalinama į glotnintas sritis Ω_k , turinčias k mazgų, naudojant trikampių elementų tinklą, kitaip dar vadinamą trikampių narvelio fonu, sujungus trikampio vidurio krašto taškus P su jo centroidais I , kaip pademonstruota 1.6 pav. [6, 7, 8].

TIM naudoja nuolatinę deformaciją kiekvienai suglotnintai sričiai, apibrėžtai [9]:

$$\bar{\varepsilon}_k \equiv \bar{\varepsilon}(x_k) = \frac{1}{A_k} \int_{\Omega_k} \tilde{\varepsilon}(x) d\Omega, \quad (1.35)$$

kur $A_k = \int_{\Omega_k} d\Omega$ yra glotnintos srities plotas k mazgams, o $\tilde{\varepsilon}(x) = L_d \bar{u}$ yra suderinama deformacija.

Įgautas poslinkis \bar{u} ir atitinkama įgauta deformacija $\bar{\varepsilon}$ atitinka apibendrintą glotnintą Galerkin silpnumo formą [10]:

$$\int_{\Omega} \delta \bar{\varepsilon}^T(\bar{u}) D \bar{\varepsilon}(\bar{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta \bar{u}^T b d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \bar{u}^T T d\Gamma = 0 \quad (1.36)$$

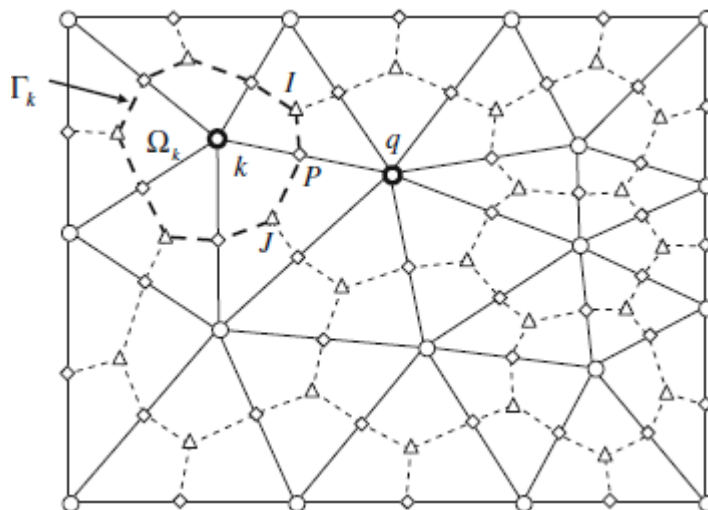
Lygtis (1.33) ir (1.35) pakeičiant į (1.36) lygtį duoda diskretizuotą sistemos lygtį [6, 7, 8]:

$$\bar{K}\bar{d} = \bar{f}, \quad (1.37)$$

kur

$$\bar{K} = \sum_{k=1}^N \bar{K}_{ij}^{(k)} = \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} \bar{B}_i^T(x_k) D \bar{B}_j^T(x_k) d\Omega \quad (1.38)$$

$$\bar{f}_i = \int_{\Gamma_i} \Phi_i T d\Gamma + \int_{\Omega} \Phi_i b d\Omega \quad (1.39)$$



1.6 pav. Trikampiai elementai ir suglotninti narveliai, kurie sudaryti paeiliui jungiant centroidus su mazgų apsuptais trikampiais pusiauakraštinės taškais. Čia \circ - lauko mazgas (k, q) ; Δ - trikampio centroidas (I, J) ; \diamond - pusiauakraštinės taškas (P)

1.1.7. TAŠKŲ INTERPOLIAVIMO METODAS SU TOLYDŽIUOJU ĮTEMPIO LAUKU

Taškų interpoliavimo metode su tolydžiuoju įtempio lauku (TIM-TĮ), taškų interpoliavimo metodas naudojamas konstruoti formos funkcijas naudojant nedidelę mazgų grupelę, pasiskirsčiusią lokaliai paremtoje srityje. Kaip trikampis narvelis gali būti automatiškai sugeneruotas, trikampių narvelių fonas naudojamas pastarojoje TIM-TĮ atrinkti mazgus tiek formos funkcijai, tiek įtempio lauko konstrukcijai. Naudojant TIM formos funkcijas, TIM-TĮ poslinkio laukas gali būti aproksimuotas taip [6]:

$$\hat{u}(x) = \sum_{i \in n_e} \Phi_i(x) \hat{d}_i, \quad (1.40)$$

kur n_e mazgų grupė paremtoje srityje, turinčių x , \hat{d}_i yra poslinkių mazgų vektorius ir

$$\Phi_i(x) = \begin{bmatrix} \varphi_i(x) & 0 \\ 0 & \varphi_i(x) \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

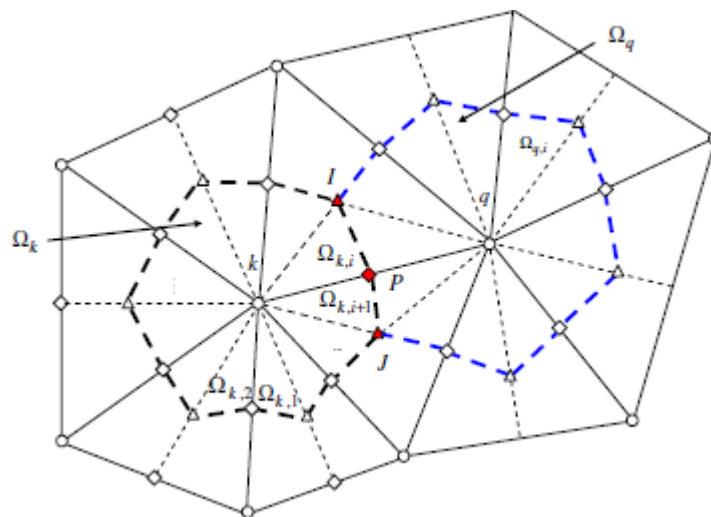
yra TIM formos funkcijų matrica i mazgams.

TIM-TI formos funkcijos konstravimo procedūra yra paprasta ir turi šias savybes [6]:

1. Jis naudoja atrinktus lokalinius mazgus, pagrįstus trikampaiais narveliais, garantuoja šių formos funkcijų nepriklausomumą tiesiškai bei užtikrina TIM formos funkcijos skaičiavimo efektyvumą;
2. Formos funkcijų generavimui naudojamos polinomo pagrindo funkcijos su mažiausiai tiesinėmis sąlygomis garantuoti, kad TIM formos funkcijos turėtų bent jau nuoseklumą tiesiškai;
3. Formos funkcijos yra Delta funkcijos savybė, kuri palengvina nesunkiai esminių krašto sąlygų įgyvendinimą;
4. Formos funkcijos yra tiesiškai nepriklausomos ir sudaro lauko funkcijos konstravimo pagrindus.

1.1.8. TOLYDŽIOJO DEFORMACIJŲ LAUKO KONSTRAVIMAS

Dabartiniu TIM-TI, Ω_k , kuris parodytas 1.6 pav, toliau suskirstomas į M posričius $\Omega_{k,1}, \Omega_{k,2}, \dots, \Omega_{k,M}$. Tai daroma sujungiant k mazgų į centroidus apsuptų trikampių, kaip parodyta 1.7 pav. [6, 7]:



1.7 pav. Ω_k srities, su viduje esančiais $\Omega_{k,i}$ trikampių posričiais, kuri ribojasi su Ω_q iliustracija

TIM-TI sakoma, kad deformacija $\hat{\varepsilon}$, per bet kuriuos taškus potrikampio srityje $\Omega_{k,i}$ ($k = 1, \dots, N, i = 1, \dots, M$), gaunama paprasta tiesine taškų interpoliacija [6, 7]:

$$\hat{\varepsilon}(x) = L_1(x)\varepsilon_k + L_2(x)\varepsilon_p + L_3(x)\varepsilon_l, \quad (1.42)$$

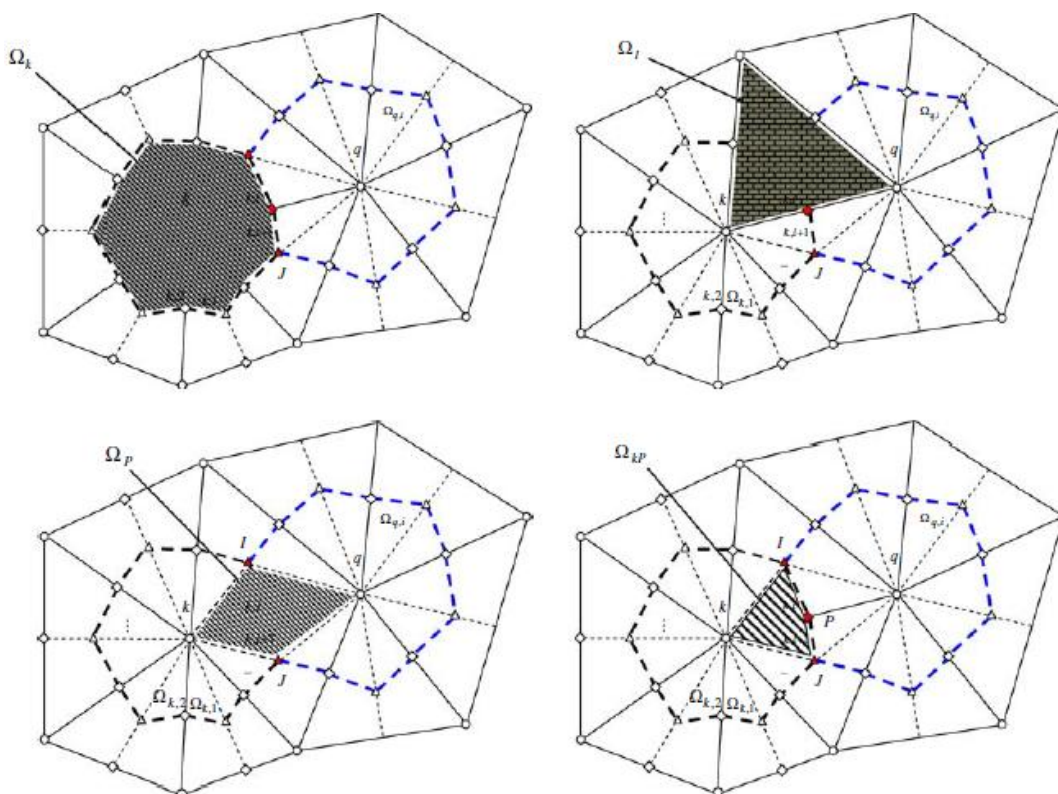
kur L_1, L_2, L_3 yra $\Omega_{k,i}$ ploto koordinatės; $\varepsilon_k, \varepsilon_p, \varepsilon_l$ yra deformacijos potrikampių $\Omega_{k,i}$ viršūnėse: mazgai k , narvelio krašto vidurio taškas P ir $\Omega_{k,i}$ centroidas I . Daroma prielaida, kad šios deformacijos yra suvidurkintos deformacijos suglotnintoje srityje, turint viršūnes, naudojant deformacijos glotninimo operaciją.

$$\bar{\varepsilon} \equiv \frac{1}{A} \int_{\Omega_A} \tilde{\varepsilon}(x) d\xi, \quad (1.43)$$





kur $\tilde{\varepsilon}(x) = L_d \hat{u}(x)$ yra suderinama deformacija, Ω_A reprezentuoja dominančio taško suglotnintą sritį, A yra suglotintos srities Ω_A plotas [6, 7].

Suglotninta sritis Ω_A paprastai lokalizuojama posričio netoli dominamo taško x pakeičiant tašku x . Vadinasi, jis gali būti skirtingas nuo kitų taškų ir apskritai gali būti perdengtas. [6] darbe iškelta problemai, kaip formuoti suglotnintą sritį duotam taškui, pasiūlyta naudoti kompaktiškumo principą: taškų glotninimo sritis turėtų būti kiek įmanoma kompaktiškas turimų taškų, kuris aprašytas gradiento glotninimo metode. Remiantis k, I ir P taškų lokacija, suformuluoti trys suglotnintų sričių tipai (1.8 pav.):

1. Mazgais susijusi gradiento glotninimo sritis (mGGS) deformacijos ε_k mazge k aproksimacijai. Jis formuojamas nuosekliai sujungiant trikampių centroidus su tinkamais narvelių kraštų vidurio taškais.
2. Narvelio trikampio fonas ε_l aproksimavimui narvelio centroide. Jis vadinamas centroidais susijusi gradiento glotninta sritis (cGGS).
3. Vidurio taškais susijusi gradiento glotninta sritis (vGGS) naudojama deformacijos ε_l įvertinimui narvelio kraštinių vidurio taške. vGGS sudaroma sujungiant narvelių kraštų pabaigos mazgus su trikampių centroidais ant abiejų narvelio kraštų pusių.



1.8 pav. Suglontintų sričių, kuriuose skaičiuojama deformacija k, l ir P taškuose, tipų iliustracija.

Čia  - mGGS (Ω_k);  - cGGS (Ω_l);  - vGGS (Ω_p);  - Ω_{kp}

[6] straipsnyje buvo tiriama dvimatė gembė. Pagrindinis šio tyrimo tikslas buvo skaitmeniškai iširti įtempio tolydumo sprendinį, kuris buvo gautas pritaikant tiesinį TIM-TI (PIM-CS). Paaikškėjo, kad įtempis σ_{xx} , panaudojus TIM-TI, yra tolydus visoje problemos srityje ir yra gan arti tikslaus sprendinio. Taip pat buvo nagrinėti σ_{xy} įtempių sprendiniai, naudojant BEM, MG-TIM ir TIM-TI. Iš visų šių trijų metodų geriausias rezultatus parodė TIM-TI, kuris parodė tolydųjį lauką visoje problemos srityje su aukštu tikslumu.

1.2. SKAITINIAI METODAI

Skaitinių metodų aktualumas atsirado tada, kai sparčiai išstobulėjo kompiuterinės technologijos bei jų programinės įrangos. Tai įtakojo skaitinių metodų platų taikymą ne tik fizikos, mechanikos ar kitose srityse, bet ir inžinerijos, vykdant praktinius skaičiavimo metodus. Šie metodai aprašyti [11, 12].

Šiame skyriuje aptarsime kai kuriuos interpoliavimo bei suglodinimo metodus, kurie glaudžiai siejasi su šiuo darbu.

Pirmiausia apžvelgsime interpoliavimą.

Interpoliavimo uždavinio formulavimas [11]. Duota funkcijos $y = f(x)$ reikšmių lentelė (x_i, y_i) ; čia $i = \overline{0, n}$, y_i reikšmės yra tikslios arba paklaidos tokios mažos, kad praktiškai jų galima nepaisyti. Reikia rasti aproksimuojančiąją funkciją $y = F(x)$, priklausančią funkcijų klasei K ir tenkinančią sąlygas

$$F(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n}. \quad (1.44)$$

Šios sąlygos vadinamos Lagranžo interpoliavimo sąlygomis, o pati funkcija $y = F(x)$ – Lagranžo interpoliacine funkcija, arba tiesiog interpoliacine funkcija.

Jei, be $f(x_i)$ reikšmių, taške x_i yra žinomos funkcijos $f(x)$ išvestinių iki $(m_i - 1)$ -osios eilės imtinai reikšmės, tai galima reikalauti, kad aproksimuojančioji funkcija $y = F(x)$ tenkintų sąlygas

$$F^{(l)}(x_i) = f^{(l)}(x_i), \quad i = \overline{0, n}, \quad l = \overline{0, m_i - 1}. \quad (1.45)$$

Simbolis (l) žymi l -tosios eilės išvestinę. Šios sąlygos vadinamos Ermito interpoliavimo sąlygomis, o funkcija $F(x)$ – Ermito interpoliacine funkcija.

Kaip matyti iš interpoliavimo uždavinio formuluotės, keičiant aproksimuojančiųjų funkcijų klasę K bei interpoliavimo sąlygas, galima rasti įvairias interpoliacines funkcijas.

Toliau nagrinėsime interpoliacinius splainus.

1.2.1. INTERPOLIACINIAI SPLAINAI

Splainas – tai tolydžioji iki p -tosios eilės išvestinės imtinai funkcija, sudaryta iš kurios nors funkcijos dalių. Kadangi istoriškai splainai pradėti konstruoti iš n -tosios eilės polinomo dalių, tad laikysime juos funkcijomis, sudarytomis iš polinomų dalių. Splainai (angl. *spline*) konstruojami dviem etapais [11]:

1. pasirenkama tikslo funkcija – funkcionalas;
2. taikant variacinio skaičiavimo metodus, apskaičiuojama kreivė, minimizuojant pasirinktą funkcionalą;

Paprasčiausias ir seniausiai naudojamas splainas yra laužtė. Tai pirmosios eilės splainas, kurio $p = 0$. Splainas sudarytas iš kubinio polinomų dalių, vadinamas kubiniu; jo $0 \leq p \leq 2$ [11].

Splaino apibrėžimas [11]. Tarkime, kad intervale $[a, b]$ duotas tinkelis $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$. Tada n -tosios eilės defekto k splainas yra funkcija $y = g(x)$, tenkinanti šias sąlygas:

1. kiekviename intervale $[x_{i-1}; x_i]$ ($i = \overline{1, N}$) $g(x)$ yra n -tojo laipsnio polinomas;

2. kiekviename vidiniame tinklelio taške x_i ($i = \overline{1, N-1}$) galioja lygybė $g^{(l)}(x_i - 0) = g^{(l)}(x_i + 0)$,
 $l = \overline{0, n-k}$.

