

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
INFORMATIKOS FAKULTETAS
SISTEMINĖS ANALIZĖS KATEDRA

Martynas Patašius

**Akies dugno kraujagyslių vingiuotumo įvertinimo
metodai**

Magistro darbas

Darbo vadovas
doc. Vaidotas Marozas

Kaunas, 2006

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

INFORMATIKOS FAKULTETAS

SISTEMINĖS ANALIZĖS KATEDRA

Martynas Patašius

**Akies dugno kraujagyslių vingiuotumo
įvertinimo metodai**

Magistro darbas

Kalbos konsultantė

Lietuvių k. katedros lekt.
dr. I. Mickienė

2006-05

Vadovas

doc. dr. V. Marozas
2006-05

Recenzentė

doc. dr. R. Misevičienė

2006-05

Atliko

IFM-0/1 gr. stud.
Martynas Patašius

2006-05

Kaunas, 2006

Turinys

Ivadas.....	9
1. Teorinė vingiuotumo įvertinimo metodų analizė.....	12
1.1. Vingiuotumo nustatymo metodai.....	12
1.2. Siūlomas vingiuotumo matavimo metodas.....	16
2. Eksperimentinis vingiuotumo įvertinimo metodų tyrimas.....	20
2.1. Tyrimas, naudojant teorinius kraujagyslių modelius.....	20
2.2. Tyrimas, naudojant realius akies dugno vaizdus.....	22
2.3. Tyrimas, naudojant optometrinę kraujagyslių vertinimo skalę.....	24
3. Praktinis rezultatų pritaikymas.....	38
3.1. Akies dugno vaizdų analizė.....	38
3.2. Kelių projektavimas.....	43
3.3. Funkcijų interpoliavimas ir aproksimavimas.....	43
Išvados.....	44
Literatūra.....	45
Padėkos.....	48
1 priedas. Autoriaus publikacijų, susijusių su šiuo darbu, sąrašas.....	49
2 priedas. Vingiuotumo, apskaičiuoto siūlomu metodu, nulių radimas.....	50
3 priedas. Oilerio lygties išvedimas vingiuotumui, apskaičiuotam siūlomu metodu, naudojant kreivumo aproksimaciją.....	52
4 priedas. Oilerio lygties išvedimas vingiuotumui, apskaičiuotam siūlomu metodu, nenaudojant kreivumo aproksimacijos.....	71
5 priedas. Autoriaus publikuotų darbų sąrašas.....	121

Paveikslų sąrašas

1 pav. Optometrinė kraujagyslių vertinimo skalė (18)	12
2 pav. Supaprastinta siūlomojo vingiuotumo apskaičiavimo algoritmo struktūrograma	17
3 pav. Tikslų funkcijos grafikas (vienas iš atvejų)	19
4 pav. Kai kurių funkcijų, naudotų lyginant vingiuotumo vertinimo metodus, grafikai: (a) $y = \sin(x)$, (b) $y = \sqrt{x}$, (c) $y = \sqrt{x} + 0,1 \cdot \sin(10x)$, (d) $y = \sqrt{x} + 0,01 \cdot \sin(10x)$	20
5 pav. Akies dugno vaizdas su normaliu vingiuotumu – pažymėta nagrinėjama kraujagyslė (maždaug tiesi).....	22
6 pav. Akies dugno vaizdas su normaliu vingiuotumu – pažymėta nagrinėjama kraujagyslė (netiesi)	23
7 pav. Akies dugno vaizdas su padidėjusiu vingiuotumu – pažymėta nagrinėjama kraujagyslė	23
8 pav. Iš optometrinės kraujagyslių vingiuotumo skalės gautų kraujagyslių, panaudotų tyrime, pavyzdžiai: (a) viršutinė kraujagyslė nulinio laipsnio etalone, (b) pirmoji viršutinės kraujagyslės atšaka pirmo laipsnio etalone, (c) trasuota nuo kairiojo viršutinio galo kraujagyslė nulinio laipsnio etalone, (d) trasuota nuo kairiojo viršutinio galo kraujagyslė trečio laipsnio etalone	25
9 pav. Tyrimo, naudojant optometrinę skalę, rezultatai lanko-stygos santykiui	34
10 pav. Tyrimo, naudojant optometrinę skalę, rezultatai italų mokslininkų pasiūlytam metodui	35
11 pav. Tyrimo, naudojant optometrinę skalę, rezultatai kreivumo modulio integralui, padalintam iš ilgio.....	35
12 pav. Tyrimo, naudojant optometrinę skalę, rezultatai siūlomam metodui be filtravimo.....	36
13 pav. Tyrimo, naudojant optometrinę skalę, rezultatai siūlomam metodui su koordinačių filtravimu	36
14 pav. Tyrimo, naudojant optometrinę skalę, rezultatai siūlomam metodui su koordinačių išvestinių filtravimu	37
15 pav. Kraujagyslės atpažinimo algoritmo žingsnis	39
16 pav. Kraujagyslė, rasta naudojant pasiūlyto kraujagyslių trasavimo metodo pirmąją versiją	40
17 pav. Kraujagyslės su šviesos refleksu, rastos naudojant pasiūlyto kraujagyslių trasavimo metodo antrąją versiją (nefiltravus vaizdo), fragmentas.....	42
18 pav. Kraujagyslės su šviesos refleksu, rastos naudojant pasiūlyto kraujagyslių trasavimo metodo antrąją versiją (nufiltravus vaizdą), fragmentas.....	42

Lentelių sąrašas

1 lentelė. Tiesės atkarpos be triukšmų ir su triukšmais vingiuotumo įverčiai, gauti įvairiais metodais	21
2 lentelė. Sinusoidės, parabolės ir kai kurių jų kombinacijų vingiuotumo įverčiai, gauti įvairiais metodais	21
3 lentelė. Sinusoidės, parabolės ir kai kurių jų kombinacijų vingiuotumo įverčiai, gauti įvairiais metodais kai visų taškų koordinatės padaugintos iš dviejų	22
4 lentelė. Maždaug tiesios kraujagyslės, rankiniu būdu išskirtos iš normalaus vingiuotumo akies dugno vaizdo (5 pav.), vingiuotumo vertinimo įvairiais metodais statistiniai įverčiai	24
5 lentelė. Netiesios kraujagyslės, rankiniu būdu išskirtos iš normalaus vingiuotumo akies dugno vaizdo (6 pav.), vingiuotumo vertinimo įvairiais metodais statistiniai įverčiai.....	24
6 lentelė. Kraujagyslės, rankiniu būdu išskirtos iš padidėjusio vingiuotumo akies dugno vaizdo (7 pav.), vingiuotumo vertinimo įvairiais metodais statistiniai įverčiai.....	24
7 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų viršutinės kraujagyslės vingiuotumo vertinimo lanko stygos santykiu statistiniai įverčiai	25
8 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų viršutinės kraujagyslės vingiuotumo vertinimo italų mokslininkų pasiūlytu metodu statistiniai įverčiai.....	25
9 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų viršutinės kraujagyslės vingiuotumo vertinimo kreivumo modulio integralu, padalintu iš linijos ilgio, statistiniai įverčiai.....	26
10 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų viršutinės kraujagyslės vingiuotumo vertinimo siūlomu metodu (be filtravimo) statistiniai įverčiai	26
11 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų viršutinės kraujagyslės vingiuotumo vertinimo siūlomu metodu (su koordinačių filtravimu) statistiniai įverčiai	26
12 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų viršutinės kraujagyslės vingiuotumo vertinimo siūlomu metodu (su koordinačių išvestinių filtravimu) statistiniai įverčiai	26
13 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų pirmosios viršutinės kraujagyslės atšakos vingiuotumo vertinimo lanko stygos santykiu statistiniai įverčiai	27
14 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų pirmosios viršutinės kraujagyslės atšakos vingiuotumo vertinimo italų mokslininkų pasiūlytu metodu statistiniai įverčiai	27
15 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų pirmosios viršutinės kraujagyslės atšakos vingiuotumo vertinimo kreivumo modulio integralu, padalintu iš linijos ilgio, statistiniai įverčiai	27
16 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų pirmosios viršutinės kraujagyslės atšakos vingiuotumo vertinimo siūlomu metodu (be filtravimo) statistiniai įverčiai.....	27
17 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų pirmosios viršutinės kraujagyslės atšakos vingiuotumo vertinimo siūlomu metodu (su koordinačių filtravimu) statistiniai įverčiai.....	28
18 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų pirmosios viršutinės kraujagyslės atšakos vingiuotumo vertinimo siūlomu metodu (su koordinačių išvestinių filtravimu) statistiniai įverčiai	28
19 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų kraujagyslės, trasuotos nuo viršutinio kairiojo galo, vingiuotumo vertinimo lanko stygos santykiu statistiniai įverčiai	28
20 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų kraujagyslės, trasuotos nuo viršutinio kairiojo galo, vingiuotumo vertinimo italų mokslininkų pasiūlytu metodu statistiniai įverčiai	29
21 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų kraujagyslės, trasuotos nuo viršutinio kairiojo galo, vingiuotumo vertinimo kreivumo modulio integralu, padalintu iš linijos ilgio, statistiniai įverčiai.....	29
22 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų kraujagyslės, trasuotos nuo viršutinio kairiojo galo, vingiuotumo vertinimo siūlomu metodu (be filtravimo) statistiniai įverčiai	29

23 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų kraujagyslės, trasuotos nuo viršutinio kairiojo galo, vingiuotumo vertinimo siūlomu metodu (su koordinačių filtravimu) statistiniai įverčiai	29
24 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų kraujagyslės, trasuotos nuo viršutinio kairiojo galo, vingiuotumo vertinimo siūlomu metodu (su koordinačių išvestinių filtravimu) statistiniai įverčiai	29
25 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų viršutinės kraujagyslės vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) lanko stygos santykiu statistiniai įverčiai	30
26 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų viršutinės kraujagyslės vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) italų mokslininkų pasiūlytu metodu statistiniai įverčiai	30
27 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų viršutinės kraujagyslės vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) kreivumo modulio integralu, padalintu iš linijos ilgio, statistiniai įverčiai	30
28 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų viršutinės kraujagyslės vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) siūlomu metodu (be filtravimo) statistiniai įverčiai	31
29 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų viršutinės kraujagyslės vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) siūlomu metodu (su koordinačių filtravimu) statistiniai įverčiai	31
30 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų viršutinės kraujagyslės vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) siūlomu metodu (su koordinačių išvestinių filtravimu) statistiniai įverčiai	31
31 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų pirmosios viršutinės kraujagyslės atšakos vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) lanko stygos santykiu statistiniai įverčiai	31
32 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų pirmosios viršutinės kraujagyslės atšakos vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) italų mokslininkų pasiūlytu metodu statistiniai įverčiai	31
33 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų pirmosios viršutinės kraujagyslės atšakos vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) kreivumo modulio integralu, padalintu iš linijos ilgio, statistiniai įverčiai	32
34 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų pirmosios viršutinės kraujagyslės atšakos vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) siūlomu metodu (be filtravimo) statistiniai įverčiai	32
35 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų pirmosios viršutinės kraujagyslės atšakos vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) siūlomu metodu (su koordinačių filtravimu) statistiniai įverčiai	32
36 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų pirmosios viršutinės kraujagyslės atšakos vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) siūlomu metodu (su koordinačių išvestinių filtravimu) statistiniai įverčiai	32
37 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų kraujagyslės, trasuotos nuo viršutinio kairiojo galo, vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) lanko stygos santykiu statistiniai įverčiai	33
38 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų kraujagyslės, trasuotos nuo viršutinio kairiojo galo, vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) italų mokslininkų pasiūlytu metodu statistiniai įverčiai	33
39 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų kraujagyslės, trasuotos nuo viršutinio kairiojo galo, vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) kreivumo modulio integralu, padalintu iš linijos ilgio, statistiniai įverčiai	33
40 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų kraujagyslės, trasuotos nuo viršutinio kairiojo galo, vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) siūlomu metodu (be filtravimo) statistiniai įverčiai	33

41 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų kraujagyslės, trasuotos nuo viršutinio kairiojo galo, vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) siūlomą metodą (su koordinacijų filtravimu) statistiniai įverčiai.....	33
42 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų kraujagyslės, trasuotos nuo viršutinio kairiojo galo, vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) siūlomą metodą (su koordinacijų išvestinių filtravimu) statistiniai įverčiai	34

The methods for estimation of eye fundus blood vessel tortuosity

Summary

Tortuosity of eye fundus blood vessels is one of parameters that describe state of the blood vessels. It can be detected from fundus images. The increase in vessel tortuosity was observed in eyes of patients with advanced background diabetic retinopathy, papilloedema, arterial hypertension, even in some completely healthy eyes (in this case tortuosity does not change in time). Thus the feature of the line – tortuosity – could be used as the diagnostic feature in medical applications.

Unfortunately, completely reliable definition and numerical estimation of tortuosity of line (blood vessel) does not exist, although there were some more or less successful attempts to define it. This work presents a new way to estimate the tortuosity using the integral of square derivative of curvature. It is compared with the existing methods both theoretically and experimentally. Three types of lines have been used for experimental comparison: theoretical models of retinal vessels (straight line, parabola, sinusoid and their combinations), lines extracted from real fundus images and lines extracted from optometric scale for retinal vessel evaluation. To ease the extraction of the lines from these images a new version of one of the methods for vessel tracking has been created and implemented.

Išvadas

Manoma, kad apie milijardas žmonių visame pasaulyje kenčia nuo arterinės hipertenzijos – padidėjusio kraujo spaudimo (6). Arterinė hipertenzija padidina infarkto, insulto ir kai kurių kitų ligų tikimybę (6). Paprastas būdas jai nustatyti – paprasčiausias neinvazinis kraujo spaudimo matavimas. Tačiau, nors taip ir nustatomas gana tikslus „momentinis“ kraujo spaudimas, neretai pasitaiko „baltojo chalato“ hipertenzija (angl. *white coat hypertension*) – būklė, kai kraujospūdis padidėja gydymo įstaigoje ar kitoje panašioje aplinkoje (17). Tai rodo, kad arterinės hipertenzijos negalima diagnozuoti vien įprastu kraujo spaudimo matavimu. Tačiau nebūtina kraujospūdžio matuoti tiesiogiai. Pavyzdžiui, galima pasinaudoti tuo, kad padidėjęs kraujospūdis veikia kraujagysles. Eksperimentiškai nustatyta, kad didėjant slėgiui didėja tamprus vamzdelio (kraujagyslės modelio) skersmuo, o nuo tam tikros kritinės ribos – ir vingiuotumas (14). Be to, galima tikėtis, kad kraujagyslės vingiuotumas nekis labai greitai, tad priklausys ne nuo „momentinės“, o nuo „vidutinės“ kraujospūdžio reikšmės.

