KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS
TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

Airė Lesauskytė

KONVERGAVIMO GREITIS EKSTREMALIŲJŲ REIKŠMIŲ LOKALINĖSE TANKIŲ TEOREMOSE

Magistro darbas

Vadovas
doc. dr. A. Jokimaitis

KAUNAS, 2004

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

FUNDAMENTALIŲJŲ MOKSLŲ FAKULTETAS

TAIKOMOSIOS MATEMATIKOS KATEDRA

TVIRTINU
Katedros vedėjas
prof. dr. J.Rimas

KONVERGAVIMO GREITIS EKSTREMALIŲJŲ REIKŠMIŲ LOKALINĖSE TANKIŲ TEOREMOSE

Taikomosios matematikos magistro baigiamasis darbas

Kalbos konsultantas
dr. J.Džežulskienė
2004 05 30

Vadovas
doc. dr. A. Jokimaitis
2004 06 03

Recenzentas
doc.dr. K.Padvelskis
2004 06 01

Atliko
FMMM-2 gr. stud.
A. Lesauskytė
2004 05 27

KAUNAS, 2004

KVALIFIKACINĖ KOMISIJA

Pirmininkas:	Leonas Saulis, profesorius (VGTU)
Sekretorius:	Eimutis Valakevičius, docentas (KTU)
Nariai:	Algimantas Jonas Aksomaitis, profesorius (KTU)
	Vytautas Janilionis, docentas (KTU)
	Vidmantas Povilas Pekarskas, profesorius (KTU)
	Rimantas Rudzkis, profesorius (MII)
	Zenonas Navickas, profesorius (KTU)

Lesauskytė A. Convergence rates of extreme values in local theorems of densities : Master‘s work in applied mathematics / supervisor doc. dr. A. Jokimaitis; Department of Applied mathematics, Faculty of Fundamental Sciences, Kaunas University of Technology. – Kaunas, 2004. – 43 p.

SUMMARY

Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sequence of independent random variables and has probability distribution function and density function

$$F(x) = P\left(X_j < x\right), \quad \forall j \geq 1, \quad p(x) \geq 0 .$$

Lets note

$$Z_n = \max\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right),$$
$$W_n = \min\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$$

maximum and minimum values of the string.

Let $u_n = u_n(x)$ - functions string of real variable, so density string

$$H_n(u_n(x)) = P(Z_n < u_n(x))$$

weakly convergate to nonuniform distribution function $H(x)$. In this way defined structure Z_n together with presumption about string of random variables $\{X_n, n \geq 1\}$ and string of their functions $\{u_n, n \geq 1\}$ generate schema of maximums.

Analogical we will define the schema of minimums. Let $v_n = v_n(x)$ - functions string of real variable, so density string

$$L_n(v_n(x)) = P(W_n < v_n(x))$$

weakly convergate to nonuniform distribution function $L(x)$. In this way defined structure W_n together with presumption about string of random variables $\{X_n, n \geq 1\}$ and string of their functions $\{v_n, n \geq 1\}$ generate schema of minimums.

If random variables $\{X_n, n \geq 1\}$ are independent and equally distributed with distribution function $F(x)$ and constance of normalization are

$$u_n(x) = a_n + b_n x, \quad a_n \in \Re, \quad b_n > 0,$$
$$v_n(x) = c_n + d_n x, \quad c_n \in \Re, \quad d_n > 0,$$

then such scheme of extreme values is called classical scheme of (maximums or minimums).

In this work we research convergence rates of densities of independent random extreme values. Using [4] and [2] work results, we will get nonuniform estimate of convergence rates in local theorem of extreme values of independent random variables exploring different distribution functions. [4], [2] work results we will generalize exploring nonuniform normalized extreme values convergence.

TURINYS

PAVEIKSLŲ SĄRAŠAS

ĮŽANGA

Ekstremaliųjų reikšmių teorijos aktualumas ir svarba. Iš pradžių pateiksime keletą pavyzdžių, kuriuose ekstremalios reikšmės (maksimumai arba minimumai) vaidina svarbų vaidmenį.

Stichiniai gamtos reiškiniai. Potvyniai, liūtys, ekstremalios temperatūros, uraganai gali padaryti nuostolių įvairiems statiniams (bokštams, užtvankoms, gyvenamiesiems namams ir pan.). Aišku, tokių stichinių nelaimių negalima išvengti, tačiau, projektuojant šiuos statinius bei parenkant jiems statybines medžiagas, galima ir reikia atsižvelgti į minėtų stichinių nelaimių galimybę, kas padėtų sumažinti jų padarinius. Šių problemų inžineriams sprendimui reikalinga pakankamai tiksli teorija, kuri leistų atsižvelgti į galimų ekstremalių gamtos reiškinių poveikį.

Sistemų patikimumo problema. Sakysime, sistema nustoja veikusi, jeigu sugenda bent vienas iš jos elementų. Šiuo atveju mažiausiai patikimas sistemos elementas turi lemiamos įtakos visos sistemos funkcionavimui.

Korozija. Paprastai laikoma, kad metalinė danga su dideliu korozinių dėmių skaičiumi yra pažeista korozijos, jeigu kurioje nors iš šių dėmių korozija apima visą dangos storį. Korozijos dėmių gylis yra atsitiktinis ir jis kinta laikui einant, priklausomai nuo aplinkos paveikio. Šiuo atveju lemiamą įtaką turi maksimali korozijos defekto gylio reikšmė.

Atmosferos užterštumas. Atmosferos užterštumas išreiškiamas procentiniu teršalų kiekiu atmosferoje (koncentracija). Šių teršalų koncentracija nuolat matuojama. Svarbu, kad maksimali koncentracijos reikšmė neviršytų nustatytos normos.

Atsparumas trūkiams. Kaip rodo eksperimentai, nėra absoliučiai vienalyčių medžiagų. Todėl ir atsparumas traukimui taip pat gali būti nevienodas, net jei medžiagos pagamintos, taikant tą patį technologinį procesą. Šį faktą galima paaiškinti tuo, kad kiekviename taške (arba mažoje srityje) medžiagos atsparumas yra atsitiktinis dydis. Todėl medžiagos atsparumą traukimui lemia minimalų atsparumą turintis taškas („grandinė trūksta silpniausioje vietoje”).

Šie pateikti pavyzdžiai toli gražu neišsemia visų atvejų, kuomet gali būti taikoma ekstremaliųjų reikšmių teorija, tačiau ir jų pakanka parodyti, kokia plati gali būti šios teorijos taikymo sritis. Tačiau ne vien tik taikomojo pobūdžio uždaviniais turtinga ektremaliųjų reikšmių teorija, joje gausu ir įdomių teorinių problemų.

Ekstremaliųjų reikšmių tankių konvergavimas pradėtas tirti [5] darbe. Šios problemos tyrimas buvo pratęstas [3] darbe. T.J. Swerting'o darbe [6] buvo įrodytos ekstremaliųjų reikšmių lokalinės tankių teoremos ir suformuluotos būtinos ir pakankamos sąlygos, kad ekstremaliųjų reikšmių tankių skirstiniai konverguotų į ribinių skirstinių tankius.

Konvergavimo greičio tyrimas lokalinėje maksimumo tankio teoremoje pirmiausiai buvo pradėtas tirti [7] darbe. Vėliau [2] buvo gautas netolygusis konvergavimo greičio įvertis lokalinėje maksimumo tankio teoremoje. [4] darbe gautas netolygusis konvergavimo greičio įvertis lokalinėje minimumo tankio teoremoje. [8] buvo tirtas konvergavimo greitis daugiamačių maksimumų lokalinėje tankio teoremoje.

Šiame darbe tirsime nepriklausomų atsitiktinių dydžių ekstremaliųjų reikšmių tankių konvergavimo greitį.

Taikydami [4], [2] darbų rezultatus, konkrečių skirstinių atveju gausime netolygiuosius konvergavimo greičio įverčius lokalinėse ekstremaliųjų reikšmių tankių teoremose. [4], [2] darbų rezultatus apibendrinsime, tirdami netiesiškai normuotų ekstremaliųjų reikšmių tankius.

Magistro darbo tema yra padarytas pranešimas mokslo konferencijoje „Matematika ir matematikos dėstymas”. Pranešimo medžiaga paskelbta [9] darbe.

1. BENDROJI DALIS

1.1. EKSTREMALIŲJŲ REIKŠMIŲ SCHEMOS SĄVOKA

Sakykime, kad $X_1, X_2, \ldots, X_n$ - atsitiktinių dydžių (a.d) seka. Sudarykime n pirmųjų sekos narių variacinę eilutę

$$X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \ldots \leq X_{n:n}.$$

Fiksuokime $k \in \mathrm{N}$. Kai $n \to \infty$, a.d. $X_{k:n}$ ir $X_{n-k+1:n}$ vadinsime k-osiomis ekstremaliosiomis reikšmėmis. Didžiausią ir mažiausią variacinės eilutės narius pažymėsime

$$Z_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n),$$

$$W_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

A.d. Z_n ir W_n vadinsime ekstremaliosiomis reikšmėmis arba tiesiog maksimumu ir minimumu.

Tarkime, $u_n = u_n(x)$ - tokia realaus kintamojo fukcijų seka, kad pasiskirstymo funkcijų seka

$$H_n(u_n(x)) = P(Z_n < u_n(x))$$

silpnai konverguoja į neišsigimusią pasiskirstymo funkciją $H(x)$. Taip apibrėžta struktūra Z_n kartu su prielaidomis apie a.d. seką $\{X_n, n \geq 1\}$ bei jų funkcijų seka $\{u_n, n \geq 1\}$ sudaro maksimumų schemą.

Analogiškai apibrėšime minimumų schemą. Tarkime $v_n = v_n(x)$ - tokia realaus kintamojo funkcijų seka, kad pasiskirstymo funkcijų seka

$$L_n(v_n(x)) = P(W_n < v_n(x))$$

silpnai konverguoja į neišsigimusią pasiskirstymo funkciją $L(x)$. Struktūra W_n kartu su prielaidomis apie a.d. seką $\{X_n, n \geq 1\}$ ir funkcijų seką $\{v_n, n \geq 1\}$ sudaro minimumų schemą.

Jei a.d. $\{X_n, n \geq 1\}$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę su pasiskirstymo funkcija $F(x)$, o normavimo funkcijos u_n ir v_n tiesinės, t.y.

$$u_n(x) = a_n + b_n x, \quad a_n \in \Re, \quad b_n > 0,$$

$$v_n(x) = c_n + d_n x, \quad c_n \in \Re, \quad d_n > 0,$$

tai tokia ekstremaliųjų reikšmių (maksimumų arba minimumų) schema vadinama klasikine.

Galimi įvairūs klasikinės ekstremaliųjų reikšmių schemos apibendrinimai. Pavyzdžiui, vietoje maksimumo ar minimumo galime imti k-asias ekstremialiasias reikšmes; galima nagrinėti a.d. serijų sekų ekstremalias reikšmes; a.d. $\{X_n, n \geq 1\}$ gali būti nevienodai pasiskirstę arba priklausomi; normavimo funkcijos u_n ir v_n gali būti netiesinės; a.d. $\{X_n, n \geq 1\}$ gali būti daugiamačiai; variacinės eilutės ilgis gali būti ne fiksuotas, o atsitiktinis (šią problemą nagrinėja taip vadinamos perkėlimo teoremos); pagaliau, galima nagrinėti ne atsitiktinių dydžių, o atsitiktinių procesų ar atsitiktinių laukų ekstremalias reikšmes.

1.2. RIBINIAI EKSTREMALIŲJŲ REIKŠMIŲ SKIRSTINIAI

Suformuluosime keletą fundamentalių vienmačių ekstremaliųjų reikšmių teorijos rezultatų, kuriuose yra gauti nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių tiesiškai normuotų ekstremaliųjų reikšmių ribiniai skirstiniai ir pateikiami centravimo ir normavimo konstantų parinkimo budai.

Sakykime, $\{X_n, n \geq 1\}$ - nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių a.d. seka. Tarkime,

$$F(x) = P(X_j < x), \qquad \forall j \geq 1.$$

Pažymėkime

$$Z_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Tarkime, kad egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantų sekos $\{a_n, n \geq 1\}$ ir $\{b_n > 0, n \geq 1\}$, kad

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n < a_n + b_n x) = H(x) \qquad \textbf{(1.1)}$$

kiekviename funkcijos $H(x)$ tolydumo taške (čia $H(x)$ - neišsigimusi pasiskirstymo funkcija). Tokį konvergavimą vadinsime silpnuoju pasiskirstymo funkcijų arba a.d. konvergavimu.

Sakysime, kad skirstinys F priklauso ribinio skirstinio H traukos sričiai (žymėsime $F \in D(H)$), jei egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantų sekos, kad tenkinama lygybė (1.1).

Pažymėkime

$$W_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Tarkime, kad egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantų sekos $\{c_n, n \geq 1\}$ ir $\{d_n > 0, n \geq 1\}$, kad

$$\lim_{n\to\infty} P(W_n < c_n + d_n x) = L(x) \qquad \textbf{(1.2)}$$

kiekviename funkcijos $L(x)$ tolydumo taške (čia $L(x)$ - neišsigimusi pasiskirstymo funkcija). Tokį konvergavimą vadinsime silpnuoju pasiskirstymo funkcijų arba atsitiktinių dydžių konvergavimu.

Sakysime, kad skirstinys F priklauso ribinio skirstinio L traukos sričiai (žymėsime $F \in D(L)$), jei egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantų sekos, kad tenkinama lygybė (1.2).

Pažymėkime

$$a(F) = \inf\{x : F(x) > 0\},$$

$$\omega(F) = \sup\{x : F(x) < 1\}.$$

Suformuluosime sąlygas, kurias turi tenkinti skirstinys F, kad jis priklausytų kurio nors neišsigimusio ribinio skirstinio traukos sričiai. Taip pat pateiksime konstantų parinkimo būdą.

1.1. Teorema. Tarkime, $\omega(F) = \infty$, ir egzistuoja tokia teigiama konstanta α, kad

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1-F(tx)}{1-F(t)} = x^{-\alpha} \tag{1.3}$$

visiems $x > 0$. Tuomet $F \in D(H_{1,\alpha})$. Čia

$$H_{1,\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0. \end{cases}$$

Normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$b_n = \inf\{x : 1 - F(x) \le 1/n\},$$

o $a_n = 0$.

1.2. Teorema. Tarkime $\omega(F) < \infty$, o pasiskirstymo funkcija

$$F^*(x) = F(\omega(F) - 1/x)$$

tenkina sąlygą (1.2). Tuomet $F \in D(H_{2,\alpha})$. Čia

$$H_{2,\alpha}(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^{\alpha}), & x < 0, \\ 1, & x \ge 0. \end{cases}$$

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$a_n = \omega(F),$$

$$b_n = \omega(F) - \inf\{x : 1 - F(x) \le 1/n\}.$$

1.3. Teorema. Tarkime, su bet kokia baigtine konstanta α integralas

$$\int_{\alpha}^{\omega(F)} (1 - F(y))dy \tag{1.4}$$

yra baigtinis. Intervale $(\alpha(F), \omega(F))$ apibrėžkime funkciją

$$R(t) = \frac{1}{1-F(t)}\int_{t}^{\omega(F)} (1 - F(y))dy.$$

Jei visiems realiems x egzistuoja riba

$$\lim_{t\to\omega(F)}\frac{1-F(t+xR(t))}{1-F(t)} = e^{-x}, \tag{1.5}$$

tai $F \in D(H_{3,0})$. Čia

$$H_{3,0}(x) = \{\exp(-e^{-x}), \quad x \in \Re.$$

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$a_n = \inf\{x : 1 - F(x) \le 1/n\},$$

$$b_n = R(a_n)\,.$$

1.1. Pastaba. Šiose teoremose pateiktas centravimo ir normavimo konstantų a_n ir b_n parinkimo būdas nėra vienintelis. Mes net negalime teigti, kad tai yra pats paprasčiausias konstantų parinkimo būdas, ir kad taip parinktos konstantos yra geriausios, tačiau jis yra geras tuo, kad yra paprastas ir konstruktyvus.

1.4. Teorema. Klasikinėje maksimumų schemoje egzistuoja tik trys $(H_{1,\alpha}, H_{2,\alpha}, H_{3,0})$ neišsigimusio ribinio skirstinio tipai.

1.5. Teorema. Tarkime, turime klasikinę maksimumų schemą.

1) $F \in D(H_{1,\alpha})$ tada ir tik tada, kai $\omega(F) = \infty$ ir tenkinama sąlyga (1.3);

2) $F \in D(H_{2,\alpha})$ tada ir tik tada, kai $\omega(F) < \infty$ ir funkcija

$$F^*(x) = F(\omega(F) - 1/x),\ (x > 0)$$

tenkina sąlygą (1.3);

3) $F \in D(H_{3,0})$ tada ir tik tada, kai integralas (1.3) yra baigtinis, ir tenkinama sąlyga (1.4).

1.6. Teorema. Tarkime, $\alpha(F) = -\infty$, ir egzistuoja tokia teigiama konstanta γ, kad

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{F(tx)}{F(t)} = x^{-\gamma} \tag{1.6}$$

visiems $x > 0$. Tuomet $F \in D(L_{1,\gamma})$. Čia

$$L_{1,\gamma}(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-(-x)^{-\gamma}), & x < 0, \\ 1, & x \ge 0. \end{cases}$$

Normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$d_n = \sup\{x : F(x) \le 1/n\},$$

$$\text{o } c_n = 0\,.$$

1.7. Teorema. Tarkime $\alpha(F)$ yra baigtinis, o pasiskirstymo funkcija

$$F^*(x) = F(\alpha(F) - 1/x),\ x < 0$$

tenkina sąlygą (1.6). Tuomet $F \in D(L_{2,\gamma})$. Čia

$$L_{2,\gamma}(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-x^{\gamma}), & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$a_n = \alpha(F),$$

$$d_n = \sup\{x : F(x) \le 1/n\} - \alpha(F).$$

1.8. Teorema. Tarkime, su bet kokia baigtine konstanta α integralas

$$\int_{\alpha(F)}^{\alpha} F(y)dy \tag{1.7}$$

yra baigtinis. Apibrėžkime funkciją

$$r(t) = \frac{1}{F(t)} \int_{\alpha(F)}^{t} F(y)dy,$$

čia $t > \alpha(F)$.

Jei visiems realiems x egzistuoja riba

$$\lim_{t \to \alpha(F)} \frac{F(t + xr(t))}{F(t)} = e^x, \tag{1.8}$$

tai $F \in D(L_{3,\gamma})$. Čia

$$L_{3,0}(x) = 1 - \exp(-e^x), \qquad (-\infty < x < \infty).$$

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

$$c_n = \sup\{x : F(x) \le 1/n\},$$

$$d_n = r(c_n).$$

1.9. Teorema. Klasikinėje minimumų schemoje egzistuoja tik trys $(L_{1,\gamma}, L_{2,\gamma}, L_{3,\gamma})$ neišsigimusio ribinio skirstinio tipai.

1.10. Teorema. Tarkime, turime klasikinę minimumų schemą.

1) $F \in D(L_{1,\gamma})$ tada ir tik tada, kai $\alpha(F) = -\infty$ ir tenkinama sąlyga (1.6);

2) $F \in D(L_{2,\gamma})$ tada ir tik tada, kai $\alpha(F) > \infty$ ir funkcija

$$F^*(x) = F(\alpha(F) - 1/x), \ (x < 0)$$

tenkina sąlygą (1.6);

3) $F \in D(L_{3,0})$ tada ir tik tada, kai integralas (1.7) yra baigtinis, ir tenkinama sąlyga (1.8).

1.1-1.10 teoremos įrodytos [1] darbe.

1.3. EKSTREMALIŲJŲ REIKŠMIŲ LOKALINĖS TANKIŲ TEOREMOS

Sakykime $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ - nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su pasiskirstymo funkciją $F(x) = P(X_j < x)$ ir tankio funkcija $p(x)$.