Interpoliacinių splineų rūšys: tiesiniai, kvadratiniai, dar žinomi kaip paraboliniai, ir kubiniai. Praktikoje dažniausiai naudojami nelyginio laipsnio splinei, ypač kubinis interpoliacinis splineas, nes jie turi optimizavimo savybių. Kubinis interpoliacinis splineas minimizuoja funkcionalą $\int_a^b (u''(x))^2 dx$, kai tuo tarpu $(2n-1)$ -osios eilės splineas – funkcionalą $\int_a^b (u^{(n)}(x))^2 dx$ [11].

1.2.2. SUGLODINIMAS

Nagrinėdami interpoliavimo uždavinį, funkciją $f(x)$, apibrėžtą reikšmių lentele, stengėmės pakeisti tokia aproksimuojančiaja funkcija $F(x)$ (n -tojo laipsnio polinomu, splineu ir pan.), kad taškuose x_i ($i = \overline{0, n}$) $F(x_i)$ reikšmės būtų lygios $f(x_i)$ reikšmėms [11].

Labai dažnai $f(x_i)$ reikšmės yra eksperimento rezultatai ir turi matavimo bei metodo paklaidų. Todėl reikalauti, kad aproksimuojančioji funkcija $F(x)$ tenkintų sąlygą $F(x_i) = f(x_i)$ ($i = \overline{0, n}$), būtų neprotinga. Geriau rasti tokią funkciją $F(x)$, kuri pagal pasirinktą kriterijų geriausiai aproksimuotų $f(x)$. Toks funkcijos $F(x)$ apskaičiavimo metodas vadinamas suglodinimu. Atsižvelgiant į suglodinimo kriterijų, galima gauti įvairias $F(x)$ išraiškas [11].

Suglodinimo uždavinio formulavimas [11]. Sakykime, funkcija $y = f(x)$ nusakyta reikšmių lentele (x_i, \tilde{y}_i) ; čia $i = \overline{1, m}$. Simbolis \tilde{y}_i rodo, kad $f(x)$ reikšmės taškuose x_i yra apytikslės. Taip pat žinoma aproksimuojančiosios funkcijos $F(x)$ analizinė išraiška: $F(x, a_0, \dots, a_n)$; čia a_i ($i = \overline{0, n}$) – nežinomi parametrai ir $n \ll m$. Reikia rasti tokias parametru a_i reikšmes, su kuriomis $F(x)$ geriausiai aproksimuotų funkciją $f(x)$.

Šiam uždaviniui spręsti, taikomi ne tik įvairūs suglodinimo kriterijai, bet ir įvairūs suglodinimo metodai.

Pasirinktų taškų metodas [11]. Taikant šį metodą, iš lentelės (x_i, \tilde{y}_i) (čia $i = \overline{1, m}$) pasirenkamas $n+1$ taškas $(x_{i_k}; \tilde{y}_{i_k})$ (čia $k = \overline{1, n}$), kurio y_{i_k} reikšmės yra tiksliausios, ir parametrai a_k ($k = \overline{0, n}$) apskaičiuojami atsižvelgiant į sąlygą

$$F(x_{i_k}) = \tilde{y}_{i_k}, \quad k = \overline{0, n}. \quad (1.46)$$

Aišku, kad taip apskaičiuota funkcija $F(x)$ sutampa su interpoliuojančiąja funkcija, einančia per taškus $(x_i; \tilde{y}_i)$, $(k = \overline{0, n})$.

Vidurkių metodas [11]. Šiuo metodu parametrai a_k ($k = \overline{0, n}$) apskaičiuojami taip, kad $f(x_i)$ ir $F(x_i)$ skirtumų suma būtų lygi nuliui, t.y.

$$z = \sum_{i=1}^m (f(x_i) - F(x_i)) = 0. \quad (1.47)$$

Mažiausių kvadratų metodas [11]. Tai dažniausiai taikomas suglodinimo metodas. Jis formuluojamas taip: koeficientus a_k ($k = \overline{0, n}$) reikia apskaičiuoti taip, kad $f(x_i)$ ir $F(x_i)$ skirtumų kvadratų suma būtų pati mažiausia, t.y. minimizuoti

$$z = \sum_{i=1}^m (F(x_i, a_0, \dots, a_n) - \tilde{y}_i)^2. \quad (1.48)$$

Plačiau panagrinėsime mažiausių kvadratų metodą.

1.2.2.1. MAŽIAUSIŲ KVADRATŲ METODAS

(1.48) formule nusakyta tikslo funkcija turi vienintelį ekstremumą, kuris apskaičiuojamas iš lygčių sistemos

$$\frac{\partial z}{\partial a_k} = 0, k = \overline{0, n}. \quad (1.49)$$

Bendruoju atveju ši sistema yra netiesinė, taigi ją galima spręsti taikant netiesinių lygčių sistemų sprendimo metodus [11].

(1.49) sistemos formavimą ir sprendimą galima palengvinti dvejopai [11]:

- 1) jei $F(x, a_0, \dots, a_n)$ yra n -tojo laipsnio polinomas, tai (1.49) lygčių sistema yra tiesinė ir jos formavimas bei sprendimas nesudaro sunkumų;
- 2) galima taikyti vadinamąjį ištiesinimo metodą, kurio esmė tokia: atitinkamai parinktoje koordinačių sistemoje (X, Y) taškai $(x_i; \tilde{y}_i)$ (čia $i = \overline{1, m}$) apytiksliai tenkina tiesės $Y = kX + b$ lygtį, tada mažiausių kvadratų metodas toje sistemoje realizuojamas labai paprastai.

Mažiausių kvadratų metodas taikomas tada, kai $F(x, a_0, \dots, a_n)$ yra n -tosios eilės polinomas [11].

Uždavinio formulavimas [11]. Duoti taškai $(x_i; \tilde{y}_i)$, $i = \overline{1, m}$. Reikia rasti tokį n -tosios eilės ($n \ll m$) polinomą

$$F(x, a_0, \dots, a_n) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (1.50)$$

su kuriuo

$$z = \sum_{i=1}^m (a_n x_i^n + a_{n-1} x_i^{n-1} + \dots + a_n x_i^k + \dots + a_1 x_i + a_0 - \tilde{y}_i)^2 \quad (1.51)$$

turėtų mažiausią reikšmę.

Nesunku pastebėti, kad, kad šiuo atveju (1.49) lygčių sistema įgis išraišką

$$a_0 \sum_{i=1}^m x_i^k + a_1 \sum_{i=1}^m x_i^{k+1} + \dots + a_n \sum_{i=1}^m x_i^{k+n} = \sum_{i=1}^m \tilde{y}_i x_i^k, k = \overline{0, n}. \quad (1.52)$$

1.3. ADAPTYVUSIS JUNG TINIS GLOTNINIMO ALGORITMAS

Jungtinės aproksimacijos metodas remiasi paklaidos, sukonstruotos kaip skirtumo tarp interpoliuoto ir faktinio įtempimų laukų kvadrato integralo, minimizavimu globalioje srityje [13]:

$$\sum_{D.S.} \left(\iint ([N]\{s\} - \sigma)^2 dx dy \right), \quad (1.53)$$

čia santrumpa *D.S.* reiškia BEM poslinkių formulotės procedūrą [13]; integralai yra apskaičiuojami kiekvieno baigtinio elemento srityje; $[N]$ – baigtinio elemento formos funkcijų eilutė; $\{s\}$ – integruojamojo baigtinio elemento įtempimų komponentių, ieškomų mazginių reikšmių stulpelis, x ir y – dvimatės sistemos koordinatės, σ – įtempimų komponentė.

Įtempimų mazginės reikšmės yra surandamos minimizuojant paklaidą [13]:

$$\frac{\partial \left(\sum_{D.S.} \left(\iint ([N]\{s\} - \sigma)^2 dx dy \right) \right)}{\partial s_i} = 0, \quad (1.54)$$

čia $i = 1, \dots, m$; m – mazgų skaičius globalioje srityje. Po žingsninio diferencijavimo gaunama tokia lygtis [13]:

$$\sum_{D.S.} \left(\iint [N]^T [N] dx dy \right) \cdot \{S\} = \sum_{D.S.} \left(\iint [N]^T \sigma dx dy \right), \quad (1.55)$$

čia $\{S\}$ – globalus įtempimų mazginių reikšmių vektorius, gaunamas įvykdžius poslinkių formulotės procedūrą.

Trūkiojo lauko glotninimui pasiūlytas adaptivityojo jungtinio glotninimo algoritmas, kuriame mažiausių kvadratų metodu minimizuojama paklaida papildoma nariu, kitaip dar vadinamu baudos nariu, proporcingu glotninamo lauko kitimo greičiams. Šis algoritmas siejamas su baigtinių elementų metodo formulotėmis [2].

Įtempimų komponentė σ baigtinio elemento aplinkoje apskaičiuojama taip [14]:

$$\sigma = [D]\{\varepsilon\}, \quad (1.56)$$

čia $\{\varepsilon\}$ – analizuojamojo baigtinio elemento apibendrintų mazgų deformacijų stulpelis; $[D]$ – operatorius, susiejanti deformacijos komponentę ir mazginius įtempimus analizuojamojo baigtinio elemento aplinkoje.

Adaptyviojo jungtinio glotninimo metodas grindžiamas minimizuojamos paklaidos papildymu bauda už greitą įtempių reikšmės kitimą bet kuria analizuojama kryptimi [2]:

$$\lambda_i \left(\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 \right), i = 1, \dots, p; \quad (1.57)$$

čia $\lambda_i > 0$ yra individualiai kiekvienam baigtiniam elementui parinkti glotninimo parametrai, p – baigtinių elementų skaičius globalinėje konstrukcijoje, x ir y – dvimatės sistemos koordinatės, σ – įtempių komponentė. Kadangi įtempių laukas yra interpoliuojamas, naudojant baigtinio elemento formos funkcijas, tai papildomas baudos narys aproksimuojamas taip [2]:

$$\left(\frac{\partial \sigma(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma(x, y)}{\partial y} \right)^2 = \{s\}^T [C]^T [C] \{s\}; \quad (1.58)$$

čia

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial N_2(x, y)}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1(x, y)}{\partial y} & \frac{\partial N_2(x, y)}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_n(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (1.59)$$

o n – analizuojamo elemento mazgų skaičius; N_i – i -tojo mazgo formos funkcija.

Tuomet, įtempių mazginės reikšmės yra surandamos minimizuojant išplėstąją paklaidą [2]:

$$\frac{\partial \left(\sum_{D.S.} \left(\iint ([N]\{s\} - \sigma)^2 + \lambda_i \{s\}^T [C]^T [C] \{s\} dx dy \right) \right)}{\partial s_i} = 0, \quad (1.60)$$

čia $i = 1, \dots, m$; m – mazgų skaičius globalioje srityje; $D.S.$ reiškia BEM poslinkių formuluotės procedūrą; integralai yra apskaičiuojami kiekvieno baigtinio elemento srityje; $[N]$ – baigtinio elemento formos funkcijų eilutė; $\{s\}$ – integruojamojo baigtinio elemento įtempių komponentių, ieškomų mazginių reikšmių stulpelis, x ir y – dvimatės sistemos koordinatės, σ – įtempių komponentė. Po žingsninio diferencijavimo gaunama tokia lygtis [2]:

$$\sum_{D.S.} \left(\iint ([N]^T [N] + [C]^T \lambda_i [C]) dx dy \right) \cdot \{s\} = \sum_{D.S.} \left(\iint [N]^T \alpha dx dy \right), \quad (1.61)$$

čia $\{s\}$ – globalus įtempių mazginių reikšmių vektorius, gaunamas įvykdžius poslinkių formuluotės procedūrą.

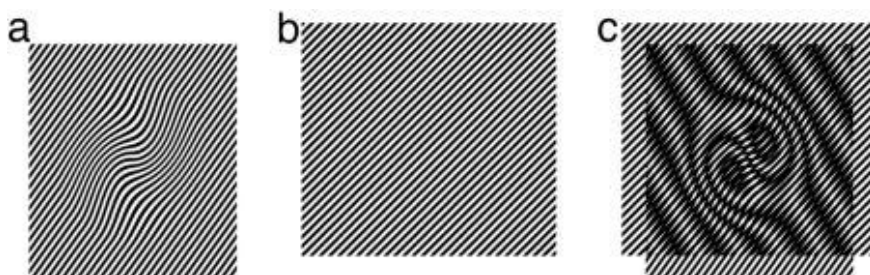
1.4. OPTINIAI METODAI

Visos aptartos metodikos yra plačiai taikomos praktikoje – optinės inžinerijos srityje. Čia naudojama gana plati optinių metodų įvairovė: muaro interferometrija, vidurkinta laike lazerinė holografija, fototamprumo efektu pagrįsti optiniai metodai ir kt., [2, 15, 16]. Bene svarbiausias optinių metodų privalumas, kad tai yra neardančios kontrolės metodai. Jų pagrindinė esmė – užtikrinti objektų (gaminų, sistemų ir t.t.) tinkamumą nustatytiems reikalavimams. Neardančios kontrolės metodais objektas yra tiriamas bekontakčiu būdu ir nėra ardomas, pjaustomas, lankstomas, gręžiamas ir panašiai. Kita teigiama savybė, kad tai yra viso lauko metodai. Vienu metu tyrimai gali vykti visame analizuojame plote. Taip pat svarbu, kad tai realaus laiko metodai. Tiriamuoju momentu galima fiksuoti interferencines juostas ir vertinti sistemą pagal juostų išsidėstymą [2, 15]. Trumpai pristatysime du populiariausius metodus:

1) Muaro interferometrija (MI) yra viso lauko deformacijos žemėlapis matavimo metodas ir buvo sėkmingai pritaikytas mechaninei būsenai, kuri yra skirtingų struktūrų su skirtingomis medžiagų sudėtimi, studijuoti [17].

Muaro interferometrija yra glaudžiai susijusi su matavimo prietaisu, pagal kategoriją pavadintu „holografinė interferometrija“ [18].

Geometrinis muaras [19, 20] yra klasikinis optinis eksperimentinis metodas, pagrįstas vaizdų, gautų geometriškai interferuojant dviems sutapdintiems muaro tinkleliams, analize. Muaro tinkleliais gali būti vienodais atstumais išdėstytos lygiagrečios linijos, koncentriniai apskritimai, radialinės linijos. Tinkleliai sutapdinami panaudojant dvigubos ekspozicijos, atspindžio, šešėlio arba tiesioginio kontakto metodus [21, 22] (1.9 pav.). Muaro metodai yra naudojami matuoti kintamumus, tokiems kaip nuokrypiai, posūkiai, išlinkimai, įtempimai visoje stebimoje srityje. Plokštumos muaras paprastai yra atliekamas su vienodai nutolusių lygiagrečių linijų grotelėmis [20, 21].



1.9 pav. Muaro efektas

Geometrinio muaro linijas kūno paviršiuje galima interpretuoti kaip baltos ir juodos spalvų variaciją [23]:

$$M_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right); \quad (1.62)$$

čia x yra koordinatė; M_1 yra pilkos spalvos lygis taške x ; λ yra tinklelio periodas; skaitinė reikšmė 0 atitinka juodą spalvą; skaitinė reikšmė 1 atitinka baltą spalvą; tarpinės reikšmės – atitinkamas pilkas spalvas.

Jeigu kūnas perstūmiamas nuo pusiausvyros padėties per poslinkį u , tai jo paviršiaus apšviestumas tuomet aprašomas tokiu sąryšiu [23]:

$$M_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} (x-u)\right). \quad (1.63)$$

2) Optinė holografija vadinamas šviesos bangų struktūros užrašymo ir atkūrimo metodas, grindžiamas koherentinių šviesos bangų difrakcija ir interferencija. Holografijos įdėją išskėlė D. Gaboras (Dennis Gabor) apie 1948 m., tačiau plačiau ji išsivystė 1963 m. sukūrus lazerius [24].

Praktinė holografijos pusė labai plati. Ji įsiskverbė į visas tradicines taikomosios optikos sritis. Holografijos principai leido iš naujo nagrinėti tas sritis, kuriose pagrindinį vaidmenį vaidina bangų interferencija. Holografija naudojama matuojant įvairių kūnų deformacijas, tiriant dujų srautų struktūrą aerodinamikoje, šalinant trūkumus optinėse sistemose, difracinių gardelių gamyboje, optinių atvaizdų kūrime ir t. t. [24].

Holografinės interferometrijos metodu galima stebėti užregistruotų skirtingais laiko momentais bangų interferenciją. Naudojant vieną ir tą patį atraminį pluoštelį vienoje foto plokštelėje galima du kartus paeiliui užregistruoti išsklaidytas daikto bangas. Jei tarp eksponavimų kokios nors daikto dalys pasislinko arba deformavosi, tai atgaminimo metu tarp dviejų vienu metu susikūrusių koherentinių daikto bangų bus tam tikras eigos skirtumas ir daikto atvaizdo paviršius bus padengtas interferencinėmis juostelėmis, analogiškomis įprastinėms vienodo storio juostelėms. Pagal šių juostelių išsidėstymą galima nusakyti pokyčius daikte, įvykusius tarp eksponavimų. Be to tiriamasis objektas gali šviesą atspindėti difuziškai, turėti sudėtingą reljefą ir šiurkštų paviršių, nes visi šie veiksniai vienodai veikia abi atstatomąsias daikto bangas. Nežiūrint to, kad bangų paviršių forma yra labai sudėtinga, šios bangos visiškai panašios ir sukuria paprastas ir lengvai stebimas interferencines juosteles [24].

2. TIRIAMOJI DALIS

Adaptyviojo jungtinio glotninimo strategija išryškino keletą trūkumų. Glotninimo parametras λ parenkamas kiekvienam elementui individualiai ir jo tikslumas nustatomas intuityviai. O didinant parametro λ reikšmę – iškraipoma fizikinė informacija apie nagrinėjamąją sistemą.