Darbe nagrinėjami akies dugno kraujagyslių vingiuotumo nustatymo ir matavimo metodai. Akies dugnas (lot. *fundus oculi*) – vidinė akies dalis, matoma per vyzdį. Į jį įeina tinklainė (lot. *retina*), gyslainė (lot. *chorioidea*) ir optinio nervo diskas (10, 22). Akies dugną labai nesunku stebėti neinvaziniais metodais ir daryti jo nuotraukas.

Akies dugno kraujagyslių vingiuotumo padidėjimas pastebimas sergant įvairiomis akių ligomis, pavyzdžiui, papildoma ar diabetine retinopatija (5). Tai – vienas iš pirmųjų akies dugno kraujagyslių pažeidimo požymių (11), svarbus arterinės hipertenzijos simptomas, leidžiantis nustatyti ligos sunkumo laipsnį (3). Pastebėtas ryšys tarp akies dugno kraujagyslių vingiuotumo ir kraujospūdžio: pacientų, kurių kraujo spaudimas buvo padidėjęs (sistolinis kraujospūdis didesnis nei 160 mm Hg arba diastolinis kraujospūdis didesnis nei 95 mm Hg) arteriolių vingiuotumas buvo statistiškai reikšmingai ($p < 0,01$) didesnis nei pacientų su normaliu kraujospūdžiu (21). Atlikus regresinę analizę arteriolių vingiuotumas įėjo tiek į sistolinio, tiek į diastolinio kraujospūdžio išraiškas (21). Be to, dažnai labai didelę svarbą turi vingiuotumo kitimas laike, todėl itin svarbu jį įvertinti kiekybiškai. Gana sunku tai tiksliai ir objektyviai padaryti „iš akies“. Dėl to darbe tiriami matematiniai kraujagyslių vingiuotumo vertinimo metodai, pavyzdžiui, lanko-stygos santykis (9, 11, 12, 15) ar kreivumo modulio integralas (12). Kadangi paaiškėjo, kad visi esami metodai turi gana rimtų trūkumų ir vingiuotumą vertina nepakankamai tiksliai, buvo sukurtas ir ištirtas naujas vingiuotumo vertinimo metodas.

Kad būtų lengviau gauti medžiagos (linijų, atitinkančių kraujagysles), buvo sukurtas, realizuotas ir panaudotas vienas kraujagyslių atpažinimo metodas panašus į modifikuotą Keno (*Can*) algoritmą (8). Nors kraujagyslių atpažinimo metodų esama gana daug (1, 2, 8, 19), daugelį iš jų gana sunku pritaikyti šiam atvejui, nes jie pritaikyti, pavyzdžiui, kraujagyslių išsišakojimų radimui (8) ar vaizdų registravimui (8, 19). Trasuojant kraujagyslę kai kuriais metodais, naujo jos taško ieškoma tikrinant kryptis iš iš anksto pasirinktos aibės (8). Jei tikroji kraujagyslės kryptis nepatenka į šią aibę, gali būti gaunama linija, kiek vingiuotesnė už tikrąją.

Manytina, kad linijų vingiuotumas taip pat gali turėti tam tikros reikšmės ir projektuojant kelius. Be to, jis netiesiogiai naudojamas statistikoje, nes vingiuotumą iš dalies nusako išraiška, įeinanti į funkcionalą, kuri minimizuojama kai kurie splainai (16). Tai leidžia tikėtis, kad naudojant tikslesnę vingiuotumo išraišką, bus galima rasti būdus tiksliau aproksimuoti ir interpoliuoti bent kai kurias funkcijas.

Darbo **tikslas** – ištirti esamus matematinius linijų vingiuotumo vertinimo metodus ir pasiūlyti racionalesnį.

Darbo **uždaviniai**:

- išnagrinėti ir palyginti egzistuojančius linijų vingiuotumo vertinimo metodus;
- sukurti, realizuoti ir išbandyti racionalesnį linijų vingiuotumo vertinimo metodą;
- sukurti, realizuoti ir išbandyti kraujagyslių atpažinimo metodą, kuris galėtų palengvinti praktinį vingiuotumo skaičiavimą;
- išvesti išraiškas, kurios palengvintų tolesnį vingiuotumo nagrinėjimą ir panaudojimą.

Šie uždaviniai buvo sprendžiami tiek teoriškai, tiek ir eksperimentiškai.

Teoriniam metodų nagrinėjimui (žr. 1. Teorinė vingiuotumo įvertinimo metodų analizė) buvo pasitelktos *a priori* žinios apie vingiuotumą (apskritimas – linija nevingiuota, o sinusoidė – vingiuota ir pan.). Pasiūlytam metodui buvo išvesta Oilerio lygtis, kurią vėliau galima būtų panaudoti vingiuotumo minimumų ir maksimumų radimui.

Eksperimentinis tyrimas buvo atliekamas naudojant:

- matematinius kraujagyslių modelius – tiesę, sinusoidę, parabolę ir jų kombinacijas (žr. 2.1. Tyrimas, naudojant teorinius kraujagyslių modelius),
- realias kraujagysles, pažymėtas akies dugno vaizduose (žr. 2.2. Tyrimas, naudojant realius akies dugno vaizdus),
- iš optometrinės akies dugno kraujagyslių vertinimo skalės gautas (tiek sužymėtas ranka, tiek atpažintas naudojant sukurtą kraujagyslių trasavimo

metoda) linijas (žr. 2.3. Tyrimas, naudojant optometrinę kraujagyslių vertinimo skalę).

Visais trim atvejais skaičiavimai buvo atliekami MATLAB aplinkoje. Buvo daroma prielaida, kad tiksliau vingiuotumą įvertina metodas, kurio rezultatai leidžia linijas suskirstyti į klases pagal vingiuotumą. Tam, kad būtų gauti patikimesni rezultatai, tyrimuose, kuriuose buvo naudojamos realias kraujagysles atitinkančios linijos ir optimetrinė akies dugno kraujagyslių vertinimo skalė, tos pačios kraujagyslės buvo žymimos po keletą kartų ir gauti įverčiai statistiškai apdoroti.

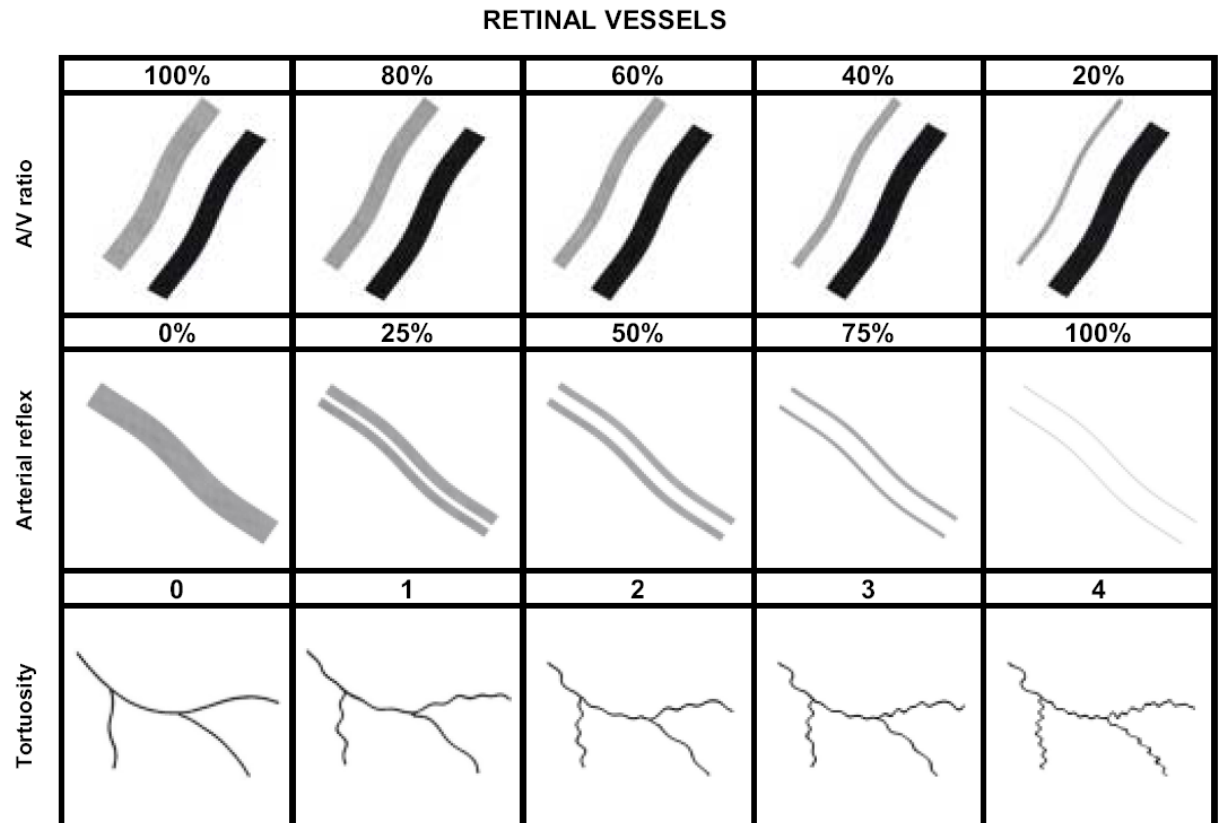
Gauti rezultatai buvo pristatyti Dvyliktojoje tarptautinėje mokslinėje kompiuterininkų konferencijoje, vykusioje Klaipėdoje per LIKS renginį „Kompiuterininkų dienos – 2005“ 2005 m. rugsėjo 15-17 d. ir Trečiojoje Europos medicininės ir biologinės inžinerijos konferencijoje, vykusioje Prahoje 2005 m. lapkričio 20-25 d. Be to, tyrimai aprašyti recenzuojamuose mokslo leidiniuose (žr. 1 priedą). Visų autoriaus publikacijų sąrašas pateiktas 5 priede.

Darbas atliktas kaip Lietuvos valstybinio mokslo ir studijų fondo prioritetinių Lietuvos mokslinių tyrimų ir eksperimentinės plėtros kryptių 2003 metais projekto „IT Sveikata – Informacinės technologijos žmogaus sveikatai – klinikinių sprendimų palaikymas (e-sveikata)“ dalis.

1. Teorinė vingiuotumo įvertinimo metodų analizė

1.1. Vingiuotumo nustatymo metodai

Šiuo metu medicinoje kraujagyslių vingiuotumas (o ir daugelis kitų parametru) nustatomi „iš akies“, kartais naudojant optometrines vertinimo skales, pavyzdžiui, pateiktąją 1 pav. (18, 21).



1 pav. Optometrinė kraujagyslių vertinimo skalė (18)

Akivaizdu, kad toks vertinimas nėra labai tikslus ir objektyvus (nors šiuo požiūriu jis neabejotinai pranašesnis už grynąjį vertinimą „iš akies“), tad yra kuriami tikslesni, matematiniai, vingiuotumo vertinimo metodai.

Naudojant matematinius vingiuotumo vertinimo metodus iš esmės galima teigti, kad kraujagyslė (tiksliau, jos centrinė linija) yra plokštumoje nepersikertanti kreivė, apibrėžta parametriškai:

$$R \rightarrow R \times R \quad (1)$$

Suprantama, kompiuterio atmintyje ją daug patogiau laikyti diskrečiai (baigtinis taškų kiekis):

$$N \rightarrow R \times R \quad (2)$$

Kiekvienam kreivės taškui tolydiniu atveju (ir kai kuriems diskrečiu atveju) galima apskaičiuoti dydį, vadinamą kreivumu. Šis dydis apibūdina linijos krypties kitimą. Jis

naudojamas daugelyje vingiuotumo vertinimo metodų. Parametriškai nusakytos kreivės kreivumas apskaičiuojamas pagal formulę

$$k = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3)$$

Jei kreivė apibrėžta vienos koordinatės (y) priklausomybe nuo kitos (x), tai kreivumą galima apskaičiuoti ir taip:

$$k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4)$$

Taip pat žinoma, kad tokiu atveju kreivumą kartais yra patogiau aproksimuoti funkcijos antrąja išvestine:

$$k \approx c \cdot f'' \quad (5)$$

Apibrėžti linijos vingiuotumą yra gerokai sunkiau nei kreivumą. Akivaizdu, kad geras linijos vingiuotumo įvertis turi būti atsparus lygiagrečiam postūmiui ar posūkiams, ką pabrėžia didelė dalis šioje srityje dirbančių mokslininkų (11, 12). Nėra vieningos nuomonės apie tai, ar jis turi būti atsparus mastelio transformacijai. Pavyzdžiui, W. E. Hart su bendraautoriais spėja, kad vingiuotumas turėtų būti proporcingas jei ne masteliui, tai funkcijai, priklausančiai nuo mastelio (12). Tuo tarpu Paduvos universiteto mokslininkai E. Grisan, M. Foracchio ir A. Ruggeri teigia, kad mastelis neturėtų turėti lemiamos įtakos atskiros linijos vingiuotumo vertinimui, nors gydytojai ir nėra priėję bendros nuomonės šiuo klausimu (11). Taip pat nėra aišku, kaip linijos vingiuotumas turi būti susietas su atskirų jos dalių vingiuotumais. W. E. Hart su bendraautoriais siūlo daryti prielaidą, kad linijos, susidedančios iš dviejų glotniai sujungtų dalių, vingiuotumas turėtų patekti į intervalą tarp šių dalių vingiuotumų, o jei dalių vingiuotumai vienodi, bendras linijos vingiuotumas turi būti lygus bet kurios dalies vingiuotumui (11). E. Grisan, M. Foracchio ir A. Ruggeri pateikia pavyzdžių, kurie verčia tuo abejoti, ir siūlo manyti, kad linijos vingiuotumas turi būti ne mažesnis už bet kurios iš jos dalių vingiuotumą (12). Bet kuriuo atveju aišku, kad svarbiausia – atskirti vizualiai vingiuotas linijas (pavyzdžiui, sinusoidę), nuo nevingiuotų (tiesės atkarpos arba apskritimo). Taip pat patartina, kad parabolė (kuria galima aproksimuoti pagrindines akies dugno kraujagysles (15)) būtų priskirta prie mažai vingiuotų linijų.

Apibrėžti linijos vingiuotumą buvo bandyta įvairiai. Vienas iš paprasčiausių metodų yra lanko-stygos santykis, nagrinėtas beveik visų šioje srityje dirbančių mokslininkų (9, 11, 12, 15). Tokiu atveju, pažymėjus lanko (kreivės) ilgį L , o atstumą tarp kreivės galų (stygos ilgį) – S , galima parašyti:

$$V_1 = \frac{L}{S}. \quad (6)$$

Šis metodas geras tuo, kad yra:

- labai paprastas,
- atsparus triukšmams,
- lengvai apibendrinamas trimačiam atvejui,
- panašūs įverčiai naudojami kitose mokslo šakose (vingiuotumas geologijoje (20), manevro koeficientas karyboje (24) ir pan.).