Pažymėkime

$$Z_n = \max(X_1, \ldots, X_{n+1}).$$

Tarkime, kad skirstinys $F(x)$ toks, jog galima parinkti tokias centravimo ir normavimo konstantų sekas $\{a_n, n \geq 1\}$, $\{b_n > 0, \quad n \geq 1\}$, jog $F(x)$ priklauso neišsigimusio ribinio skirstinio $H(x)$ traukos sričiai.

$$\lim_{n \to \infty} P(Z_n < a_n + b_n x) = H(x)$$

Yra žinoma, kad ribinis skirstinys $H(x)$ gali būti trijų tipų:

$$H_{1,\alpha}(x) = \left\{ \begin{matrix} 0, & x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0, \alpha > 0 \end{matrix} \right\},$$

$$H_{2,\alpha}(x) = \left\{ \begin{matrix} \exp(-(-x)^{\alpha}), & x \leq 0, \alpha > 0 \\ 1, \quad x > 0 & \end{matrix} \right\},$$

$$H_{3,0}(x) = \{\exp(-e^{-x}), \quad x \in \Re\}.$$

Kai atsitiktinis dydis X_j turi tankį $p(x)$, tai:

$$p_{Z_n}(x) = (n+1) b_n p(a_n + b_n x) F^n(a_n + b_n x),$$

čia $p_{Z_n}(x)$ - tiesiškai normuoto maksimumo $(Z_n - a_n)/b_n$ tankio funkcija.

Suformuluosime salygas, kurias turi tenkinti skirstinys $F(x)$, kad iš (1.1) sąryšio išplauktų

$$\lim_{n \to \infty} p_{Z_n}(x) = H'(x) \qquad \textbf{(1.9)}$$

1.11. Teorema. Tegul F pasiskirstymo funkcija turi $p(x)$ pasiskirstymo tankį. Jeigu $F \in D(H)$ ir

a) $H = H_{1,\alpha}$, tai (1.9) sąryšis bus teisingas intervale $(0, \infty)$ tada ir tik tada, kai tankio funkcija $p(x)$ yra teigiama, su pakankamai dideliais x, ir su $\alpha > 0$ tenkinama sąlyga

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x p(x)}{1 - F(x)} = \alpha;$$

b) $H = H_{2,\alpha}$, tai (1.9) sąryšis bus teisingas intervale $(0, \infty)$ tada ir tik tada, kai tankio funkcija $p(x)$ yra teigiama, ir su $\alpha > 0$ tenkinama sąlyga

$$\lim_{x \uparrow w(F)} \frac{\left(w(F) - x\right)p(x)}{1 - F(x)} = \alpha ,$$

čia $w(x) = \sup\{x : F(x) < 1\}$;

c) $H = H_{3,0}$, tai (1.9) sąryšis bus teisingas su visais x tada ir tik tada, kai tenkinama sąlyga

$$\lim_{x \to w(F)} \frac{d}{dx}\left(\frac{1 - F(x)}{p(x)}\right) = 0 .$$

Iš (1.9) sąryšio gausime konvergavimo greičio įvertį. Šios sąlygos dar yra vadinamos Mizeso sąlygomis. Jos suformuluotos ir įrodytos [3] darbe.

1.4. KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERČIAI EKSTREMALIŲJŲ REIKŠMIŲ LOKALINĖSE TANKIŲ TEOREMOSE

Tarkime, tenkinama (1.9) sąlyga.

Pažymėkime

$$u_n(x) = n\left(1 - F(c_n + d_n x)\right)$$

$$v_n(x) = u_n(x) + \log H(x)$$

tokiems x, kurie tenkina $H(x) > 0$.

1.12. Teorema. Tarkime, tenkinamos (1.1) ir (1.9) lygybės ir tankio funkcija $p(x)$ yra apribota. Visiems x, kurie tenkina

$$\frac{u_n(x)}{n} \le \frac{1}{2},\ H(x) > 0 ,$$

teisingas įvertis

$$\left|\ p_{Z_n}(x) - H'(x)\ \right| \le (n+1) b_n p(a_n + b_n x) \Delta_n(x) + R_{3,n}(x) ,$$

čia

$$\Delta_n(x) = H(x)(R_1(x) + R_2(x) + R_1(x) R_2(x)) ,$$

$$R_{1,n}(x) = \frac{2u_n^2(x)}{n} + \frac{2u_n^4(x)}{n^2} * \frac{1}{1-q} ,$$

$$R_{2,n}(x) = \left|v_n(x)\right| + \frac{v_n^2(x)}{2} * \frac{1}{1-s} ,$$

o $q < 1$, $s < 1$, tokie, kad

$$\frac{2u_n^2(x)}{3n} < q\,,\ \frac{|v_n(x)|}{3} \le s\,,$$

$$R_{3,n}(x) = H(x)\Big|\ (n+1)b_n p\ \ (a_n + b_n x) - \log' H(x)\ \Big|.$$

1.2. Pastaba. Dydis $\Delta_n(x)$ yra netolygus (1.1) sąryšio konvergavimo greičio įvertis. Dydis $R_{3,n}(x) \to 0,\quad kai\quad n \to \infty$. Taip pat pastebėsime, kad dydis $R_{3,n}(x) \to 0$ priklauso ne tik nuo n, bet ir nuo a_n, b_n konstantų parinkimo, tankio funkcijos $p(x)$ ir nuo ribinio skirstinio $H(x)$.

1.12 teorema įrodyta [2] darbe.

Pažymėkime

$$W_n = \min\left(X_1, \ldots, X_{n+1}\right).$$

Tarkime, kad skirstinys $F(x)$ toks, jog galima parinkti tokias centravimo ir normavimo konstantų sekas $\{c_n, n \ge 1\}$ ir $\{d_n > 0, n \ge 1\}$, kad $F(x)$ priklauso neišsigimusio ribinio skirstinio $L(x)$ traukos sričiai

$$\lim_{n\to\infty} P(W_n < c_n + d_n x) = L(x).$$

Be to, dar tarkime, kad skirstinio funkcija $F(x)$ yra tokia, jog

$$\lim_{n\to\infty} p_{W_n}(x) = L'(x), \tag{1.10}$$

čia $p_{W_n}(x) = (n+1)d_n p(c_n + d_n x)(1 - F(c_n + d_n x))^n$ - tiesiškai normuoto minimumo $(W_n - c_n)/d_n$ tankio funkcija.

Pažymėkime

$$\tau_n(x) = nF(c_n + d_n x),$$

$$\omega_n(x) = u_n(x) + \log(1 - L(x)),$$

tokiems x, kurie tenkina $L(x) > 0$.

1.13. Teorema. Tarkime, tenkinamos (1.2) ir (1.10) lygybės ir tankio funkcija $p(x)$ yra apribota. Visiems x, kurie tenkina

$$|v_n(x)| \le \log 2\,,\ L(x) > 0\,,$$

teisingas įvertis

$$\left|p_{W_n}(x) - L'(x)\right| \le (n+1)d_n p(c_n + d_n x)\Delta_n(x) + (1 - L(x))\left|(n+1)d_n p(c_n + d_n x) - \log'(1 - L(x))\right|,$$

čia

$$\Delta_n(x) = \frac{u_n^2(x)e^{-u_n(x)}}{2(n-1)} + (1 - L(x))\left(|v_n(x)| + \theta v_n^2(x)\right),\ 0 < \theta < 1.$$

1.13 teorema įrodyta [4] darbe.

2. TIRIAMOJI DALIS

Šiame skyrelyje, taikydami bendrojoje dalyje pateiktus rezultatus, tirsime maksimumo tankio konvergavimo greitį kai kurių skirstinių atveju.

2.1. MAKSIMUMO TANKIO KONVERGAVIMO GREIČIO TYRIMAS

2.1.1. PARETO ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMO TANKIO KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTIS

Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ turi Pareto skirstinį, t.y.

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta}, \; x > \alpha > 0, \;\; \beta > 0,$$

$$p(x) = \frac{\alpha^{\beta}\beta}{x^{\beta+1}}.$$

Rasime Pareto maksimumo skirstinį. Kadangi $\varpi(F) = +\infty$, tai galima taikyti 1.1 arba 1.3 teoremas. Tikriname 1.1 teoremos sąlygą

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{1-F(tx)}{1-F(t)} = \lim_{t\to-\infty}\frac{1-1+\left(\frac{\alpha}{tx}\right)^{\beta}}{1-1+\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\beta}} = \lim_{t\to-\infty}\frac{\left(\frac{\alpha}{tx}\right)^{\beta}}{\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\beta}} = \lim_{t\to-\infty}\left(\frac{t}{tx}\right)^{\beta} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta} = x^{-\beta}.$$

Kadangi teoremos sąlyga tenkinama, tai $F \in D\left(H_{1.\beta}\right)$;

čia

$$H_{1,\beta}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \exp(-x^{-\beta}), & x > 0. \end{cases}$$

Centravimo ir normavimo konstantas parenkame tokiu būdu:

$a_n = 0$, o iš sąlygų $b_n = \inf\left\{x : 1 - F(x) \le \frac{1}{n}\right\}$ gauname, kad $b_n = \alpha\sqrt[\beta]{n}$.

Toliau tikriname, ar Pareto skirstinys tenkina Mizeso sąlygas, t.y. (1.9) sąlygą.

Kadangi $H = H_{1,\beta}$, tai tikriname šią sąlygą:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xp(x)}{1-F(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\alpha^{\beta}\beta x^{\beta}}{x^{\beta+1}\alpha^{\beta}} = \beta.$$

Kadangi sąlyga tenkinama, tai

$$\lim_{n\to+\infty} p_{Z_n}(x) = H'(x) = \frac{\beta}{x^{\beta+1}} e^{-x^{-\beta}} . \qquad \textbf{(2.1)}$$

Taikydami 1.12 teoremą, gausime netolygųjį konvergavimo greičio įvertį (2.1) lygybėje. Gauname

$$u_n(x) = n(1 - F(a_n + b_n x)) = n\left(1 - 1 + \left(\frac{\alpha}{\alpha\sqrt[\beta]{nx}}\right)^{\beta}\right) = \frac{n}{nx^{\beta}} = \frac{1}{x^{\beta}} ,$$

$$v_n(x) = u_n(x) + \log H(x) = \frac{1}{x^{\beta}} + \log\left(e^{-x^{-\beta}}\right) = \frac{1}{x^{\beta}} - x^{-\beta} = 0 ,$$

$$R_{1,n}(x) = \frac{2u_n^2(x)}{n} + \frac{2u_n^4(x)}{n^2} * \frac{1}{1-q} = \frac{2}{nx^{2\beta}} + \frac{2}{n^2 x^{4\beta}} * \frac{1}{1-q} ,$$

$$R_{2,n}(x) = 0 ,$$

$$\Delta_n(x) = H(x)(R_1(x) + R_2(x) + R_1(x)R_2(x)) = \exp(-x^{-\beta})\left(\frac{2}{nx^{2\beta}} + \frac{2}{n^2 x^{4\beta}} * \frac{1}{1-q}\right),$$

$$R_{3,n}(x) = H(x)\left|\ (n+1)b_n p\ (a_n + b_n x) - \log' H(x)\ \right| = e^{-x^{-\beta}}\left|\frac{(n+1)\beta}{nx^{\beta+1}} - \frac{\beta}{x^{\beta+1}}\right| = e^{-x^{-\beta}}\frac{\beta}{x^{\beta+1}}\frac{1}{n} .$$

Galutinai gauname:

$$\left|p_{Z_n}(x) - H'(x)\right| = \left|p_{Z_n}(x) - \frac{\beta}{x^{\beta+1}} e^{-x^{-\beta}}\right| \le \frac{1}{n} e^{-x^{-\beta}} \frac{\beta}{x^{\beta+1}}\left((n+1)\left(\frac{2}{nx^{2\beta}} + \frac{2}{n^2 x^{4\beta}} * \frac{1}{1-q}\right) + 1\right),$$

čia $p_{Z_n}(x) = (n+1)b_n p(a_n + b_n x)F^n(a_n + b_n x) = \frac{(n+1)\beta}{nx^{\beta+1}}\left(1 - \frac{1}{nx^{\beta}}\right)^n$;

Iš gauto įverčio išraiškos matome, kad konvergavimo greičio (2.1) lygybė įverčio eilė n atžvilgiu yra lygi 1/n.

Kompiuteriniai skaičiavimai pateikti prieduose (žr. I priede 1, 2, 3 pav). Juose pateikiami konvergavimo greičio priklausomybė nuo x, n reikšmių ir parametro β.

2.1.2. EKSPONENTINIŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMO TANKIO KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTIS

Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ turi eksponentinį skirstinį, t.y.

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \qquad x \ge 0 ,$$

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x} .$$

Rasime eksponentinio maksimumo skirstinį. Kadangi $\varpi(F) = +\infty$, tai galima taikyti 1.1 arba 1.3 teoremas. Kadangi 1.1 teoremos sąlyga netenkinama, tai tikriname 1.3 teoremos sąlygas t.y. tikriname, ar $\int_a^{w(F)} (1 - F(y))dy = \int_0^{+\infty} (1 - 1 + e^{-\lambda y})dy = -\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} d(-\lambda y) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda y} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$ konverguoja.

Ši sąlyga tenkinama. Pažymėkime funkciją R(t) tokiu būdu:

$$R(t) = \frac{\int_t^{w(F)} (1 - F(y))dy}{1 - F(t)} = \frac{\int_t^{+\infty} e^{-\lambda t} dt}{e^{-\lambda t}} = \frac{-\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}}{e^{-\lambda t}} = \frac{1}{\lambda}, \ \alpha(F) < t < \omega(F),$$

tikriname, ar tenkinama antra teoremos sąlyga

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1 - F(t + xR(t))}{1 - F(t)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1 - 1 + e^{-\lambda\left(t + x\frac{1}{\lambda}\right)}}{1 - 1 + e^{-\lambda t}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^{-\lambda t} e^{-x}}{e^{-\lambda t}} = e^{-x}.$$

Kadangi teoremos sąlygos tenkinamos, tai $F \in D(H_{3,0}(x))$,

čia $H_{3,0}(x) = e^{-e^{-x}}$.

Centravimo ir normavimo konstantas parenkame tokiu būdu:

iš sąlygų $a_n = \inf\left\{x : 1 - F(x) \le \frac{1}{n}\right\}$, $b_n = R(a_n)$, gauname, kad $a_n = \frac{\ln(n)}{\lambda}$, $b_n = \frac{1}{\lambda}$.

Toliau tikriname, ar eksponentinis skirstinys tenkina Mizeso sąlygas, t.y. (1.9) sąlygą.

Kadangi $H = H_{3,0}$, tai tikriname šią sąlygą

$$\lim_{t \uparrow w(F)} \frac{p(x)\int_x^{w(F)} (1 - F(t))dt}{(1 - F(x))^2} = \lim_{t \uparrow w(F)} \frac{\lambda e^{-\lambda x}\int_x^{\infty} (1 - 1 + e^{-\lambda t})dt}{(1 - F(x))^2} = \lim_{t \uparrow w(F)} \frac{\lambda e^{-\lambda x} \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}}{(e^{-\lambda x})^2} = 1.$$

Kadangi sąlyga tenkinama, tai

$$\lim_{n \to +\infty} p_{Z_n}(x) = H_{3,0} = e^{-x} e^{-e^{-x}}. \qquad \textbf{(2.2)}$$

Taikydami 1.12 teoremą, gausime netolygujį konvergavimo greičio įvertį (2.2) lygybėje. Gauname

$$u_n(x) = n(1 - F(a_n + b_n x)) = n\left(1 - 1 + e^{-\lambda\left(\frac{\ln(n)}{\lambda} + \frac{x}{\lambda}\right)}\right) = ne^{-x - \ln(n)} = e^{-x},$$

$$v_n(x) = u_n(x) + \log H(x) = e^{-x} + \log e^{-e^{-x}} = e^{-x} - e^{-x} = 0,$$

$$R_{1,n}(x) = \frac{2u_n^2(x)}{n} + \frac{2u_n^4(x)}{n^2} * \frac{1}{1 - q} = 2\left(\frac{e^{-2x}}{n} + \frac{e^{-4x}}{n^2} * \frac{1}{1 - q}\right),$$

$$R_{2,n}(x) = |v_n(x)| + \frac{v_n^2(x)}{2} * \frac{1}{1-s} = 0,$$

$$\Delta_n(x) = H(x)(R_1(x) + R_2(x) + R_1(x)R_2(x)) = 2e^{-e^{-x}}\left(\frac{e^{-2x}}{n} + \frac{e^{-4x}}{n^2} * \frac{1}{1-q}\right),$$

$$R_{3,n}(x) = H(x)|(n+1)b_n p(a_n + b_n x) - \log' H(x)| = e^{-e^{-x}}\left|\frac{(n+1)}{n}e^{-x} - e^{-x}\right| =$$

$$= e^{-x}e^{-e^{-x}}\left|\frac{(n+1)}{n} - 1\right|.$$

Galutinai gauname:

$$\left|p_{Z_n}(x) - H'(x)\right| = \left|p_{Z_n}(x) - e^{-x}e^{-e^{-x}}\right| \le e^{-x}e^{-e^{-x}}\left(2\frac{(n+1)}{n}\left(\frac{e^{-2x}}{n} + \frac{e^{-4x}}{n^2} * \frac{1}{1-q}\right) + \left|\frac{(n+1)}{n} - 1\right|\right),$$

čia $p_{Z_n}(x) = (n+1)b_n p(a_n + b_n x)F^n(a_n + b_n x) = \frac{(n+1)}{n}e^{-x}\left(1 - \frac{\lambda e^{-x}}{n}\right)^n - e^{-x}e^{-e^{-x}}$.

Iš gauto įverčio išraiškos matome, kad konvergavimo greičio (2.2) lygybėje įverčio eilė n atžvilgiu yra lygi 1/n.

Kompiuteriniai skaičiavimai pateikti prieduose (žr. II priede 1, 2 pav). Juose pateikiamos konvergavimo greičio priklausomybės nuo x ir n reikšmių.

2.1.3. LOGISTINIŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MAKSIMUMO TANKIO KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTIS

Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ turi logistinį skirstinį, t.y.

$$F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}, \; x > 0,$$

$$p(x) = \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}.$$

Rasime logistinio maksimumo skirstinį. Kadangi $\varpi(F) = +\infty$, tai galima taikyti 1.1 arba 1.3 teoremas. Kadangi 1.1. teoremos sąlyga netenkinama, tai tikriname 1.3 teoremos sąlygas. Su bet kokia baigtine konstanta α integralas

$$\int_{a}^{w(F)}(1-F(y))dy=\int_{0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{1+e^{-y}}\right)dy=\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{1+e^{-y}-1}{1+e^{-y}}\right)dy=(-1)\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+e^{-y}}\right)d\left(1+e^{-y}\right)=$$

$$=-\ln\left(1+e^{-y}\right)\Big|_{0}^{+\infty}=\ln(1+e^{0})=\ln 2$$

yra baigtinis. Intervale $(\alpha(F),\omega(F))$ apibrėžkime funkciją

$$R(t)=\frac{\int_{t}^{w(F)}(1-F(y))dy}{1-F(t)}=\frac{\int_{t}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{1+e^{-y}}\right)dy}{1-\frac{1}{1+e^{-t}}}=\frac{\int_{t}^{+\infty}\left(\frac{e^{-y}}{1+e^{-y}}\right)dy}{\frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}}=\frac{\int_{t}^{+\infty}\frac{d\left(1+e^{-y}\right)}{1+e^{-y}}}{\frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}}=.$$

$$=\frac{\ln\left(\left(1+e^{t}\right)e^{-t}\right)}{\frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}}=\frac{(1+e^{-t})\ln\left(\left(1+e^{t}\right)e^{-t}\right)}{e^{-t}}=(1+e^{t})\ln\left(1+e^{-t}\right).$$

Kadangi visiems realiems x egzistuoja riba

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1-F(t+xR(t))}{1-F(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{1+e^{-\left(t+x(1+e^{t})\ln\left(1+e^{-t}\right)\right)}}}{1-\frac{1}{1+e^{-t}}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1-\frac{e^{t}}{e^{t}+\left(1+e^{-t}\right)^{-x(1+e^{t})}}}{\frac{1}{1+e^{t}}}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{e^{t}}{e^{t}+\left(1+e^{-t}\right)^{-x(1+e^{t})}}\right)\left(1+e^{t}\right)=e^{-x},$$

tai tenkinama 1.3 teoremos sąlyga, ir $F\in D(H_{3,0})$. Čia

$$H_{3,0}(x)=\left\{\exp(-e^{-x}),\qquad x\in\Re.\right.$$

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:
iš sąlygų $a_n=\inf\{x:1-F(x)\le 1/n\}$, $b_n=R(a_n)$, gauname

$$a_n=\ln(n),\qquad b_n=1$$

Toliau tikriname, ar logistinis skirstinys tenkina Mizeso sąlygas, t.y. (1.9) sąlygą.