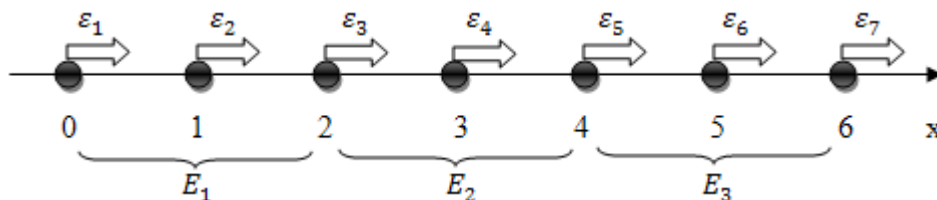
Šiame darbe siūlomas optimalaus glotninimo parametro λ nustatymo algoritmas:

1. Pritaikoma teorinio įtempių lauko reguliarizacija baigtinio elemento jungimosi mazguose aritmetiškai vidurkinant teorinio įtempių reikšmes tuose taškuose;
2. Minimizuojama paklaida R tarp reguliarizuoto teorinio lauko reikšmių σ_{reg} ir glotninto lauko reikšmių S_λ

$$\min R = \min \sqrt{\frac{1}{n} \sum_i^n (\sigma_{reg} - S_\lambda)^2} \quad (2.1)$$

2.1. ALGORITMO REALIZACIJA VIENMAČIU ATVEJU

Jungtinio glotninimo savybės gali būti iliustruojamos šiuo pavyzdžiu. Vienmatė sistema sudaryta iš trijų kvadratinų baigtinių elementų ir kiekvieno elemento trijų mazgų yra pateikta 2.1 paveiksle:



2.1 pav. Vienmatė sistema sudaryta iš 3 kvadratinų baigtinių elementų ir kiekvieno elemento 3 mazgų

Skaičiavimams atlikti buvo sukurta programa su Mathcad programine įranga [1 – 6 priedai].

Tarkime, kad mazgų x koordinatės yra:

$$x = 0, 1, 2, \dots, 6. \quad (2.2)$$

Tuomet i -tojo elemento formos funkcijos yra:

$$\begin{aligned} N_1^{(i)} &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{4i-1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8}, \\ N_2^{(i)} &= -(x - 2i + 1)^2 + 1, \\ N_3^{(i)} &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{4i-3}{2} \right)^2 - \frac{1}{8}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

čia $i = 1, \dots, 3$.

Mazgų deformacijos ε_k yra žinomos. Deformacijos pasiskirstymas i -tojo baigtinio elemento srityje yra aproksimuojamas naudojant atinkamas formos funkcijas [2]:

$$\varepsilon^{(i)}(x) = N_1^{(i)}(x)\varepsilon_{2i-1} + N_2^{(i)}(x)\varepsilon_{2i} + N_3^{(i)}(x)\varepsilon_{2i+1}. \quad (2.4)$$

Tuomet įtempis i -tojo elemento srityje yra apskaičiuojamas kaip deformacijos išvestinė [2]:

$$\sigma^{(i)}(x) = B_1^{(i)}(x)\varepsilon_{2i-1} + B_2^{(i)}(x)\varepsilon_{2i} + B_3^{(i)}(x)\varepsilon_{2i+1}, \quad (2.5)$$

čia [1 priedas]

$$\begin{aligned} B_1^{(i)}(x) &= \frac{\partial N_1^{(i)}(x)}{\partial x} = x - 2i + \frac{1}{2}, \\ B_2^{(i)}(x) &= \frac{\partial N_2^{(i)}(x)}{\partial x} = 4i - 2x - 2, \\ B_3^{(i)}(x) &= \frac{\partial N_3^{(i)}(x)}{\partial x} = x - 2i + \frac{3}{2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Pažymėkime nežinomas įtempio mazgines reikšmes s_k . Reikia pastebėti, kad $[N] = [N_1^{(i)}(x); N_2^{(i)}(x); N_3^{(i)}(x)]$, o $[C] = [B_1^{(i)}(x); B_2^{(i)}(x); B_3^{(i)}(x)]$ [2].

Tuomet, i -tajam elementui [2 priedas]:

$$\int_{2i-2}^{2i} [N]^T [N] dx = \begin{bmatrix} \frac{4}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{15} \\ \frac{2}{15} & \frac{16}{15} & \frac{2}{15} \\ -\frac{1}{15} & \frac{2}{15} & \frac{4}{15} \end{bmatrix}, \quad \int_{2i-2}^{2i} [C]^T [C] dx = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{4}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{4}{3} & \frac{7}{6} \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

$$\int_{2i-2}^{2i} [N]^T \sigma^{(i)}(x) dx = \begin{bmatrix} \frac{-3\varepsilon_{2i-1} + 4\varepsilon_{2i} - \varepsilon_{2i+1}}{6} \\ \frac{-2\varepsilon_{2i-1} + 2\varepsilon_{2i+1}}{3} \\ \frac{\varepsilon_{2i-1} - 4\varepsilon_{2i} + 3\varepsilon_{2i+1}}{6} \end{bmatrix}$$

Pritaikę poslinkių formuluotės procedūrą ir suformavę globalias matricas gauname tiesinių algebrinių lygčių sistemą:

$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{-1}{15}$
$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{2}{15}$
$\frac{-1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$

 E_1

$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{-1}{15}$
$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{2}{15}$
$\frac{-1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$

 E_2

$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{-1}{15}$
$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{2}{15}$
$\frac{-1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$

 E_3

$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{-1}{15}$				
$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{2}{15}$				
$\frac{-1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15} + \frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{-1}{15}$		
		$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{2}{15}$		
		$\frac{-1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15} + \frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{-1}{15}$
				$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{2}{15}$
				$\frac{-1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$

$\frac{-3\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{6}$	
$\frac{-2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_3}{3}$	E_1
$\frac{\varepsilon_1 - 4\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3}{6}$	
$\frac{-3\varepsilon_3 + 4\varepsilon_4 - \varepsilon_5}{6}$	
$\frac{-2\varepsilon_3 + 2\varepsilon_5}{3}$	E_2
$\frac{\varepsilon_3 - 4\varepsilon_4 + 3\varepsilon_5}{6}$	
$\frac{-3\varepsilon_5 + 4\varepsilon_6 - \varepsilon_7}{6}$	
$\frac{-2\varepsilon_5 + 2\varepsilon_7}{3}$	E_3
$\frac{\varepsilon_5 - 4\varepsilon_6 + 3\varepsilon_7}{6}$	

Pritaikius poslinkių formuluotės procedūrą nagrinėjamiems trims elementams, kai glotninimo parametras λ yra vienodas visiems elementams ir nebūtinai lygus 0 [2]:

$$\begin{pmatrix}
\frac{4}{15} + \frac{7}{6} \cdot \lambda & \frac{2}{15} - \frac{4}{3} \cdot \lambda & -\frac{1}{15} + \frac{1}{6} \cdot \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{2}{15} - \frac{4}{3} \cdot \lambda & \frac{16}{15} + \frac{8}{3} \cdot \lambda & \frac{2}{15} - \frac{4}{3} \cdot \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{15} + \frac{1}{6} \cdot \lambda & \frac{2}{15} - \frac{4}{3} \cdot \lambda & \frac{8}{15} + \frac{14}{6} \cdot \lambda & \frac{2}{15} - \frac{4}{3} \cdot \lambda & -\frac{1}{15} + \frac{1}{6} \cdot \lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{2}{15} - \frac{4}{3} \cdot \lambda & \frac{16}{15} + \frac{8}{3} \cdot \lambda & \frac{2}{15} - \frac{4}{3} \cdot \lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{15} + \frac{1}{6} \cdot \lambda & \frac{2}{15} - \frac{4}{3} \cdot \lambda & \frac{8}{15} + \frac{14}{6} \cdot \lambda & \frac{2}{15} - \frac{4}{3} \cdot \lambda & -\frac{1}{15} + \frac{1}{6} \cdot \lambda \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{15} - \frac{4}{3} \cdot \lambda & \frac{16}{15} + \frac{8}{3} \cdot \lambda & \frac{2}{15} - \frac{4}{3} \cdot \lambda \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{15} + \frac{1}{6} \cdot \lambda & \frac{2}{15} - \frac{4}{3} \cdot \lambda & \frac{4}{15} + \frac{7}{6} \cdot \lambda
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{6} \\ \frac{-2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_3}{3} \\ \frac{\varepsilon_1 - 4\varepsilon_2 + 4\varepsilon_4 - \varepsilon_5}{3} \\ \frac{-2\varepsilon_3 + 2\varepsilon_5}{3} \\ \frac{\varepsilon_3 - 4\varepsilon_4 + 4\varepsilon_6 - \varepsilon_7}{3} \\ \frac{-2\varepsilon_5 + 2\varepsilon_7}{3} \\ \frac{\varepsilon_5 - 4\varepsilon_6 + 3\varepsilon_7}{6} \end{pmatrix}$$

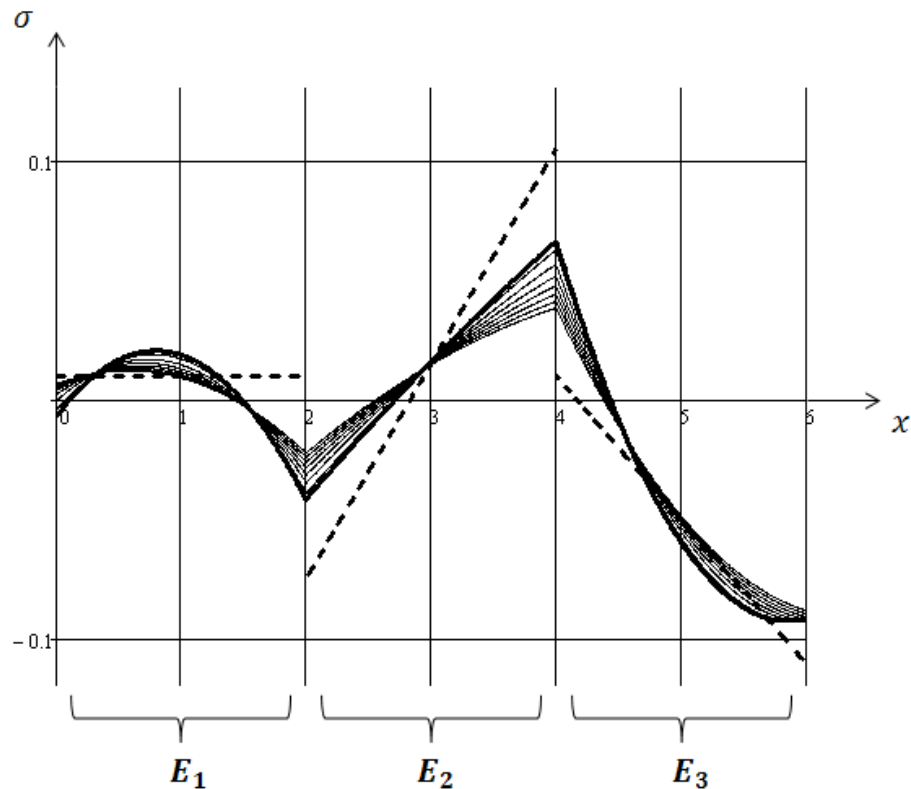
(2.8)

(2.8) teigiamai apibrėžta matrica, kurios tikrinės reikšmės yra: (0.756 0.828 1.4769 2.2288 4.0707 4.8757 5.5631).

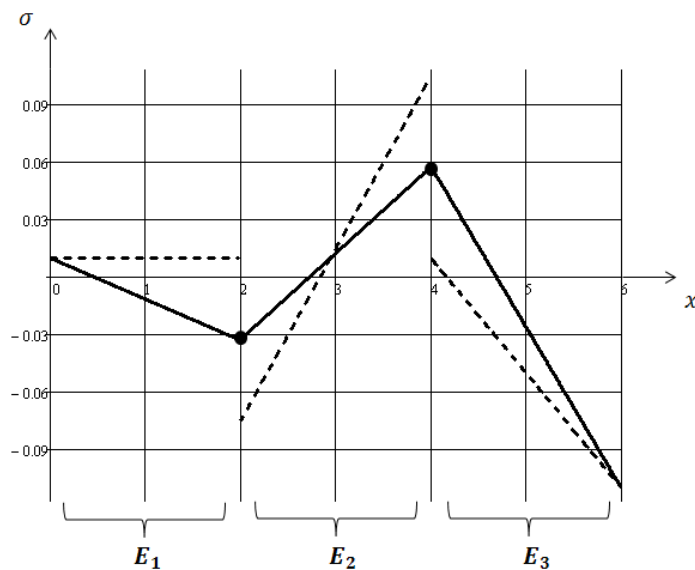
i -tojo elemento srityje rekonstruotas įtempių laukas yra aproksimuojamas i -tojo elemento formos funkcijomis [2]:

$$S^{(i)}(x, \lambda) = s_{2i-1}(\lambda)N_1^{(i)}(x) + s_{2i}(\lambda)N_2^{(i)}(x) + s_{2i+1}(\lambda)N_3^{(i)}(x); i = 1, \dots, 3. \quad (2.9)$$

Nagrinėsime skaitinį pavyzdį konkrečioms įtempių reikšmėms: $\varepsilon_1 = -0.01$; $\varepsilon_2 = 0$; $\varepsilon_3 = 0.01$; $\varepsilon_4 = -0.02$; $\varepsilon_5 = 0.04$; $\varepsilon_6 = 0.02$; $\varepsilon_7 = -0.06$ ir iliustruosime rekonstruotą įtempių lauką. Mazginės reikšmės, kai $\lambda = 0$ yra: $s_1 = -0.007$; $s_2 = 0.019$; $s_3 = -0.042$; $s_4 = 0.016$; $s_5 = 0.066$; $s_6 = -0.059$; $s_7 = -0.091$ [3 priedas].

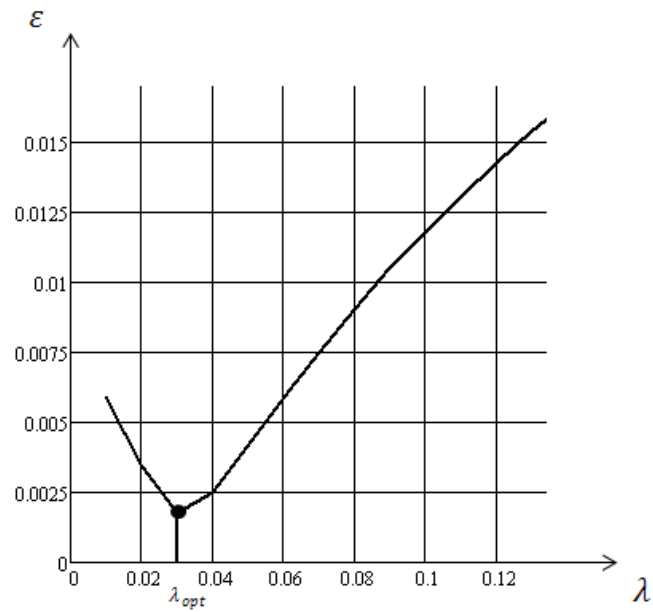


2.2 pav. 3 kvadratiniai elementai. Punktyrinė linija - teorinis įtempių laukas, riebi ištisinė linija – glotnintas įtempių laukas, plona ištisinė linija - glotnintas įtempių laukas $\lambda_i = 0.01, 0.03, \dots, 0.13$



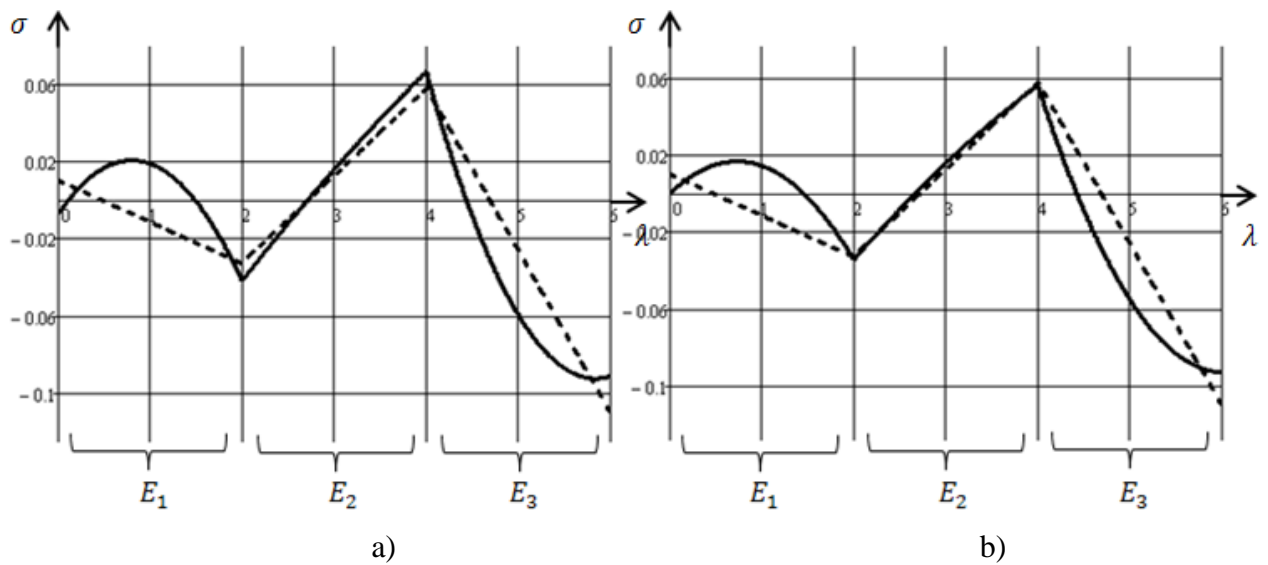
2.3 pav. Teorinis trūkus laukas (punktyrinė linija) ir reguliarizuotas tolydus laukas (ištisinė linija)