Vingiuotumas pagal šią metodiką gali kisti nuo vieneto (atkarpai) iki begalybės (uždarai kreivei). Akivaizdu, kad skaičiuojant pagal šį metodą mastelis neturi jokios įtakos. Deja, šis metodas visiškai neatitinka vingiuotumo supratimo. Pavyzdžiui, apskritimas nėra laikomas vingiuota linija, bet jo vingiuotumas pagal lanko-stygos santykį begalinis. Be to, nėra akivaizdu, kaip šį įvertį apibendrinti kraujagyslių (linijų) tinklui.

W. E. Hart su bendraautoriais siūlo vingiuotumą įvertinti kaip kreivumo modulio arba kvadrato integralą:

$$V_{2a} = \int_{t_1}^{t_2} |k(t)| dt, \quad (7)$$

$$V_{2b} = \int_{t_1}^{t_2} (k(t))^2 dt. \quad (8)$$

Tiek 7, tiek ir 8 įvertis gali būti dar dalijami iš linijos arba stygos ilgio, be to, liniją apibūdinančių taškų koordinatės galima filtruoti (12). W. E. Hart su bendraautoriais šios rūšies metodus lygino vienus su kitais ir su lanko-stygos santykiu pagal tai, kokiu tikslumu kraujagysles galima suskirstyti į vingiuotas ir nevingiuotas, remiantis įverčiais, kurie buvo gauti šiais metodais. Tokio tyrimo metu buvo nustatyta, kad geriausiai iš nagrinėtų metodų klasifikuoti kraujagysles leidžia kreivumo kvadrato integralas ir kreivumo modulio integralas, padalintas iš linijos ilgio, tačiau naudojant visais nagrinėtais metodais gautus įverčius, klasifikavimo tikslumas gali būti dar padidintas (12). Pagal šią metodiką tiesės atkarpoms gaunamas nulinis vingiuotumas. Deja, apskritimui ir vėl gaunamas didelis įvertis. E. Grisan, M. Foracchio ir A. Ruggeri dar pabrėžia, kad šis metodas niekaip neatsižvelgia į kreivumo ženklo kitimą, nors tai labai svarbus požymis gydytojams-oftalmologams (11). Be to, šiuo atveju reikia pasirinkti parametą. Natūralus parametras gali būti taško numeris. Jis turėtų tikti, kai visose lyginamose linijose žinomų taškų tankis visur maždaug vienodas. Suprantama, jei ši prielaida klaidinga, galima pasirinkti naujus taškus, liniją aproksimavus splineu.

Pagal metodiką, išvystytą Paduvos universiteto informatikų E. Grisan, M. Foracchio ir A. Ruggeri, vingiuotumas apskaičiuojamas kiek sudėtingesniu būdu, darant prielaidą, kad reikia atsižvelgti tiek į kraujagyslės posūkių amplitudę, tiek į jų skaičių (11). Iš pradžių kreivė suskaidoma į intervalus (iš viso – N intervalų), kuriuose kreivumo ženklas yra pastovus. Atsparumas triukšmams padidinamas naudojant histerezę, dėl kurios nedideli ir nereikšmingi kreivumo pokyčiai negali žymiai padidinti intervalų skaičiaus. Po to kiekvienam iš gautų intervalų skaičiuojamas lanko-stygos santykis. Pats vingiuotumas toliau skaičiuojamas pagal formulę

$$V_3 = \frac{N-1}{L} \cdot \sum_{i=1}^N \left(\frac{L_i}{S_i} - 1 \right). \quad (9)$$

Metodo autoriai šį metodą su kitais lygino darydami prielaidą, kad tinkamas vingiuotumo vertinimo metodas pateiks didesnę įvertį kraujagyslėms, kurias vingiuotesnėmis laiko gydytojai. Tam iš 10 akies dugno vaizdų buvo išskirta 20 kraujagyslių (iš jų 13 arterijų ir 7 venos), kurias gydytojas-oftalmologas surikiavo vingiuotumo didėjimo tvarka. Tada buvo skaičiuojama koreliacija tarp įvairiais metodais gautų įverčių ir gydytojo suteiktų eilės numerių. Tokio tyrimo metu buvo nustatyta, kad šis metodas tiksliau už anksčiau nurodytus vertina arterijų vingiuotumą, o vertinant venų vingiuotumą tik nedaug tenusileidžia kreivumo kvadrato ir modulio integralams, padalintiems iš linijos ilgio (11). Deja, šiame tyrime nebuvo bandyta patikrinti, ar skirtingų gydytojų-oftalmologų pateikti nagrinėtų kraujagyslių rikiavimo pagal vingiuotumą rezultatai būtų panašūs.

Šis metodas geras tuo, kad:

- gana efektyviai įvertina realių kraujagyslių vingiuotumą,
- apskritimui ir kitoms kreivėms, kurių kreivumas nekeičia ženklo jis grąžina įverčius, lygius nuliui,
- yra atsparus triukšmams.

Tačiau šis metodas turi ir trūkumų, pavyzdžiui:

- nėra logiškai paprastas (pavyzdžiui, sunku nurodyti aiškiai histerezės slenksčio prasmę),
- dėl histerezės sunku aiškiai parodyti, kaip šis įvertis priklauso nuo mastelio (be histerezės jis būtų atvirkščiai proporcingas masteliui (11)).

Iš visa tai matyti, kad nei vienas iš išbandytųjų metodų nėra visiškai tinkamas, todėl verta bandyti kurti tikslesnį.

1.2. Siūlomas vingiuotumo matavimo metodas

Kadangi esami metodai nepakankamai tiksliai vertina akies dugno kraujagyslių vingiuotumą, buvo bandyta sukurti naują metodą. Atsižvelgiant į tai, kad tiek atkarpa, tiek apskritimas laikomi nevingiuotomis linijomis, racionalu manyti, kad linija yra vingiuota, kai jos kreivumas kinta. Tokiu atveju tikėtina, kad vingiuotumą gali apibūdinti kreivumo išvestinė, arba (kadangi jos ženklas gali kisti) jos kvadratas ar modulis. Panašūs samprotavimai yra naudoti statistikoje (16). Žinomas ir pavyzdys: gana lengva automobiliu ar dviračiu važiuoti ten, kur kelio (arba trajektorijos) kreivumas didelis – reikia tik stipriai laikyti vairą. Daug sunkiau važiuoti, kur kreivumas kinta. Tiesa, pavyzdžio autorius (M. Mächler) siūlo naudoti kreivumo išvestinę, padalintą iš kreivumo (t.y., kreivumo logaritmo išvestinę), o tai netinka, kai kreivumas gali būti lygus nuliui – gaunama dalyba iš nulio.

Kadangi vingiuotumu prasminga apibūdinti ne linijos tašką, o visą liniją, galima siūlyti kaip įvertį naudoti kreivumo išvestinės kvadrato integralą nuo linijos pradžios iki pabaigos:

$$V_{pi} = \int_{t_1}^{t_2} (k'(t))^2 dt. \quad (10)$$

Kad būtų galima palyginti skirtingų linijų vingiuotumus, patogiu šį įvertį padalinti iš linijos ilgio. Tada turime įvertį:

$$V_{pn} = \frac{V_{pi}}{L}. \quad (11)$$

Šį įvertį nesunkiai galima apibendrinti keletui linijų (kraujagyslių tinklui). Apskaičiavus visų linijų vingiuotumus galima kiekvieną iš jų dauginti iš linijos ilgio ir gautų reikšmių sumą padalinti iš visų linijų ilgių sumos. Akivaizdu, kad jei visos linijos vienodos, taip gautas bendras vingiuotumo įvertis bus lygus bet kurios linijos įverčiui.

Šį įvertį galima rasti naudojant algoritmą, kurio apytikslė struktūrograma (neatsižvelgiant į masyvų trumpėjimą dėl diferencijavimo ir pan.) pateikta 2 pav.

Vingiuotumas (X(n), Y(n) - realiųjų skaičių masyvai)
Xlsv(n), Ylsv(n), Xlsv2(n), Ylsv2(n), Kreiv(n), Kreivlsv(n) - realiųjų skaičių masyvai
VingInt, Ving - realieji skaičiai
Xlsv := Diferencijuoti(X)
Ylsv := Diferencijuoti(Y)
Xlsv2 := Diferencijuoti(Xlsv)
Ylsv2 := Diferencijuoti(Ylsv)
i = 1.. n
Kreiv[i] := (Xlsv[i] * Ylsv2[i]) - (Ylsv[i] * Xlsv2[i]) / ((sqrt(Xlsv[i]^2 + Ylsv[i]^2))^3)
Kreivlsv := Diferencijuoti(Kreiv)
i = 1.. n
KreivlsvKv[i] := Kreivlsv * Kreivlsv
VingInt := Integruoti(KreivlsvKv)
Ving := VingInt / Ilgis(X, Y)
Gražinti Ving

2 pav. Supaprastinta siūlomojo vingiuotumo apskaičiavimo algoritmo struktūrograma

Akivaizdu, kad šis įvertis labai neatsparus triukšmams (trys nuoseklūs skaitmeniniai diferencijavimai). Atsparumą triukšmams galima padidinti naudojant žemų dažnių filtrus. Tai leistų lanksčiau įvertinti vingiuotumą: nevertinti mažų vingių. Galima filtruoti abi koordinates, koordinačių išvestines, kreivumus ir kreivumų išvestines. Tai (kartu su galimybe keisti filtrų parametrus) teikia galimybių dar tobulinti šį metodą. Eksperimentiškai buvo nustatyta, kad perspektyviausia filtruoti koordinačių išvestines.

Verta panagrinėti šio įverčio (be filtravimo) savybes. Akivaizdu, kad jis nekinta po lygiagreto postūmio ar posūkių, nes dėl jų nekinta nei kreivumas, nei linijos ilgis. Taip pat akivaizdu, kad šį įvertį (kaip ir daugelį išvardintųjų) galima rasti per tiesinį laiką.

Kadangi akies kraujagysles iš dalies galima aproksimuoti parabolėmis (15), verta patikrinti, kaip galima analiziškai apskaičiuoti tokios kreivės vingiuotumą pagal siūlomąją metodiką. Tam randamas neapibrėžtinis integralas:

$$\begin{aligned}
 \int (k'_{x^2}(x))^2 dx &= \int \left(\frac{(x^2)''}{\left(1+(x^2)'^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right)' dx = \int \left(\frac{2}{\left(1+4x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right)' dx = \int \left(\frac{24x}{\left(1+4x^2\right)^{\frac{5}{2}}} \right) dx = \\
 &= \int \frac{576x^2}{(1+4x^2)^2} dx = \frac{9}{16} \int \frac{dx}{\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)} - \frac{9}{64} \int \frac{dx}{\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2} = \\
 &= \frac{9}{4} \left(\frac{x}{6 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^3} + \frac{5x}{6 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2} + \frac{5x}{x^2 + \frac{1}{4}} + 10 \cdot \arctg 2x \right) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{9}{16} \left(\frac{x}{8 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^4} + \frac{7x}{12 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^3} + \frac{35x}{12 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2} + \frac{35x}{2 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)} + 35 \cdot \arctg 2x \right) + C = \\
& = -\frac{9x}{128 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^4} + \frac{3x}{64 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^3} + \frac{15x}{64 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2} + \frac{45x}{32 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)} + \frac{45}{16} \cdot \arctg 2x + C.
\end{aligned}$$

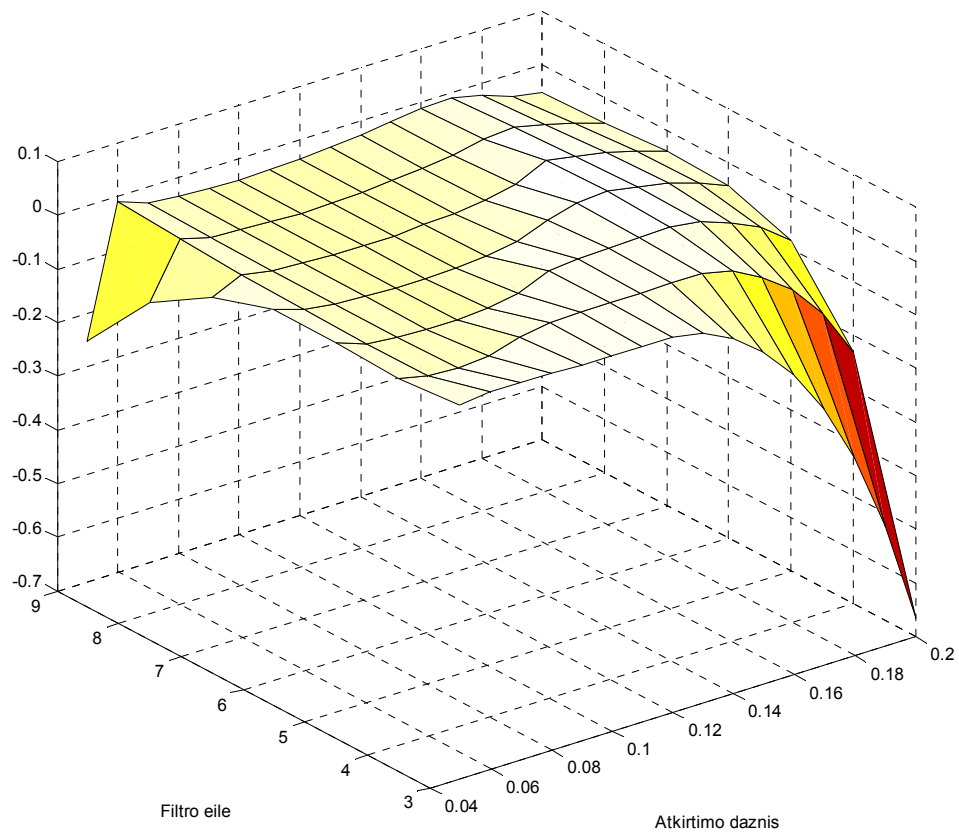
Visi dėmenys – nelyginės funkcijos, tad ir suma nelyginė. Arktangento reikšmė kinta nuo $-\frac{\pi}{2}$ iki $\frac{\pi}{2}$, likusių dėmenų reikšmės artėja prie nulio, x artėjant prie begalybės.