Kadangi $H=H_{3,0}$, tai tikriname šią sąlygą

$$\lim_{t\uparrow w(F)}\frac{p(x)\int_{x}^{w(F)}\left(1-F(t)\right)dt}{\left(1-F(x)\right)^{2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^{2}}\int_{x}^{\infty}\left(1-\frac{1}{1+e^{-t}}\right)dt}{\left(1-\frac{1}{1+e^{-x}}\right)^{2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\left(\left(1+e^{x}\right)e^{-x}\right)}{e^{-x}}=1.$$

Sąlyga tenkinama, tai

$$\lim_{n\to+\infty}p_{Z_n}(x)=H_{3,0}=e^{-x}e^{-e^{-x}}. \tag{2.3}$$

Taikydami 1.12 teoremą, gausime netolygųjį konvergavimo greičio įvertį (2.3) lygybėje. Gauname

$$u_n(x) = n(1 - F(a_n + b_n x)) = n\left(1 - \frac{1}{1 + e^{-(\ln n + x)}}\right) = \frac{ne^{-x}}{n + e^{-x}},$$

$$v_n(x) = u_n(x) + \log H(x) = \frac{ne^{-x}}{n + e^{-x}} + \log e^{-e^{-x}} = \frac{ne^{-x}}{n + e^{-x}} - e^{-x},$$

$$R_{1,n}(x) = \frac{2u_n^2(x)}{n} + \frac{2u_n^4(x)}{n^2} * \frac{1}{1-q} = 2n\left(\frac{e^{-x}}{n + e^{-x}}\right)^2 + 2n^2\left(\frac{e^{-x}}{n + e^{-x}}\right)^4 * \frac{1}{1-q},$$

$$R_{2,n}(x) = |v_n(x)| + \frac{v_n^2(x)}{2} * \frac{1}{1-s} = \left|\frac{ne^{-x}}{n + e^{-x}} - e^{-x}\right| + \frac{1}{2}\left(\frac{ne^{-x}}{n + e^{-x}} - e^{-x}\right)^2 * \frac{1}{1-s},$$

$$\Delta_n(x) = H(x)(R_1(x) + R_2(x) + R_1(x)R_2(x)) = e^{-e^{-x}}\left(2n\left(\frac{e^{-x}}{n+e^{-x}}\right)^2 + 2n^2\left(\frac{e^{-x}}{n+e^{-x}}\right)^4 * \frac{1}{1-q} + \right.$$

$$+\left|\frac{ne^{-x}}{n + e^{-x}} - e^{-x}\right| + \frac{1}{2}\left(\frac{ne^{-x}}{n + e^{-x}} - e^{-x}\right)^2 * \frac{1}{1-s} + \left(2n\left(\frac{e^{-x}}{n + e^{-x}}\right)^2 + 2n^2\left(\frac{e^{-x}}{n + e^{-x}}\right)^4 * \frac{1}{1-q}\right) *$$

$$\left. * \left(\left|\frac{ne^{-x}}{n + e^{-x}} - e^{-x}\right| + \frac{1}{2}\left(\frac{ne^{-x}}{n + e^{-x}} - e^{-x}\right)^2 * \frac{1}{1-s}\right)\right),$$

$$R_{3,n}(x) = e^{-e^{-x}}\left|\frac{(n+1)}{n}\frac{e^{-x}}{\left(1+\frac{1}{n}e^{-x}\right)^2} - e^{-x}\right| = e^{-x}e^{-e^{-x}}\left|\frac{n(n+1)}{\left(n+e^{-x}\right)^2} - 1\right|.$$

Galutinai gauname:

$$\left|p_{Z_n}(x) - H'(x)\right| = \left|p_{Z_n}(x) - e^{-x}e^{-e^{-x}}\right| \le (n+1)\frac{ne^{-x}}{\left(n + e^{-x}\right)^2}\Delta_n(x) + e^{-x}e^{-e^{-x}}\left|\frac{n(n+1)}{\left(n+e^{-x}\right)^2} - 1\right|,$$

čia $p_{Z_n}(x) = \dfrac{n(n+1)}{\left(n + e^{-x}\right)^2}\left(\dfrac{n}{n + e^{-x}}\right)^n$.

Iš gauto įverčio išraiškos matome, kad konvergavimo greičio (2.3) lygybėje įverčio eilė n atžvilgiu yra lygi 1/n.

Kompiuteriniai skaičiavimai pateikti prieduose (žr. III priede 1, 2 pav). Juose pateikiamos konvergavimo greičio priklausomybės nuo x, n reikšmių.

2.2. SĄLYGOS, KAD MINIMUMO TANKIS KONVERGUOTŲ Į RIBINIO SKIRSTINIO TANKĮ

Sakykime $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ - nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su pasiskirstymo funkciją $F(x) = P(X_j < x)$ ir tankio funkcija $p(x)$.

Pažymėkime

$$W_n = \min(X_1, \ldots, X_{n+1}).$$

Tarkime, kad skirstinys $F(x)$ toks, jog galima parinkti tokias centravimo ir normavimo konstantų sekas $\{c_n, n \geq 1\}$, $\{d_n > 0, \quad n \geq 1\}$, jog $F(x)$ priklauso neišsigimusio ribinios skirstinio $L(x)$ traukos sričiai

$$\lim_{n\to\infty} P(W_n < c_n + d_n x) = L(x), \qquad \textbf{(2.4)}$$

(čia L(x) –neišsigimusi pasiskirstymo funkcija).

Yra žinoma, kad ribinis skirstinys $L(x)$ gali būti trijų tipų:

$$L_{1,\gamma}(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-(-x)^{-\gamma}) & x < 0 \\ 1, & x \geq 0, \end{cases},$$

$$L_{2,\gamma}(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-x^{\gamma}), & x \geq 0 \\ 0, \quad x < 0 & \end{cases},$$

$$L_3(x) = \{1 - \exp(-e^{x}), \quad x \in \Re\}.$$

Kai atsitiktinis dydis X_j turi tankį $p(x) = F'(x)$, tai:

$$p_{W_n}(x) = (n+1)d_n p(c_n + d_n x)(1 - F(c_n + d_n x))^n,$$

$p_{W_n}(x)$ - tiesiškai normuoto minimumo $(Z_n - c_n)/d_n$ tankio funkcija.

Suformuluosime būtinas ir pakankamas sąlygas, kad nepriklausomų atsitiktinių dydžių minimumo tankis konverguotų į minimumo ribinio skirstinio tankį.

$$\lim_{n\to\infty} p_{W_n}(x) = L'(x). \qquad \textbf{(2.5)}$$

2.1. Teorema.

Tegul F pasiskirstymo funkcija turi $p(x)$ pasiskirstymo tankį. Jeigu $F \in D(L)$

a. $L = L_{1,\gamma}$, tai (2.5) sąryšis bus teisingas intervale $(-\infty; 0)$ tada ir tik tada, kai tankio funkcija $p(-x)$ yra teigiama, pakankamai dideliems x, ir $\gamma > 0$ tenkinama sąlyga

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xp(-x)}{F(-x)} = \gamma$$

b. $L = L_{2,\gamma}$, tai (2.5) sąryšis bus teisingas intervale $(0,\infty)$ tada ir tik tada, kai tankio funkcija $p(-x)$ yra teigiama, ir $\gamma > 0$ tenkinama sąlyga

$$\lim_{x \uparrow \alpha(F)} \frac{(\alpha(F) - x)p(-x)}{F(-x)} = \gamma,$$

čia $w(x) = \sup\{x : F(x) < 1\}$

c. $L = L_3$, tai (2.5) sąryšis bus teisingas visiems x tada ir tik tada, kai tenkinama sąlyga

$$\lim_{x \to \alpha(F)} \frac{d}{dx}\left(\frac{1 - F(-x)}{p(-x)}\right) = 0.$$

Iš (2.5) sąryšio gausime konvergavimo greičio įvertį.

2.3. MINIMUMO TANKIO KONVERGAVIMO GREIČIO TYRIMAS

2.3.1. PARETO ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MINIMUMO TANKIO KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTIS

Rasime Pareto minimumo skirstinį. Kadangi $\alpha(F) = \alpha$, tai galima taikyti 1.7 teoremą. Tikriname teoremos sąlygą. Pažymėkime pasiskirstymo funkciją

$$F^*(x) = F\left(\alpha(F) - \frac{1}{x}\right) = 1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha - \frac{1}{x}}\right)^{\beta}.$$

Tikriname ar funkcija tenkina 1.6 teoremos sąlygą

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{F^*(tx)}{F^*(t)} = \lim_{t \to -\infty} \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha - \frac{1}{tx}}\right)^{\beta}}{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha - \frac{1}{t}}\right)^{\beta}} = \left| \begin{array}{l} Taikome \\ Liopitalio \\ taisykle \end{array} \right| = \lim_{t \to -\infty} \frac{\left(\frac{\alpha}{\alpha - \frac{1}{tx}}\right)^{\beta} \frac{\beta}{\left(\alpha - \frac{1}{tx}\right)t^2 x}}{\left(\frac{\alpha}{\alpha - \frac{1}{t}}\right)^{\beta} \frac{\beta}{\left(\alpha - \frac{1}{t}\right)t^2}} = \lim_{t \to -\infty} \frac{\left(\alpha - \frac{1}{tx}\right)^{\beta+1}}{\left(\alpha - \frac{1}{tx}\right)^{\beta+1} x} = \frac{1}{x}.$$

Kadangi teoremos sąlyga tenkinama, tai $F \in D(L_{2,1})$,

čia

$$L_{2,1}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^{1}}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Centravimo ir normavimo konstantas parenkame tokiu būdu:

iš $c_n = \alpha(F)$, $d_n = \sup\left\{x : F(x) \le \frac{1}{n}\right\} - \alpha(F)$ sąlygų gauname, kad $c_n = \alpha$, $d_n = \alpha\left(\sqrt[\beta]{\frac{n}{n-1}} - 1\right)$.

Toliau tikriname, ar Pareto skirstinys tenkina (2.5) sąlygą.

Kadangi $L = L_{2,1}$, tai tikriname sąlygą

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{(\alpha(F)-x)p(-x)}{F(-x)} = \lim_{x\to\alpha}\frac{(\alpha-x)\alpha^{\beta}\beta}{(-x)^{\beta+1}\left(1-\left(\frac{\alpha}{-x}\right)^{\beta}\right)} = \lim_{x\to\alpha}\frac{(\alpha-x)\alpha^{\beta}\beta(-x)^{\beta}}{(-x)^{\beta+1}\left((-x)^{\beta}-\alpha^{\beta}\right)} = \lim_{x\to\alpha}\frac{(\alpha-x)\alpha^{\beta}\beta}{-x\left((-x)^{\beta}-\alpha^{\beta}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\alpha}\frac{\alpha^{\beta+1}\beta - x\alpha^{\beta}\beta}{(-x)^{\beta+1}+\alpha^{\beta}x} = \left|\begin{matrix}\mathit{Taikome}\\ \mathit{Liopitalio}\\ \mathit{taisykle}\end{matrix}\right| = \lim_{x\to\alpha}\frac{-\alpha^{\beta}\beta}{(\beta+1)(-x)^{\beta}+\alpha^{\beta}} = \frac{-\alpha^{\beta}\beta}{-\alpha^{\beta}\beta-\alpha^{\beta}+\alpha^{\beta}} = 1.$$

Sąlyga tenkinama, todėl

$$\lim_{n\to+\infty} p_{W_n}(x) = L'(x) = e^{-x}. \tag{2.6}$$

Taikydami 1.13 teoremą, gausime netolygųjį konvergavimo greičio įvertį (2.6) lygybėje. Gauname

$$\tau_n(x) = nF(c_n + d_n x) = n\left(1-\left(\frac{1}{1+x\left(\sqrt[\beta]{\frac{n}{n-1}}-1\right)}\right)^{\beta}\right),$$

$$\omega_n(x) = u_n(x) + \log(1-L(x)) = n\left(1-\left(\frac{1}{1+x\left(\sqrt[\beta]{\frac{n}{n-1}}-1\right)}\right)^{\beta}\right) - x,$$

$$\Delta_n(x) = \frac{\tau_n^2(x)e^{-\tau_n(x)}}{2(n-1)} + (1-L(x))\left(|\omega_n(x)| + \theta\omega_n^2(x)\right) =$$

$$= \frac{n^2}{2(n-1)}\left(1-\left(\frac{1}{1+x\left(\sqrt[\beta]{\frac{n}{n-1}}-1\right)}\right)^{\beta}\right)^2 \exp\left(-n\left(1-\left(\frac{1}{1+x\left(\sqrt[\beta]{\frac{n}{n-1}}-1\right)}\right)^{\beta}\right)\right) +$$

$$+\exp(-x)\left(\left|n\left(1-\left(\frac{1}{1+x\left(\sqrt[\beta]{\frac{n}{n-1}}-1\right)}\right)^{\beta}\right)-x\right|+\theta\left(n\left(1-\left(\frac{1}{1+x\left(\sqrt[\beta]{\frac{n}{n-1}}-1\right)}\right)^{\beta}\right)-x\right)^2\right),$$

$0<\theta<1$.

Galutinai gauname:

$$\left|p_{W_n}-L'(x)\right|=\left|p_{W_n}-e^{-x}\right|\le(n+1)\frac{\alpha\beta\left(\sqrt[\beta]{\frac{n}{n-1}}-1\right)^2}{\left(1+x\left(\sqrt[\beta]{\frac{n}{n-1}}-1\right)\right)^{\beta+1}}\left(\frac{n^2}{2(n-1)}\left(1-\left(\frac{1}{1+x\left(\sqrt[\beta]{\frac{n}{n-1}}-1\right)}\right)^{\beta}\right)^2\right.$$

$$\left.\exp\left(-n\left(1-\left(\frac{1}{1+x\left(\sqrt[\beta]{\frac{n}{n-1}}-1\right)}\right)^{\beta}\right)\right)+\exp(-x)\left(\left|n\left(1-\left(\frac{1}{1+x\left(\sqrt[\beta]{\frac{n}{n-1}}-1\right)}\right)^{\beta}\right)-x\right|+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\theta\left(n\left(1-\left(\frac{1}{1+x\left(\sqrt[\beta]{\frac{n}{n-1}}-1\right)}\right)^{\beta}\right)-x\right)^2\right)\right)+\exp(-x)\left|(n+1)\frac{\alpha\beta\left(\sqrt[\beta]{\frac{n}{n-1}}-1\right)^2}{\left(1+x\left(\sqrt[\beta]{\frac{n}{n-1}}-1\right)\right)^{\beta+1}}+1\right|,$$

čia

$$p_{W_n}(x)=(n+1)d_n p(c_n+d_n x)(1-F(c_n+d_n x))^n=$$

$$=(n+1)\frac{\alpha\beta\left(\sqrt[\beta]{\frac{n}{n-1}}-1\right)^2}{\left(1+x\left(\sqrt[\beta]{\frac{n}{n-1}}-1\right)\right)^{\beta+1}}\left(\frac{1}{1+x\left(\sqrt[\beta]{\frac{n}{n-1}}-1\right)}\right)^{n\beta}.$$

Iš gauto įverčio išraiškos matome, kad konvergavimo greičio (2.6) lygybėje įverčio eilė n atžvilgiu yra lygi 1/n.

Kompiuteriniai skaičiavimai pateikti prieduose (žr. I priede 4, 5, 6 pav). Juose pateikiamos konvergavimo greičio priklausomybės nuo x, n reikšmių, parametro β.

2.3.2. EKSPONENTINIŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MINIMUMO TANKIO KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTIS

Rasime eksponentinio minimumo skirstinį. Kadangi $\alpha(F)=0$, tai galima taikyti 1.7 teoremą. Tikriname teoremos sąlygą. Pažymėkime pasiskirstymo funkciją

$$F^*(x)=F\left(\alpha(F)-\frac{1}{x}\right)=\left(0-1+e^{-\lambda\left(\frac{-1}{x}\right)}\right)=-1+e^{\frac{\lambda}{x}},$$

$$p(c_n+d_nx)=\frac{\lambda}{n}e^{-\frac{x}{\lambda n}}.$$

Tikriname ar funkcija tenkina 1.7 teoremos sąlygą

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{F^*(tx)}{F^*(t)}=\lim_{t\to-\infty}\frac{-1+e^{\frac{\lambda}{tx}}}{-1+e^{\frac{\lambda}{t}}}=\left|\begin{matrix}Taikome\\ Liopitalio\\ taisykle\end{matrix}\right|=\lim_{t\to-\infty}\frac{\frac{\lambda}{x}e^{\frac{\lambda}{tx}}}{\lambda e^{\frac{\lambda}{t}}}=x^{-1}.$$

Kadangi teoremos sąlyga tenkinama, tai $F\in D\left(L_{2,1}\right)$,

čia

$$L_{2,1}(x)=\begin{cases}1-e^{-x^1}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}.$$

Centravimo ir normavimo konstantas parenkame tokiu būdu:

iš $c_n=\alpha(F)$, $d_n=\sup\left\{x:F(x)\leq\frac{1}{n}\right\}-\alpha(F)$ sąlygų, gauname, kad $c_n=0$, $d_n=-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\lambda}$, ją pakeisime jai ekvivalenčia funkcija. Dvi nykstamos funkcijos $\alpha(x)$ *ir* $\beta(x)$ vadinamos ekvivalenčiomis, kai $x\to a$ $(x\to\infty)$, jei $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$. Žymime $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Taigi $-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n}$, kai $n\to\infty$. $\lim_{n\to\infty}\frac{-\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{n}{n-1}*\frac{n-n+1}{n^2}}{-\frac{1}{n^2}}=1$. Tuomet galime laikyti $d_n=\frac{1}{\lambda n}$.

Toliau tikriname, ar eksponentinis skirstinys tenkina Mizeso (2.5) sąlygą.

Kadangi $L=L_{2,1}$, tai tikriname sąlygą

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\alpha(F)-x)p(-x)}{F(-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\lambda e^{\lambda x}}{1-e^{\lambda x}}=\left|\begin{matrix}Taikome\\ Liopitalio\quad t.\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{-\lambda e^{x\lambda}-\lambda^2xe^{\gamma\lambda x}}{-\lambda e^{\lambda x}}=\lim_{x\to 0}1-\lambda x=1$$

$$\lim_{n\to\infty} P(W_n < c_n + d_n x) = L(x),$$

be to dar tenkinama sąlyga

$$\lim_{n\to+\infty} p_{W_n}(x) = L'(x) = e^{-x}. \qquad \textbf{(2.7)}$$

Taikydami 1.13 teoremą, gausime netolygujį konvergavimo greičio įvertį (2.7) lygybėje. Gauname

$$\tau_n(x) = nF(c_n + d_n x) = n\left(1 - e^{-\frac{x}{n}}\right),$$

$$\omega_n(x) = u_n(x) + \log(1 - L(x)) = n\left(1 - e^{-\frac{x}{n}}\right) - x,$$

$$\Delta_n(x) = \frac{\tau_n^2(x) e^{-\tau_n(x)}}{2(n-1)} + (1 - L(x))\left(|\omega_n(x)| + \theta\omega_n^2(x)\right) =$$

$$= \frac{n^2\left(1 - e^{-\frac{x}{n}}\right)^2}{2(n-1)} e^{-n\left(1-e^{-\frac{x}{n}}\right)} + e^{-x}\left(\left|n\left(1 - e^{-\frac{x}{n}}\right) - x\right| + \theta\left(n\left(1 - e^{-\frac{x}{n}}\right) - x\right)^2\right), \quad 0 < \theta < 1.$$

Galutinai gauname:

$$\left|p_{W_n}(x) - L'(x)\right| = \left|p_{W_n} - e^{-x}\right| \le \frac{(n+1)}{n} e^{-\frac{x}{n}} *$$

$$* \left(\frac{n^2\left(1 - e^{-\frac{x}{n}}\right)^2}{2(n-1)} e^{-n\left(1-e^{-\frac{x}{n}}\right)} + e^{-x}\left(\left|n\left(1 - e^{-\frac{x}{n}}\right) - x\right| + \theta\left(n\left(1 - e^{-\frac{x}{n}}\right) - x\right)^2\right) \right) + e^{-x}\left|\frac{(n+1)}{n} e^{-\frac{x}{n}} + 1\right|,$$

čia $p_{W_n}(x) = (n+1) d_n p(c_n + d_n x)(1 - F(c_n + d_n x))^n = (n+1)\frac{1}{n^2} e^{-\frac{x}{n}}\left(1 - \left(1 - e^{-\frac{x}{n}}\right)\right)^n = \frac{(n+1)}{n^2} e^{-\frac{x}{n}} e^{-x}.$

Iš gauto įverčio išraiškos matome, kad konvergavimo greičio (2.7) lygybėje įverčio eilė n atžvilgiu yra lygi 1/n.