Optimalaus glotninimo parametro λ reikšmė yra gaunama minimizuojant paklaidą tarp reguliarizuoto ir glotninto lauko. 2.3 paveiksle matome, kad gavome lokaliąjį minimumo tašką, kuris yra $\lambda = 0.032$ [6 priedas], tai ir bus optimali glotninimo parametro λ reikšmė [5 priedas]:



2.4 pav. Optimali glotninimo parametro λ reikšmė

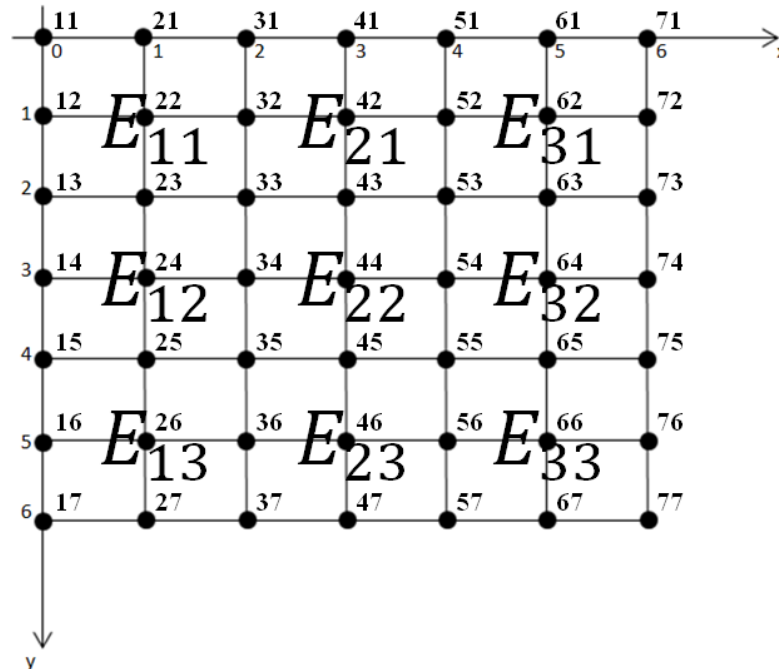
Rezultatai iliustruojami 2.5 paveiksle:



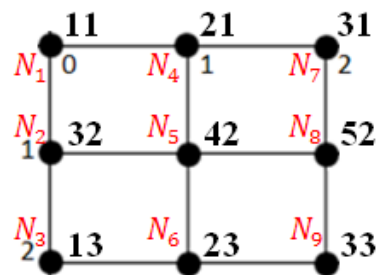
2.5 pav. a) Reguliarizuotas laukas (punktyrinė linija) ir glotnintas laukas, kai $\lambda = 0$ (ištisinė linija); b) Reguliarizuotas laukas (punktyrinė linija) ir glotnintas laukas, kai $\lambda = 0.032$ (ištisinė linija)

2.2. ALGORITMO REALIZACIJA DVIMAČIU ATVEJU

Iliustruosime jungtinio glotninimo algoritmo savybes šiuo dvimačiu pavyzdžiu. Dvimatė sistema, sudaryta iš devynių elementų ir keturiasdešimt devynių mazgų, yra pateikta 2.6 paveiksle.



a)



b)

2.6 pav. Dvimatė sistema sudaryta iš: a) 9 kvadratinių baigtinių elementų ir 49 mazgų;

b) 1 kvadratinio baigtinio elemento ir 9 mazgų

Skaičiavimams atlikti buvo sukurta programa su Mathcad programine įranga [7 – 11 priedai] .

Tarkime, kad mazgų koordinatės yra:

$$x_j = j - 1, j = 1, \dots, 7; \quad (2.13)$$

$$y_i = i - 1, i = 1, \dots, 7; \quad (2.14)$$

Tuomet ij -tojo elemento formos funkcijos yra:

$$\begin{aligned}
N_1^{(ij)}(x, y) &= \left(\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{4j-1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(y - \frac{4i-1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right), \\
N_2^{(ij)}(x, y) &= \left(\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{4j-1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right) \cdot \left(-(y-2i+1)^2 + 1 \right), \\
N_3^{(ij)}(x, y) &= \left(\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{4j-1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(y - \frac{4i-3}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right), \\
N_4^{(ij)}(x, y) &= \left(-(x-2j+1)^2 + 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(y - \frac{4i-1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right), \\
N_5^{(ij)}(x, y) &= \left(-(x-2j+1)^2 + 1 \right) \cdot \left(-(y-2i+1)^2 + 1 \right), \\
N_6^{(ij)}(x, y) &= \left(-(x-2j+1)^2 + 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(y - \frac{4i-3}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right), \\
N_7^{(ij)}(x, y) &= \left(\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{4j-3}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(y - \frac{4i-1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right), \\
N_8^{(ij)}(x, y) &= \left(\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{4j-3}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right) \cdot \left(-(y-2i+1)^2 + 1 \right), \\
N_9^{(ij)}(x, y) &= \left(\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{4j-3}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(y - \frac{4i-3}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right),
\end{aligned} \tag{2.15}$$

čia $i, j = 0, \dots, 6$.

Mazgų deformacijos ε_{ij} yra žinomos. Deformacijų lauko pasiskirstymas ij -tojo elemento srityje yra aproksimuojamas naudojant atitinkamo elemento formos funkcijas [2]:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{(ij)}(x, y) &= N_1^{(ij)}(x, y)\varepsilon_{2i-1,2j-1} + N_4^{(ij)}(x, y)\varepsilon_{2i-1,2j} + N_7^{(ij)}(x, y)\varepsilon_{2i-1,2j+1} + N_2^{(ij)}(x, y)\varepsilon_{2i,2j-1} + \\
&+ N_5^{(ij)}(x, y)\varepsilon_{2i,2j} + N_8^{(ij)}(x, y)\varepsilon_{2i,2j+1} + N_3^{(ij)}(x, y)\varepsilon_{2i+1,2j-1} + N_6^{(ij)}(x, y)\varepsilon_{2i+1,2j} + N_9^{(ij)}(x, y)\varepsilon_{2i+1,2j+1}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Žinoma, kad plokščiuose tamprumo teorijos uždaviniuose, įtempių laukas susideda iš kelių komponentių, paprastai žymimų σ_x , σ_y ir τ_{xy} . Tačiau iliustruodami glotninimo procedūros savybes, mes uždavinį supaprastinsime ir laikysime, kad įtempių komponentė yra lygi $\sigma(x, y) = \frac{\partial \varepsilon(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon(x, y)}{\partial y}$. Toliau nagrinėjant konkrečius sistemų modelius mes jau vertinsime visas įtempių komponentes. Taigi, įtempiai ij -tojo elemento viduje yra apskaičiuojami kaip deformacijos dalinių išvestinių pagal x ir y suma [2]:

$$\begin{aligned}
\sigma^{(ij)}(x, y) &= B_1^{(ij)}(x, y)\varepsilon_{2i-1,2j-1} + B_4^{(ij)}(x, y)\varepsilon_{2i-1,2j} + B_7^{(ij)}(x, y)\varepsilon_{2i-1,2j+1} + B_2^{(ij)}(x, y)\varepsilon_{2i,2j-1} + \\
&+ B_5^{(ij)}(x, y)\varepsilon_{2i,2j} + B_8^{(ij)}(x, y)\varepsilon_{2i,2j+1} + B_3^{(ij)}(x, y)\varepsilon_{2i+1,2j-1} + B_6^{(ij)}(x, y)\varepsilon_{2i+1,2j} + B_9^{(ij)}(x, y)\varepsilon_{2i+1,2j+1}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$B_k^{(ij)}(x, y) = \frac{\partial N_k^{(ij)}(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial N_k^{(ij)}(x, y)}{\partial y} \quad (2.18)$$

čia $k = \overline{1,9}$.

Nežinomos įtempio mazginės reikšmės yra pažymėtos s_{ij} . Tuomet, ij -tajam elementui [7 priedas].

Priimame, jog glotninimo parametras λ yra vienodas visiems elementams ir lygus 0.

Minimizuosime paklaidą mažiausių kvadratų metodu [2]:

$$\frac{\partial \left(\sum_{D.S.} \left(\iint ([N]\{s\} - \sigma)^2 dx dy \right) \right)}{\partial s_{ij}} = 0, \quad (2.19)$$

Gauname tiesinių lygčių sistemą [8 priedas].

(1) sistemos matrica [8 priedas] yra teigiamai apibrėžta, nes šios matricos tikrinės reikšmės: (0.043 0.0464 0.0464 0.0501 0.0891 0.0891 0.0962 0.0962 0.1228 0.1228 0.1326 0.1326 0.1847 0.224 0.224 0.2316 0.2316 0.2382 0.2382 0.2419 0.2419 0.2501 0.2501 0.2546 0.2546 0.2572 0.2572 0.3509 0.4644 0.4644 0.4801 0.4801 0.4937 0.4937 0.6402 0.6402 0.6617 0.6617 0.6806 0.6806 1.1679 1.2072 1.2072 1.2416 1.2416 1.2479 1.2834 1.2834 1.3199). Matricos tikrinės reikšmės yra teigiami skaičiai, t.y. nelygūs 0.

Analogiškai taikysime poslinkių formulotės procedūrą, kai glotninimo parametras λ yra vienodas visiems elementams ir nebūtinai lygus 0. Gausime (1) tiesinių lygčių sistemą, tik su kitais matricą sudarančiais blokais **A, B, C, D, E** [8 priedas].

(1) sistemos matrica neneigiamai apibrėžta, o jos tikrinės reikšmės: (0 0.164 0.164 0.2657 0.4887 0.5694 0.5694 0.6221 0.8181 0.9418 0.9418 1.0472 1.06 1.3032 1.3809 1.3809 1.436 1.561 1.561 1.7308 1.7561 1.9021 1.9021 2.1779 2.3585 2.375 2.375 2.3862 2.9947 3.3476 3.5173 3.5961 3.5961 3.7547 3.7547 3.8422 4.4316 4.7114 4.7114 5.051 6.0244 6.4894 6.4894 6.7824 6.9678 6.9706 7.154 7.154 7.42). Matricos visos tikrinės reikšmės yra neneigiamos [8 priedas].

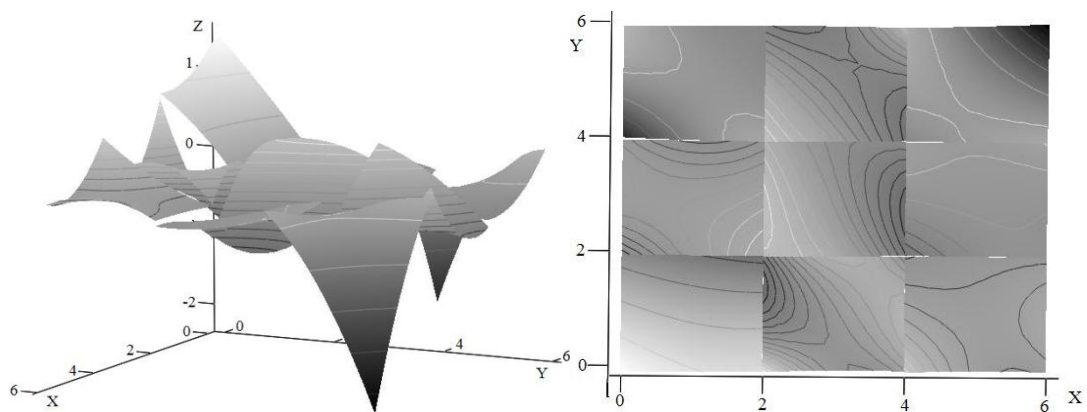
Iliustruosime skaičiavimo rezultatus esant konkrečioms deformacijų reikšmėms:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} -0.8 & -0.309 & -0.087 & -0.142 & -0.334 & -0.218 & -0.469 \\ -0.172 & 0.088 & 0.36 & -0.018 & -0.047 & -0.102 & -0.134 \\ 0.046 & -0.081 & -0.028 & 0.198 & 0.133 & -0.035 & -0.07 \\ 0.202 & 0.021 & 0.032 & 0.276 & -0.032 & -0.082 & -0.146 \\ 0.7 & 0.18 & 0 & 0.198 & 0.021 & -0.052 & -0.087 \\ -0.037 & 0.146 & 0.089 & 0.167 & -0.059 & -0.04 & -0.206 \\ -0.24 & -0.035 & -0.018 & -0.092 & 0.027 & -0.189 & -1 \end{pmatrix}$$

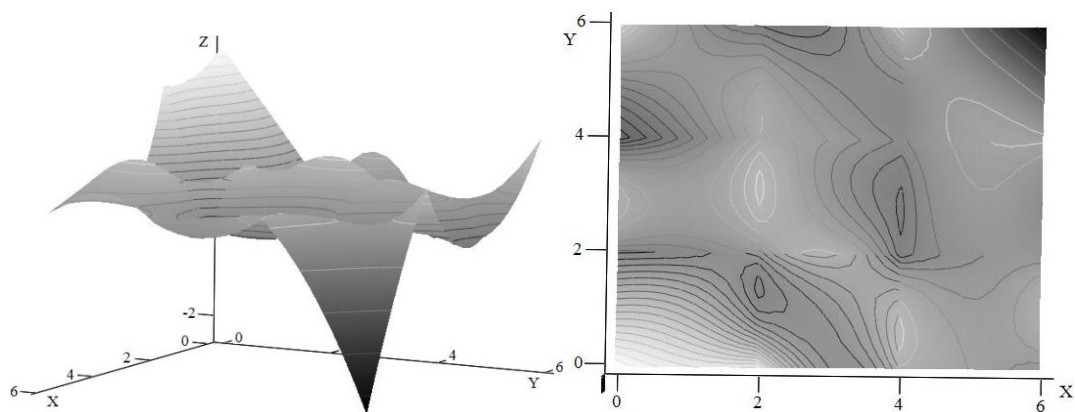
Mazginės rekonstruojamo įtempių lauko reikšmės, kai $\lambda = 0$, yra:

$$s = \begin{pmatrix} 1.40921 & 1.1207 & 1.12577 & -0.10213 & 0.2804 & 0.09869 & -0.0676 \\ 0.55487 & 0.41129 & -0.2197 & -0.07201 & 0.38619 & 0.02859 & 0.24393 \\ -0.32331 & -0.25067 & -0.05556 & 0.32651 & -0.34907 & -0.12156 & -0.07156 \\ 0.25376 & 0.05048 & 0.42595 & -0.06579 & -0.41802 & -0.02409 & -0.19576 \\ -0.75561 & -0.31722 & 0.18934 & -0.01154 & -0.22757 & 0.06614 & 0.10334 \\ -0.22704 & -0.09156 & 0.10101 & -0.20592 & -0.20571 & -0.094 & -0.80369 \\ 0.63074 & -0.12321 & -0.41304 & -0.38555 & 0.39459 & -0.75628 & -2.22807 \end{pmatrix}$$

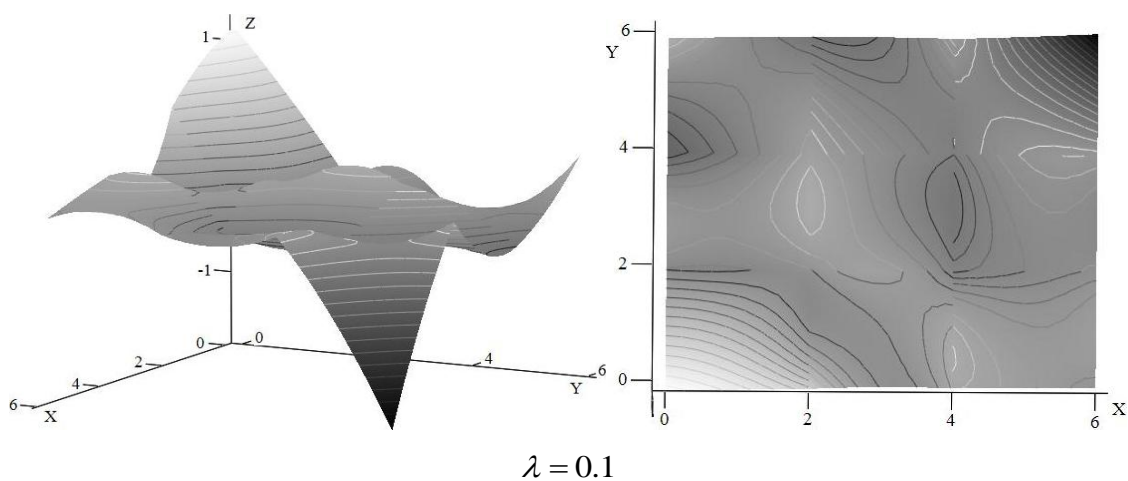
Dabar (1) lygčių sistema su (3) matricą sudarančiais blokais, gali būti išspręsta esant skirtingoms λ reikšmėms [8 priedas]. Rezultatai yra vizualizuoti 2.8 paveiksle, kai $\lambda = 0$. Galima pastebėti, kad rekonstruotas įtempių laukas, esant $\lambda = 0$, yra tolydus globalioje srityje, tačiau jo dalinės išvestinės yra trūkiosios elementų sujungimų vietose. Parametro λ reikšmės padidinimas padeda išspręsti šią problemą. Iš rezultatų, vizualizuotų 2.9 paveiksle, matome, kad, didinat λ reikšmę rekonstruotas įtempių laukas suplokštėja [9 priedas]. Tačiau didinti λ iki begalybės nėra prasmės, nes yra iškreipiama fizikinė informacija apie nagrinėjamą sistemą [2].