Dedamųjų, kurie yra racionaliosios trupmenos, vardikliai negali būti mažesni už, atitinkamai, vieną antrąją, vieną keturis ir aštuonis. Taip yra taške $x=0$, kuriame pačių trupmenų reikšmės lygios nuliui. Vadinasi, visi dėmenys yra aprėžti, tad ir jų suma aprėžta. Tai reiškia, kad ir visas įvertis šiuo atveju negali viršyti tam tikros reikšmės (kadangi funkcija nelyginė, tai jos reikšmė negali būti ir mažesnė už priešingą šiai reikšmei), priklausančios nuo ilgio ir artėjančios prie nulio, ilgiui artėjant prie begalybės (aprėžtas dydis dalijamas iš vis didesnio ilgio). Tai, kaip įvertis kinta kitais atvejais, yra mažiau svarbu, nes labai trumpų linijų vingiuotumas ir vizualiai sunkiai įvertinamas. Akivaizdu, kad analogiškai apriboti ir kitų laipsninių funkcijų su teigiamu lyginiu rodikliu grafikų vingiuotumo įverčiai. Galima tikėtis, kad ir su bent kai kuriomis kitomis nevingiuotomis kreivėmis, kurių kreivumo ženklas pastovus, šis įvertis bus panašiai aprėžtas.

Šio įverčio reikšmė labai priklauso nuo mastelio. Iš 3 formulės gauname, kad padidinus visų koordinačių reikšmes dvigubai, kreivumas dvigubai sumažės. Kadangi pagal šį įvertį kreivumo išvestinė keliami kvadratu, įvertis V_{pi} sumažės 4 kartus. Linijos ilgis padidės du kartus, tad bendras įvertis sumažės aštuonis kartus. Dėl to verta jį perskaičiuoti pakeitus mastelį, jei vertinami skirtingo mastelio vaizdai. Be to, tai leidžia bandyti parinkti vingiuotumui matavimo vienetus (vienas iš galimų variantų būtų m^{-3}).

Nėra sunku parinkti tinkamas filtro parametrų (filtro eilės ir atkirtimo dažnio) reikšmes. Paprasčiausia „iš akies“ suskirstyti pavyzdines linijas į klases pagal vingiuotumą (pirma klasė mažiausiai vingiuota ir t.t.). Po to apskaičiuojami įverčiai kiekvienai iš linijų ir surandami skirtumai tarp gretimoms klasėms priklausančių linijų įverčių (iš aukštesnei klasei priklausančios linijos įverčio atimamas žemesnei klasei priklausančios linijos įvertis). Tada ieškoma mažiausio skirtumo – tai ir bus maksimizuotinos tikslo funkcijos reikšmė. Buvo išbandytas toks linijų rinkinys: pirma klasė – tiesės atkarpa ir tiesės atkarpa su triukšmais, antra klasė – parabolė ir parabolė su nedidele sinusoidės priemaiša, trečia klasė sinusoidė, ketvirta klasė – parabolė su didesne sinusoidės priemaiša (keturios iš kreivių pateiktos 4 pav.).

Pačios tikslo funkcijos grafikas (Butervorto filtru filtruojant koordinačių išvestines) pateiktas 3 pav.



3 pav. Tikslo funkcijos grafikas (vienas iš atvejų)

Iš pateikto grafiko matyti, kad šiuo atveju tikslo funkcija turi maksimumą (optimali filtro eilė – 6, o normalizuotas atkirtimo dažnis – 0,16). Tame taške jos reikšmė šiek tiek viršija nulį, tad galima teigti, kad duotąsias linijas galima suskirstyti į atitinkamas klases.

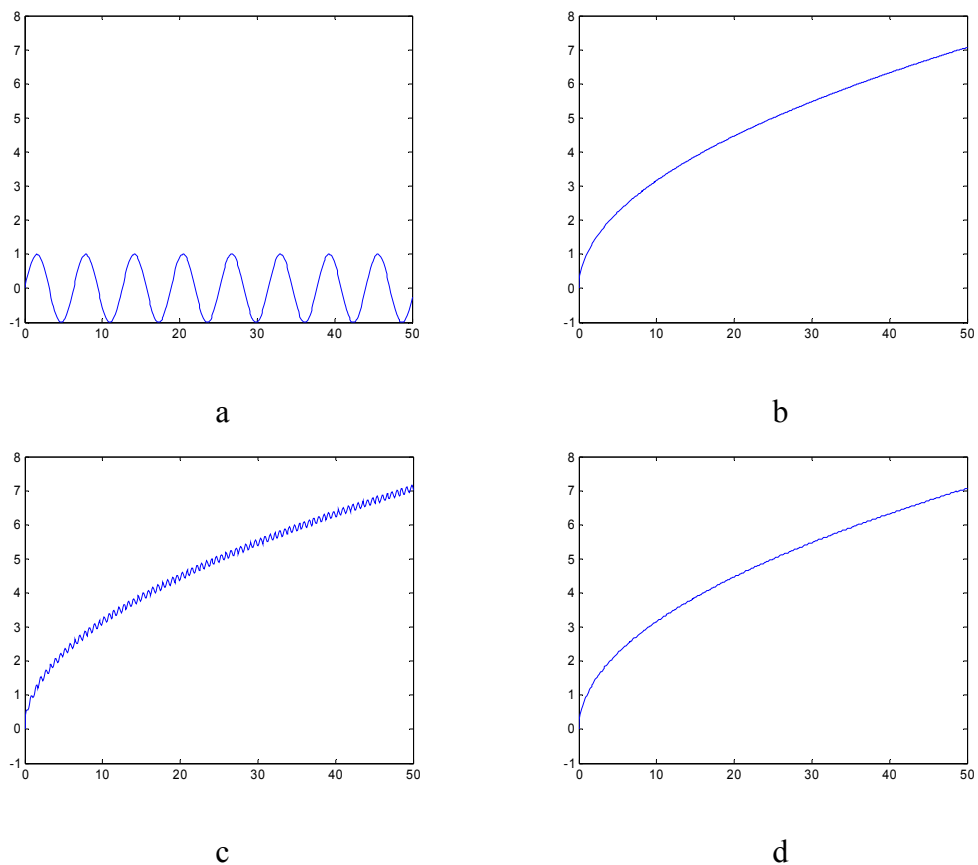
2. Eksperimentinis vingiuotumo įvertinimo metodų tyrimas

Kai kurie vingiuotumo skaičiavimo būdai buvo realizuoti MATLAB aplinkoje. Buvo išbandyta, kaip jie padeda rasti įvairių kreivių vingiuotumus.

Metodams tirti buvo naudojami tiek teoriniai kraujagyslių modeliai, tiek ir realūs akių dugno vaizdai.

2.1. Tyrimas, naudojant teorinius kraujagyslių modelius

Iš sintetinių kraujagyslių modelių buvo pasirinkti grafikai funkcijų $y = x$, $y = \sin(x)$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x} + 0,1 \cdot \sin(10x)$, $y = \sqrt{x} + 0,01 \cdot \sin(10x)$ x kinta nuo 0 iki 50 žingsniu 0,1. Keturi iš jų pateikti 4 pav.



4 pav. Kai kurių funkcijų, naudotų lyginant vingiuotumo vertinimo metodus, grafikai: (a) $y = \sin(x)$, (b) $y = \sqrt{x}$, (c) $y = \sqrt{x} + 0,1 \cdot \sin(10x)$, (d) $y = \sqrt{x} + 0,01 \cdot \sin(10x)$

Viena iš nagrinėtųjų buvo linija $y = x$. Kartu buvo tikrinama, kaip keičiasi įverčiai, pridėjus triukšmus. Tokiu atveju taškai pakeičiami iš $(x_i; y_i)$ į $(x'_i; y'_i)$, kur $x'_i = x_i + 0.001t_i$, $y'_i = y_i + 0.001t'_i$, o t ir t' – atsitiktiniai dydžiai, pasiskirstę pagal $N(0,1)$. 1 lentelėje pateikti šių linijų vingiuotumai pagal:

1. lanko-stygos santykį,

2. lanko-stygos santykį su histereze kai histerezės slenkstis – 0,5,
3. kreivumo modulio integralą, padalintą iš linijos ilgio,
4. įverčius, naudojantys kreivumo išvestinės kvadratą:
 - 4.1. be filtravimo,
 - 4.2. filtruojant abi koordinatas trečios eilės Butervorto žemų dažnių filtru, kai atkirtimo dažnis 0,1,
 - 4.3. filtruojant koordinačių išvestines šeštos eilės Butervorto žemų dažnių filtru, kai atkirtimo dažnis 0,16.

1 lentelė. Tiesės atkarpos be triukšmų ir su triukšmais vingiuotumo įverčiai, gauti įvairiais metodais

Metodas	Be triukšmų	Su triukšmais
1.	1	1
2.	0	0.1908
3.	0	1.6176
4.1.	0	7.5815
4.2.	0	8.6537e-006
4.3.	0	9.9852e-006

Iš šios lentelės matyti, kad siūlomasis metodas be filtravimo labai neatsparus triukšmams, bet filtravimas atsparumą triukšmams labai pagerina.

Analogiški skaičiavimai buvo atlikti su sinusoide, parabole bei kai kuriomis jų kombinacijomis, kai x reikšmės tokios kaip ir prieš tai (2 lentelė).

2 lentelė. Sinusoidės, parabolės ir kai kurių jų kombinacijų vingiuotumo įverčiai, gauti įvairiais metodais

Metodas	$y = \sin(x)$	$y = \sqrt{x}$	$y = \sqrt{x} + 0,1 \cdot \sin(10x)$	$y = \sqrt{x} + 0,01 \cdot \sin(10x)$
1.	1.2148	1.0091	1.2031	1.0113
2.	0.5371	0	19.1539	3.3618
3.	3.7290	0.1566	49.7108	9.2161
4.1.	0.0404	0.0054	1.4779e+003	16.8224
4.2.	0.0408	0.0017	1.0143	0.0123
4.3.	0.0393	0.0196	0.1766	0.0215

Vizualiai labiausiai vingiuota trečioji kreivė, po to pirmoji, tada ketvirtoji, kuri beveik nesiskiria nuo antrosios. Tokia tvarka kreives surikiavo ir siūlomas metodas su įvairiais filtravimais. Tuo tarpu naudojant kitus metodus to padaryti nepavyko.

Taip pat buvo eksperimentiškai patikrinta, kaip skirtingi įverčiai priklauso nuo mastelio. 3 lentelėje pateikti tų pačių linijų vingiuotumo įverčiai, kai visų taškų koordinatės padaugintos iš dviejų.

3 lentelė. Sinusoidės, parabolės ir kai kurių jų kombinacijų vingiuotumo įverčiai, gauti įvairiais metodais kai visų taškų koordinatės padaugintos iš dviejų

Metodas	$y = \sin(x)$	$y = \sqrt{x}$	$y = \sqrt{x} + 0,1 \cdot \sin(10x)$	$y = \sqrt{x} + 0,01 \cdot \sin(10x)$
1.	1.2148	1.0091	1.2031	1.0113
2.	0.1881	0	7.2550	1.5992
3.	0.9323	0.0391	12.4277	2.3040
4.1.	0.0050	6.6929e-004	184.7401	2.1028
4.2.	0.0051	2.1866e-004	0.1268	0.0015
4.3.	0.0049	0.0025	0.0221	0.0027

Iš šios lentelės matyti, kad, kaip ir buvo tikėtasi, lanko-stygos santykis nepriklauso nuo mastelio, o įverčiai, apskaičiuotų pagal 10 formulę, mažėja aštuonis kartus, padidinus koordinates du kartus (aišku, atsiranda paklaidos dėl apvalinimo ir pan.). Paduvos universiteto informatikų pasiūlytu metodu gaunamas įvertis tokiu atveju mažėja apie du kartus.

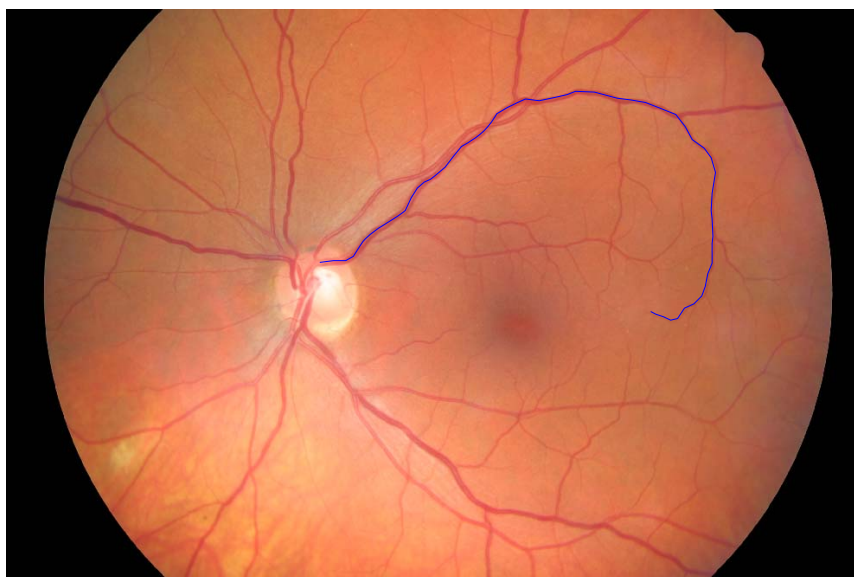
2.2. Tyrimas, naudojant realius akies dugno vaizdus

Buvo bandyta skaičiuoti ir realių kraujagyslių vingiuotumus. Pavyzdiniai vaizdai buvo gauti iš Kauno medicinos universiteto klinikų Akių ligų klinikos.

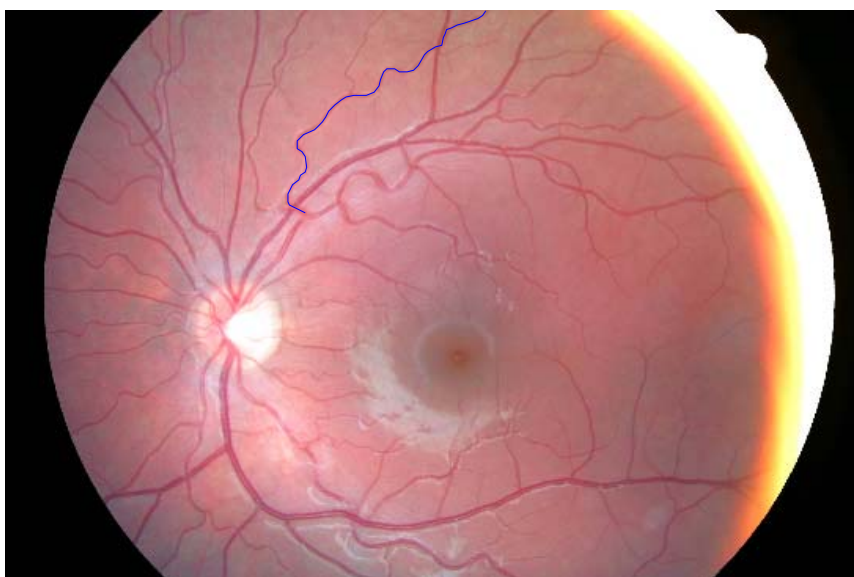
Linijos iš vaizdų buvo išskirtos rankiniu būdu: po penkiolika kartų – dvi iš vaizdo su normaliu vingiuotumu (viena maždaug tiesi – 5 pav., kita – netiesi – 6 pav.) ir viena iš vaizdo su padidėjusiu vingiuotumu (7 pav.). Gauti įverčiai buvo statistiškai apdoroti – rasti atitinkami vidurkiai, standartiniai nuokrypiai, minimumai ir maksimumai (4-6 lentelės).