Kompiuteriniai skaičiavimai pateikti prieduose (žr. II priede 3, 4 pav). Juose pateikiamos konvergavimo greičio priklausomybės nuo x, n reikšmių.

2.3.3. LOGISTINIŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ MINIMUMO TANKIO KONVERGAVIMO GREIČIO ĮVERTIS

Rasime logistinio minimumo skirstinį. Kadangi $\alpha(F) = -\infty$, tai galima taikyti 1.8 teoremą. Tikriname teoremos sąlygas. Su bet kokia baigtine konstanta α integralas

$$\int_{\alpha(F)}^{a} F(y)dy = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+e^{-y}}dy = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+\frac{1}{e^{y}}}dy = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\frac{1+e^{y}}{e^{y}}}dy = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{y}}{1+e^{y}}dy = \int_{-\infty}^{0} \frac{d\left(1+e^{y}\right)}{1+e^{y}} =$$

$$\ln(1+e^{y})\Big|_{-\infty}^{0} = \ln(2)$$

yra baigtinis. Apibrėžkime funkciją

$$r(t) = \frac{\int_{\alpha(F)}^{t} F(y)dy}{F(t)} = \frac{\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{1+e^{-y}}dy}{\frac{1}{1+e^{-t}}} = \frac{\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{1+\frac{1}{e^{y}}}dy}{\frac{1}{1+\frac{1}{e^{t}}}} = \frac{\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\frac{1+e^{y}}{e^{y}}}dy}{\frac{1}{\frac{1+e^{t}}{e^{t}}}} = \frac{\int_{-\infty}^{t} \frac{e^{y}}{1+e^{y}}dy}{\frac{e^{t}}{1+e^{t}}} =$$

$$= \frac{1+e^{t}}{e^{t}} \int_{-\infty}^{t} \frac{d\left(1+e^{y}\right)}{1+e^{y}} = \frac{(1+e^{t})}{e^{t}} \ln((1+e^{t}),$$

čia $t > \alpha(F)$.

Kadangi visiems realiems x egzistuoja riba

$$\lim_{t\to\alpha(F)} \frac{F(t+xr(t))}{F(t)} = \lim_{t\to-\infty} \frac{\frac{1}{1+e^{-\left(t+x(1+e^{t})e^{-t}\ln(1+e^{t})\right)}}}{\frac{1}{1+e^{-t}}} = \lim_{t\to-\infty} \frac{\frac{1+e^{t}}{1+e^{-\left(t+x(1+e^{t})e^{-t}\ln(1+e^{t})\right)}}}{e^{x}} =$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \frac{\frac{1+e^{t}}{1+e^{-t}e^{-x(1+e^{t})e^{-t}\ln(1+e^{t})}}}{e^{x}} = \lim_{t\to-\infty} \frac{1+e^{t}}{e^{t}+e^{-x(1+e^{t})e^{-t}\ln(1+e^{t})}} =$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \frac{1+e^{t}}{e^{t}+\left(e^{\ln(1+e^{t})}\right)^{-x(1+e^{t})e^{-t}}} = \lim_{t\to-\infty} \frac{1+e^{t}}{e^{t}+\left((1+e^{t})\right)^{-x(1+e^{t})e^{-t}}} = \lim_{t\to-\infty} \frac{1+e^{t}}{e^{t}+\left((1+e^{t})^{e^{-t}}\right)^{-x(1+e^{t})}} = e^{x},$$

tai tenkinama 1.8 teoremos sąlyga, ir $F \in D(L_{3,\gamma})$. Čia

$$L_{3,0}(x) = 1 - \exp(-e^{x}), \qquad (-\infty < x < \infty).$$

Centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti tokiu būdu:

iš sąlygų $c_n = \sup\{x : F(x) \le 1/n\}$, $d_n = r(c_n)$ gauname, kad

$$c_n = -\ln(n),$$

$$d_n = \left(1 + e^{\ln n}\right)\left(\ln\left(\left(1 + e^{-\ln n}\right)e^{\ln n}\right) - \ln n\right) = (1+n)\left(\ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)n\right) - \ln n\right) = (1+n)(\ln(n+1) - \ln n) =$$

$$= (1+n)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Kai $n \to \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\frac{1}{n} + 1\right)(n+1) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{1+n}{n}\right)}{\frac{1}{n+1}} = 1$. Tuomet galime laikyti $d_n = 1$.

Toliau tikriname, ar logistinis skirstinys tenkina Mizeso (2.5) sąlygą.

Kadangi $L = L_{3,0}$, tai tikriname sąlygą

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{1 - \frac{1}{1+e^{x}}}{\frac{e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{e^{x}}{1+e^{x}}}{\frac{e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{d}{dx}\left(1 + e^{x}\right) = 0$$

Sąlyga tenkinama, todėl

$$\lim_{n\to+\infty} p_{W_n}(x) = L'_{3,0}(x) = e^{x}e^{-e^{x}}, \qquad x \in \Re. \tag{2.8}$$

Taikydami 1.13 teoremą, gausime netolygujį konvergavimo greičio įvertį (2.8) lygybėje. Gauname

$$\tau_n(x) = nF(c_n + d_n x) = n\left(\frac{1}{1 + e^{-\left(\ln\frac{1}{n} + x\right)}}\right) = \frac{n}{1 + ne^{-x}},$$

$$\omega_n(x) = u_n(x) + \log\left(1 - L(x)\right) == \frac{n}{1 + ne^{-x}} + \log e^{-e^{x}} = \frac{n}{1 + ne^{-x}} - e^{x},$$

$$\Delta_n(x) = \frac{\tau_n^2(x)e^{-\tau_n(x)}}{2(n-1)} + (1 - L(x))\left(\left|\omega_n(x)\right| + \theta\omega_n^2(x)\right) =$$

$$= \frac{n^2}{2(n-1)\left(1 + ne^{-x}\right)^2} e^{\frac{-n}{1+ne^{-x}}} + e^{-e^{x}}\left(\left|\frac{n}{1+ne^{-x}} - e^{x}\right| + \theta\left(\frac{n}{1+ne^{-x}} - e^{x}\right)^2\right), \quad 0 < \theta < 1.$$

Galutinai gauname:

$$\left|p_{W_n}(x) - L'(x)\right| = \left|p_{W_n} - e^{x}e^{-e^{x}}\right| \le$$

$$\le \frac{(n+1)ne^{-x}}{\left(1+ne^{-x}\right)^2}\left(\frac{n^2}{2(n-1)\left(1+ne^{-x}\right)^2}e^{\frac{-n}{1+ne^{-x}}} + e^{-e^{x}}\left(\left|\frac{n}{1+ne^{-x}} - e^{x}\right| + \theta\left(\frac{n}{1+ne^{-x}} - e^{x}\right)^2\right)\right) +$$

$$+ e^{-e^{x}}\left|\frac{(n+1)ne^{-x}}{\left(1+ne^{-x}\right)^2} + e^{x}\right|,$$

čia

$$p_{W_n}(x) = \left(n+1\right)d_n p(c_n + d_n x)\left(1 - F(c_n + d_n x)\right)^n = \frac{(n+1)ne^{-x}}{(1+ne^{-x})^2}\left(1 - \frac{1}{1+ne^{-x}}\right)^n.$$

Iš gauto įverčio išraiškos matome, kad konvergavimo greičio (2.8) lygybėje įverčio eilė n atžvilgiu yra lygi 1/n.

Kompiuteriniai skaičiavimai pateikti prieduose (žr. III priede 3, 4 pav). Juose pateikiamos konvergavimo greičio priklausomybės nuo x, n reikšmių.

2.4. NETIESIŠKAI NORMUOTŲ EKSTREMALIŲJŲ REIKŠMIŲ TANKIŲ KONVERGAVIMO GREIČIO TYRIMAS

Tarkime, kad egzistuoja tokios normavimo funkcijų sekos $\{\alpha_n(x), \quad n \ge 1\}$ ir $\{\beta_n(x) > 0, \quad n \ge 1\}$, kad

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n < \alpha_n(x)) = H(x), \qquad \mathbf{(2.9)}$$

$$\lim_{n\to\infty} P(W_n < \beta_n(x)) = L(x), \qquad \mathbf{(2.10)}$$

ir

$$\lim_{n\to\infty} p_{Z_n}(x) = H'(x), \qquad \mathbf{(2.11)}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{W_n}(x) = L'(x), \qquad \mathbf{(2.12)}$$

čia

$$p_{Z_n}(x) = (n+1)\alpha_n'(x)p(\alpha_n(x))F^n(\alpha_n(x))$$

netiesiškai normuoto maksimumo $\alpha_n^{-1}(Z_n)$ tankis, o

$$p_{W_n}(x) = (n+1)\beta_n'(x)p(\beta_n(x))\left(1 - F(\beta_n(x))\right)^n$$

netiesiškai normuoto minimumo $\beta_n^{-1}(W_n)$ tankis.

Gausime netolygųjį konvergavimo greičio įvertį (2.11) ir (2.12) lygybėse.

Pažymėkime

$$u_n(x) = n\big(1 - F(\alpha_n(x))\big),$$

$$v_n(x) = u_n(x) + \log H(x),$$

$$\tau_n(x) = nF(\beta_n(x)),$$

$$\omega_n(x) = u_n(x) + \log\big(1 - L(x)\big).$$

2.2. Teorema.

Tarkime, tenkinamos sąlygos (2.9) ir (2.11). Su visais x, su kuriais $\frac{u_n(x)}{n} \le \frac{1}{2}$ ir $\log H(x) > 0$, teisingas įvertis

$$\left| p_{Z_n}(x) - H'(x) \right| \le (n+1)\alpha_n{}'(x)\, p(\alpha_n(x))\Delta_n(x) + R_{3,n}(x)$$

čia

$$\Delta_n(x) = H(x)(R_1(x) + R_2(x) + R_1(x)R_2(x)),$$

$$R_{1,n}(x) = \frac{2u_n^2(x)}{n} + \frac{2u_n^4(x)}{n^2} * \frac{1}{1-q},$$

$$R_{2,n}(x) = |v_n(x)| + \frac{v_n^2(x)}{2} * \frac{1}{1-s},$$

o $q < 1$, $s < 1$, tokie, kad

$$\frac{2u_n^2(x)}{3n} < q, \quad \frac{|v_n(x)|}{3} \le s,$$

$$R_{3,n}(x) = H(x) \left|\ (n+1)b_n p\ (a_n + b_n x) - \log' H(x)\ \right|.$$

Šios teoremos įrodymas analogiškas kaip ir 1.12 teoremos.

2.4.1. Pavyzdys

Tarkime, kad atsitiktinių dydžių $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ skirstinys yra toks:

$$F(x) = 1 - \frac{1}{\ln x}, \qquad x \ge e,$$

$$p(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^2}.$$

Imdami netiesinę normavimo funkciją $\alpha_n^{-1}(Z_n) = \frac{\ln Z_n}{n}$, gauname

$$P\left(\frac{\ln Z_n}{n} < x\right) = P\left(Z_n < e^{nx}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(Z_n < e^{nx}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{\ln e^{nx}}\right)^n = e^{-\frac{1}{x}}, \qquad x > 0,$$

be to, dar tenkinama sąlyga

$$\lim_{n\to+\infty} p_{Z_n}(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(n+1)}{nx^2}\left(1-\frac{1}{nx}\right)^n\right) = H'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}. \qquad \textbf{(2.9)}$$

Taikydami 1.13 teoremą, gausime netolygujį konvergavimo greičio įvertį (2.9) lygybėje. Gauname

$$u_n(x) = n(1-F(\alpha_n(x))) = n\left(1-1+\frac{1}{nx}\right) = \frac{1}{x},$$

$$v_n(x) = u_n(x) + \log H(x) = \frac{1}{x} + \log e^{-\frac{1}{x}} = 0,$$

$$R_{1,n}(x) = \frac{2u_n^2(x)}{n} + \frac{2u_n^4(x)}{n^2} * \frac{1}{1-q} = 2\frac{1}{nx^2} + 2\frac{1}{n^2x^4} * \frac{1}{1-q},$$

$$R_{2,n}(x) = |v_n(x)| + \frac{v_n^2(x)}{2} * \frac{1}{1-s} = 0,$$

$$\Delta_n(x) = H(x)(R_1(x) + R_2(x) + R_1(x)R_2(x)) = e^{-\frac{1}{x}}\left(2\frac{1}{nx^2} + 2\frac{1}{n^2x^4} * \frac{1}{1-q}\right),$$

$$R_{3,n}(x) = H(x)\left|(n+1)\tau_n'(x)p_n(\tau_n(x)) - \log' H(x)\right| = e^{-\frac{1}{x}}\left|(n+1)ne^{nx}\frac{1}{n^2x^2}\frac{1}{e^{nx}} - \frac{1}{x^2}\right| =$$

$$= e^{-\frac{1}{x}}\left|(n+1)\frac{1}{nx^2} + \frac{1}{x^2}\right| = e^{-\frac{1}{x}}\left|\frac{2n+1}{nx^2}\right|.$$

Galutinai gauname:

$$\left|p_{Z_n}(x) - H'(x)\right| = \left|p_{Z_n}(x) - \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\right| \le e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{(n+1)}{nx^2}\left(\frac{2}{nx^2} + \frac{2}{n^2x^4} * \frac{1}{1-q}\right) + \left|\frac{2n+3}{nx^2}\right|\right),$$

Iš gauto įverčio išraiškos matome, kad konvergavimo greičio (2.9) lygybėje įverčio eilė n atžvilgiu yra lygi 1/n.

Kompiuteriniai skaičiavimai pateikti prieduose (žr. IV priede 15, 16 pav). Juose pateikiamos konvergavimo greičio priklausomybės nuo x, n reikšmių.

2.4.2. Pavyzdys

Imdami netiesinę normavimo funkciją $\beta_n(x) = e^{\left(1+\frac{x}{n}\right)}$, gauname

$$P(W_n < \alpha_n(x)) = 1 - \left(1 - F(\alpha_n(x))\right)^n = 1 - \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\ln \alpha_n(x)}\right)\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{\ln e^{\left(1+\frac{x}{n}\right)}}\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{x}{n}}\right)^n,$$

iš čia gauname

$$\lim_{n\to\infty} P\left(W_n < e^{\left(1+\frac{x}{n}\right)}\right) = L(x) = 1 - e^{-x},$$

be to, dar tenkinama sąlyga

$$\lim_{n\to+\infty} p_{W_n}(x) = L'(x) = e^{-x}. \qquad \textbf{(2.10)}$$

Taikydami 1.13 teoremą, gausime netolygųjį konvergavimo greičio įvertį (2.10) lygybėje. Gauname

$$\tau_n(x) = nF(\alpha_n(x)) = \frac{nx}{n+x},$$

$$\omega_n(x) = u_n(x) + \log\left(1 - L(x)\right) = \frac{nx}{n+x} - x,$$

$$\Delta_n(x) = \frac{n^2x^2}{(n+x)^2}\frac{e^{-\frac{nx}{n+x}}}{2(n-1)} + e^{-x}\left(\left|\frac{nx}{n+x} - x\right| + \theta\left(\frac{nx}{n+x} - x\right)^2\right), \quad 0 < \theta < 1.$$

Galutinai gauname:

$$\left|p_{W_n}(x) - L'(x)\right| \le \frac{n(n+1)}{(n+x)^2}\left(\frac{n^2x^2}{(n+x)^2}\frac{e^{-\frac{nx}{n+x}}}{2(n-1)} + e^{-x}\left(\left|\frac{nx}{n+x} - x\right| + \theta\left(\frac{nx}{n+x} - x\right)^2\right)\right) + e^{-x}\left|\frac{n(n+1)}{(n+x)^2} + 1\right|$$

čia

$$p_{W_n}(x) = (n+1)g_n'(x)p(g_n(x))\left(1 - F(g_n(x))\right)^n = (n+1)\frac{1}{n}e^{1+\frac{x}{n}}\frac{n^2}{(n+x)^2}\frac{1}{e^{1+\frac{x}{n}}}\left(1 - \frac{x}{n+x}\right)^n = \frac{n(n+1)}{(n+x)^2}\left(\frac{n}{n+x}\right)^n$$

Iš gauto įverčio išraiškos matome, kad konvergavimo greičio (2.10) lygybėje įverčio eilė n atžvilgiu yra lygi 1/n.

Kompiuteriniai skaičiavimai pateikti prieduose (žr. IV priede 13, 14 pav). Juose pateikiamos konvergavimo greičio priklausomybės nuo x, n reikšmių.

2.4.3. Pavyzdys

Tarkime turime pasiskirstymo funkciją $F(x) = x$, $0 < x < 1$ ir tankio funkciją $p(x) = 1, \quad 0 < x < 1$.

Parinkę normavimo funkciją $\alpha_n(x) = e^{\frac{x}{n+1}}$, gauname

$$P\left(\ln Z_n < \frac{x}{n+1}\right) = P\left(Z_n < e^{\frac{x}{n+1}}\right) = \left(e^{\frac{x}{n+1}}\right)^{n+1} = H(x) = e^x .$$

Šiuo atveju netiesiškai normuoto maksimumo skirstinys su visais n yra lygus ribiniam skirstiniui.

$$H(x) = e^x .$$

Be to, dar gauname, kad $p_{Z_n}(x) = (n+1)\left(e^{\frac{x}{n+1}}\right)^n e^{\frac{x}{n+1}} \dfrac{1}{n+1} = e^x = H'(x)$.

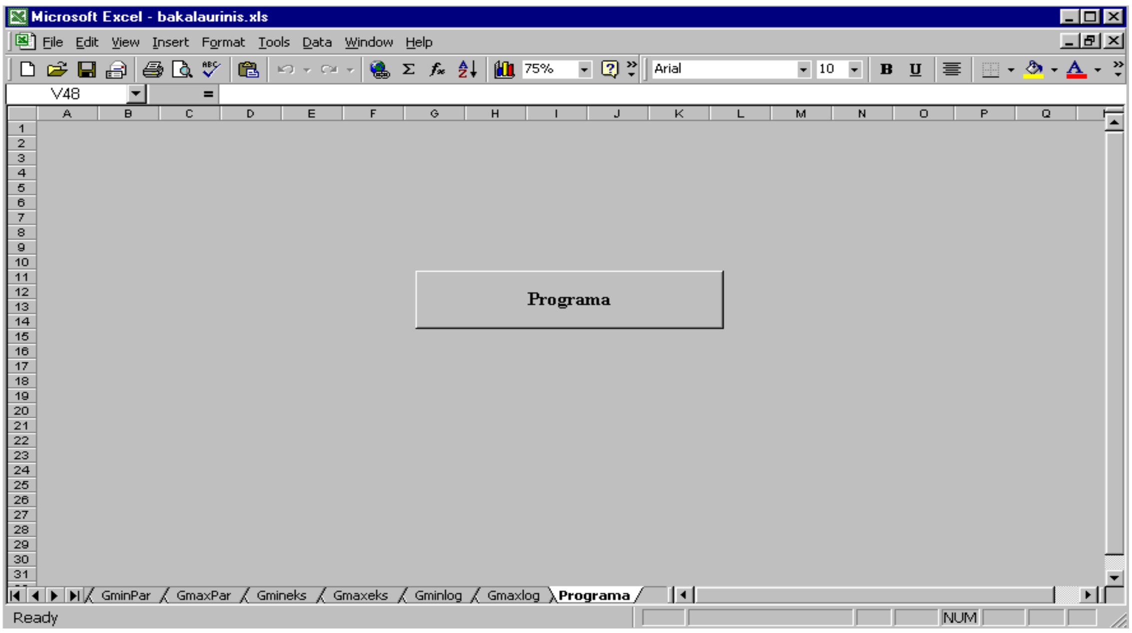
Šiuo atveju parinkome tokią normavimo funkciją $\alpha_n(x)$, kad normuoto maksimumo tankis su visais n sutampa su ribinio skirstinio tankiu.