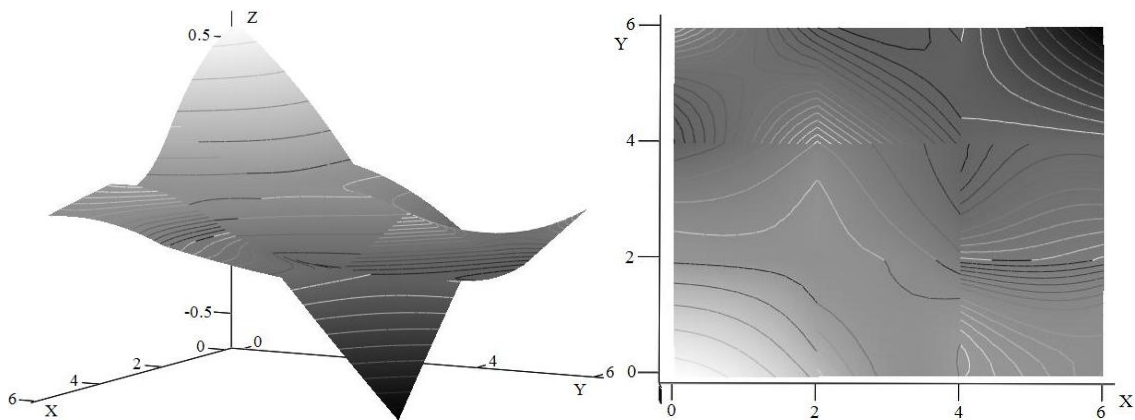
2.7 pav. Įtempimo laukas



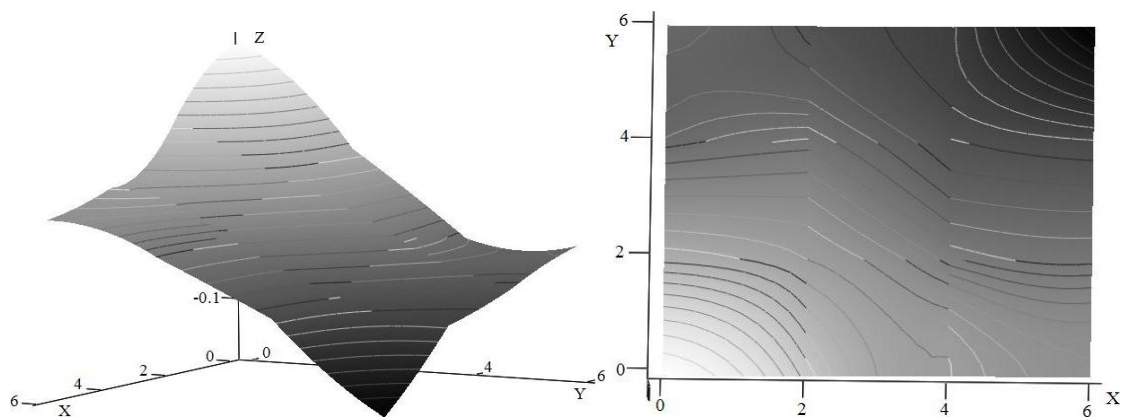
2.8 pav. Rekonstruotas įtempimo S laukas esant $\lambda = 0$



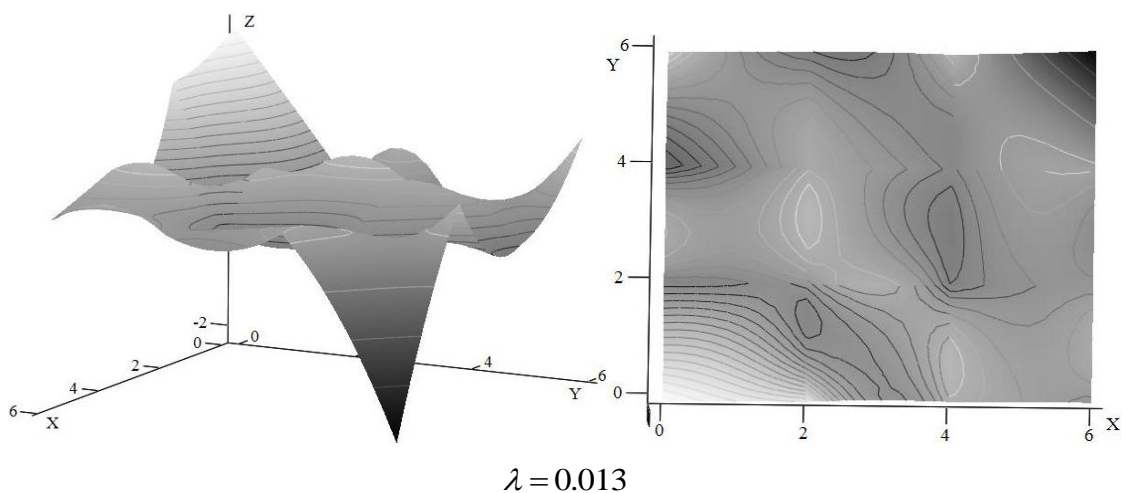
$\lambda = 0.1$



$\lambda = 1$

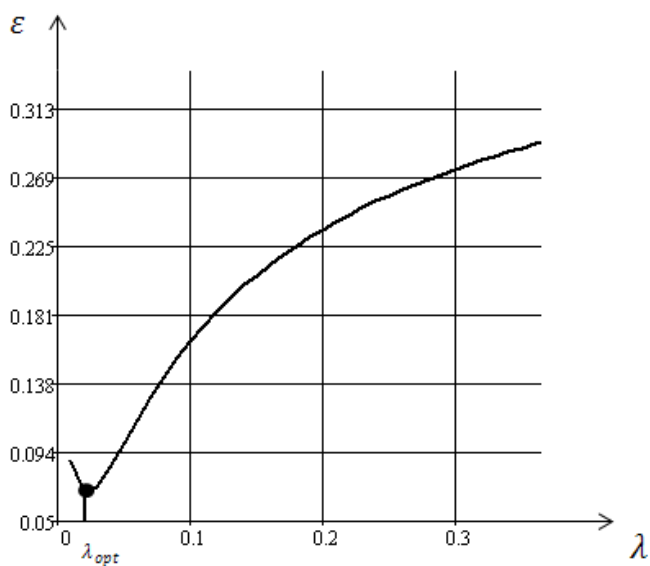


$\lambda = 10$



2.9 pav. Rekonstruotas įtempimo S laukas, kai $\lambda = 0.1; 1; 10; 0.013$

Optimalaus glotninimo parametro λ reikšmė yra gaunama minimizuojant paklaidą tarp reguliarizuoto ir glotninto lauko (2.1). 19 paveiksle matome, kad gavome lokalių minimumo tašką, kuris yra $\lambda = 0.013$ [11 priedas], tai ir bus optimali glotninimo parametro λ reikšmė [10 priedas]:



2.10 pav. Optimali glotninimo parametro λ reikšmė

IŠVADOS

Šiame darbe pritaikyta adaptyviojo jungtinio trūkiųjų laukų glotninimo metodika aukštesnės eilės baigtiniam elementui. Naudojamos kvadratinės formos funkcijos. Buvo sukurtas optimalaus glotninimo parametro algoritmas, pagrįstas paklaidos tarp reguliarizuoto ir glotninto lauko minimizavimu. Adaptyviojo glotninimo strategijos papildymas šiuo algoritmu išsprendžia pagrindinį šios strategijos trūkumą – optimalaus glotninimo parametro λ nustatymą. Algoritmas iliustruotas vienmačiu ir dvimačiu pavyzdžiais.

Pasiūlytu algoritmu papildytą adaptyviojo jungtinio glotninimo strategiją galima taikyti sprendžiant optinės inžinerijos keliamus uždavinius, bet tai ne šio darbo uždavinys.

LITERATŪRA

1. Žarnovskij V., Įtempimų būvio erdviškumo įtakos plokštelių su įpjova įtempimų intensyvumo koeficientui skaitinis tyrimas// Daktaro disertacija// Technologijos mokslai.Mechanikos inžinerija (09T)// Vilniaus Gedimino Technikos Universitetas, p. 94.
2. V. Kravčenkienė, Adaptyvusis jungtinis glotninimas skaitinėse eksperimentinėse aplinkose// Daktaro disertacija // Fiziniai mokslai, informatika (09P)// Kauno technologijos universitetas. p. 120.
3. Barauskas R., Belevičius R., Kačianauskas R., Baigtinių elementų metodo pagrindai/ Vadovėlis, Vilnius, 2004, 612 p.
4. Barauskas R., Baigtinių elementų metodo pagrindai/ Vadovėlis, Kaunas, 1998, 375 p.
5. Zhang G.Y., Liu G.R., Wang Y.Y., Huang H.T., Zhong Z.H., Li G.Y., Han X., *A linearly conforming point interpolation (LC-PIM) for three – dimensional elasticity problems*, Int. J. Numer. Meth. Engng 2007; 72:1524–1543.
6. Liu G.R., Xu X., Zhang G.Y., Gu Y.T., *An extended Galerkin weak form and a point interpolation method with continuous strain field and superconvergence using triangular mesh*, Comput Mech (2009) 43:651–673.
7. Xu X., Liu G.R., Gu Y.T., Zhang G.Y., Luo J.W., Peng J.X., *A point interpolation method with locally smoothed strain field (PIM-LS2) for mechanics problems using triangular mesh*, Finite Element in Analysis and Design, 46 (2010) pp. 862-874.
8. Xu X., Liu G.R., Zhang G.Y., *A point interpolation method with least square strain field (PIM-LSS) for solution bounds and ultra – accurate solutions using triangular mesh*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 198 (2009) pp. 1486–1499.
9. Chen J.S., Wu C.T., Yoon S., You Y., *A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 50 (2001) 435–466.
10. Liu G.R., *A generalized gradient smoothing technique and the smoothed bilinear form for Galerkin formulation of a wide class of computational methods*, Int. J. Comput. Methods 5 (2008) 199–236.
11. Plukas K., Skaitiniai metodai ir algoritmai/ Vadovėlis, Kaunas, 2001, 548 p.
12. Plukas K., Barauskas R., Gaidys R., Skaitiniai inžinerijos metodai Matlab‘o terpėje/ Vadovėlis, Kaunas, 2012, 400 p.
13. Bathe K.J., *Finite element procedures in engineering analysis*, New Jersey, Prentice-Hall, 1982, pp 738.

14. Atluri S.N., Gallgher R.H., Zienkiewicz O.C., *Hybrid and Mixed Finite Element Methods*, John Wiley & Sons , 1993.
15. Shang H., Gao J., *Theories and industrial applications of optical interferometric NDT techniques: A review*, Optical techniques, DOI: 10.1784/insi.2009.51.5.240–251.
16. Sousa A.M.R., Xavier J., Morais J.J.L., Filipe V.M.J., Vaz M., *Processing discontinuous displacemenet fields a spatio – temporal derivative technique*, Optics and Lasers in Engineering 49 (2011) pp. 1402–1412.
17. Post D, Han B, Ifju P. High sensitivity Moiré: experimental analysis for mechanics and materials. New York: Springer-Verlag; 1994.
18. Kreis T. Holographic interferometry: principles and methods. Berlin: Akade- mie Verlag; 1996.
19. Kobayashi AS. Handbook on experimental mechanics. 2nd ed. Bethel: SEM; 1993.
20. Patorski K, Kujawinska M. Handbook of the moiré fringe technique. Amsterdam: Elsevier; 1993.
21. Post D, Han B, Ifju P. High sensitivity moiré: experimental analysis for mechanics and materials. Berlin: Springer; 1997.
22. Dai F.L., Wang Z.Y., *Geometric micron moiré*, Optics and Lasers in Engineering 1999; 31:191–8.
23. Ragulskis M., *Time – averaged patterns produced by stochastic moiré gratings*, Computers and Graphics 33 (2009); 147–150.
24. Šalna V.A., Optika. – Vilnius: Enciklopedija, 2004. – p. 161–174.
25. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., The Finite Element Method, 2000, 689 p.
26. Kursevičiūtė D., Neardančios kontrolės metodų apžvalga// Matematika ir matematikos dėstymas 2012: konferencijos pranešimų medžiaga/ Kauno technologijos universitetas. Kaunas: Technologija, 2012. ISSN 2029–9354. p. 54–58.

PRIEDAS

1 priedas

$$B_1(x,i) := \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{4i-1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] \quad B_2(x,i) := \frac{d}{dx} \left[-(x-2i+1)^2 + 1 \right]$$

$$B_3(x,i) := \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{4i-3}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right]$$

2priedas

$$\int_{2i-2}^{2i} \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{4i-1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \\ -(x-2i+1)^2 + 1 \\ \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{4i-3}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \end{array} \right] \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{4i-1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \quad -(x-2i+1)^2 + 1 \quad \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{4i-3}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] dx$$

$$\int_{2i-2}^{2i} \left(\begin{array}{l} x-2i+\frac{1}{2} \\ 4i-2x-2 \\ x-2i+\frac{3}{2} \end{array} \right) \cdot \left(x-2i+\frac{1}{2} \quad 4i-2x-2 \quad x-2i+\frac{3}{2} \right) dx$$

$$\int_{2i-2}^{2i} \left[\begin{array}{l} \left[\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{4i-1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] \cdot \left[\left(x - 2i + \frac{1}{2} \right) \cdot \epsilon_{2i-1} + (4i-2x-2) \cdot \epsilon_{2i} + \left(x - 2i + \frac{3}{2} \right) \cdot \epsilon_{2i+1} \right] \\ \left[-(x-2i+1)^2 + 1 \right] \cdot \left[\left(x - 2i + \frac{1}{2} \right) \cdot \epsilon_{2i-1} + (4i-2x-2) \cdot \epsilon_{2i} + \left(x - 2i + \frac{3}{2} \right) \cdot \epsilon_{2i+1} \right] \\ \left[\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{4i-3}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] \cdot \left[\left(x - 2i + \frac{1}{2} \right) \cdot \epsilon_{2i-1} + (4i-2x-2) \cdot \epsilon_{2i} + \left(x - 2i + \frac{3}{2} \right) \cdot \epsilon_{2i+1} \right] \end{array} \right] dx$$

3 priedas

$$\begin{aligned} e1 &:= -0.01 & e3 &:= 0.01 & e5 &:= 0.04 & e7 &:= -0.06 \\ e2 &:= 0 & e4 &:= -0.02 & e6 &:= 0.02 \end{aligned}$$

$$C := \begin{pmatrix} \frac{-3 \cdot e1 + 4 \cdot e2 - e3}{6} \\ \frac{-2 \cdot e1 + 2 \cdot e3}{3} \\ \frac{e1 - 4 \cdot e2 + 4 \cdot e4 - e5}{6} \\ \frac{-2 \cdot e3 + 2 \cdot e5}{3} \\ \frac{e3 - 4 \cdot e4 + 4 \cdot e6 - e7}{6} \\ \frac{-2 \cdot e5 + 2 \cdot e7}{3} \\ \frac{e5 - 4 \cdot e6 + 3 \cdot e7}{6} \end{pmatrix}$$

$$S1(x1, \lambda) := \begin{cases} B \leftarrow A(\lambda)^{-1} \cdot C \\ X \leftarrow B_{1,1} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(x1 - \frac{41-1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] + B_{2,1} \cdot \left[-(x1 - 2 \cdot 1 + 1)^2 + 1 \right] + B_{3,1} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(x1 - \frac{41-3}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] \end{cases}$$

$$S2(x2, \lambda) := \begin{cases} B \leftarrow A(\lambda)^{-1} \cdot C \\ X \leftarrow B_{3,1} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(x2 - \frac{42-1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] + B_{4,1} \cdot \left[-(x2 - 2 \cdot 2 + 1)^2 + 1 \right] + B_{5,1} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(x2 - \frac{42-3}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] \end{cases}$$

$$S3(x3, \lambda) := \begin{cases} B \leftarrow A(\lambda)^{-1} \cdot C \\ X \leftarrow B_{5,1} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(x3 - \frac{43-1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] + B_{6,1} \cdot \left[-(x3 - 2 \cdot 3 + 1)^2 + 1 \right] + B_{7,1} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(x3 - \frac{43-3}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] \end{cases}$$

$$x1 := 0, 0.1 \dots 2$$

$$\sigma1(x1) := \left(x1 - 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \right) \cdot e1 + (41 - 2 \cdot x1 - 2) \cdot e2 + \left(x1 - 2 \cdot 1 + \frac{3}{2} \right) \cdot e3$$

$$x2 := 2, 2.01 \dots 4$$

$$\sigma2(x2) := \left(x2 - 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \right) \cdot e3 + (42 - 2 \cdot x2 - 2) \cdot e4 + \left(x2 - 2 \cdot 2 + \frac{3}{2} \right) \cdot e5$$

$$x3 := 4, 4.1 \dots 6$$

$$\sigma3(x3) := \left(x3 - 2 \cdot 3 + \frac{1}{2} \right) \cdot e5 + (43 - 2 \cdot x3 - 2) \cdot e6 + \left(x3 - 2 \cdot 3 + \frac{3}{2} \right) \cdot e7$$

$$S(x, \lambda) := \begin{cases} S1(x, \lambda) & \text{if } x \leq 2 \\ S2(x, \lambda) & \text{if } 2 < x \leq 4 \\ S3(x, \lambda) & \text{if } 4 < x \leq 6 \end{cases}$$

$$\sigma(x) := \begin{cases} \sigma1(x) & \text{if } x < 2 \\ \sigma2(x) & \text{if } 2 < x < 4 \\ \sigma3(x) & \text{if } 4 < x < 6 \end{cases}$$

4 priedas

$$\text{RegMod}(x) := \begin{cases} (-0.0215)x + 0.01 & \text{if } x \leq 2 \\ \frac{\sigma1(x) + \sigma2(x)}{2} & \text{if } 2 < x \leq 4 \\ (-0.084)x + 0.394 & \text{if } 4 < x \leq 6 \end{cases}$$