5 pav. Akies dugno vaizdas su normaliu vingiuotumu – pažymėta nagrinėjama kraujagyslė (maždaug tiesi)



6 pav. Akies dugno vaizdas su normaliu vingiuotumu – pažymėta nagrinėjama kraujagyslė (netiesi)



7 pav. Akies dugno vaizdas su padidėjusiu vingiuotumu – pažymėta nagrinėjama kraujagyslė

4 lentelė. Maždaug tiesios kraujagyslės, rankiniu būdu išskirtos iš normalaus vingiuotumo akies dugno vaizdo (5 pav.), vingiuotumo vertinimo įvairiais metodais statistiniai įverčiai

Metodas	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
1.	1.0622	0.0052	1.0519	1.0715
2.	2.3101e-004	4.7857e-004	0	0.0012
3.	0.0023	0.0014	9.8022e-004	0.0054
4.1.	0.0131	0.0287	6.3238e-004	0.1110
4.2.	4.8863e-006	9.9983e-006	5.3130e-012	4.0217e-005
4.3.	1.6320e-008	2.3729e-008	1.0339e-009	9.1777e-008

5 lentelė. Netiesios kraujagyslės, rankiniu būdu išskirtos iš normalaus vingiuotumo akies dugno vaizdo (6 pav.), vingiuotumo vertinimo įvairiais metodais statistiniai įverčiai

Metodas	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
1.	2.0552	0.0974	1.7173	2.1455
2.	1.4691e-004	3.0446e-004	0	7.6470e-004
3.	0.0016	0.0017	4.7052e-004	0.0070
4.1.	0.0398	0.1158	2.0562e-004	0.4442
4.2.	1.2824e-007	1.3092e-007	3.0358e-008	4.8482e-007
4.3.	8.4210e-009	7.4043e-009	1.9319e-009	2.7776e-008

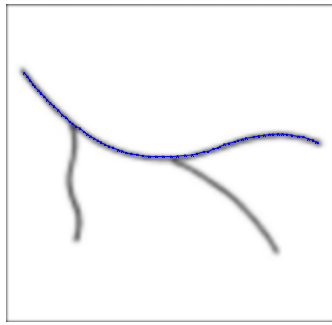
6 lentelė. Kraujagyslės, rankiniu būdu išskirtos iš padidėjusio vingiuotumo akies dugno vaizdo (7 pav.), vingiuotumo vertinimo įvairiais metodais statistiniai įverčiai

Metodas	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
1.	1.2684	0.0059	1.2576	1.2768
2.	3.0486e-004	6.7804e-004	0	0.0023
3.	0.0027	0.0016	0.0014	0.0069
4.1.	0.0103	0.0214	9.1671e-004	0.0839
4.2.	5.0189e-006	2.2599e-006	1.2176e-006	8.0926e-006
4.3.	6.1893e-007	4.0699e-007	1.1520e-007	1.4284e-006

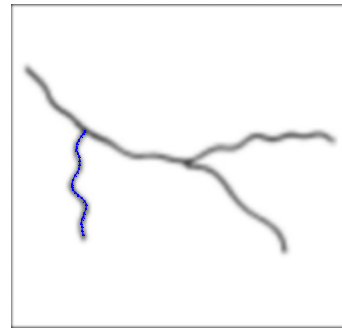
Iš šių lentelių matyti, kad geriausiai iš išnagrinėtųjų metodų vingiuotas ir nevingiuotas kraujagyslės atskiria būtent siūlomas metodas (su koordinačių išvestinių filtravimu): mažiausia įverčio vingiuotai kraujagyslei reikšmė didesnė už didžiausią įverčio nevingiuotai kraujagyslei reikšmę.

2.3. Tyrimas, naudojant optometrinę kraujagyslių vertinimo skalę

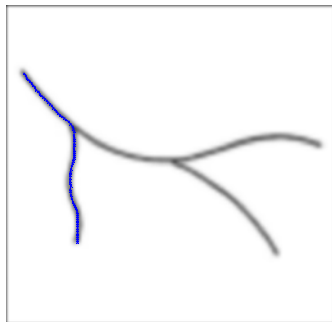
Tyrimas buvo atliktas ir naudojant vieną optometrinę vertinimo skalę (1 pav.). Tam buvo po penkis kartus iš kiekvieno vaizdo, atitinkančio vingiuotumo laipsnį, pele sužymėtos kraujagyslės. Patys vaizdai gauti iš išdidinus atitinkamas skalės dalis ir jas nufiltravus, kad šviesos intensyvumas vaizduose būtų bent kiek tolygesnis. Pasirinktos kraujagyslės parodytos 8 pav.



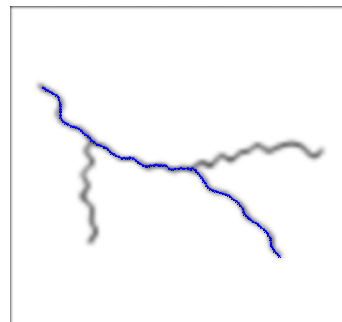
a



b



c



d

8 pav. Iš optometrinės kraujagyslių vingiuotumo skalės gautų kraujagyslių, panaudotų tyrime, pavyzdžiai: (a) viršutinė kraujagyslė nulinio laipsnio etalone, (b) pirmoji viršutinės kraujagyslės atšaka pirmo laipsnio etalone, (c) trasuota nuo kairiojo viršutinio galo kraujagyslė nulinio laipsnio etalone, (d) trasuota nuo kairiojo viršutinio galo kraujagyslė trečio laipsnio etalone

Gauti įverčiai buvo statistiškai apdoroti – rasti atitinkami vidurkiai, standartiniai nuokrypiai, minimumai ir maksimumai. 7-12 lentelėse pateikti viršutinės kraujagyslės (60-90 taškų) apdorojimo rezultatai.

7 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų viršutinės kraujagyslės vingiuotumo vertinimo lanko stygos santykiu statistiniai įverčiai

Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	1.0919	0.0013	1.0902	1.0931
1	1.1252	0.0027	1.1220	1.1291
2	1.1621	0.0061	1.1545	1.1682
3	1.2005	0.0084	1.1926	1.2130
4	1.2467	0.0126	1.2334	1.2633

8 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų viršutinės kraujagyslės vingiuotumo vertinimo italų mokslininkų pasiūlytu metodu statistiniai įverčiai

Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	0.0022	0.0030	0	0.0057
1	0.0033	0.0036	0	0.0082
2	0.0109	0.0071	0.0031	0.0178
3	0.0184	0.0158	0.0036	0.0436
4	0.0208	0.0189	0.0032	0.0525

9 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų viršutinės kraujagyslės vingiuotumo vertinimo kreivumo modulio integralu, padalintu iš linijos ilgio, statistiniai įverčiai

Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	0.0198	0.0060	0.0147	0.0297
1	0.0214	0.0026	0.0194	0.0259
2	0.0411	0.0097	0.0290	0.0508
3	0.0395	0.0051	0.0343	0.0472
4	0.0504	0.0043	0.0450	0.0557

10 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų viršutinės kraujagyslės vingiuotumo vertinimo siūlomu metodu (be filtravimo) statistiniai įverčiai

Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	0.1467	0.1980	0.0249	0.4966
1	0.0584	0.0157	0.0446	0.0811
2	0.2932	0.1679	0.0885	0.5159
3	0.2006	0.0594	0.1397	0.2860
4	0.6517	0.6378	0.1791	1.7095

11 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų viršutinės kraujagyslės vingiuotumo vertinimo siūlomu metodu (su koordinacių filtravimu) statistiniai įverčiai

Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	2.9723e-007	1.4395e-007	1.4211e-007	4.6945e-007
1	1.8573e-006	1.0412e-006	1.0573e-006	3.6521e-006
2	5.6820e-006	1.4532e-006	4.3047e-006	7.8829e-006
3	7.2672e-006	5.7267e-006	2.8355e-006	1.6385e-005
4	1.3096e-005	6.5493e-006	5.7615e-006	2.3501e-005

12 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų viršutinės kraujagyslės vingiuotumo vertinimo siūlomu metodu (su koordinacių išvestinių filtravimu) statistiniai įverčiai

Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	5.8106e-008	3.1454e-008	2.7570e-008	9.7507e-008
1	4.9901e-006	2.5939e-006	2.3641e-006	8.8601e-006
2	1.0880e-005	3.7601e-006	6.4313e-006	1.5609e-005
3	1.2758e-005	7.7088e-006	6.1840e-006	2.4987e-005
4	3.3660e-005	1.2725e-005	1.6525e-005	4.4302e-005

Iš pateiktų lentelių matyti, kad:

- Lanko-stygos santykis itin gerai leido atskirti vingiuotumo laipsnius – skirtingų laipsnių intervalai nesikerta. Gali būti, kad tai buvo numanomas vingiuotumo matas, naudotas kuriant šią skalę (tarpinių laipsnių etalonai gauti atlikus tam tikras manipuliacijas su kraštinių laipsnių etalonais).
- Nors naudojant italų mokslininkų pasiūlytą metodą gautų įverčių vidurkiai ir didėja, bet pastebimas labai didelis šių įverčių išsibarstymas. Dėl to iš vieno įverčio nustatyti vingiuotumo laipsnio beveik neįmanoma.

- Siūlomas metodas (atmainos su filtravimu) irgi daugiau ar mažiau leido atskirti vingiuotumo laipsnius – dažniausiai skirtingų laipsnių intervalai nesikerta, o ir kai kertasi, įverčio vidurkis, minimumas ir maksimumas didėja didėjant vingiuotumo laipsniui.

Po to buvo vertinta ir pirmoji viršutinės kraujagyslės atšaka, kurios ranka buvo sužymėta 15-50 taškų (13-18 lentelės).

13 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų pirmosios viršutinės kraujagyslės atšakos vingiuotumo vertinimo lanko stygos santykiu statistiniai įverčiai

Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	1.0212	0.0022	1.0182	1.0241
1	1.1099	0.0067	1.1021	1.1179
2	1.1478	0.0093	1.1347	1.1577
3	1.1838	0.0171	1.1585	1.1971
4	1.2742	0.0226	1.2522	1.3119

14 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų pirmosios viršutinės kraujagyslės atšakos vingiuotumo vertinimo italų mokslininkų pasiūlytu metodu statistiniai įverčiai

Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	0.0015	0.0034	0	0.0075
1	0.0017	0.0038	0	0.0084
2	0.0018	0.0041	0	0.0091
3	0.0140	0.0166	0	0.0397
4	0.0332	0.0200	0	0.0540

15 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų pirmosios viršutinės kraujagyslės atšakos vingiuotumo vertinimo kreivumo modulio integralu, padalintu iš linijos ilgio, statistiniai įverčiai

Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	0.0109	0.0078	0.0051	0.0214
1	0.0336	0.0090	0.0203	0.0455
2	0.0283	0.0022	0.0247	0.0303
3	0.0452	0.0082	0.0334	0.0531
4	0.0612	0.0107	0.0472	0.0774

16 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų pirmosios viršutinės kraujagyslės atšakos vingiuotumo vertinimo siūlomu metodu (be filtravimo) statistiniai įverčiai

Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	0.0506	0.0849	0.0034	0.1996
1	0.1450	0.1002	0.0283	0.2877
2	0.0415	0.0091	0.0328	0.0528
3	0.1801	0.1304	0.0551	0.3881
4	0.2136	0.1395	0.0635	0.4407

17 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų pirmosios viršutinės kraujagyslės atšakos vingiuotumo vertinimo siūlomu metodu (su koordinacių filtravimu) statistiniai įverčiai

Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	1.2797e-008	2.4944e-008	0	5.7236e-008
1	3.5093e-005	3.8913e-005	4.5994e-006	9.5644e-005
2	4.4746e-005	3.9034e-005	6.2055e-006	9.8283e-005
3	1.0044e-004	3.8549e-005	6.4635e-005	1.4989e-004
4	3.8114e-004	2.8608e-004	1.3990e-004	7.7524e-004

18 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų pirmosios viršutinės kraujagyslės atšakos vingiuotumo vertinimo siūlomu metodu (su koordinacių išvestinių filtravimu) statistiniai įverčiai

Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	0	0	0	0
1	2.2088e-007	3.3101e-007	0	7.9346e-007
2	1.7520e-006	2.4729e-006	0	5.8970e-006
3	7.9587e-006	4.3270e-006	9.0064e-007	1.2480e-005
4	5.3504e-006	2.9137e-006	2.6843e-006	8.8891e-006

Iš pateiktų lentelių matyti, kad:

- Lanko-stygos santykis vėl itin gerai leido atskirti vingiuotumo laipsnius – skirtingų laipsnių intervalai ir čia nesikerta. To galima tikėtis, nes visos kraujagyslės yra maždaug vienodai tiesios.
- Rezultatai, gauti kitais metodais, gana panašūs šiuo požiūriu.
- Pastebėtinai didesnis rezultatų išsibarstymas: maždaug dviem trečdaliais atvejų antrosios kraujagyslės įverčių standartinis nuokrypis didesnis.

Taip pat buvo naudotas ir kraujagyslių trasavimo metodas (žr. 3.1 skyrių). Iš pradžių buvo trasuota po 10 kartų nuo viršutinio kairiojo galo (19-24 lentelės). Paminėtina, kad trasuojant kraujagysles iš nulinio ir antro laipsnio etalonų buvo nueita pirmąją viršutinės kraujagyslės atšaka (75-80 taškų), o kitais atvejais – antrąją (120-130 taškų).