2.5. Programinė realizacija ir instrukcija vartotojui

Programa parašyta Visual Basic for Microsoft Excel programavimo kalba. Ši programavimo kalba pasirinkta todėl, kad ji yra patogi uždavinių sprendimui ir sąsajos su vartotoju kūrimui.

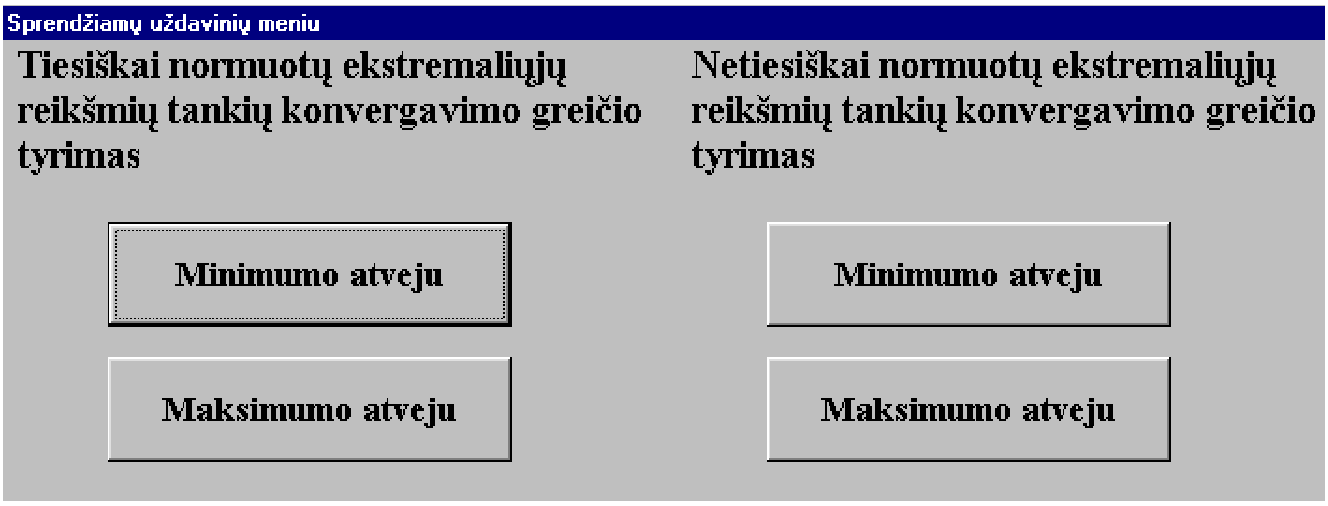
Programa saugoma byloje “magistrinis.xls”.

Atidarius šią bylą, pasirenkame langą su pavadinimu “Programa”.



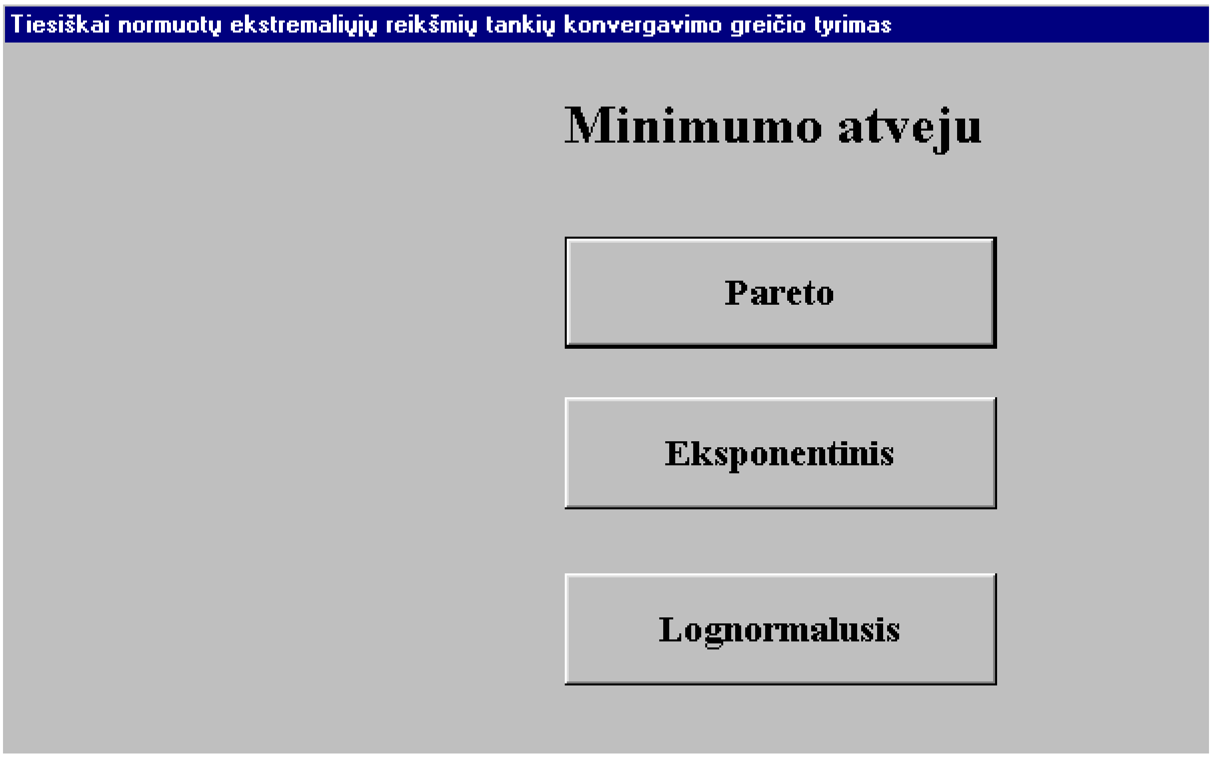
2.1 pav. Pagrindinis programos langas.

Norint paleisti programą vartotojas turi spragtelėti pele ant ikonos “Programa”. Atsiveria langas su galimais uždavinių variantais (2.2 paveikslas).



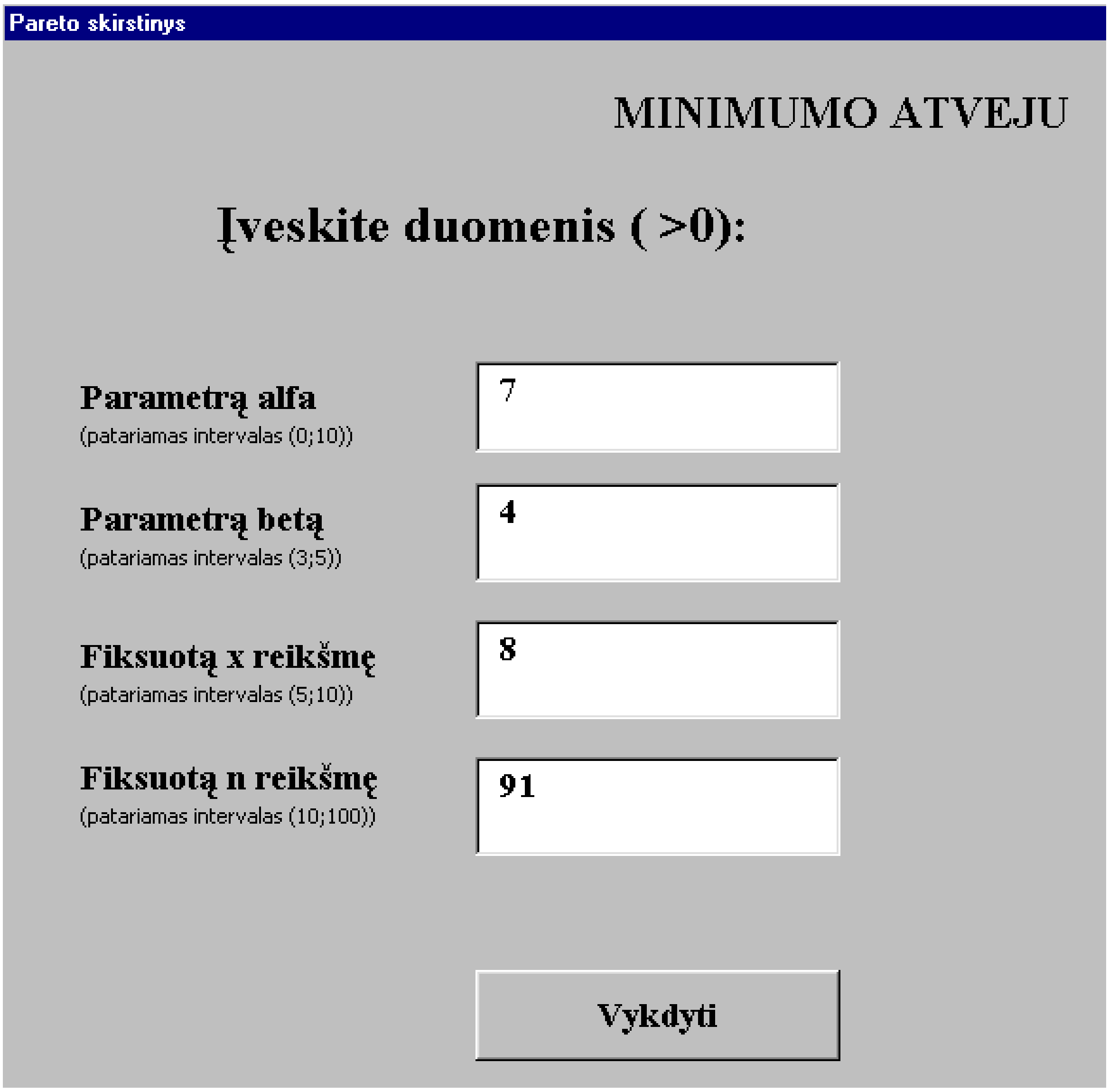
2.2 pav. Pagrindinių uždavinių meniu langas.

Galima pasirinkti tiesiškai arba netiesiškai normuotų ekstremaliųjų reikmių tankių konvergavimo greičio tyrimą. Pasirenkamas minimumo arba maksimumo atvejis. Jei pasirenkamos tiesiškai normuotos reikšmės, tai atidaromas langas su galimais uždaviniais (2.3 paveikslas).



2.3 pav. Uždavinių meniu langas minimumo atveju.

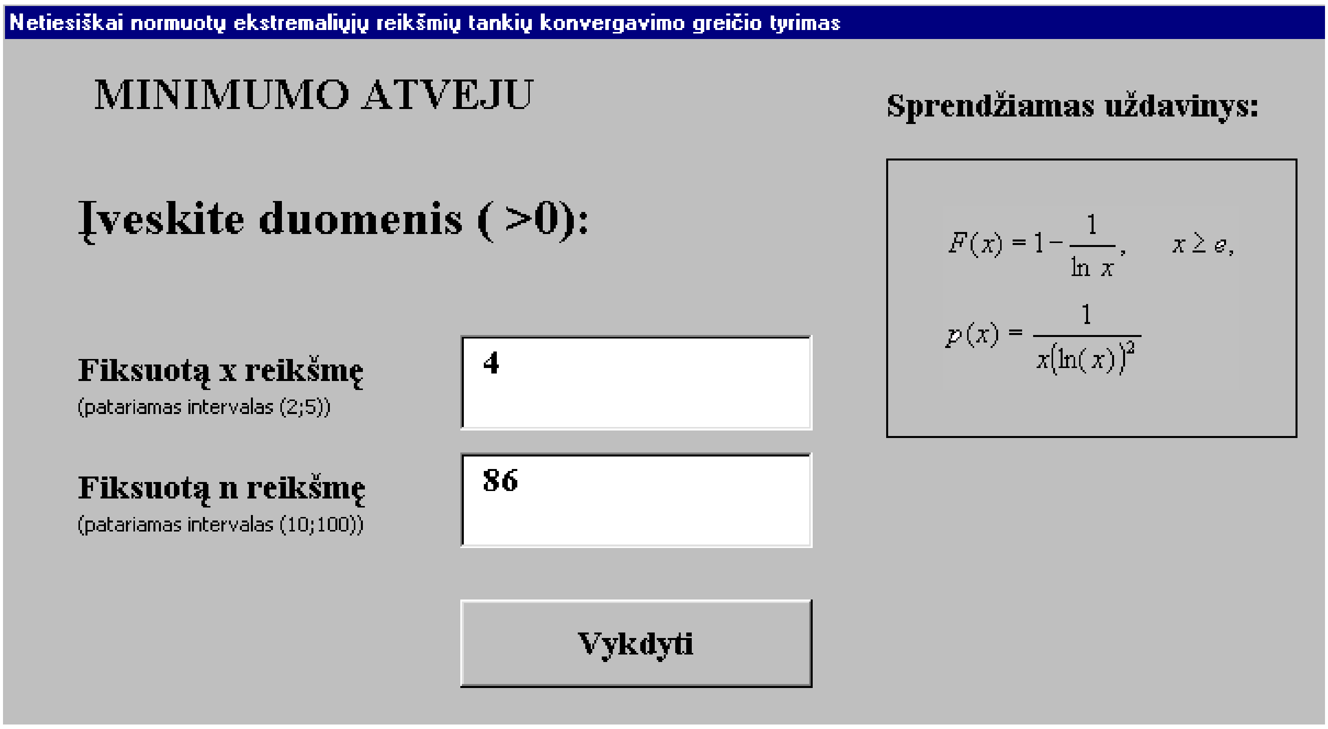
Pasirinkus bet kurį iš trijų uždavinių, pasirodo jį atitinkantis meniu. Pirmojo uždavinio meniu yra toks, kaip parodyta 2.4 paveiksle, kiti meniu analogiški.



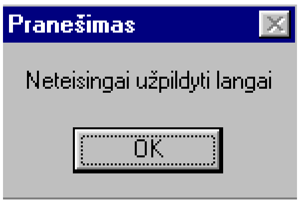
2.4 pav. Pareto skirstinio meniu langas minimumo atveju.

- Visiems duomenims bendri reikalavimai – visi laukeliai turi būti užpildyti, duomenys turi būti neneigiami skaičiai.
- Visiems skaičiams patariamas intervalas, kad rezultatai būtų geriau matomi.
- Kai duomenys įvesti, pelės spragtelėjimu ant “Vykdyti” mygtuko aktyvuojame skaičiavimo procesą tam tikram uždaviniui. Jei bent vienas duomenų laukas užpildytas neteisingai, pasirodo pranešimų langas, kad neteisingai užpildyti langai (žr. 2.5 pav.). Jei duomenys įvesti teisingai, įvykdoma programa ir aktyvuojamas darbo langas, kuriame yra rezultatai. Jei įvesti neteisingi duomenys ir norime nutraukti programa, tuomet reikia dešiniajame viršutiniame kampe paspausti kryžiuka ir sugryšime į pradinį langą.

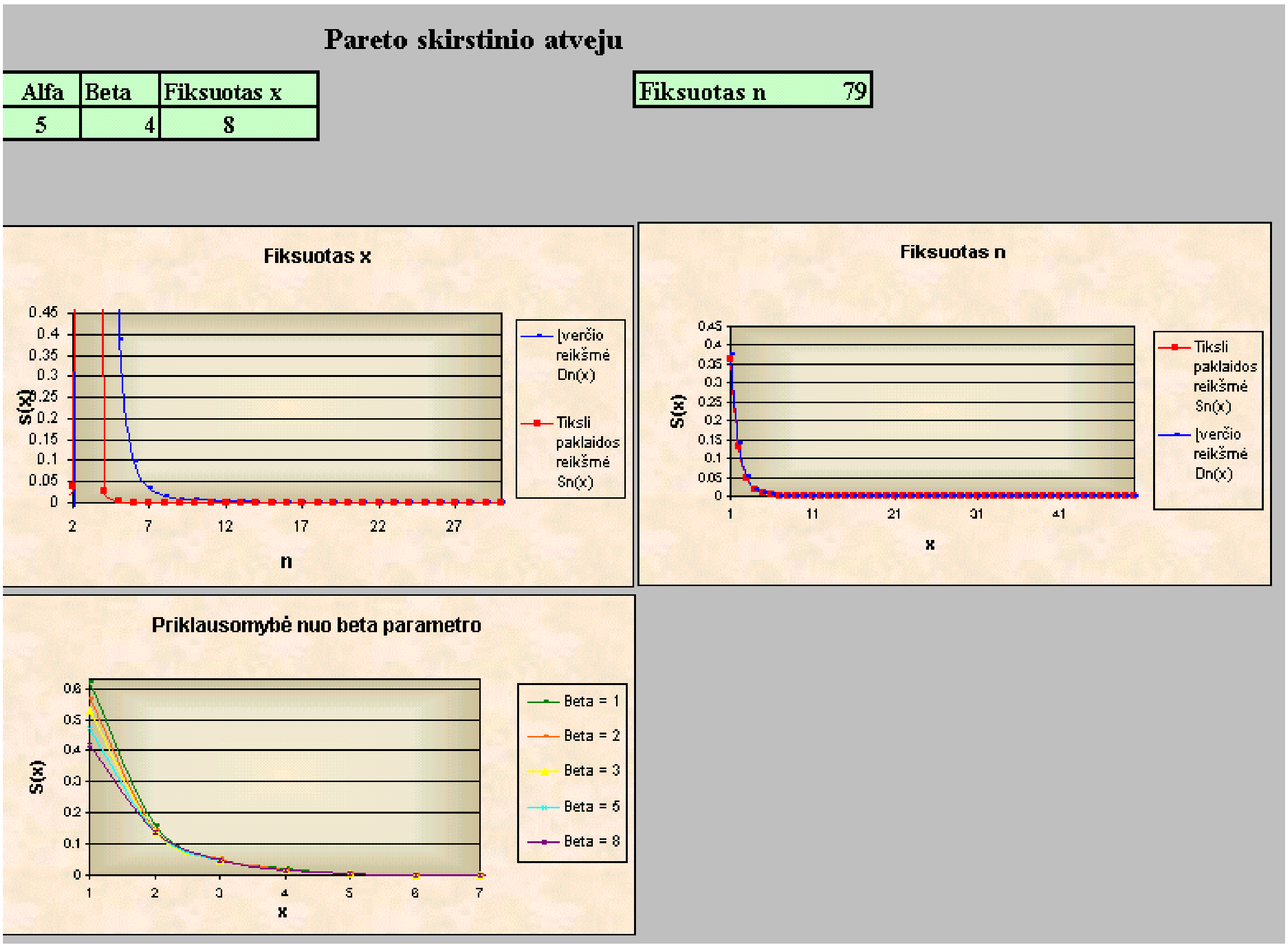
Jei pasirinkote netiesiškai normuotų ekstremaliųjų reikšmių tankių konvergavimo greičio tyrimą, tai atsiveria langas, kuriame reikia įvesti pradinius duomenis (žr. 2.5 paveikslas).