5 priedas

q := 1..100

$$\text{RR} := \begin{cases} \text{for } iii \in 1..100 \\ R_{iii} \leftarrow \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\text{sig2} - s\left(\frac{iii}{100}\right)_3 \right)^2 + \left(\text{sig3} - s\left(\frac{iii}{100}\right)_5 \right)^2 \right]} \\ R \end{cases}$$

6 priedas

$$\text{lemdaoptimal} := \begin{cases} \text{lemda} \leftarrow 0 \\ R \leftarrow 10 \\ \text{for } iii \in 1..100 \\ \left| \begin{array}{l} R_{iii} \leftarrow \sqrt{\frac{1}{2} \left[\left(\text{sig2} - S2\left(2, \frac{iii}{100}\right) \right)^2 + \left(\text{sig3} - S2\left(4, \frac{iii}{100}\right) \right)^2 \right]} \\ \text{if } R_{iii} < R \\ \left| \begin{array}{l} R \leftarrow R_{iii} \\ \text{lemda} \leftarrow \frac{iii}{100} \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \text{lemda} \end{cases}$$

7 priedas

$$\int_{2^{i-2}}^{2^i} \int_{2^{j-2}}^{2^j} N(x,y,i,j)^T \cdot N(x,y,i,j) dx dy \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{16}{225} & \frac{8}{225} & -\frac{4}{225} & \frac{8}{225} & \frac{4}{225} & -\frac{2}{225} & \frac{4}{225} & -\frac{2}{225} & \frac{1}{225} \\ \frac{8}{225} & \frac{64}{225} & \frac{8}{225} & \frac{4}{225} & \frac{32}{225} & \frac{4}{225} & -\frac{2}{225} & -\frac{16}{225} & -\frac{2}{225} \\ -\frac{4}{225} & \frac{8}{225} & \frac{16}{225} & -\frac{2}{225} & \frac{4}{225} & \frac{8}{225} & \frac{1}{225} & -\frac{2}{225} & -\frac{4}{225} \\ \frac{8}{225} & \frac{4}{225} & -\frac{2}{225} & \frac{64}{225} & \frac{32}{225} & -\frac{16}{225} & \frac{8}{225} & \frac{4}{225} & -\frac{2}{225} \\ \frac{4}{225} & \frac{32}{225} & \frac{4}{225} & \frac{32}{225} & \frac{256}{225} & \frac{32}{225} & \frac{4}{225} & \frac{32}{225} & \frac{4}{225} \\ -\frac{2}{225} & \frac{4}{225} & \frac{8}{225} & -\frac{16}{225} & \frac{32}{225} & \frac{64}{225} & -\frac{2}{225} & \frac{4}{225} & \frac{8}{225} \\ -\frac{4}{225} & -\frac{2}{225} & \frac{1}{225} & \frac{8}{225} & \frac{4}{225} & -\frac{2}{225} & \frac{16}{225} & \frac{8}{225} & -\frac{4}{225} \\ \frac{2}{225} & -\frac{16}{225} & -\frac{2}{225} & \frac{4}{225} & \frac{32}{225} & \frac{4}{225} & \frac{8}{225} & \frac{64}{225} & \frac{8}{225} \\ \frac{1}{225} & -\frac{2}{225} & -\frac{4}{225} & -\frac{2}{225} & \frac{4}{225} & \frac{8}{225} & -\frac{4}{225} & \frac{8}{225} & \frac{16}{225} \end{pmatrix}$$

$$\int_{2^{i-2}}^{2^i} \int_{2^{j-2}}^{2^j} C(x,y,i,j) \cdot C(x,y,i,j)^T dx dy \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{28}{45} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{5} & -\frac{16}{45} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{45} \\ -\frac{1}{5} & \frac{88}{45} & \frac{1}{5} & -\frac{16}{45} & -\frac{16}{15} & -\frac{16}{45} & \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{30} & \frac{1}{5} & \frac{28}{45} & \frac{1}{9} & -\frac{16}{45} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{45} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{30} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{16}{45} & \frac{1}{9} & \frac{88}{45} & -\frac{16}{15} & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{16}{45} & \frac{1}{9} \\ -\frac{16}{45} & -\frac{16}{15} & -\frac{16}{45} & -\frac{16}{15} & \frac{256}{45} & -\frac{16}{15} & -\frac{16}{45} & -\frac{16}{15} & -\frac{16}{45} \\ \frac{1}{9} & -\frac{16}{45} & -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{16}{15} & \frac{88}{45} & \frac{1}{9} & -\frac{16}{45} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{30} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{45} & -\frac{1}{5} & -\frac{16}{45} & \frac{1}{9} & \frac{28}{45} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{30} \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{16}{45} & -\frac{16}{15} & -\frac{16}{45} & -\frac{1}{5} & \frac{88}{45} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{45} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{9} & -\frac{16}{45} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{5} & \frac{28}{45} \end{pmatrix}$$

$$BX_{AA}(x,y,i,j) = \frac{d}{dx} \left[\left[\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{4j-1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(y - \frac{4i-1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] \right]$$

$$BX_{AB}(x,y,i,j) = \frac{d}{dx} \left[\left[\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{4j-1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] \cdot \left[-(y-2i+1)^2 + 1 \right] \right]$$

$$BX_{AC}(x,y,i,j) = \frac{d}{dx} \left[\left[\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{4j-1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(y - \frac{4i-3}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] \right]$$

$$BX_{BA}(x,y,i,j) = \frac{d}{dx} \left[\left[-(x-2j+1)^2 + 1 \right] \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(y - \frac{4i-1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] \right]$$

$$BX_{BB}(x,y,i,j) = \frac{d}{dx} \left[\left[-(x-2j+1)^2 + 1 \right] \cdot \left[-(y-2i+1)^2 + 1 \right] \right]$$

$$BX_{BC}(x,y,i,j) = \frac{d}{dx} \left[\left[-(x-2j+1)^2 + 1 \right] \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(y - \frac{4i-3}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] \right]$$

$$BX_{CA}(x,y,i,j) = \frac{d}{dx} \left[\left[\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{4j-3}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(y - \frac{4i-1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] \right]$$

$$BX_{CB}(x,y,i,j) = \frac{d}{dx} \left[\left[\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{4j-3}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] \cdot \left[-(y-2i+1)^2 + 1 \right] \right]$$

$$BX_{CC}(x,y,i,j) = \frac{d}{dx} \left[\left[\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{4j-3}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(y - \frac{4i-3}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] \right]$$

$$BY_{AA}(x,y,i,j) := \frac{d}{dy} \left[\left[\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{4j-1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(y - \frac{4i-1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] \right]$$

$$BY_{AB}(x,y,i,j) := \frac{d}{dy} \left[\left[\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{4j-1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] \cdot \left[-(y-2i+1)^2 + 1 \right] \right]$$

$$BY_{AC}(x,y,i,j) := \frac{d}{dy} \left[\left[\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{4j-1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(y - \frac{4i-3}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] \right]$$

$$BY_{BA}(x,y,i,j) := \frac{d}{dy} \left[\left[-(x-2j+1)^2 + 1 \right] \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(y - \frac{4i-1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] \right]$$

$$BY_{BB}(x,y,i,j) := \frac{d}{dy} \left[\left[-(x-2j+1)^2 + 1 \right] \cdot \left[-(y-2i+1)^2 + 1 \right] \right]$$

$$BY_{BC}(x,y,i,j) := \frac{d}{dy} \left[\left[-(x-2j+1)^2 + 1 \right] \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(y - \frac{4i-3}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] \right]$$

$$BY_{CA}(x,y,i,j) := \frac{d}{dy} \left[\left[\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{4j-3}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(y - \frac{4i-1}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] \right]$$

$$BY_{CB}(x,y,i,j) := \frac{d}{dy} \left[\left[\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{4j-3}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] \cdot \left[-(y-2i+1)^2 + 1 \right] \right]$$

$$BY_{CC}(x,y,i,j) := \frac{d}{dy} \left[\left[\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{4j-3}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(y - \frac{4i-3}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \right] \right]$$

$$\begin{aligned} ep(x,y,i,j,\epsilon) := & N_{AA}(x,y,i,j) \cdot \epsilon_{2i-1,2j-1} + N_{BA}(x,y,i,j) \cdot \epsilon_{2i-1,2j} + N_{CA}(x,y,i,j) \cdot \epsilon_{2i-1,2j+1} + \\ & + N_{AB}(x,y,i,j) \cdot \epsilon_{2i,2j-1} + N_{BB}(x,y,i,j) \cdot \epsilon_{2i,2j} + N_{CB}(x,y,i,j) \cdot \epsilon_{2i,2j+1} + N_{AC}(x,y,i,j) \cdot \epsilon_{2i+1,2j-1} \\ & + N_{BC}(x,y,i,j) \cdot \epsilon_{2i+1,2j} + N_{CC}(x,y,i,j) \cdot \epsilon_{2i+1,2j+1} \end{aligned}$$

$$\sigma(x,y,i,j,\epsilon) := \frac{d}{dx} ep(x,y,i,j,\epsilon) + \frac{d}{dy} ep(x,y,i,j,\epsilon)$$

$$C(x,y,i,j) := \begin{pmatrix} BX_{AA}(x,y,i,j) & BY_{AA}(x,y,i,j) \\ BX_{BA}(x,y,i,j) & BY_{BA}(x,y,i,j) \\ BX_{CA}(x,y,i,j) & BY_{CA}(x,y,i,j) \\ BX_{AB}(x,y,i,j) & BY_{AB}(x,y,i,j) \\ BX_{BB}(x,y,i,j) & BY_{BB}(x,y,i,j) \\ BX_{CB}(x,y,i,j) & BY_{CB}(x,y,i,j) \\ BX_{AC}(x,y,i,j) & BY_{AC}(x,y,i,j) \\ BX_{BC}(x,y,i,j) & BY_{BC}(x,y,i,j) \\ BX_{CC}(x,y,i,j) & BY_{CC}(x,y,i,j) \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{aligned} & \frac{\epsilon_{2,i-1,2,j}}{9} - \frac{4\epsilon_{2,i-1,2,j-1}}{15} + \frac{\epsilon_{2,i,2,j-1}}{9} - \frac{\epsilon_{2,i-1,2,j+1}}{90} + \frac{8\epsilon_{2,i,2,j}}{45} - \frac{\epsilon_{2,i+1,2,j-1}}{90} - \frac{\epsilon_{2,i,2,j+1}}{15} - \frac{\epsilon_{2,i+1,2,j}}{15} + \frac{\epsilon_{2,i+1,2,j+1}}{45} \\ & \frac{\epsilon_{2,i-1,2,j+1}}{9} - \frac{8\epsilon_{2,i-1,2,j}}{15} + \frac{11\epsilon_{2,i-1,2,j-1}}{45} - \frac{32\epsilon_{2,i,2,j}}{45} + \frac{\epsilon_{2,i+1,2,j-1}}{45} + \frac{8\epsilon_{2,i,2,j+1}}{45} - \frac{8\epsilon_{2,i+1,2,j}}{45} + \frac{\epsilon_{2,i+1,2,j+1}}{15} \\ & \frac{7\epsilon_{2,i-1,2,j-1}}{90} - \frac{11\epsilon_{2,i-1,2,j}}{45} - \frac{\epsilon_{2,i,2,j-1}}{45} + \frac{11\epsilon_{2,i,2,j+1}}{45} + \frac{\epsilon_{2,i+1,2,j}}{45} - \frac{7\epsilon_{2,i+1,2,j+1}}{90} \\ & \frac{\epsilon_{2,i-1,2,j+1}}{45} - \frac{8\epsilon_{2,i,2,j-1}}{15} - \frac{11\epsilon_{2,i-1,2,j-1}}{45} + \frac{32\epsilon_{2,i,2,j}}{45} + \frac{\epsilon_{2,i+1,2,j-1}}{9} - \frac{8\epsilon_{2,i,2,j+1}}{45} + \frac{8\epsilon_{2,i+1,2,j}}{45} - \frac{\epsilon_{2,i+1,2,j+1}}{15} \\ & \frac{32\epsilon_{2,i,2,j+1}}{45} - \frac{32\epsilon_{2,i-1,2,j}}{45} - \frac{32\epsilon_{2,i,2,j-1}}{45} - \frac{8\epsilon_{2,i-1,2,j-1}}{45} + \frac{32\epsilon_{2,i+1,2,j}}{45} + \frac{8\epsilon_{2,i+1,2,j+1}}{45} \\ & \frac{\epsilon_{2,i-1,2,j-1}}{15} - \frac{8\epsilon_{2,i-1,2,j}}{45} + \frac{8\epsilon_{2,i,2,j-1}}{45} - \frac{\epsilon_{2,i-1,2,j+1}}{9} - \frac{32\epsilon_{2,i,2,j}}{45} - \frac{\epsilon_{2,i+1,2,j-1}}{45} + \frac{8\epsilon_{2,i,2,j+1}}{15} - \frac{11\epsilon_{2,i+1,2,j+1}}{45} \\ & \frac{7\epsilon_{2,i-1,2,j-1}}{90} - \frac{\epsilon_{2,i-1,2,j}}{45} - \frac{11\epsilon_{2,i,2,j-1}}{45} + \frac{\epsilon_{2,i,2,j+1}}{45} + \frac{11\epsilon_{2,i+1,2,j}}{45} - \frac{7\epsilon_{2,i+1,2,j+1}}{90} \\ & \frac{\epsilon_{2,i-1,2,j-1}}{15} + \frac{8\epsilon_{2,i-1,2,j}}{45} - \frac{8\epsilon_{2,i,2,j-1}}{45} - \frac{\epsilon_{2,i-1,2,j+1}}{9} - \frac{32\epsilon_{2,i,2,j}}{45} - \frac{\epsilon_{2,i+1,2,j-1}}{45} + \frac{8\epsilon_{2,i,2,j+1}}{15} - \frac{11\epsilon_{2,i+1,2,j+1}}{45} \\ & \frac{\epsilon_{2,i-1,2,j}}{15} - \frac{\epsilon_{2,i-1,2,j-1}}{45} + \frac{\epsilon_{2,i,2,j-1}}{15} + \frac{\epsilon_{2,i-1,2,j+1}}{90} - \frac{8\epsilon_{2,i,2,j}}{45} + \frac{\epsilon_{2,i+1,2,j-1}}{9} - \frac{\epsilon_{2,i,2,j+1}}{9} - \frac{\epsilon_{2,i+1,2,j}}{9} + \frac{4\epsilon_{2,i+1,2,j+1}}{15} \end{aligned} \right)$$

$$\int_{2i-2}^{2i} \int_{2j-2}^{2j} N(x,y,i,j)^T \sigma(x,y,i,j,\epsilon) dx dy =$$

8 priedas

$$i := 49 \quad j := 49 \quad \text{Matr}_{1,j} := 0 \quad \text{MM}_{1,j} := 0 \quad M_{1,j} := 0 \quad F_{1,j} := 0$$

$\text{Koeff_Sk_Matr1} :=$ $\text{Matr} \leftarrow F$ for $i \in 1..3$ for $j \in 1..3$ $\text{Matr}_{i,j} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j}$ $\text{Matr}_{i,j+7} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j+3}$ $\text{Matr}_{i,j+14} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j+6}$ for $i \in 4..6$ for $j \in 1..3$ $\text{Matr}_{i+4,j} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j}$ $\text{Matr}_{i+4,j+7} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j+3}$ $\text{Matr}_{i+4,j+14} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j+6}$ for $i \in 7..9$ for $j \in 1..3$ $\text{Matr}_{i+8,j} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j}$ $\text{Matr}_{i+8,j+7} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j+3}$ $\text{Matr}_{i+8,j+14} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j+6}$ Matr	$\text{Koeff_Sk_Matr2} :=$ $\text{Matr} \leftarrow F$ for $i \in 1..3$ for $j \in 1..3$ $\text{Matr}_{i+2,j+2} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j}$ $\text{Matr}_{i+2,j+9} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j+3}$ $\text{Matr}_{i+2,j+16} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j+6}$ for $i \in 4..6$ for $j \in 1..3$ $\text{Matr}_{i+6,j+2} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j}$ $\text{Matr}_{i+6,j+9} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j+3}$ $\text{Matr}_{i+6,j+16} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j+6}$ for $i \in 7..9$ for $j \in 1..3$ $\text{Matr}_{i+10,j+2} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j}$ $\text{Matr}_{i+10,j+9} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j+3}$ $\text{Matr}_{i+10,j+16} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j+6}$ Matr	$\text{Koeff_Sk_Matr3} :=$ $\text{Matr} \leftarrow F$ for $i \in 1..3$ for $j \in 1..3$ $\text{Matr}_{i+4,j+4} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j}$ $\text{Matr}_{i+4,j+11} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j+3}$ $\text{Matr}_{i+4,j+18} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j+6}$ for $i \in 4..6$ for $j \in 1..3$ $\text{Matr}_{i+8,j+4} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j}$ $\text{Matr}_{i+8,j+11} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j+3}$ $\text{Matr}_{i+8,j+18} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j+6}$ for $i \in 7..9$ for $j \in 1..3$ $\text{Matr}_{i+12,j+4} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j}$ $\text{Matr}_{i+12,j+11} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j+3}$ $\text{Matr}_{i+12,j+18} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j+6}$ Matr	$\text{Koeff_Sk_Matr4} :=$ $\text{Matr} \leftarrow F$ for $i \in 1..3$ for $j \in 1..3$ $\text{Matr}_{i+4,j+4} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j}$ $\text{Matr}_{i+4,j+11} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j+3}$ $\text{Matr}_{i+4,j+18} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j+6}$ for $i \in 4..6$ for $j \in 1..3$ $\text{Matr}_{i+8,j+4} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j}$ $\text{Matr}_{i+8,j+11} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j+3}$ $\text{Matr}_{i+8,j+18} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j+6}$ for $i \in 7..9$ for $j \in 1..3$ $\text{Matr}_{i+12,j+4} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j}$ $\text{Matr}_{i+12,j+11} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j+3}$ $\text{Matr}_{i+12,j+18} \leftarrow \text{Koeff_Matr}_{i,j+6}$ Matr
---	--	---	---