19 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų kraujagyslės, trasuotos nuo viršutinio kairiojo galo, vingiuotumo vertinimo lanko stygos santykiu statistiniai įverčiai

Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	1.0782	0.0012	1.0760	1.0818
1	1.0707	5.2827e-004	1.0699	1.0712
2	1.1508	0.0011	1.1491	1.1517
3	1.1057	0.0010	1.1042	1.1080
4	1.1733	0.0045	1.1675	1.1781

20 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų kraujagyslės, trasuotos nuo viršutinio kairiojo galo, vingiuotumo vertinimo itaļų mokslininkų pasiūlytu metodu statistiniai įverčiai

Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	0.0201	0.0070	0.0095	0.0296
1	0.0287	0.0061	0.0211	0.0374
2	0.0370	0.0053	0.0228	0.0437
3	0.0472	0.0056	0.0420	0.0555
4	0.0882	0.0172	0.0640	0.1092

21 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų kraujagyslės, trasuotos nuo viršutinio kairiojo galo, vingiuotumo vertinimo kreivumo modulio integralu, padalintu iš linijos ilgio, statistiniai įverčiai

Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	0.0684	0.0055	0.0580	0.0736
1	0.0768	0.0043	0.0705	0.0809
2	0.0966	0.0031	0.0902	0.1023
3	0.0956	0.0078	0.0814	0.1019
4	0.0989	0.0028	0.0934	0.1019

22 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų kraujagyslės, trasuotos nuo viršutinio kairiojo galo, vingiuotumo vertinimo siūlomu metodu (be filtravimo) statistiniai įverčiai

Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	0.5227	0.1212	0.3367	0.6277
1	0.4037	0.0352	0.3541	0.4350
2	0.5303	0.0502	0.3917	0.5797
3	0.6792	0.1510	0.4622	0.8015
4	0.5621	0.0641	0.4860	0.6192

23 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų kraujagyslės, trasuotos nuo viršutinio kairiojo galo, vingiuotumo vertinimo siūlomu metodu (su koordinacių filtravimu) statistiniai įverčiai

Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	1.2373e-005	1.0180e-006	1.1315e-005	1.4207e-005
1	3.1711e-006	4.2974e-007	2.6814e-006	3.5889e-006
2	2.7126e-004	3.7070e-004	3.1261e-005	9.4103e-004
3	1.0452e-004	5.8379e-005	5.5298e-005	2.3706e-004
4	5.4342e-004	1.5954e-004	3.1401e-004	7.3492e-004

24 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų kraujagyslės, trasuotos nuo viršutinio kairiojo galo, vingiuotumo vertinimo siūlomu metodu (su koordinacių išvestinių filtravimu) statistiniai įverčiai

Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	1.0730e-005	2.6120e-006	8.2680e-006	1.4184e-005
1	9.5787e-006	2.0314e-007	9.1368e-006	9.9656e-006
2	1.2194e-004	2.3596e-005	7.7399e-005	1.5316e-004
3	6.0182e-005	2.1826e-006	5.6503e-005	6.3635e-005
4	6.8048e-005	4.4938e-006	6.0857e-005	7.2685e-005

Iš pateiktų lentelių matyti, kad:

- Lanko-stygos santykis šiuo atveju jau nebeleidžia atskirti vingiuotumo laipsnių. Ten, kur trasuojant etalonus buvo patekta į pirmąją viršutinės kraujagyslės atšaką, gauti aiškiai padidėję lanko-stygos santykio įverčiai.
- Gerai vingiuotumo laipsnius leido atskirti italų mokslininkų pasiūlytas metodus.
- Kreivumo modulio integralas neleido atskirti antro, trečio ir ketvirto laipsnių.
- Naudojant kreivumo išvestinės kvadrato integralą naudojančius metodus šiuo atveju nebuvo galima atskirti vingiuotumo laipsnių.

Galima tikėtis, kad gana prasti rezultatai buvo susiję su tuo, kad prielaida apie tolygų taškų pasiskirstymą per linijos ilgį pasirodė klaidinga. Dėl to skaičiavimai su tais pačiais duomenimis buvo atlikti ir sutankinus taškus taip, kad jie per visą linijos ilgį išsidėstytų tolygiai (linijos buvo aproksimuojamos splainais). Iš pradžių pateikti viršutinės kraujagyslės įverčiai (25-30 lentelės). Šiuo atveju italų mokslininkų pasiūlytu metodu beveik visada buvo gaunami nuliniai įverčiai, tad histerezės slenkstis buvo pakeistas į 0,1.

25 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų viršutinės kraujagyslės vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) lanko stygos santykiu statistiniai įverčiai

Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	1.0887	0.0014	1.0869	1.0905
1	1.1192	0.0020	1.1169	1.1224
2	1.1517	0.0035	1.1474	1.1561
3	1.1786	0.0057	1.1718	1.1853
4	1.2052	0.0072	1.1975	1.2139

26 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų viršutinės kraujagyslės vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) italų mokslininkų pasiūlytu metodu statistiniai įverčiai

Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	0	0	0	0
1	0.0028	0.0020	0	0.0057
2	0.0119	0.0042	0.0068	0.0179
3	0.0490	0.0092	0.0354	0.0578
4	0.1023	0.0227	0.0766	0.1337

27 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų viršutinės kraujagyslės vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) kreivumo modulio integralu, padalintu iš linijos ilgio, statistiniai įverčiai

Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	0.0191	0.0022	0.0171	0.0218
1	0.0511	0.0051	0.0485	0.0602
2	0.0824	0.0058	0.0758	0.0901
3	0.1097	0.0118	0.0949	0.1266
4	0.1501	0.0204	0.1286	0.1790

28 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų viršutinės kraujagyslės vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) siūlomu metodu (be filtravimo) statistiniai įverčiai

Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	2.7014e-005	4.6305e-006	2.2310e-005	3.4229e-005
1	6.5239e-005	1.5123e-005	4.7893e-005	8.7633e-005
2	1.7564e-004	5.3865e-005	1.3120e-004	2.6848e-004
3	3.1318e-004	7.9219e-005	2.1948e-004	4.1027e-004
4	9.1646e-004	4.1814e-004	5.6537e-004	0.0016

29 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų viršutinės kraujagyslės vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) siūlomu metodu (su koordinacių filtravimu) statistiniai įverčiai

Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	0.8582	0.2529	0.5932	1.1340
1	0.1590	0.0479	0.1075	0.2151
2	0.1055	0.0433	0.0657	0.1711
3	0.0441	0.0138	0.0325	0.0624
4	0.0452	0.0169	0.0248	0.0636

30 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų viršutinės kraujagyslės vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) siūlomu metodu (su koordinacių išvestinių filtravimu) statistiniai įverčiai

Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	1.4365e-005	1.9113e-006	1.1342e-005	1.6402e-005
1	3.9173e-005	7.6796e-006	3.0733e-005	4.9718e-005
2	1.0897e-004	3.3241e-005	8.3785e-005	1.6673e-004
3	1.9900e-004	4.8121e-005	1.3904e-004	2.5701e-004
4	5.6643e-004	2.2380e-004	3.5425e-004	9.4598e-004

Iš šių lentelių matyti, kad visais metodais, išskyrus naudojantį koordinacių filtravimą, buvo gautas monotoniškas įverčių vidurkio didėjimas.

Vėl buvo vertinama ir pirmoji viršutinės kraujagyslės atšaka (31-36 lentelės).

31 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų pirmosios viršutinės kraujagyslės atšakos vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) lanko stygos santykiu statistiniai įverčiai

Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	1.0190	0.0021	1.0158	1.0216
1	1.1035	0.0054	1.0976	1.1102
2	1.1377	0.0087	1.1234	1.1448
3	1.1658	0.0149	1.1416	1.1794
4	1.2230	0.0205	1.1946	1.2513

32 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų pirmosios viršutinės kraujagyslės atšakos vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) italų mokslininkų pasiūlytu metodu statistiniai įverčiai

Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	0	0	0	0
1	0.0147	0.0116	0	0.0312
2	0.0563	0.0144	0.0372	0.0699
3	0.0817	0.0103	0.0636	0.0888
4	0.1915	0.0054	0.1851	0.1988

33 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų pirmosios viršutinės kraujagyslės atšakos vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) kreivumo modulio integralu, padalintu iš linijos ilgio, statistiniai įverčiai

Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	0.0208	0.0056	0.0139	0.0289
1	0.0967	0.0091	0.0838	0.1093
2	0.1615	0.0144	0.1407	0.1750
3	0.2062	0.0147	0.1842	0.2236
4	0.3692	0.0242	0.3468	0.4066

34 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų pirmosios viršutinės kraujagyslės atšakos vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) siūlomu metodu (be filtravimo) statistiniai įverčiai

Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	1.1624e-005	7.7450e-006	4.2863e-006	2.2226e-005
1	1.1469e-004	4.0706e-005	8.5697e-005	1.8658e-004
2	1.8029e-004	3.8642e-005	1.3107e-004	2.3359e-004
3	4.4395e-004	1.1258e-004	3.2389e-004	5.9709e-004
4	0.0023	3.4804e-004	0.0019	0.0028

35 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų pirmosios viršutinės kraujagyslės atšakos vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) siūlomu metodu (su koordinacių filtravimu) statistiniai įverčiai

Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	0.2308	0.0746	0.1762	0.3598
1	1.0462	0.3621	0.6840	1.5488
2	1.1823	0.3495	0.7438	1.6369
3	1.6824	0.2605	1.3064	1.9267
4	4.7889	5.0335	1.2956	13.6904

36 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų pirmosios viršutinės kraujagyslės atšakos vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) siūlomu metodu (su koordinacių išvestinių filtravimu) statistiniai įverčiai

Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	6.2180e-006	4.5173e-006	2.2514e-006	1.3078e-005
1	6.5085e-005	3.2184e-005	2.6249e-005	1.1553e-004
2	1.2835e-004	2.3631e-005	9.7533e-005	1.5977e-004
3	2.9785e-004	6.7454e-005	2.3804e-004	3.9876e-004
4	0.0016	1.8023e-004	0.0013	0.0018

Šiuo atveju visais metodais buvo gautas monotoniškas įverčių augimas, tačiau tik naudojant lanko-stygos santykį ir siūlomą metodą (be filtravimo ir su koordinacių išvestinių filtravimu) gauti vidurkiai atitiko ankstesnius (jokiam laipsniui įvertis nebuvo mažesnis už žemesnio laipsnio įvertį ar didesnis už aukštesnio).

Taip pat buvo naudotas ir kraujagyslių trasavimo metodas (37-42 lentelės).

37 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų kraujagyslės, trasuotos nuo viršutinio kairiojo galo, vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) lanko stygos santykiu statistiniai įverčiai

Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	1.0738	5.3374e-004	1.0726	1.0753
1	1.0603	1.7561e-004	1.0601	1.0607
2	1.1402	0.0010	1.1375	1.1408
3	1.0926	6.6822e-004	1.0920	1.0938
4	1.1426	0.0031	1.1392	7.8507e-004

38 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų kraujagyslės, trasuotos nuo viršutinio kairiojo galo, vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) italų mokslininkų pasiūlytu metodu statistiniai įverčiai

Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	0.0116	0.0077	0.0049	0.0276
1	0.0400	0.0033	0.0376	0.0466
2	0.0865	0.0116	0.0605	0.0951
3	0.0654	0.0043	0.0581	0.0718
4	0.1831	0.0044	0.1789	0.1898

39 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų kraujagyslės, trasuotos nuo viršutinio kairiojo galo, vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) kreivumo modulio integralu, padalintu iš linijos ilgio, statistiniai įverčiai

Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	0.1008	0.0056	0.0908	0.1092
1	0.1264	0.0031	0.1221	0.1300
2	0.2152	0.0059	0.2030	0.2235
3	0.1732	0.0033	0.1678	0.1791
4	0.2822	0.0046	0.2764	0.2894

40 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų kraujagyslės, trasuotos nuo viršutinio kairiojo galo, vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) siūlomu metodu (be filtravimo) statistiniai įverčiai

Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	3.3240e-004	5.3733e-005	2.6040e-004	4.5303e-004
1	7.0668e-004	3.9818e-005	6.4846e-004	7.4559e-004
2	7.1497e-004	4.4728e-005	6.7850e-004	7.8561e-004
3	7.6535e-004	2.9829e-005	7.0459e-004	8.0881e-004
4	0.0017	4.0015e-005	0.0017	0.0018

41 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų kraujagyslės, trasuotos nuo viršutinio kairiojo galo, vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) siūlomu metodu (su koordinacių filtravimu) statistiniai įverčiai

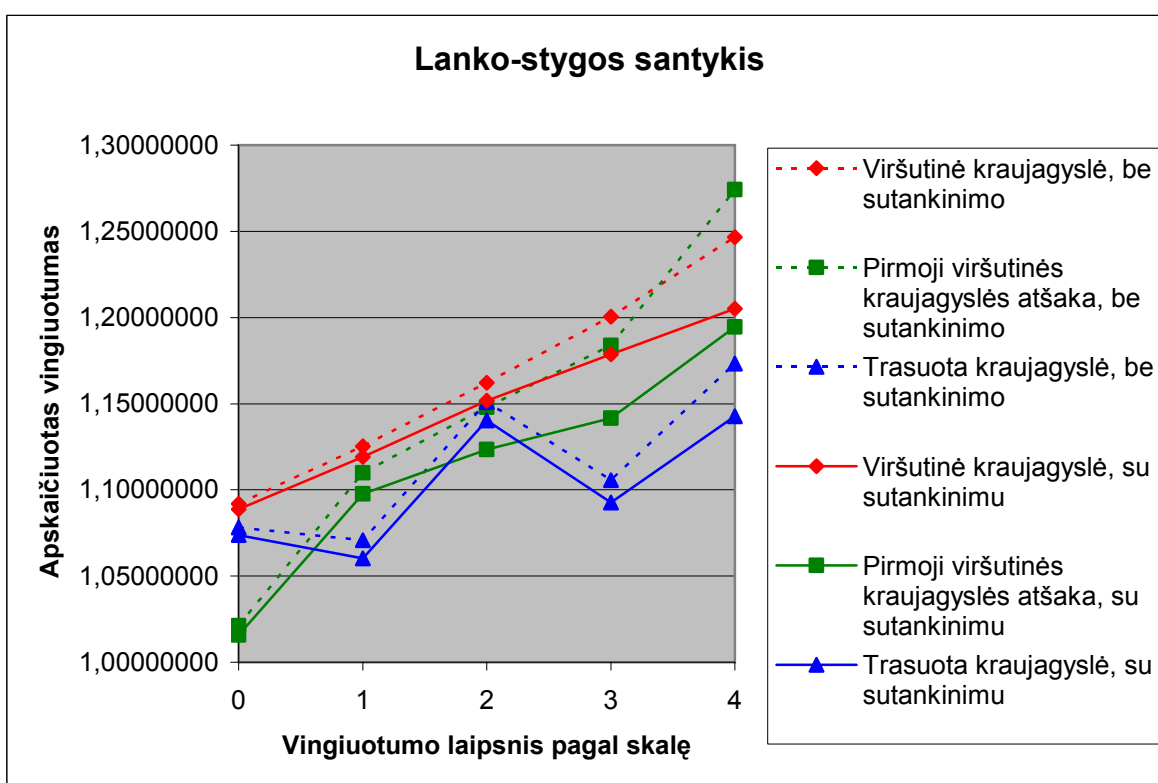
Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	1.2206	0.1775	0.9751	1.5686
1	7.0668e-004	3.9818e-005	6.4846e-004	7.4559e-004
2	2.8358	0.5279	1.7350	3.6219
3	0.7033	0.1728	0.5564	1.1547
4	0.4006	0.0847	0.3460	0.6331