2.5 Pav. Netiesiškai normuotų ekstremaliųjų reikšmių uždavinio meniu langas minimumo atveju.



2.6 Pav. Pranešimas apie neteisingą duomenų įvedimą.



2.7 Pav. Uždavinio sprendinio pavyzdys.

IŠVADOS

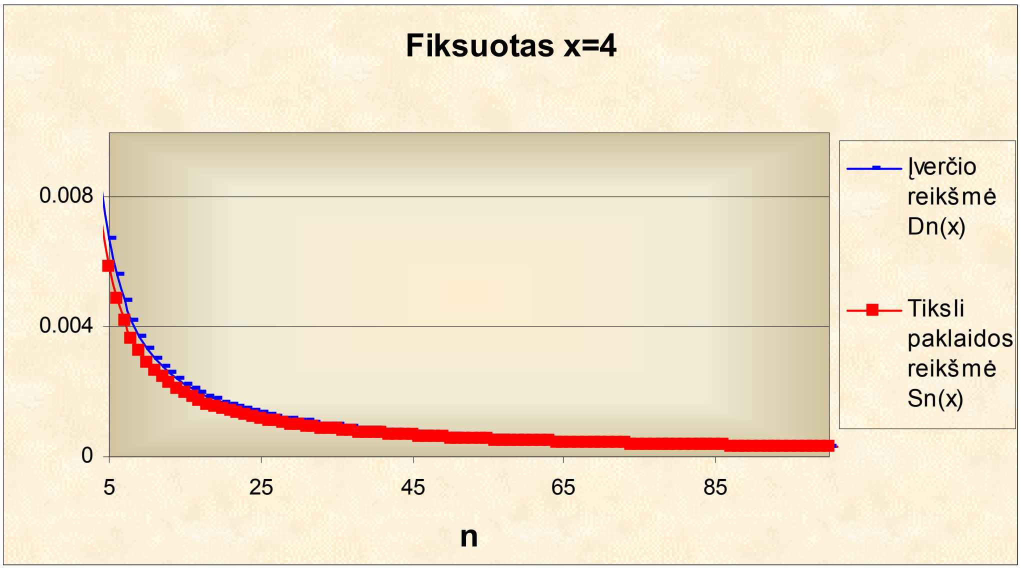
Šiame darbe tyrėme nepriklausomų atsitiktinių dydžių ekstremaliųjų reikšmių tankių konvergavimo greitį. Konkrečių skirstinių atveju gavome netolygiuosius konvergavimo greičio įverčius lokalinėse ekstremaliųjų reikšmių tankių teoremose. Nagrinėjome atskirus atvejus kai ekstremalios reikšmės yra tiesiškai ir netiesiškai normuotos.

1. Pareto skirstinio atveju gavome, kad:
   - ✓ konvergavimo greičio įverčių eilė n atžvilgiu lygi $\frac{1}{n}$.
   - ✓ Didėjant parametrui beta ekstremaliųjų reikšmių (maksimumo arba minimumo) tankio skirstinys greičiau konverguoja į ribinio skirstinio tankį, o parametras alfa konvergavimo greičiui įtakos neturi.
   - ✓ Didėjant x reikšmėms ekstremaliųjų reikšmių (maksimumo arba minimumo) tankio skirstinys greičiau konverguoja į ribinio skirstinio tankį.
2. Kitų nagrinėtų skirstinių atveju konvergavimo greičio įverčių eilė n atžvilgiu lygi $\frac{1}{n}$.
3. Kitų nagrinėtų skirstinių atveju didėjant x reikšmėms ekstremaliųjų reikšmių (maksimumo arba minimumo) tankio skirstinys greičiau konverguoja į ribinio skirstinio tankį.
4. Kai kurių skirstinių atveju galima parinkti tokią normavimo funkciją, kad netiesiškai normuotų eksremaliųjų skirstinių tankis sutampa su ribinio skirstinio tankiu.
5. Gauti netolygieji konvergavimo greičio įverčiai yra ganėtinai tikslūs, tačiau jie dažniausiai gali būti taikomi tik pakankamai dideliems n (pavyzdžiui, kai $n \geq 10$ ir pan.).
6. Nagrinėdami netiesiškai normuotų ekstremaliųjų reikšmių tankių konvergavimo greitį, gavome, kad konvergavimo greičio įverčio eilė n atžvilgiu lygi $\frac{1}{n}$.

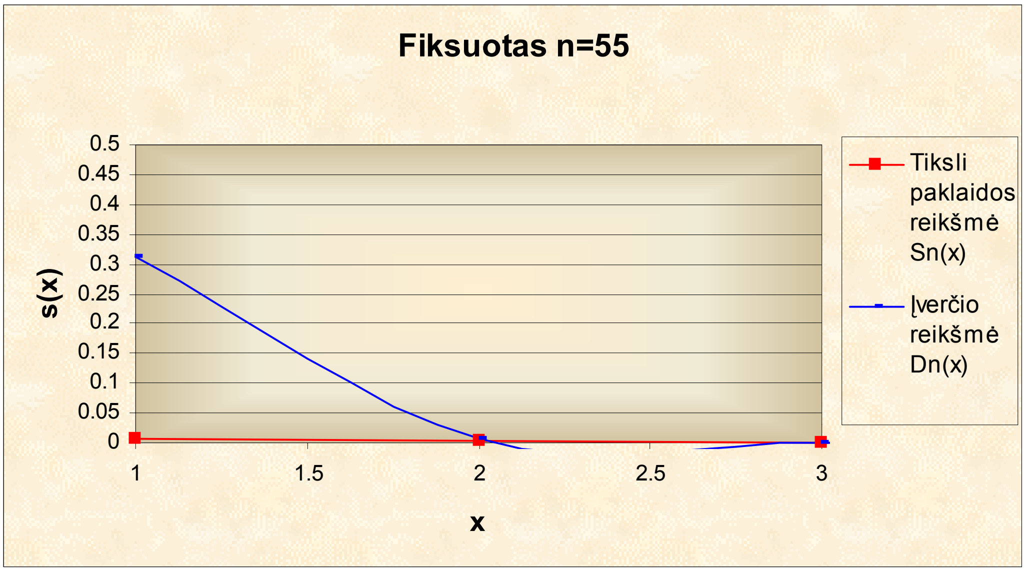
LITERATŪRA

1. J.Galambos. The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics. New York: Wiley, 1978.
2. Аксомайтис А., Йокимайтис А.. Скорость сходимости для плотности распределения максимума независимых случайных величин. //,Liet. Matem. Rink., **37**(1997), p. 133-138.
3. S.I. Resnick. Extreme Values, Regular variation, and Point Processes. New York: Springer.
4. A. Jokimaitis. Nepriklausomų atsitiktinių dydžių minimumo tankio konvergavimas. //LMD Mokslo darbai (Specialus "Lietuvos matematikos rinkinio" priedas), t.3., Matematikos ir informatikos institutas, Vilnius, 1999, p. 470-473.
5. J. Pickands. Sample sequences of maxima, Ann. Math. Statist., 38 (1967), 1570-1574.
6. T. J. Sweeting. On domains of uniform local attraction in extreme value theory, Ann. Proba (1985), 196-205.
7. E. Omey. Rates of convergence for densities in extreme value theory. Ann. Probab., 16 (1989) 479-486.
8. A. Jokimaitis, Daugiamačių atsitiktinių dydžių maksimumo tankio konvergavimo greitis, Lietuvos matematikų draugijos XXXVIII konferencijos darbai, Vilnius: Technika, 1997, 353-357 p..
9. A. Jokimaitis, A. Lesauskytė, Pareto ekstremaliųjų reikšmių tankių konvergavimo greičiai// Matematika ir matematikos modeliavimas. Konferencijos pranešimų medžiaga, Technologija, Kaunas, 2004, p. 64.

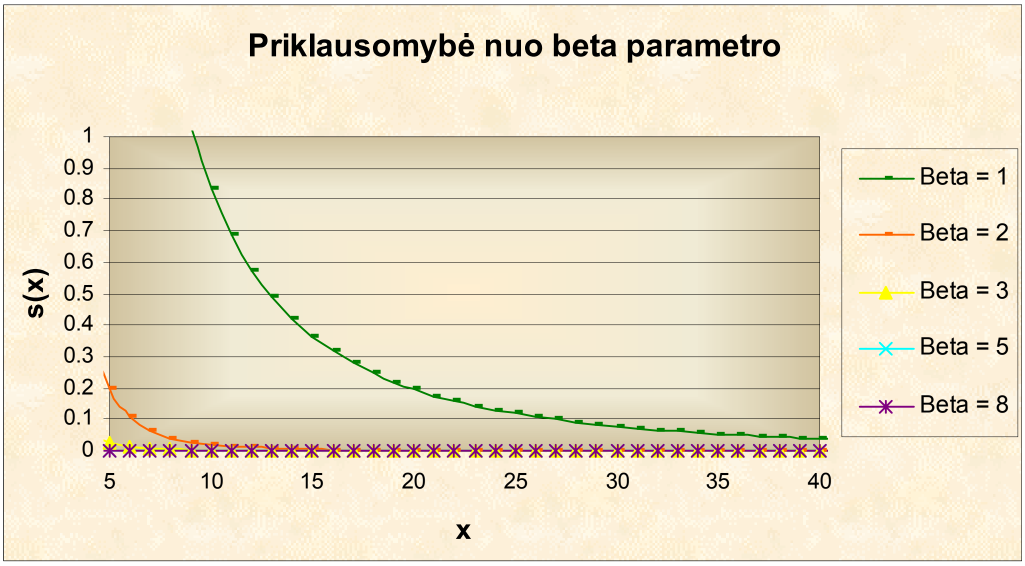
I PRIEDAS. PARETO ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ TANKIO KONVERGAVIMO GREIČIO GRAFINIS VAIZDAVIMAS



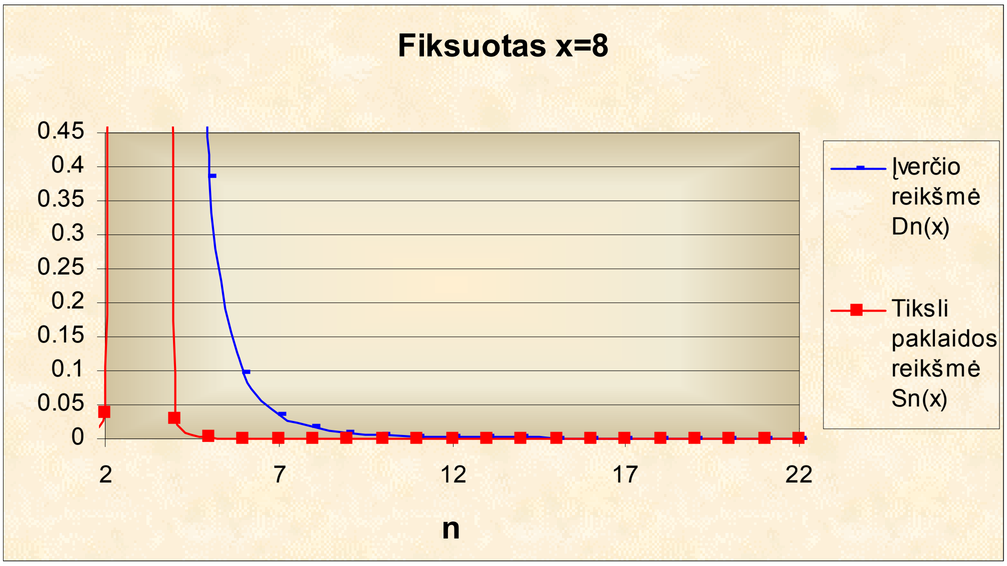
I.1 pav. Pareto atsitiktinių dydžių maksimumo tankio konvergavimo greičio priklausomybė nuo n.



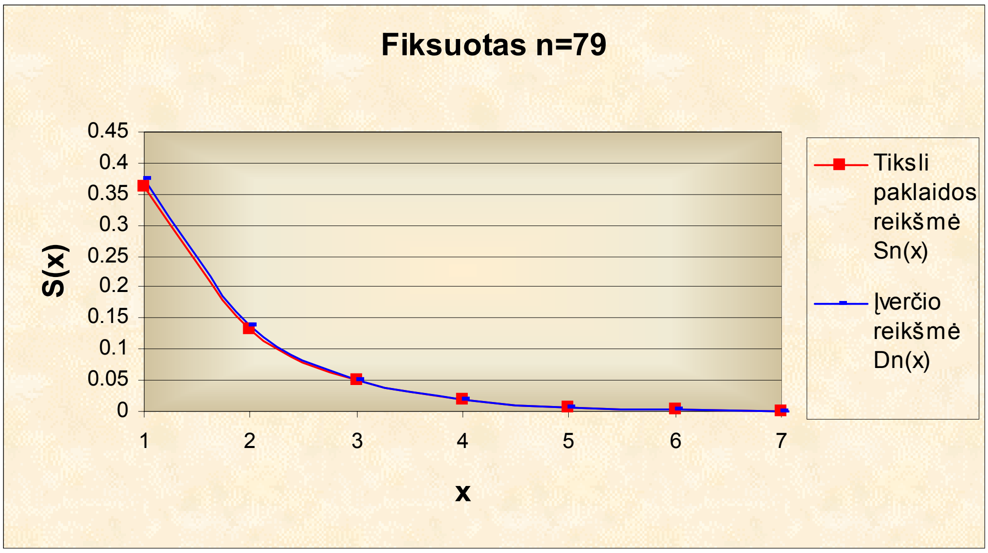
I.2 pav. Pareto atsitiktinių dydžių maksimumo tankio konvergavimo greičio priklausomybė nuo x.



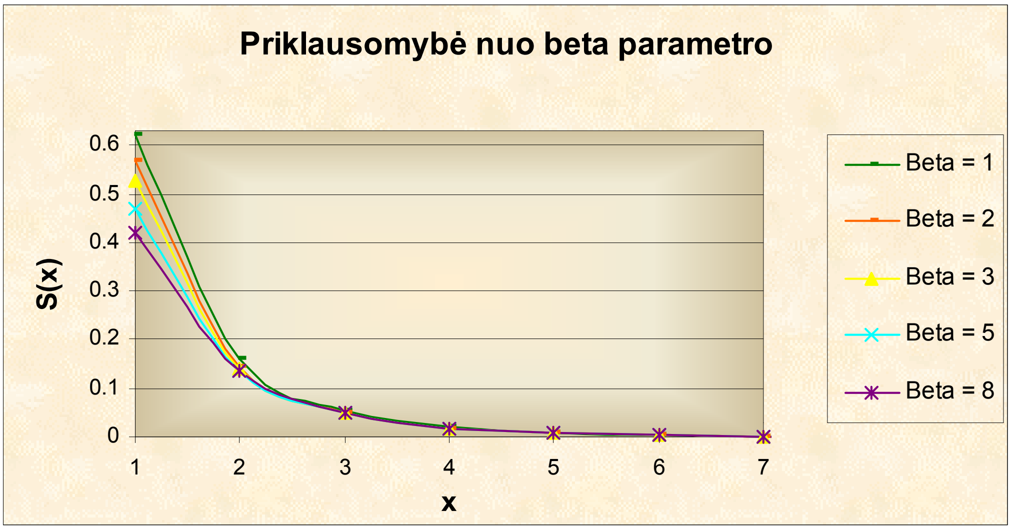
I.3 pav. Pareto atsitiktinių dydžių maksimumo tankio konvergavimo greičio priklausomybė nuo parametro beta.



I.4 pav. Pareto atsitiktinių dydžių minimumo tankio konvergavimo greičio priklausomybė nuo n.

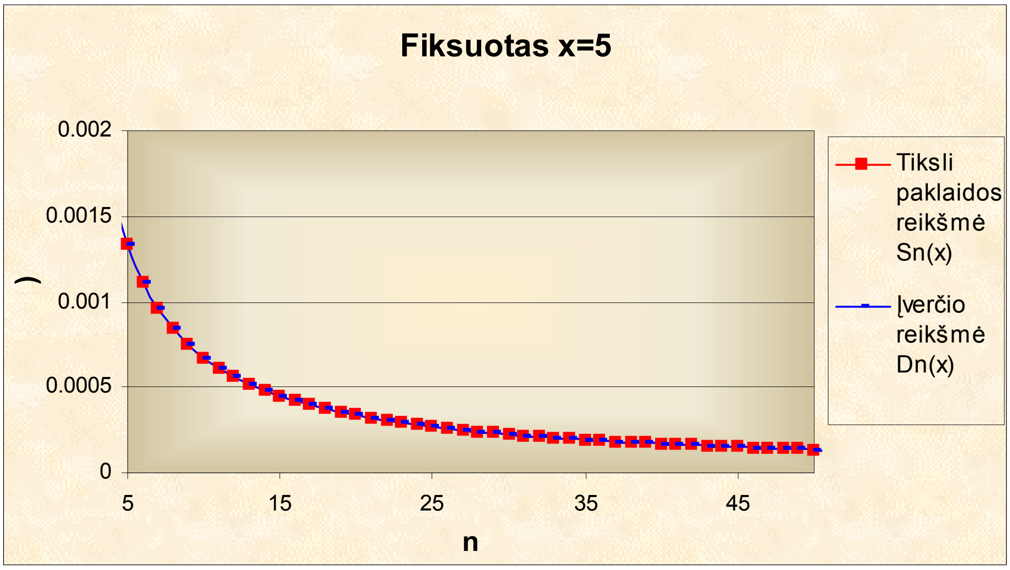


I.5 pav. Pareto atsitiktinių dydžių minimumo tankio konvergavimo greičio priklausomybė nuo x.

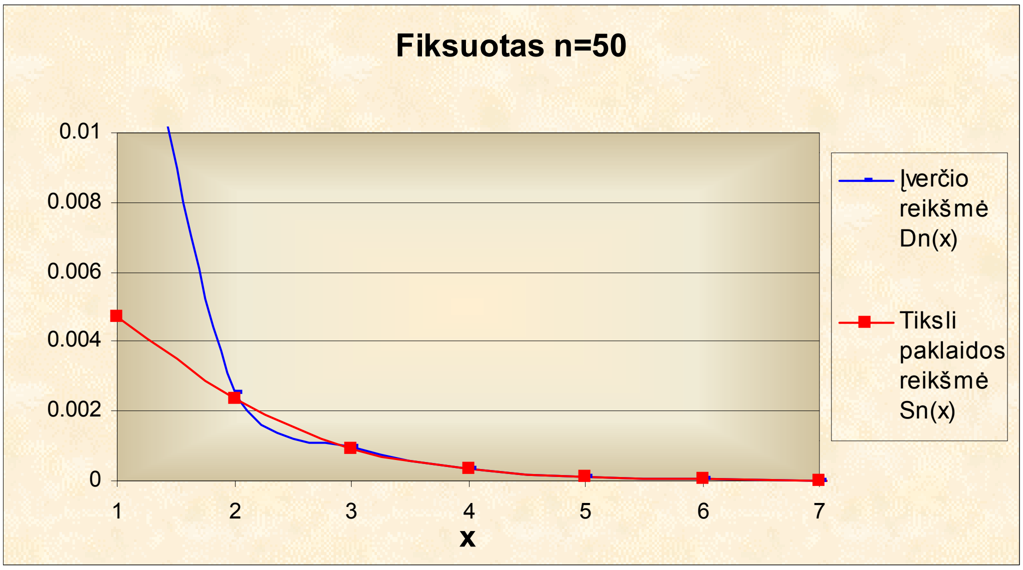


I.6 pav. Pareto atsitiktinių dydžių minimumo tankio konvergavimo greičio priklausomybė nuo parametro beta.