<pre> Koef_Sk_Matr4 := Matr ← F for i ∈ 1..3 for j ∈ 1..3 Matr_{i+14,j+14} ← Koef_Matr_{1,j} Matr_{i+14,j+21} ← Koef_Matr_{1,j+3} Matr_{i+14,j+28} ← Koef_Matr_{1,j+6} for i ∈ 4..6 for j ∈ 1..3 Matr_{i+18,j+14} ← Koef_Matr_{1,j} Matr_{i+18,j+21} ← Koef_Matr_{1,j+3} Matr_{i+18,j+28} ← Koef_Matr_{1,j+6} for i ∈ 7..9 for j ∈ 1..3 Matr_{i+22,j+14} ← Koef_Matr_{1,j} Matr_{i+22,j+21} ← Koef_Matr_{1,j+3} Matr_{i+22,j+28} ← Koef_Matr_{1,j+6} Matr </pre>	<pre> Koef_Sk_Matr5 := Matr ← F for i ∈ 1..3 for j ∈ 1..3 Matr_{i+16,j+16} ← Koef_Matr_{1,j} Matr_{i+16,j+23} ← Koef_Matr_{1,j+3} Matr_{i+16,j+30} ← Koef_Matr_{1,j+6} for i ∈ 4..6 for j ∈ 1..3 Matr_{i+20,j+16} ← Koef_Matr_{1,j} Matr_{i+20,j+23} ← Koef_Matr_{1,j+3} Matr_{i+20,j+30} ← Koef_Matr_{1,j+6} for i ∈ 7..9 for j ∈ 1..3 Matr_{i+24,j+16} ← Koef_Matr_{1,j} Matr_{i+24,j+23} ← Koef_Matr_{1,j+3} Matr_{i+24,j+30} ← Koef_Matr_{1,j+6} Matr </pre>	<pre> Koef_Sk_Matr6 := Matr ← F for i ∈ 1..3 for j ∈ 1..3 Matr_{i+18,j+18} ← Koef_Matr_{1,j} Matr_{i+18,j+25} ← Koef_Matr_{1,j+3} Matr_{i+18,j+32} ← Koef_Matr_{1,j+6} for i ∈ 4..6 for j ∈ 1..3 Matr_{i+22,j+18} ← Koef_Matr_{1,j} Matr_{i+22,j+25} ← Koef_Matr_{1,j+3} Matr_{i+22,j+32} ← Koef_Matr_{1,j+6} for i ∈ 7..9 for j ∈ 1..3 Matr_{i+26,j+18} ← Koef_Matr_{1,j} Matr_{i+26,j+25} ← Koef_Matr_{1,j+3} Matr_{i+26,j+32} ← Koef_Matr_{1,j+6} Matr </pre>
--	--	--

$\text{Koeff_Sk_Matr} = \text{Koeff_Sk_Matr1} + \text{Koeff_Sk_Matr2} + \text{Koeff_Sk_Matr3} + \text{Koeff_Sk_Matr4} + \text{Koeff_Sk_Matr5} + \text{Koeff_Sk_Matr6} + \text{Koeff_Sk_Matr7} + \text{Koeff_Sk_Matr8} + \text{Koeff_Sk_Matr9}$
 $\text{C_Sk_Matr1} :=$

M $\leftarrow F$ for $i \in 1..3$ for $j \in 1..3$ $M_{i,j} \leftarrow C_Matr_{i,j}$ $M_{i,j+7} \leftarrow C_Matr_{i,j+3}$ $M_{i,j+14} \leftarrow C_Matr_{i,j+6}$ for $i \in 4..6$ for $j \in 1..3$ $M_{i+4,j} \leftarrow C_Matr_{i,j}$ $M_{i+4,j+7} \leftarrow C_Matr_{i,j+3}$ $M_{i+4,j+14} \leftarrow C_Matr_{i,j+6}$ for $i \in 7..9$ for $j \in 1..3$ $M_{i+8,j} \leftarrow C_Matr_{i,j}$ $M_{i+8,j+7} \leftarrow C_Matr_{i,j+3}$ $M_{i+8,j+14} \leftarrow C_Matr_{i,j+6}$	M $\leftarrow F$ for $i \in 1..3$ for $j \in 1..3$ $M_{i+2,j+2} \leftarrow C_Matr_{i,j}$ $M_{i+2,j+9} \leftarrow C_Matr_{i,j+3}$ $M_{i+2,j+16} \leftarrow C_Matr_{i,j+6}$ for $i \in 4..6$ for $j \in 1..3$ $M_{i+6,j+2} \leftarrow C_Matr_{i,j}$ $M_{i+6,j+9} \leftarrow C_Matr_{i,j+3}$ $M_{i+6,j+16} \leftarrow C_Matr_{i,j+6}$ for $i \in 7..9$ for $j \in 1..3$ $M_{i+10,j+2} \leftarrow C_Matr_{i,j}$ $M_{i+10,j+9} \leftarrow C_Matr_{i,j+3}$ $M_{i+10,j+16} \leftarrow C_Matr_{i,j+6}$	M $\leftarrow F$ for $i \in 1..3$ for $j \in 1..3$ $M_{i+4,j+4} \leftarrow C_Matr_{i,j}$ $M_{i+4,j+11} \leftarrow C_Matr_{i,j+3}$ $M_{i+4,j+18} \leftarrow C_Matr_{i,j+6}$ for $i \in 4..6$ for $j \in 1..3$ $M_{i+8,j+4} \leftarrow C_Matr_{i,j}$ $M_{i+8,j+11} \leftarrow C_Matr_{i,j+3}$ $M_{i+8,j+18} \leftarrow C_Matr_{i,j+6}$ for $i \in 7..9$ for $j \in 1..3$ $M_{i+12,j+4} \leftarrow C_Matr_{i,j}$ $M_{i+12,j+11} \leftarrow C_Matr_{i,j+3}$ $M_{i+12,j+18} \leftarrow C_Matr_{i,j+6}$	M
---	--	---	-----

$\text{C_Sk_Matr2} :=$

M $\leftarrow F$ for $i \in 1..3$ for $j \in 1..3$ $M_{i,j} \leftarrow C_Matr_{i,j}$ $M_{i,j+7} \leftarrow C_Matr_{i,j+3}$ $M_{i,j+14} \leftarrow C_Matr_{i,j+6}$ for $i \in 4..6$ for $j \in 1..3$ $M_{i+4,j} \leftarrow C_Matr_{i,j}$ $M_{i+4,j+7} \leftarrow C_Matr_{i,j+3}$ $M_{i+4,j+14} \leftarrow C_Matr_{i,j+6}$ for $i \in 7..9$ for $j \in 1..3$ $M_{i+8,j} \leftarrow C_Matr_{i,j}$ $M_{i+8,j+7} \leftarrow C_Matr_{i,j+3}$ $M_{i+8,j+14} \leftarrow C_Matr_{i,j+6}$	M	M	M
---	-----	-----	-----

$C_Sk_Matr4 :=$ $M \leftarrow F$ $\text{for } i \in 1..3$ $\text{for } j \in 1..3$ $\underline{M_{i+14,j+14} \leftarrow C_Matr_{i,j}}$ $M_{i+14,j+21} \leftarrow C_Matr_{i,j+3}$ $\underline{M_{i+14,j+28} \leftarrow C_Matr_{i,j+6}}$ $\text{for } i \in 4..6$ $\text{for } j \in 1..3$ $\underline{M_{i+18,j+14} \leftarrow C_Matr_{i,j}}$ $M_{i+18,j+21} \leftarrow C_Matr_{i,j+3}$ $\underline{M_{i+18,j+28} \leftarrow C_Matr_{i,j+6}}$ $\text{for } i \in 7..9$ $\text{for } j \in 1..3$ $\underline{M_{i+22,j+14} \leftarrow C_Matr_{i,j}}$ $M_{i+22,j+21} \leftarrow C_Matr_{i,j+3}$ $\underline{M_{i+22,j+28} \leftarrow C_Matr_{i,j+6}}$ M	$C_Sk_Matr5 :=$ $M \leftarrow F$ $\text{for } i \in 1..3$ $\text{for } j \in 1..3$ $\underline{M_{i+16,j+16} \leftarrow C_Matr_{i,j}}$ $M_{i+16,j+23} \leftarrow C_Matr_{i,j+3}$ $\underline{M_{i+16,j+30} \leftarrow C_Matr_{i,j+6}}$ $\text{for } i \in 4..6$ $\text{for } j \in 1..3$ $\underline{M_{i+20,j+16} \leftarrow C_Matr_{i,j}}$ $M_{i+20,j+23} \leftarrow C_Matr_{i,j+3}$ $\underline{M_{i+20,j+30} \leftarrow C_Matr_{i,j+6}}$ $\text{for } i \in 7..9$ $\text{for } j \in 1..3$ $\underline{M_{i+24,j+16} \leftarrow C_Matr_{i,j}}$ $M_{i+24,j+23} \leftarrow C_Matr_{i,j+3}$ $\underline{M_{i+24,j+30} \leftarrow C_Matr_{i,j+6}}$ M	$C_Sk_Matr6 :=$ $M \leftarrow F$ $\text{for } i \in 1..3$ $\text{for } j \in 1..3$ $\underline{M_{i+18,j+18} \leftarrow C_Matr_{i,j}}$ $M_{i+18,j+25} \leftarrow C_Matr_{i,j+3}$ $\underline{M_{i+18,j+32} \leftarrow C_Matr_{i,j+6}}$ $\text{for } i \in 4..6$ $\text{for } j \in 1..3$ $\underline{M_{i+22,j+18} \leftarrow C_Matr_{i,j}}$ $M_{i+22,j+25} \leftarrow C_Matr_{i,j+3}$ $\underline{M_{i+22,j+32} \leftarrow C_Matr_{i,j+6}}$ $\text{for } i \in 7..9$ $\text{for } j \in 1..3$ $\underline{M_{i+26,j+18} \leftarrow C_Matr_{i,j}}$ $M_{i+26,j+25} \leftarrow C_Matr_{i,j+3}$ $\underline{M_{i+26,j+32} \leftarrow C_Matr_{i,j+6}}$ M
---	---	---

```

C_Sk_Matr7 := M ← F
for i ∈ 1..3
  for j ∈ 1..3
    Mi+28,j+28 ← C_Matri,j
    Mi+28,j+35 ← C_Matri,j+3
    Mi+28,j+42 ← C_Matri,j+6
  for i ∈ 4..6
    for j ∈ 1..3
      Mi+32,j+28 ← C_Matri,j
      Mi+32,j+35 ← C_Matri,j+3
      Mi+32,j+42 ← C_Matri,j+6
    for i ∈ 7..9
      for j ∈ 1..3
        Mi+36,j+28 ← C_Matri,j
        Mi+36,j+35 ← C_Matri,j+3
        Mi+36,j+42 ← C_Matri,j+6
      M
C_Sk_Matr8 := M ← F
for i ∈ 1..3
  for j ∈ 1..3
    Mi+30,j+30 ← C_Matri,j
    Mi+30,j+37 ← C_Matri,j+3
    Mi+30,j+44 ← C_Matri,j+6
  for i ∈ 4..6
    for j ∈ 1..3
      Mi+34,j+30 ← C_Matri,j
      Mi+34,j+37 ← C_Matri,j+3
      Mi+34,j+44 ← C_Matri,j+6
    for i ∈ 7..9
      for j ∈ 1..3
        Mi+38,j+30 ← C_Matri,j
        Mi+38,j+37 ← C_Matri,j+3
        Mi+38,j+44 ← C_Matri,j+6
      M
C_Sk_Matr9 := M ← F
for i ∈ 1..3
  for j ∈ 1..3
    Mi+32,j+32 ← C_Matri,j
    Mi+32,j+39 ← C_Matri,j+3
    Mi+32,j+46 ← C_Matri,j+6
  for i ∈ 4..6
    for j ∈ 1..3
      Mi+36,j+32 ← C_Matri,j
      Mi+36,j+39 ← C_Matri,j+3
      Mi+36,j+46 ← C_Matri,j+6
    for i ∈ 7..9
      for j ∈ 1..3
        Mi+40,j+32 ← C_Matri,j
        Mi+40,j+39 ← C_Matri,j+3
        Mi+40,j+46 ← C_Matri,j+6
      M
C_Sk_Matr := C_Sk_Matr1 + C_Sk_Matr2 + C_Sk_Matr3 + C_Sk_Matr4 + C_Sk_Matr5 + C_Sk_Matr6 + C_Sk_Matr7 + C_Sk_Matr8 + C_Sk_Matr9

```

$$Z_i = 0$$

$\text{Eps_Sk_Matr1}(\epsilon) :=$	$\text{MMM} \leftarrow Z$ for $i \in 1..3$ for $j \in 1$ $\text{MMM}_{i,j} \leftarrow \text{Koeff_Epsilon}(\epsilon, 1, 1)_{i,j}$ for $i \in 4..6$ for $j \in 1$ $\text{MMM}_{i+4,j} \leftarrow \text{Koeff_Epsilon}(\epsilon, 1, 1)_{i,j}$ for $i \in 7..9$ for $j \in 1$ $\text{MMM}_{i+8,j} \leftarrow \text{Koeff_Epsilon}(\epsilon, 1, 1)_{i,j}$ MMM	$\text{Eps_Sk_Matr2}(\epsilon) :=$	$\text{MMM} \leftarrow Z$ for $i \in 1..3$ for $j \in 1$ $\text{MMM}_{i+2,j} \leftarrow \text{Koeff_Epsilon}(\epsilon, 1, 2)_{i,j}$ for $i \in 4..6$ for $j \in 1$ $\text{MMM}_{i+6,j} \leftarrow \text{Koeff_Epsilon}(\epsilon, 1, 2)_{i,j}$ for $i \in 7..9$ for $j \in 1$ $\text{MMM}_{i+10,j} \leftarrow \text{Koeff_Epsilon}(\epsilon, 1, 2)_{i,j}$ MMM	$\text{Eps_Sk_Matr3}(\epsilon) :=$	$\text{MMM} \leftarrow Z$ for $i \in 1..3$ for $j \in 1$ $\text{MMM}_{i+4,j} \leftarrow \text{Koeff_Epsilon}(\epsilon, 1, 3)_{i,j}$ for $i \in 4..6$ for $j \in 1$ $\text{MMM}_{i+8,j} \leftarrow \text{Koeff_Epsilon}(\epsilon, 1, 3)_{i,j}$ for $i \in 7..9$ for $j \in 1$ $\text{MMM}_{i+12,j} \leftarrow \text{Koeff_Epsilon}(\epsilon, 1, 3)_{i,j}$ MMM
$\text{Eps_Sk_Matr4}(\epsilon) :=$	$\text{MMM} \leftarrow Z$ for $i \in 1..3$ for $j \in 1$ $\text{MMM}_{i+14,j} \leftarrow \text{Koeff_Epsilon}(\epsilon, 2, 1)_{i,j}$ for $i \in 4..6$ for $j \in 1$ $\text{MMM}_{i+18,j} \leftarrow \text{Koeff_Epsilon}(\epsilon, 2, 1)_{i,j}$ for $i \in 7..9$ for $j \in 1$ $\text{MMM}_{i+22,j} \leftarrow \text{Koeff_Epsilon}(\epsilon, 2, 1)_{i,j}$ MMM	$\text{Eps_Sk_Matr5}(\epsilon) :=$	$\text{MMM} \leftarrow Z$ for $i \in 1..3$ for $j \in 1$ $\text{MMM}_{i+16,j} \leftarrow \text{Koeff_Epsilon}(\epsilon, 2, 2)_{i,j}$ for $i \in 4..6$ for $j \in 1$ $\text{MMM}_{i+20,j} \leftarrow \text{Koeff_Epsilon}(\epsilon, 2, 2)_{i,j}$ for $i \in 7..9$ for $j \in 1$ $\text{MMM}_{i+24,j} \leftarrow \text{Koeff_Epsilon}(\epsilon, 2, 2)_{i,j}$ MMM	$\text{Eps_Sk_Matr6}(\epsilon) :=$	$\text{MMM} \leftarrow Z$ for $i \in 1..3$ for $j \in 1$ $\text{MMM}_{i+18,j} \leftarrow \text{Koeff_Epsilon}(\epsilon, 2, 3)_{i,j}$ for $i \in 4..6$ for $j \in 1$ $\text{MMM}_{i+22,j} \leftarrow \text{Koeff_Epsilon}(\epsilon, 2, 3)_{i,j}$ for $i \in 7..9$ for $j \in 1$ $\text{MMM}_{i+26,j} \leftarrow \text{Koeff_Epsilon}(\epsilon, 2, 3)_{i,j}$ MMM

```

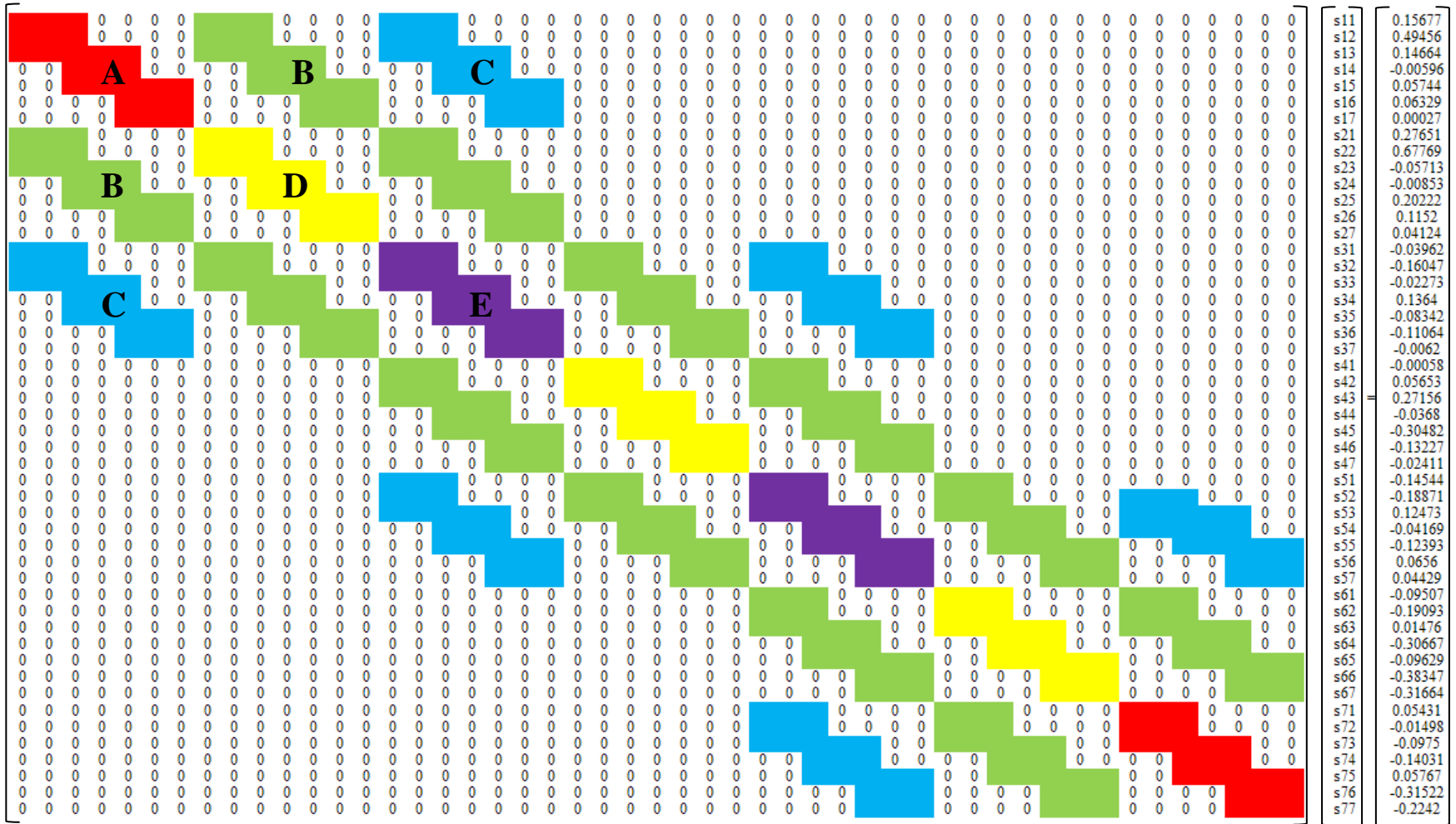
Eps_Sk_Matr7(ε) := MMM ← Z
                    for i ∈ 1..3
                    for j ∈ 1
                      MMi+28,j ← Koef_Epsilon(ε,3,1)i,j
                    for i ∈ 4..6
                    for j ∈ 1
                      MMi+32,j ← Koef_Epsilon(ε,3,1)i,j
                    for i ∈ 7..9
                    for j ∈ 1
                      MMi+36,j ← Koef_Epsilon(ε,3,1)i,j
                    MMM

Eps_Sk_Matr8(ε) := MMM ← Z
                    for i ∈ 1..3
                    for j ∈ 1
                      MMi+30,j ← Koef_Epsilon(ε,3,2)i,j
                    for i ∈ 4..6
                    for j ∈ 1
                      MMi+34,j ← Koef_Epsilon(ε,3,2)i,j
                    for i ∈ 7..9
                    for j ∈ 1
                      MMi+38,j ← Koef_Epsilon(ε,3,2)i,j
                    MMM

Eps_Sk_Matr9(ε) := MMM ← Z
                    for i ∈ 1..3
                    for j ∈ 1
                      MMi+32,j ← Koef_Epsilon(ε,3,3)i,j
                    for i ∈ 4..6
                    for j ∈ 1
                      MMi+36,j ← Koef_Epsilon(ε,3,3)i,j
                    for i ∈ 7..9
                    for j ∈ 1
                      MMi+40,j ← Koef_Epsilon(ε,3,3)i,j
                    MMM