42 lentelė. Optometrinės vertinimo skalės etalonų kraujagyslės, trasuotos nuo viršutinio kairiojo galo, vingiuotumo vertinimo (sutankinus taškus) siūlomu metodu (su koordinacių išvestinių filtravimu) statistiniai įverčiai

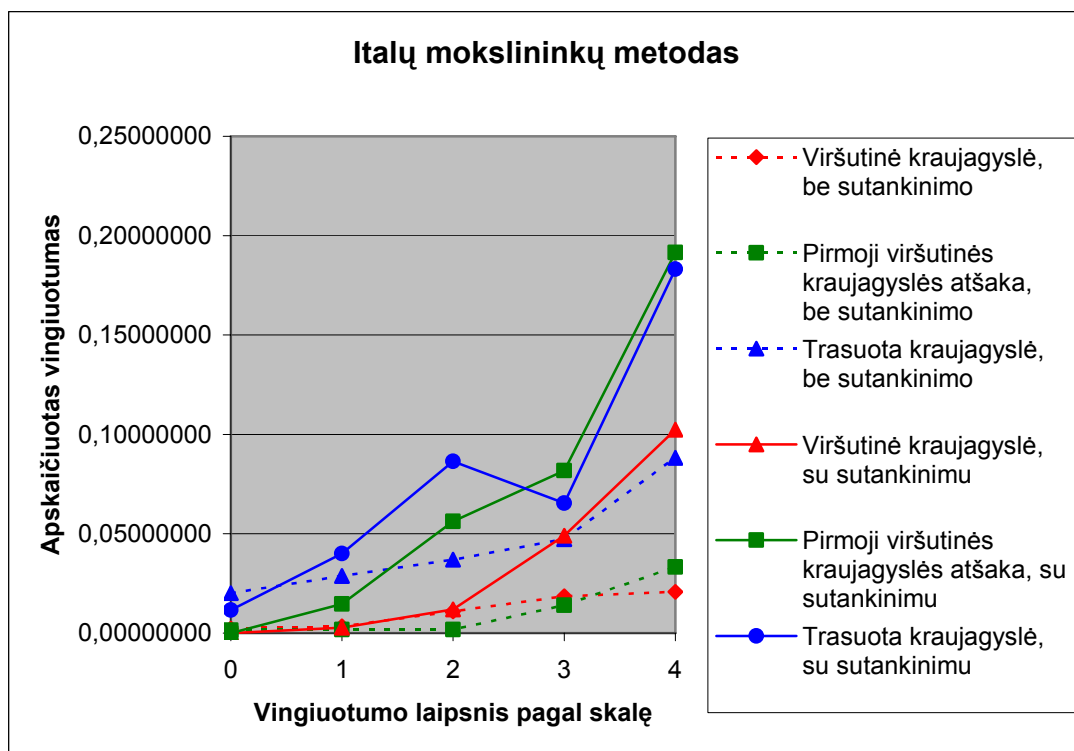
Laipsnis	Vidurkis	St. nuokrypis	Min	Max
0	1.9799e-004	3.1452e-005	1.6101e-004	2.7522e-004
1	3.9954e-004	2.3789e-005	3.6610e-004	4.2767e-004
2	4.3669e-004	2.1834e-005	4.1315e-004	4.7915e-004
3	4.5211e-004	1.8123e-005	4.2050e-004	4.8674e-004
4	0.0011	2.9142e-005	0.0010	0.0011

Iš pateiktų lentelių matyti, kad šiuo atveju tik naudojant siūlomą metodą (be filtravimo ir su koordinacių išvestinių filtravimu) buvo gauti monotoniškai didėjantys įverčių vidurkiai, nors gauti įverčiai neatitiko gautų anksčiau.

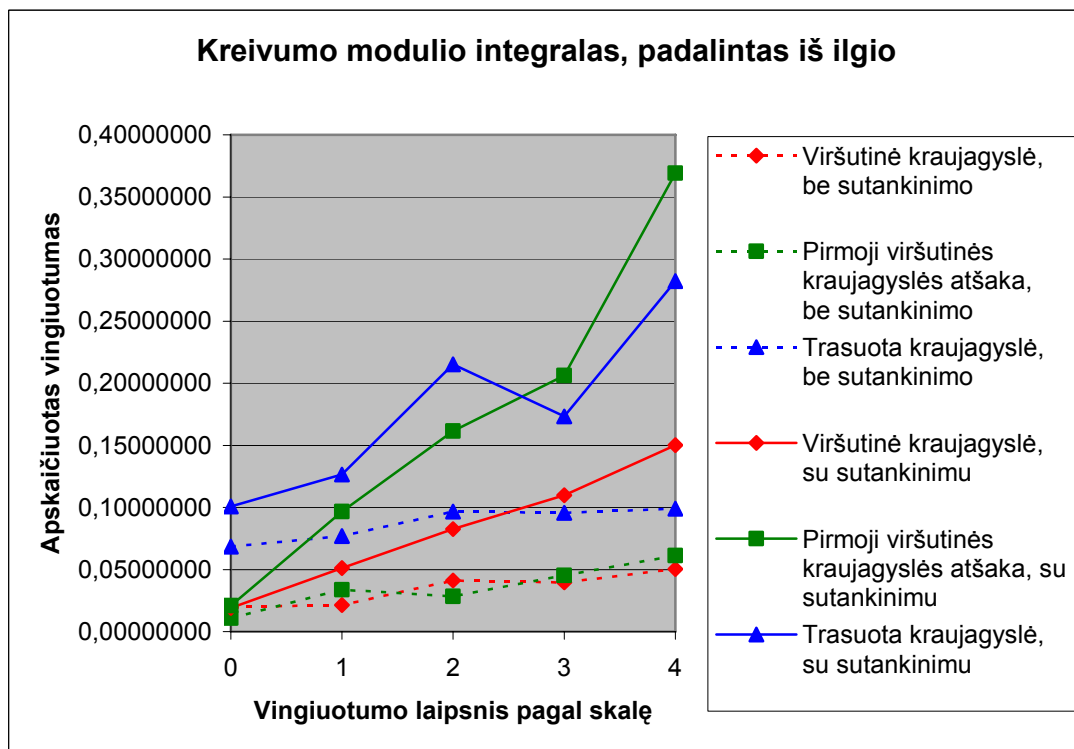
Tyrimo rezultatai apibendrinti 9-14 pav. (parodyti tik vidurkiai).



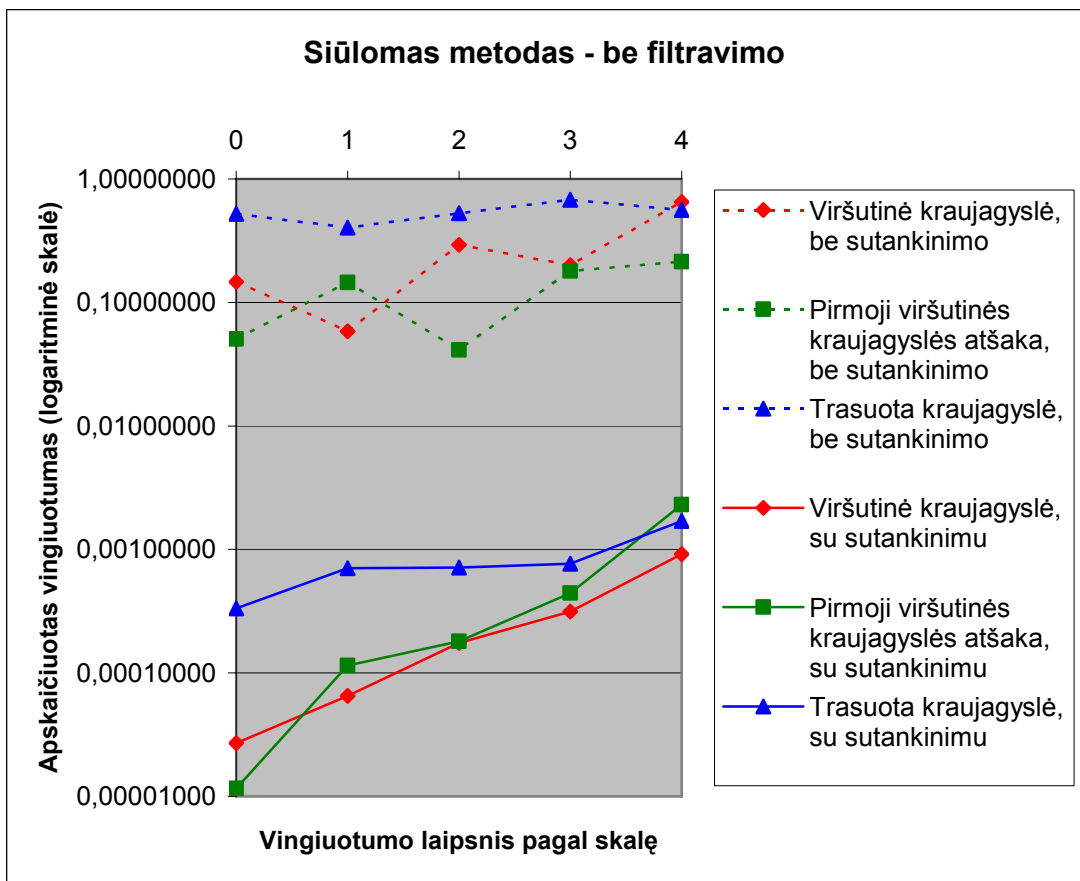
9 pav. Tyrimo, naudojant optometrinę skalę, rezultatai lanko-stygos santykiui



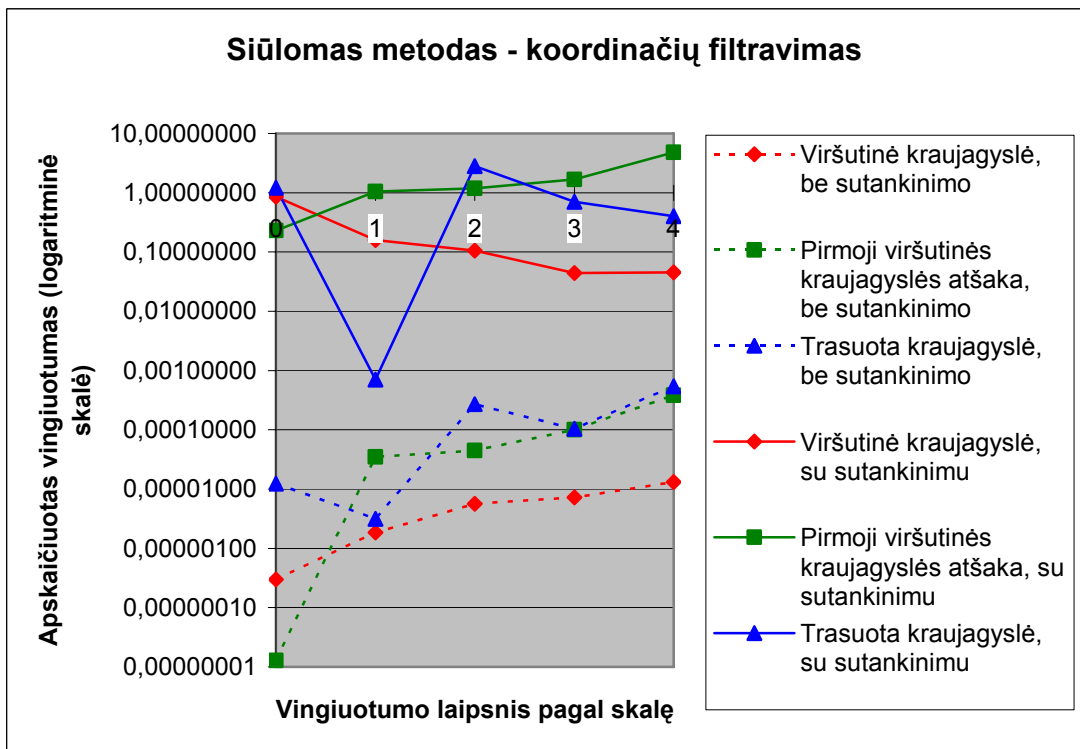
10 pav. Tyrimo, naudojant optometrinę skalę, rezultatai italų mokslininkų pasiūlytam metodui



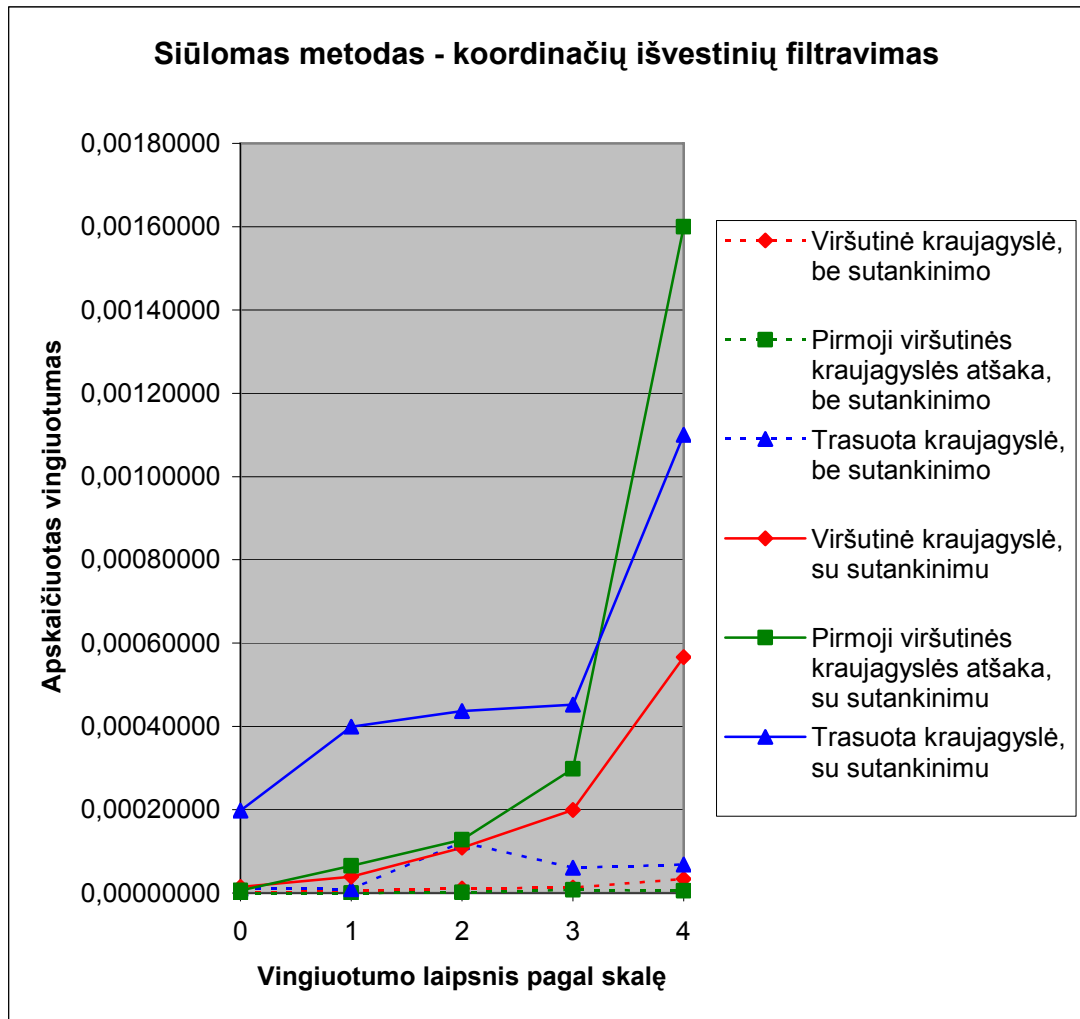
11 pav. Tyrimo, naudojant optometrinę skalę, rezultatai kreivumo modulio integralui, padalintam iš ilgio