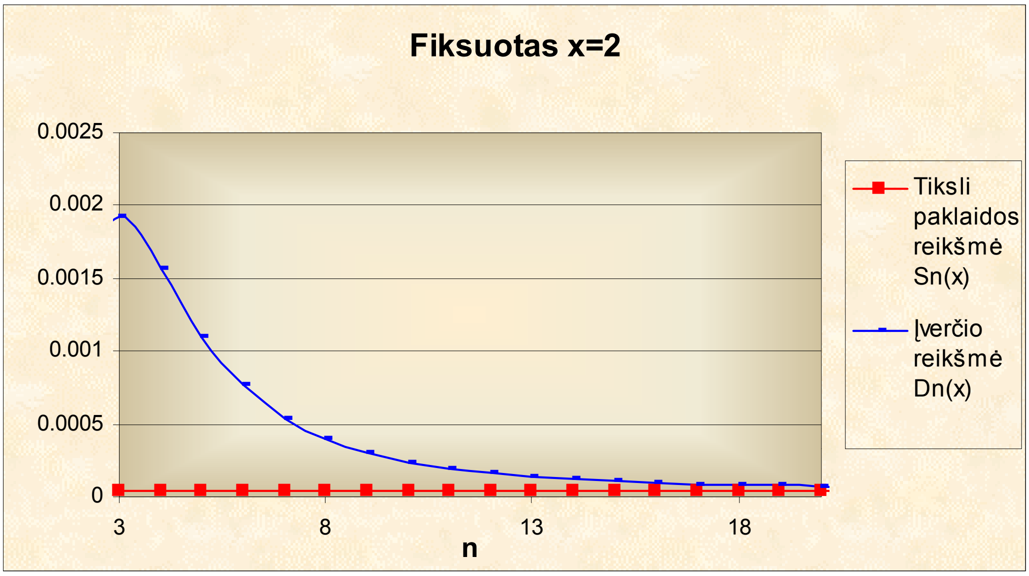
II PRIEDAS. EKSPONENTINIŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ TANKIO KONVERGAVIMO GREIČIO GRAFINIS VAIZDAVIMAS



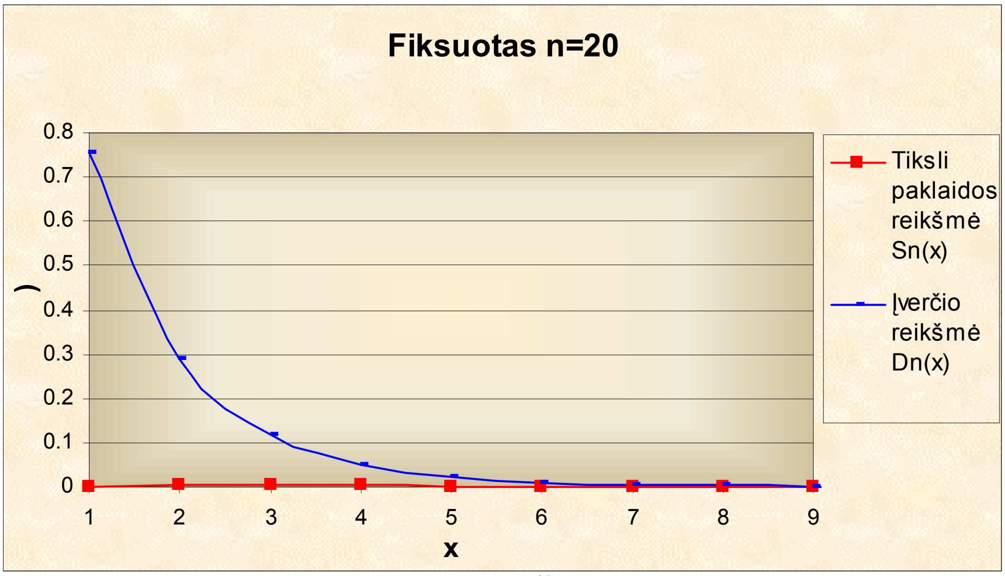
II.1 pav. Eksponentinių atsitiktinių dydžių maksimumo tankio konvergavimo greičio priklausomybė nuo n.



II.2 pav. Eksponentinių atsitiktinių dydžių maksimumo tankio konvergavimo greičio priklausomybė nuo x.

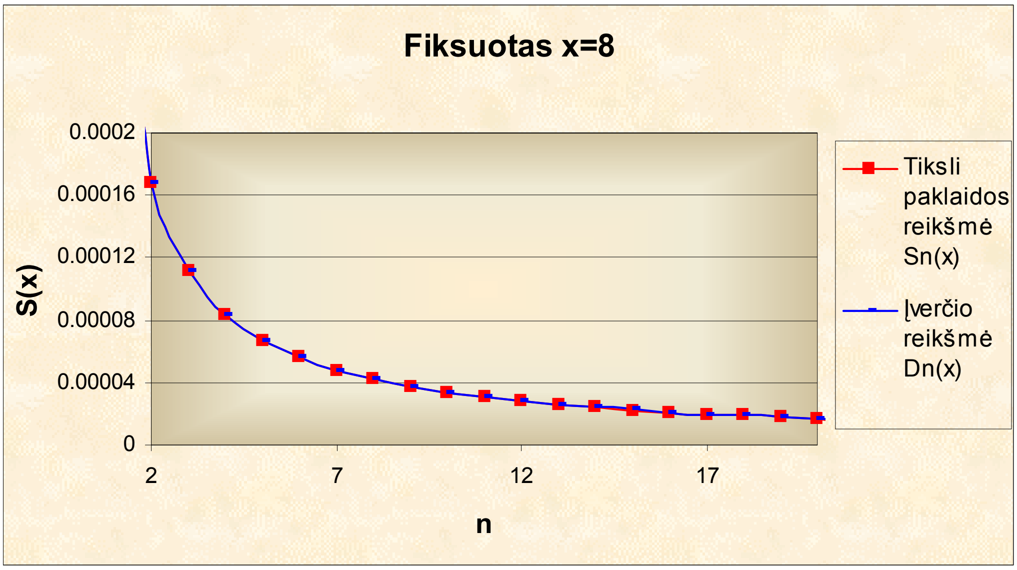


II.3 pav. Eksponentinių atsitiktinių dydžių minimumo tankio konvergavimo greičio priklausomybė nuo n.

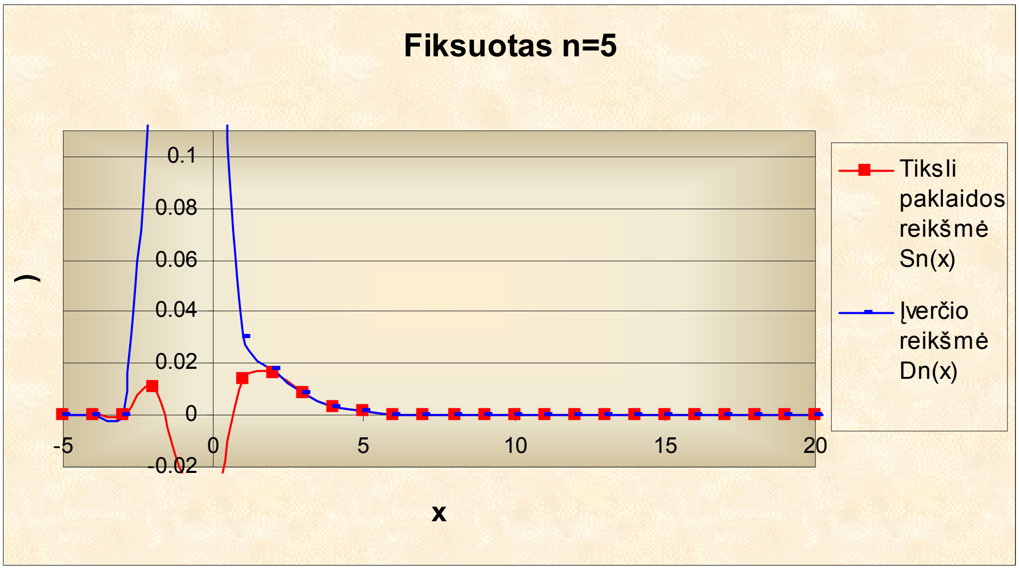


II.4 pav. Eksponentinių atsitiktinių dydžių minimumo tankio konvergavimo greičio priklausomybė nuo x.

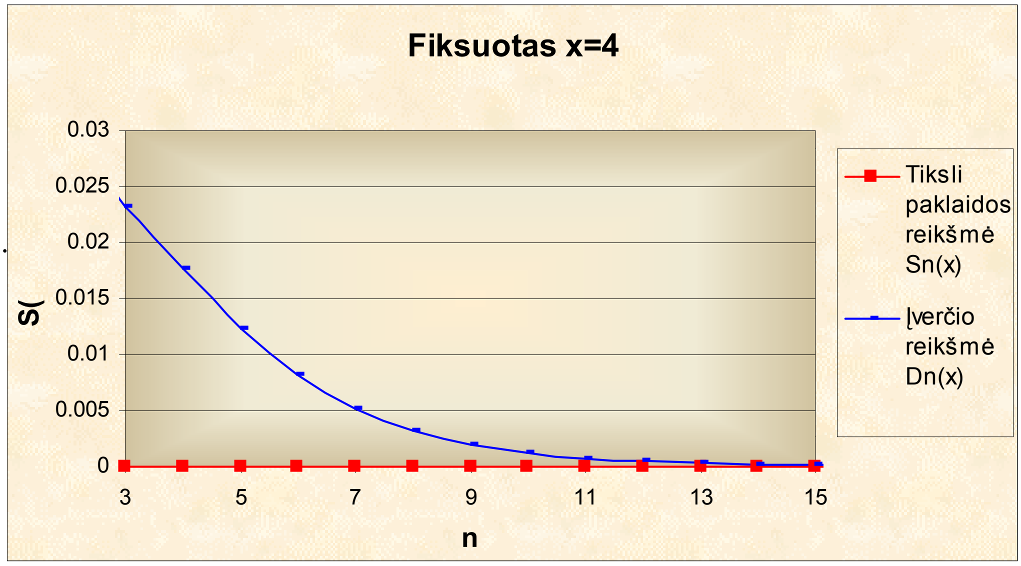
III PRIEDAS. LOGISTINIŲ ATSITIKTINIŲ DYDŽIŲ TANKIO KONVERGAVIMO GREIČIO GRAFINIS VAIZDAVIMAS



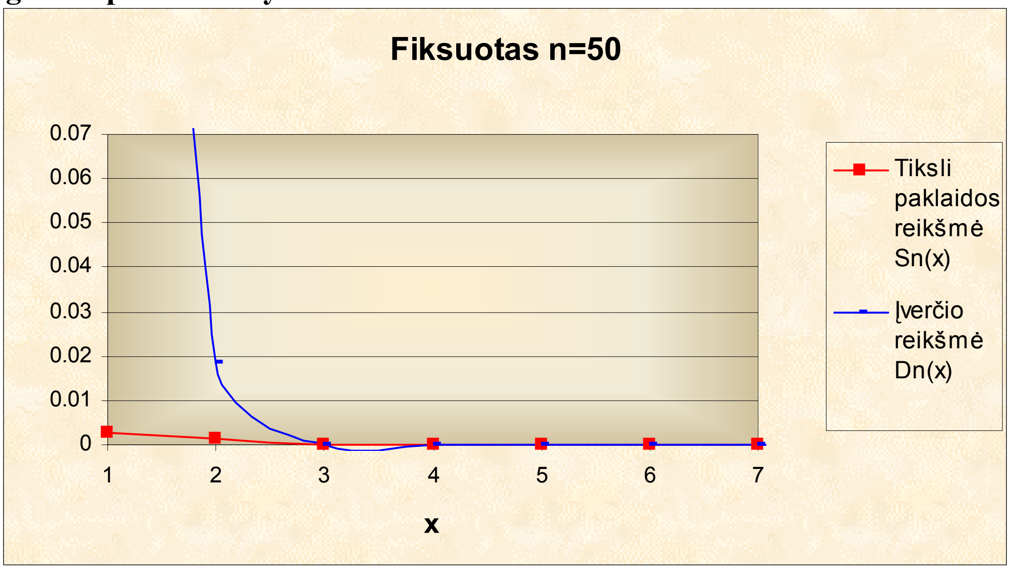
III.1 pav. Logistinių atsitiktinių dydžių maksimumo tankio konvergavimo greičio priklausomybė nuo n.



III.2 pav. Logistinių atsitiktinių dydžių maksimumo tankio konvergavimo greičio priklausomybė nuo x

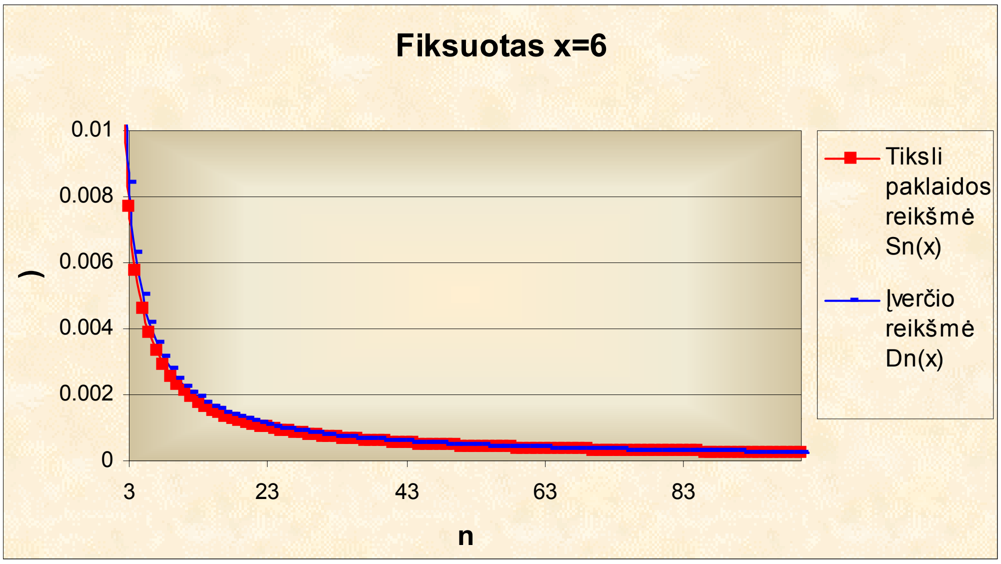


III.3 pav. Logistinių atsitiktinių dydžių minimumo tankio konvergavimo greičio priklausomybė nuo n.

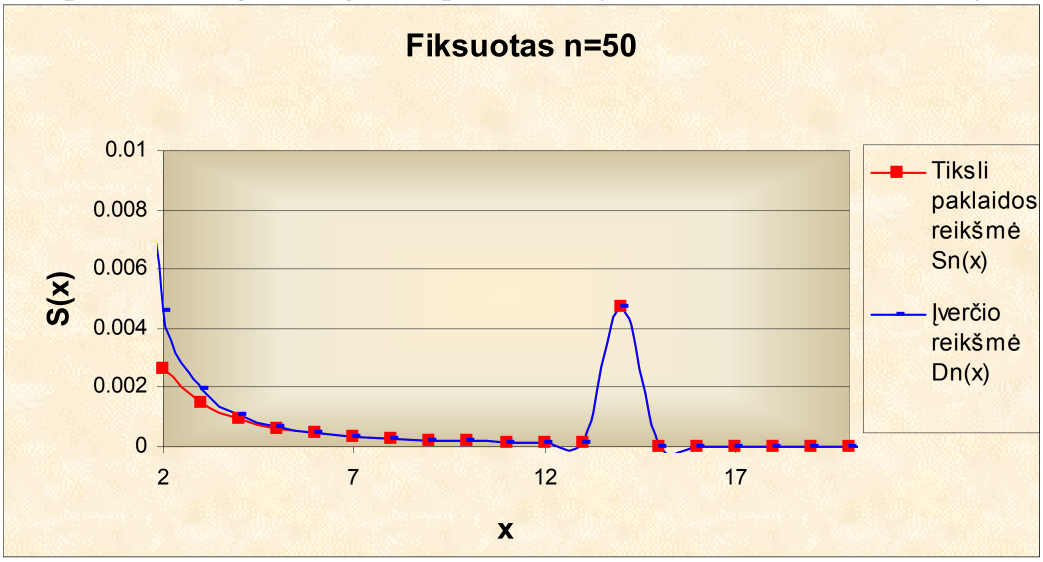


III.4 pav. Logistinių atsitiktinių dydžių minimumo tankio konvergavimo greičio priklausomybė nuo x.

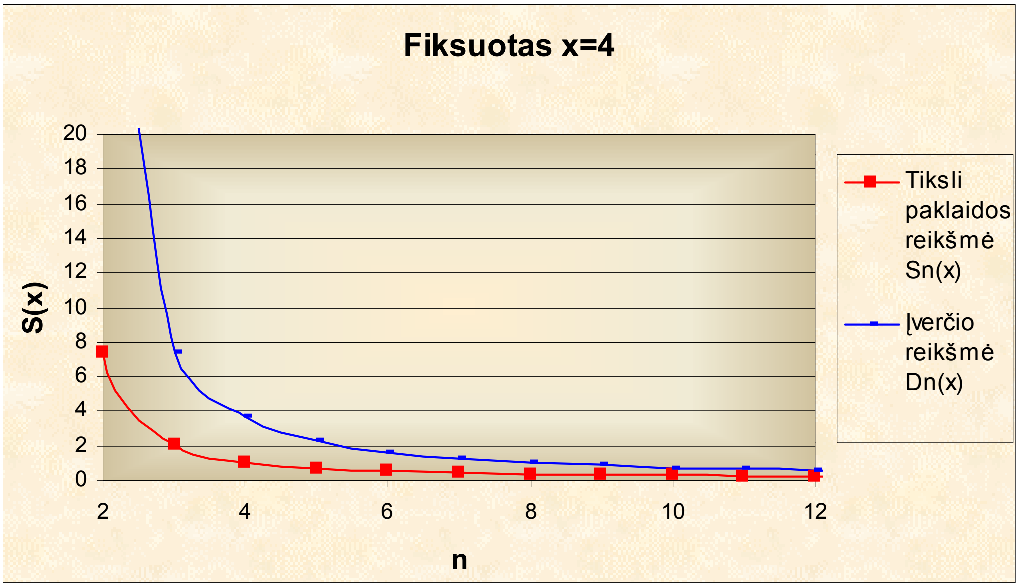
IV PRIEDAS. NETIESINIO NORMAVIMO KONVERGAVIMO GREIČIO GRAFINIS VAIZDAVIMAS



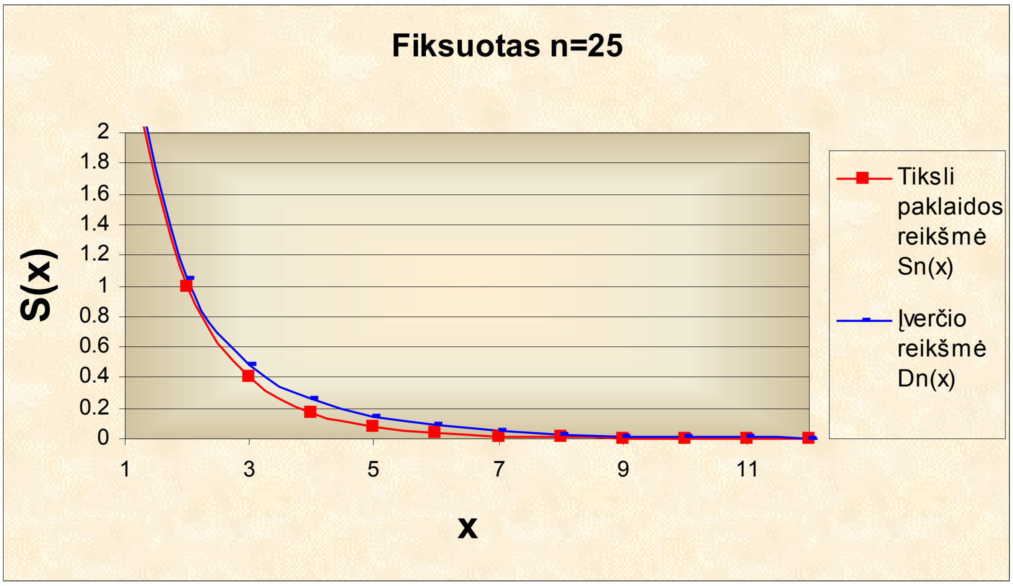
IV.1 pav. Konvergavimo greičio priklausomybė nuo n maksimumo atveju.



IV.2 pav. Konvergavimo greičio priklausomybė nuo x maksimumo atveju.