```

$Eps_Sk_Matr(\epsilon) := Eps_Sk_Matr1(\epsilon) + Eps_Sk_Matr2(\epsilon) + Eps_Sk_Matr3(\epsilon) + Eps_Sk_Matr4(\epsilon) + Eps_Sk_Matr5(\epsilon) + Eps_Sk_Matr6(\epsilon) + Eps_Sk_Matr7(\epsilon) + Eps_Sk_Matr8(\epsilon) + Eps_Sk_Matr9(\epsilon)$



(1)

Čia:

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{A} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{16}{225} & \frac{8}{225} & \frac{-4}{225} \\ \hline \frac{8}{225} & \frac{64}{225} & \frac{8}{225} \\ \hline \frac{-4}{225} & \frac{8}{225} & \frac{32}{225} & \frac{8}{225} & \frac{-4}{225} \\ \hline & \frac{8}{225} & \frac{64}{225} & \frac{8}{225} & \\ \hline & \frac{-4}{225} & \frac{8}{225} & \frac{32}{225} & \frac{8}{225} & \frac{-4}{225} \\ \hline & & \frac{8}{225} & \frac{64}{225} & \frac{8}{225} & \\ \hline & & \frac{-4}{225} & \frac{8}{225} & \frac{16}{225} & \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \mathbf{B} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{8}{225} & \frac{4}{225} & \frac{-2}{225} \\ \hline \frac{4}{225} & \frac{32}{225} & \frac{4}{225} \\ \hline \frac{-2}{225} & \frac{4}{225} & \frac{16}{225} & \frac{4}{225} & \frac{-2}{225} \\ \hline & \frac{4}{225} & \frac{32}{225} & \frac{4}{225} & \\ \hline & \frac{-2}{225} & \frac{4}{225} & \frac{16}{225} & \frac{4}{225} & \frac{-2}{225} \\ \hline & & \frac{4}{225} & \frac{32}{225} & \frac{4}{225} & \\ \hline & & \frac{-2}{225} & \frac{4}{225} & \frac{8}{225} & \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \mathbf{C} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{-4}{225} & \frac{-2}{225} & \frac{1}{225} \\ \hline \frac{-2}{225} & \frac{-16}{225} & \frac{-2}{225} \\ \hline \frac{1}{225} & \frac{-2}{225} & \frac{-8}{225} & \frac{-2}{225} & \frac{1}{225} \\ \hline & \frac{-2}{225} & \frac{-16}{225} & \frac{-2}{225} & \\ \hline & \frac{1}{225} & \frac{-2}{225} & \frac{-8}{225} & \frac{-2}{225} & \frac{1}{225} \\ \hline & & \frac{-2}{225} & \frac{-16}{225} & \frac{-2}{225} & \\ \hline & & \frac{1}{225} & \frac{-2}{225} & \frac{-4}{225} & \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \mathbf{D} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{64}{225} & \frac{32}{225} & \frac{-16}{225} \\ \hline \frac{32}{225} & \frac{256}{225} & \frac{32}{225} \\ \hline \frac{-16}{225} & \frac{32}{225} & \frac{128}{225} & \frac{32}{225} & \frac{-16}{225} \\ \hline & \frac{32}{225} & \frac{256}{225} & \frac{32}{225} & \\ \hline & \frac{-16}{225} & \frac{32}{225} & \frac{128}{225} & \frac{32}{225} & \frac{-16}{225} \\ \hline & & \frac{32}{225} & \frac{256}{225} & \frac{32}{225} & \\ \hline & & \frac{-16}{225} & \frac{32}{225} & \frac{64}{225} & \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \mathbf{E} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{32}{225} & \frac{16}{225} & \frac{-8}{225} \\ \hline \frac{16}{225} & \frac{128}{225} & \frac{16}{225} \\ \hline \frac{-8}{225} & \frac{16}{225} & \frac{64}{225} & \frac{16}{225} & \frac{-8}{225} \\ \hline & \frac{16}{225} & \frac{128}{225} & \frac{16}{225} & \\ \hline & \frac{-8}{225} & \frac{16}{225} & \frac{64}{225} & \frac{16}{225} & \frac{-8}{225} \\ \hline & & \frac{16}{225} & \frac{128}{225} & \frac{16}{225} & \\ \hline & & \frac{-8}{225} & \frac{16}{225} & \frac{32}{225} & \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

(2)

9 priedas

$$X(u, v) := u \quad Y(u, v) := v$$

$$\sigma_{11}(u, v) := \sigma(u, v, 1, 1, \epsilon) \quad \sigma_{21}(u, v) := \sigma(u, v, 1, 2, \epsilon) \quad \sigma_{31}(u, v) := \sigma(u, v, 1, 3, \epsilon)$$

$$\sigma_{12}(u, v) := \sigma(u, v, 2, 1, \epsilon) \quad \sigma_{22}(u, v) := \sigma(u, v, 2, 2, \epsilon) \quad \sigma_{32}(u, v) := \sigma(u, v, 2, 3, \epsilon)$$

$$\sigma_{13}(u, v) := \sigma(u, v, 3, 1, \epsilon) \quad \sigma_{23}(u, v) := \sigma(u, v, 3, 2, \epsilon) \quad \sigma_{33}(u, v) := \sigma(u, v, 3, 3, \epsilon)$$

$$s := \text{Koeff_Sk_Matr}^{-1} \cdot \text{Eps_Sk_Matr}(\epsilon)$$

lemda lygi nuliui

$$k = i \quad l = j$$

$$k := 7 \quad l := 7$$

$$P_{k,l} := 0$$

$$\text{MMM}_{k,l} := 0$$

```
S := | MMM ← P
      | for k ∈ 1..7
      |   for l ∈ 1
      |     MMMk,l ← sk,l
      | for k ∈ 8..14
      |   for l ∈ 1
      |     MMMk-7,l+1 ← sk,l
      | for k ∈ 15..21
      |   for l ∈ 1
      |     MMMk-14,l+2 ← sk,l
      | for k ∈ 22..28
      |   for l ∈ 1
      |     MMMk-21,l+3 ← sk,l
      | for k ∈ 29..35
      |   for l ∈ 1
      |     MMMk-28,l+4 ← sk,l
      | for k ∈ 36..42
      |   for l ∈ 1
      |     MMMk-35,l+5 ← sk,l
      | for k ∈ 43..49
      |   for l ∈ 1
      |     MMMk-42,l+6 ← sk,l
      | MMMT
```

$$\begin{aligned}
Ss(x,y,i,j) := & N_{AA}(x,y,i,j) \cdot S_{2,i-1,2,j-1} + N_{BA}(x,y,i,j) \cdot S_{2,i-1,2,j} + N_{CA}(x,y,i,j) \cdot S_{2,i-1,2,j+1} + \\
& + N_{AB}(x,y,i,j) \cdot S_{2,i,2,j-1} + N_{BB}(x,y,i,j) \cdot S_{2,i,2,j} + N_{CB}(x,y,i,j) \cdot S_{2,i,2,j+1} + N_{AC}(x,y,i,j) \cdot S_{2,i+1,2,j-1} + \\
& + N_{BC}(x,y,i,j) \cdot S_{2,i+1,2,j} + N_{CC}(x,y,i,j) \cdot S_{2,i+1,2,j+1}
\end{aligned}$$

$$Ss11(u,v) := Ss(u,v,1,1) \quad Ss21(u,v) := Ss(u,v,1,2) \quad Ss31(u,v) := Ss(u,v,1,3)$$

$$Ss12(u,v) := Ss(u,v,2,1) \quad Ss22(u,v) := Ss(u,v,2,2) \quad Ss32(u,v) := Ss(u,v,2,3)$$

$$Ss13(u,v) := Ss(u,v,3,1) \quad Ss23(u,v) := Ss(u,v,3,2) \quad Ss33(u,v) := Ss(u,v,3,3)$$

Analogiškai skaičiuojame su $\lambda = 0.1; 1; 10; 0.013$.

$$s := (\text{Koeff_Sk_Matr} + \lambda \cdot \text{C_Sk_Matr})^{-1} \cdot \text{Eps_Sk_Matr}(\epsilon)$$

10 priedas

$$\sigma\sigma1 := \frac{\sigma11(2,0) + \sigma21(2,0)}{2} \quad \sigma\sigma2 := \frac{\sigma21(4,0) + \sigma31(4,0)}{2} \quad \sigma\sigma3 := \frac{\sigma11(0,2) + \sigma12(0,2)}{2}$$

$$\sigma\sigma4 := \frac{\sigma11(2,2) + \sigma21(2,2) + \sigma12(2,2) + \sigma22(2,2)}{4} \quad \sigma\sigma5 := \frac{\sigma21(4,2) + \sigma31(4,2) + \sigma22(4,2) + \sigma32(4,2)}{4}$$

$$\sigma\sigma6 := \frac{\sigma31(6,2) + \sigma32(6,2)}{2} \quad \sigma\sigma7 := \frac{\sigma12(0,4) + \sigma13(0,4)}{2}$$

$$\sigma\sigma8 := \frac{\sigma12(2,4) + \sigma22(2,4) + \sigma13(2,4) + \sigma23(2,4)}{4} \quad \sigma\sigma9 := \frac{\sigma22(4,4) + \sigma32(4,4) + \sigma23(4,4) + \sigma33(4,4)}{4}$$

$$\sigma\sigma11 := \frac{\sigma13(2,6) + \sigma23(2,6)}{2} \quad \sigma\sigma10 := \frac{\sigma32(6,4) + \sigma33(6,4)}{2} \quad \sigma\sigma12 := \frac{\sigma23(4,6) + \sigma33(4,6)}{2}$$

$$sz(\text{lemda}) := (\text{Koeff_Sk_Matr} + \text{lemda} \cdot \text{C_Sk_Matr})^{-1} \cdot \text{Eps_Sk_Matr}(\epsilon)$$

$$q := 1..100$$

$$\begin{aligned}
\text{RRR} := & \left[\begin{array}{l} \text{lemda} \leftarrow 0 \\ \text{for } iii \in 1..100 \\ \left[R_{iii} \leftarrow \sqrt{\frac{1}{12} \cdot \left[(\sigma\sigma1 - sz(\text{lemda})_3)^2 + (\sigma\sigma2 - sz(\text{lemda})_5)^2 + (\sigma\sigma3 - sz(\text{lemda})_{15})^2 + \right.} \right. \\ \left. \left. + (\sigma\sigma4 - sz(\text{lemda})_{17})^2 + (\sigma\sigma5 - sz(\text{lemda})_{19})^2 + (\sigma\sigma6 - sz(\text{lemda})_{21})^2 + (\sigma\sigma7 - sz(\text{lemda})_{29})^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + (\sigma\sigma8 - sz(\text{lemda})_{31})^2 + (\sigma\sigma9 - sz(\text{lemda})_{33})^2 + (\sigma\sigma10 - sz(\text{lemda})_{35})^2 + (\sigma\sigma11 - sz(\text{lemda})_{45})^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + (\sigma\sigma12 - sz(\text{lemda})_{47})^2 \right] \right]
\end{array} \right.
\end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{lemda} \leftarrow \frac{\text{iii}}{100} \\ \text{R} \end{array} \right.$$

11 priedas

$$\begin{array}{l} \text{lemdaoptimal} := \left| \begin{array}{l} \text{lemda} \leftarrow 0 \\ \text{R} \leftarrow 10 \\ \text{for } \text{iii} \in 1..1000 \\ \left| \begin{array}{l} \text{R}_{\text{iii}} \leftarrow \sqrt{\frac{1}{12} \left[\left(\sigma\sigma 1 - \text{sz} \left(\frac{\text{iii}}{1000} \right) 3 \right)^2 + \left(\sigma\sigma 2 - \text{sz} \left(\frac{\text{iii}}{1000} \right) 5 \right)^2 + \left(\sigma\sigma 3 - \text{sz} \left(\frac{\text{iii}}{1000} \right) 15 \right)^2 + \right.} \right. \\ \left. \left. + \left(\sigma\sigma 4 - \text{sz} \left(\frac{\text{iii}}{1000} \right) 17 \right)^2 + \left(\sigma\sigma 5 - \text{sz} \left(\frac{\text{iii}}{1000} \right) 19 \right)^2 + \left(\sigma\sigma 6 - \text{sz} \left(\frac{\text{iii}}{1000} \right) 21 \right)^2 + \left(\sigma\sigma 7 - \text{sz} \left(\frac{\text{iii}}{1000} \right) 29 \right)^2 + \right.} \right. \\ \left. \left. + \left(\sigma\sigma 8 - \text{sz} \left(\frac{\text{iii}}{1000} \right) 31 \right)^2 + \left(\sigma\sigma 9 - \text{sz} \left(\frac{\text{iii}}{1000} \right) 33 \right)^2 + \left(\sigma\sigma 10 - \text{sz} \left(\frac{\text{iii}}{1000} \right) 35 \right)^2 + \left(\sigma\sigma 11 - \text{sz} \left(\frac{\text{iii}}{1000} \right) 45 \right)^2 + \right.} \right. \\ \left. \left. + \left(\sigma\sigma 12 - \text{sz} \left(\frac{\text{iii}}{1000} \right) 47 \right)^2 \right] \right. \\ \left| \begin{array}{l} \text{if } \text{R}_{\text{iii}} < \text{R} \\ \left| \begin{array}{l} \text{R} \leftarrow \text{R}_{\text{iii}} \\ \text{lemda} \leftarrow \frac{\text{iii}}{1000} \end{array} \right. \\ \text{lemda} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$