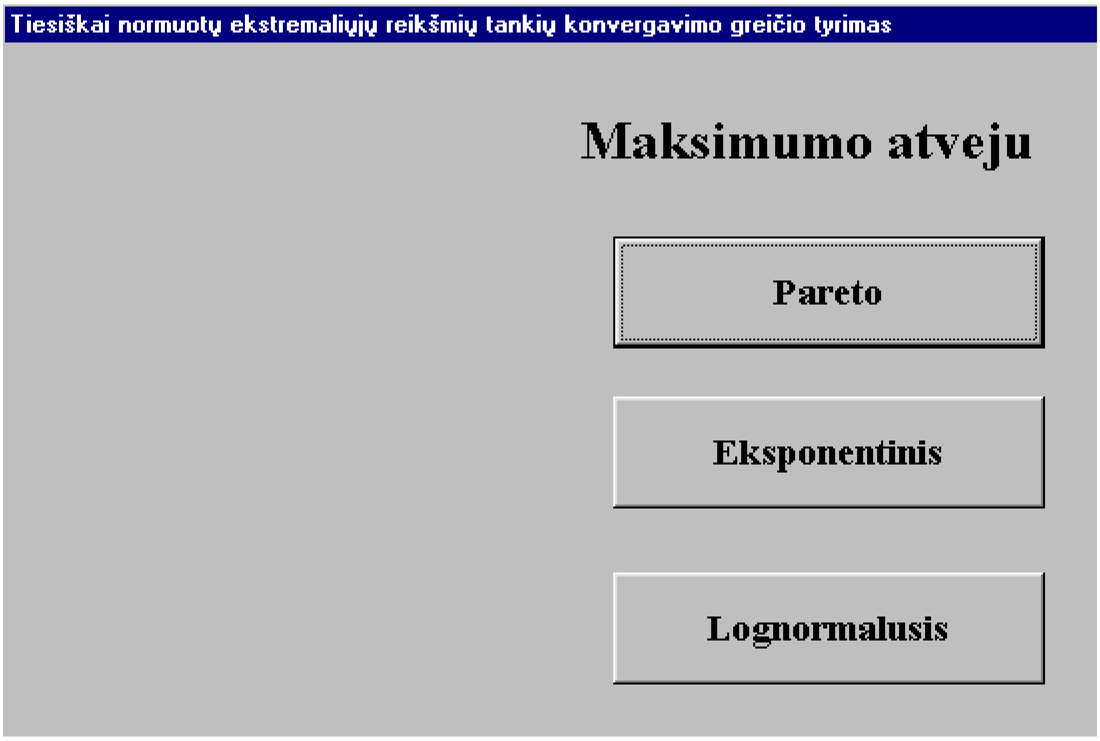


IV.3 pav. Konvergavimo greičio priklausomybė nuo n minimumo atveju.

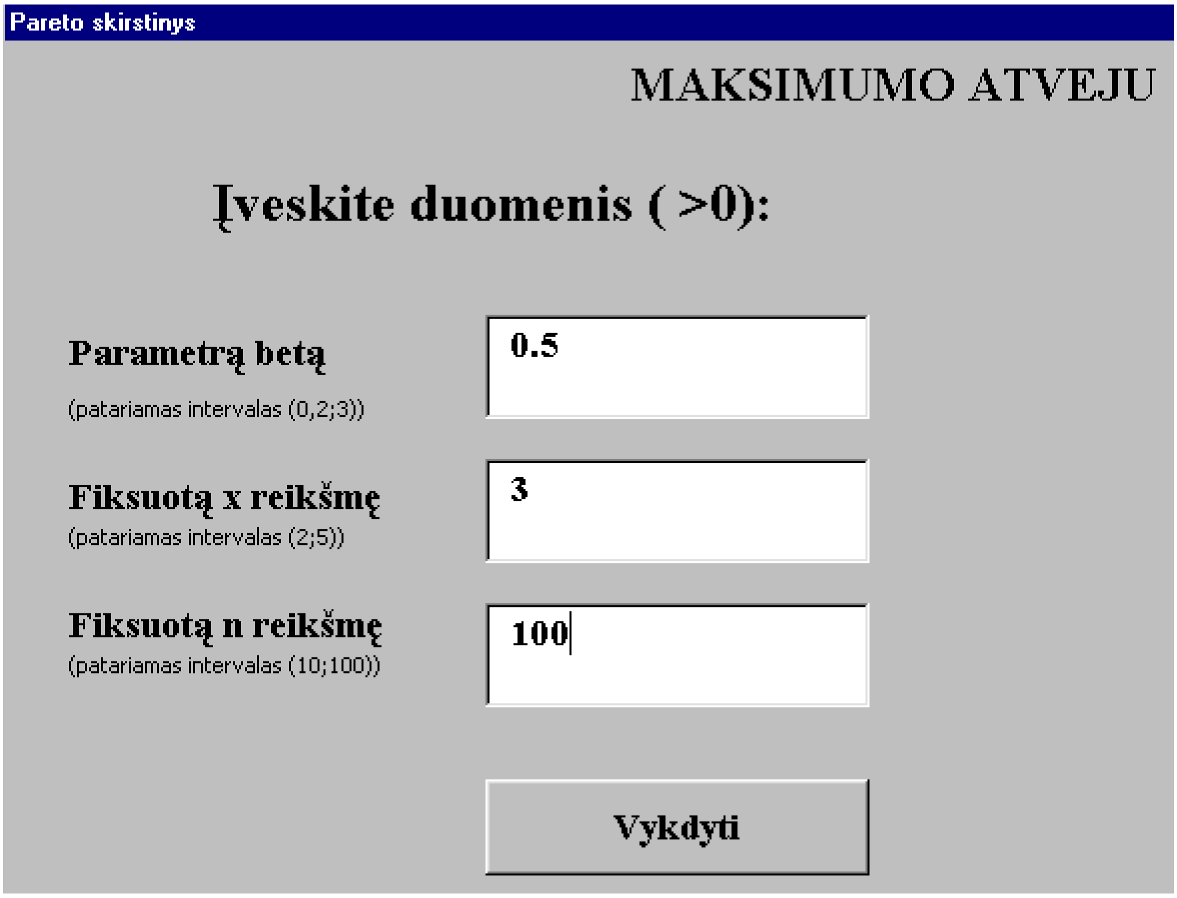


IV.4 pav. Konvergavimo greičio priklausomybė nuo x minimumo atveju.

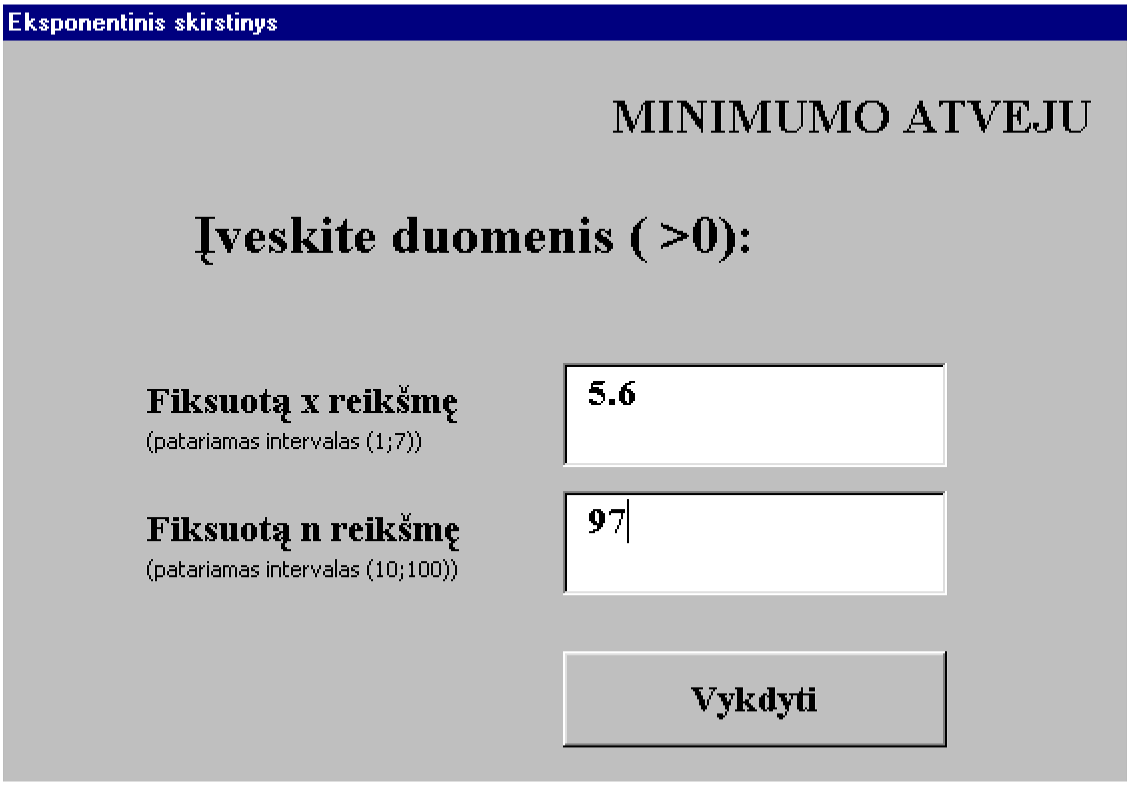
V PRIEDAS. PROGRAMOS MENIU LANGAI



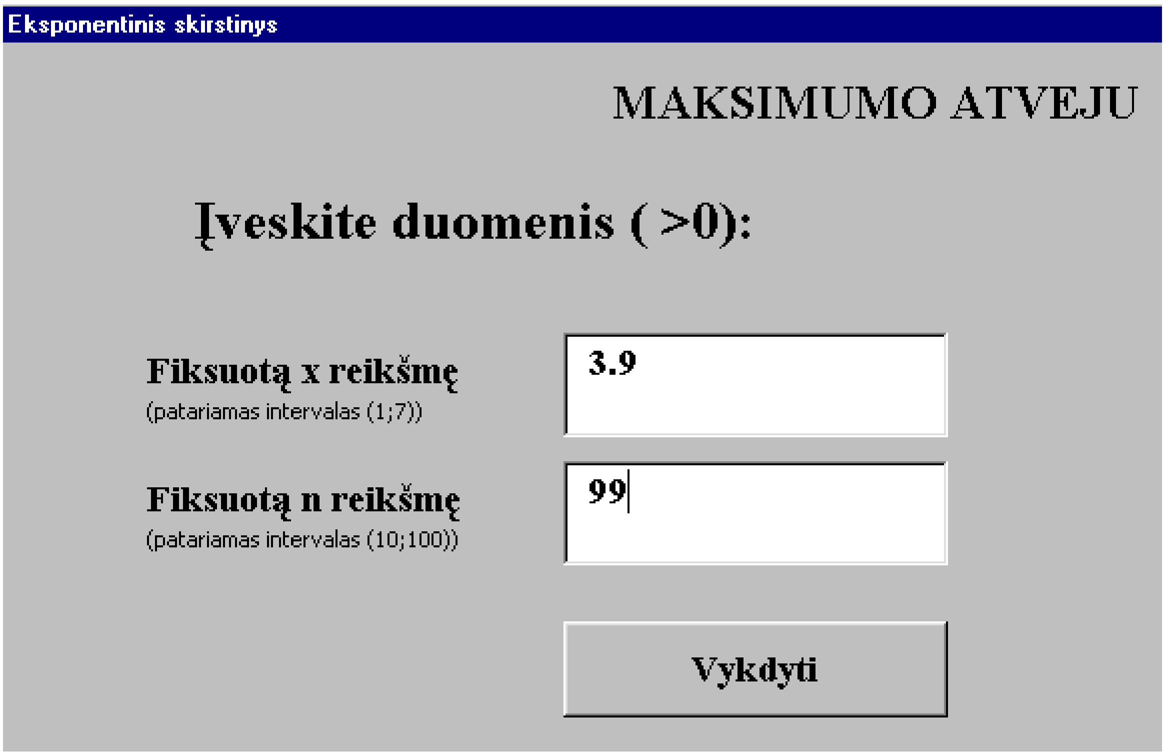
V.1 Pav. Uždavinių meniu langas maksimumo atveju.



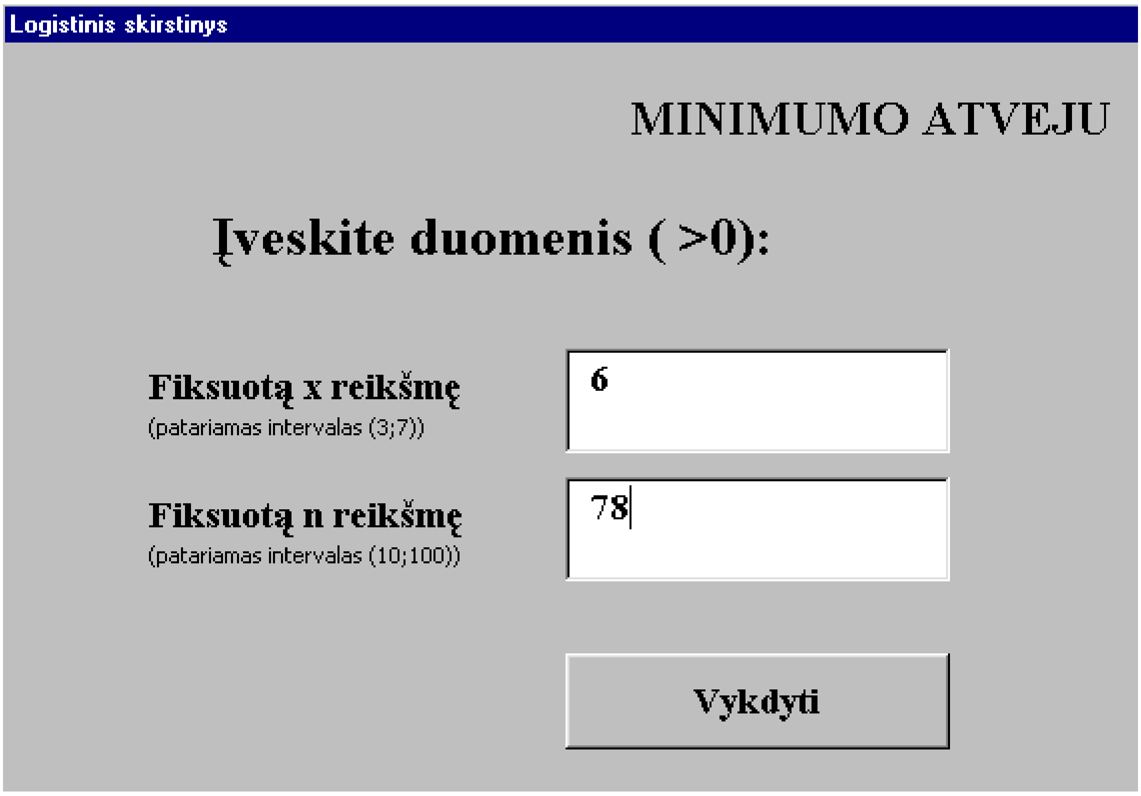
V.2 Pav. Pareto skirstinio meniu langas maksimumo atveju.



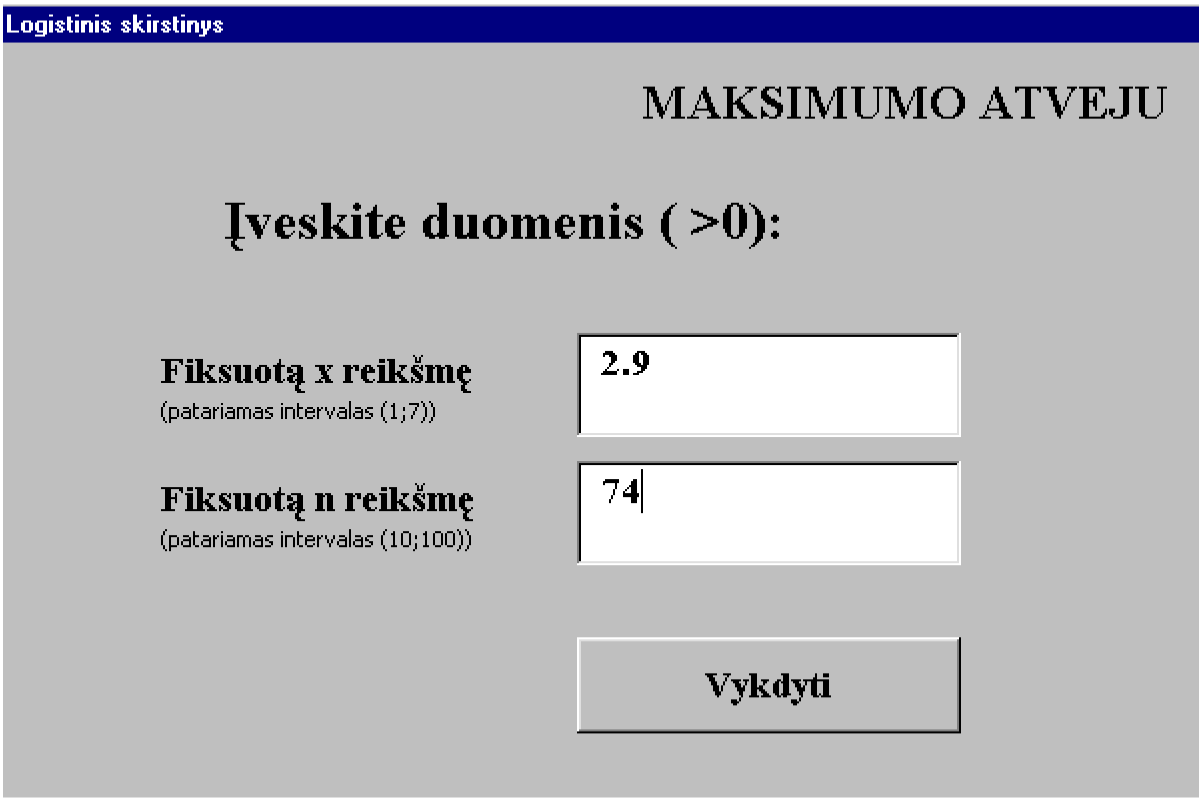
V.3 Pav. Eksponentinio skirstinio meniu langas minimumo atveju.



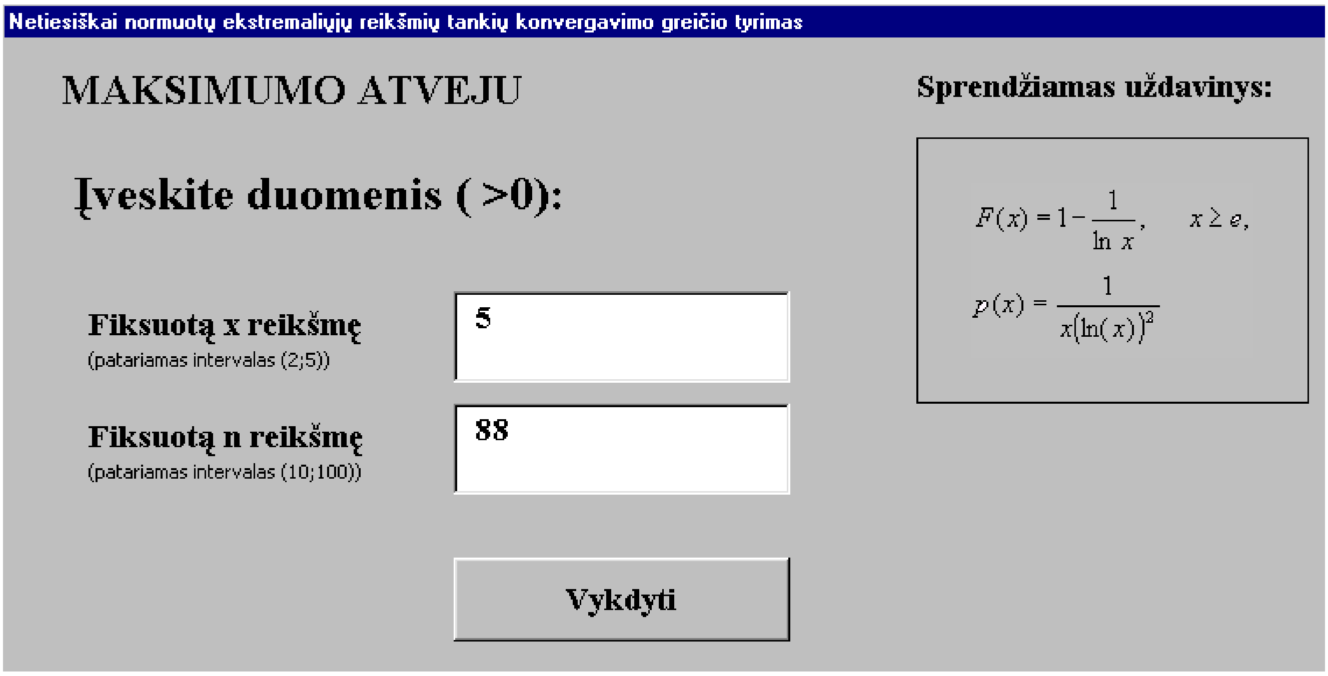
V.4 Pav. Eksponentinio skirstinio meniu langas maksimumo atveju.



V.5 Pav. Logistinio skirstinio meniu langas minimumo atveju.



V.6 Pav. Logistinio skirstinio meniu langas maksimumo atveju.



V.7 Pav. Netiesiškai normuotų ekstremaliųjų reikšmių uždavinio meniu langas maksimumo atveju.