12 pav. Tyrimo, naudojant optometrinę skalę, rezultatai siūlomam metodui be filtravimo



13 pav. Tyrimo, naudojant optometrinę skalę, rezultatai siūlomam metodui su koordinačių filtravimu



14 pav. Tyrimo, naudojant optometrinę skalę, rezultatai siūlomam metodui su koordinacių išvestinių filtravimu

Iš tyrimo galima daryti išvadą, kad šiuo atveju taškų sutankinimas žymiai pagerina rezultatus, gaunamus siūlomu metodu be filtravimo ir su koordinacių išvestinių filtravimu, kurie, kaip matyti, yra pastebimai geresni už rezultatus, gautus kitais metodais. Be to, galima tikėtis, kad siūlomo metodo su koordinacių išvestinių filtravimu rezultatus galima dar pagerinti, parinkus filtro parametrus, optimizuotus šiame tyrime nagrinėtoms linijoms, o ne teoriniams kraujagyslių modeliams.

3. Praktinis rezultatų pritaikymas

3.1. Akies dugno vaizdų analizė

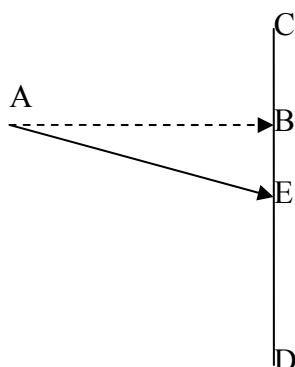
Kadangi teigiama, kad kraujagyslių vingiuotumas padidėja dėl pakilusio kraujo spaudimo arba kraujo klampumo (5), galima tikėtis, kad šis metodas galės būti panaudotas ne tik tiesiogiai atskirų akių ligų (papilodemos ir pan.) diagnostikai, bet ir kraujo spaudimo (arba kraujo klampumo) matavimui. Tikėtina, kad vingiuotumas kinta gana lėtai, tad šis metodas turėtų leisti nustatyti ne momentinį kraujo spaudimą (arba kraujo klampumą), bet vidutinę jo reikšmę per tam tikrą laiką. Tai gali būti svarbu, pavyzdžiui, veterinarijoje, nes pasiruošimas kraujospūdžio matavimui gali išgąsdinti gyvūną, dėl ko gali padidėti jo momentinis kraujo spaudimas.

Tokiu atveju svarbu rasti būdą aproksimuoti kraujagysles linijomis. Paprasčiausias būdas – vartotojui pačiam pele pažymėti aproksimuojančius taškus. Akivaizdu, kad toks būdas netinka bent kiek ilgesnei linijai (nors leidžia gauti daug skirtingų taškų rinkinių). Dėl to reikia šiuos taškus (patartina centrinę liniją) nustatyti (t.y., atpažinti kraujagyslę) koku nors automatinio arba pusiau automatinio būdu. Yra dvi pagrindinės kraujagyslių atpažinimo kryptys (8, 19). Pagal vieną iš jų, visi vaizdo taškai suskirstomi į priklausančius kraujagyslėms ir joms nepriklausančius. Pagal kitą, gaunamas vienas kraujagyslės centrinės linijos taškas, o po to trasuojama išilgai visos kraujagyslės. Suprantama, antroji kryptis perspektyvesnė (šiuo atveju), nes ji leidžia iškart gauti pageidaujamus taškus.

Akivaizdu, kad taškai, aprašantys liniją, neturi būti išsidėstę pernelyg arti vienas kito, nes tokiu atveju dėl diskretizavimo bus gauta aiškiai vingiuota linija. Tačiau tai galėtų būti nesunkiai pataisoma atmetant dalį taškų.

Buvo išbandytas vienas atpažinimo metodas, panašus į modifikuotą Keno (*Can*) algoritmą (8). Pagal jį pradiniai duomenys yra vaizdas, centrinės linijos taškas (*A*) ir kryptis (ją galima nustatyti turint dar vieną tašką). Dažniausiai naudojama žalia vaizdo komponentė (1, 12). Turint šiuos duomenis, galima rasti naują kandidatinių centrinių tašką (*B*), nutolusį per tam tikrą duotą atstumą (žingsnį) duotąja kryptimi nuo pradinio taško. Ši padėtis yra gana netiksli, tad turi būti patikslinta. Tam ieškoma kraujagyslės kraštų: peržiūrimi taškai priklausantys statmeniui, nuleistam į tiesę *AB* per tašką *B* (peržiūrimi taškai randami naudojant Brezenheimo algoritmą). Tol, kol nežinomas kraujagyslės skersmuo, patartina tikrinti visus taškus, nutolusius nuo *B* per vieną maksimalų galimą skersmenį arba mažiau (žinant skersmenį galima daryti prielaidą, kad jis nedaug keisis, ir tikrinti tik taškus, nutolusius maždaug tiek pat, kiek ir ankstesni). Ieškoma taškų (skirtingose *B* pusėse), kuriuose gradientas būtų didžiausias (*C* ir *D*). Tada randamas atkarpos *CD* vidurys (*E*). Tai –

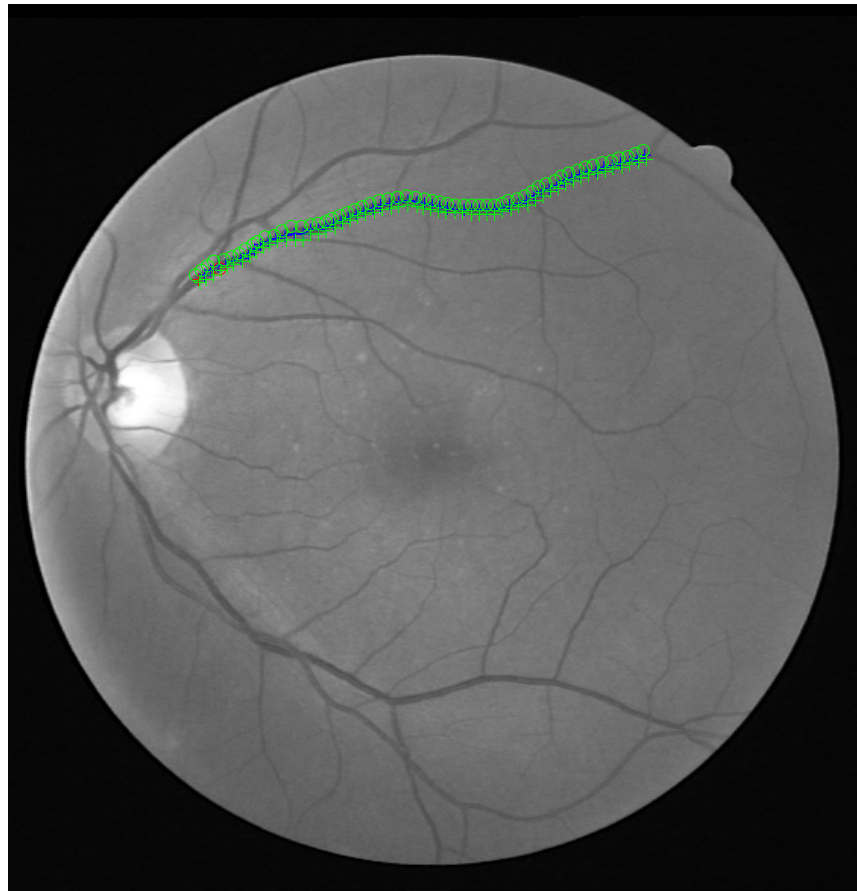
naujas pradinis taškas, o vektorius AE rodo naują pradinę kryptį (15 pav.). Skaičiavimai gali būti nutraukiami, kai, pavyzdžiui, gradientų modulių taškuose C ir D suma mažesnė nei gradiento modulio vidurkio ir pusės standartinio nuokrypio suma.



15 pav. Kraujagyslės atpažinimo algoritmo žingsnis

Kad kraujagyslės būtų tiksliau atpažįstamos savo išsišakojimų vietose, bandoma išsišakojimus rasti. Tam kiekvienoje vietoje, kurioje bent kiek sparčiau kinta kraujagyslės skersmuo, tikrinama, ar algoritmas rastų tą patį centrinį tašką, pakeitus pradinę kryptį į jungiančią A su atkarpos CE vidurio tašku. Po to analogiškai tikrinama ir naudojant atkarpos DE vidurio tašką. Jei rastieji centriniai taškai gerokai skiriasi, pasirenkamas tas, kuris mažiau nukrypsta nuo pradinės krypties.

Tokio algoritmo atpažintos kraujagyslės pavyzdys pateiktas 16 pav.



16 pav. Kraujagyslė, rasta naudojant pasiūlyto kraujagyslių trasavimo metodo pirmąją versiją

Toks algoritmas (kaip ir daugelis kitų) prastai veikia, kai kraujagyslės dažnai kertasi ir šakojasi arba kai stebimas kraujagyslių refleksas – ryškus atspindis kraujagyslės viduryje (3). Tačiau jį dar galima tobulinti.

Galima atsižvelgti į tai, kad ieškomi gradientai yra nukreipti į kraujagyslės išorę. Dėl to tinkamos yra tik tos taškų poros, kuriuose gradientai priešingi. Tai galima nesunkiai patikrinti. Tarkime, nagrinėjame taškus C_1 ir D_1 . Iš poros pasirenkame vieną tašką (C_1). Skaičiuojame spalvos intensyvumo antigradiento šiame taške ir normuoto vektoriaus C_1D_1 skaliarinę sandaugą (SS_1). Kuo tinkamesnė nagrinėjama pora, tuo didesnės sandaugos galima tikėtis. Analogiškas teiginys teisingas ir pasirinkus kitą tašką (gauta skaliarinė sandauga bus žymima SS_2). Vadinasi, galima tikėtis, kad geresni rezultatai bus pasiekti ankstesniajame algoritme pasirinkus ne porą taškų, kuriuose gradientas didžiausias, o porą, kuriai didžiausias įvertis, į kurį įeina minėtosios skaliarinės sandaugos. Eksperimentiškai buvo nustatyta, kad geri rezultatai gaunami naudojant tokį įvertį (pora tuo tinkamesnė, kuo įvertis didesnis):

$$G = SS_1 + SS_2 + 2 \cdot \min(SS_1, SS_2) + 2 \cdot \min(\text{grad}(C_1), \text{grad}(D_1)). \quad (12)$$

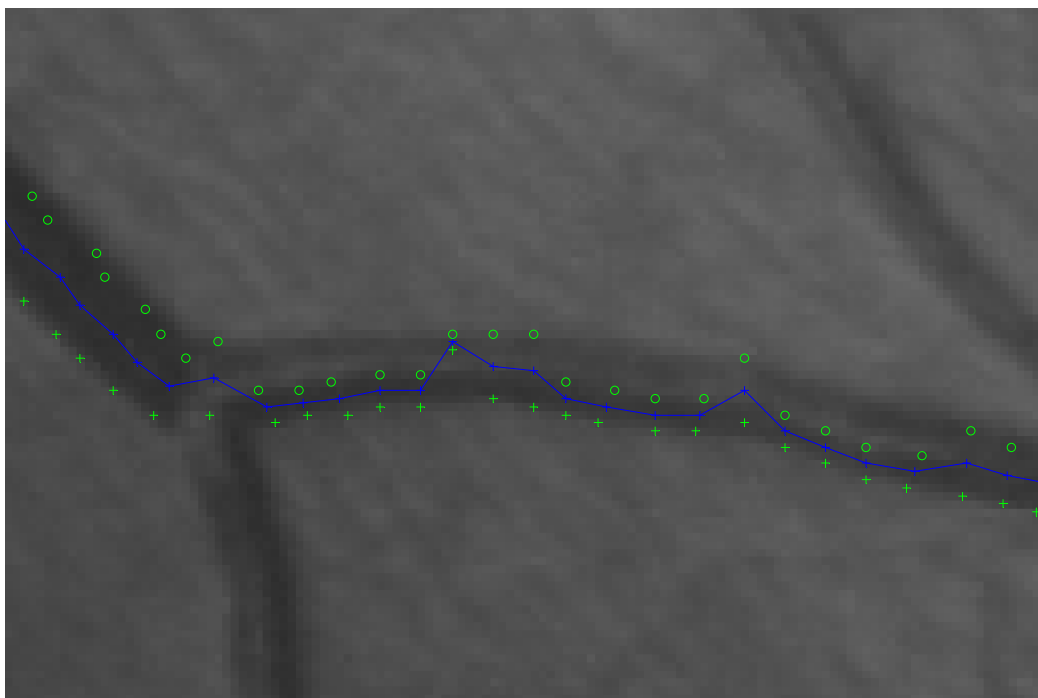
Taip pat galima pastebėti, kad pagal nagrinėjamą algoritmą gavus naują pradinę kryptį, galima ją naudoti ne su naujuoju centriniu tašku (E), o su ankstesniu (A). Suprantama, naujas kandidatinis centrinis taškas vėl turi būti pasirenkamas per duotąjį atstumą (žingsnį) nuo A . Eksperimentas parodė, kad tokiu būdu dažnai galima gauti beveik skersus kraujagyslės pjūvius.

Akivaizdu, kad jei žingsnis bus mažas, paklaida randant kraujagyslės kraštus (taškus D ir E) sukels didelį krypties pokytį. Tokiu atveju algoritmas gali neberasti naujos tinkamos poros. Dėl to skaičiavimus reikėtų atlikti su keletu skirtingų krypčių ir pasirinkti tinkamiausią iš rastų taškų porų. Pavyzdžiui, i -tajame žingsnyje galima naudoti:

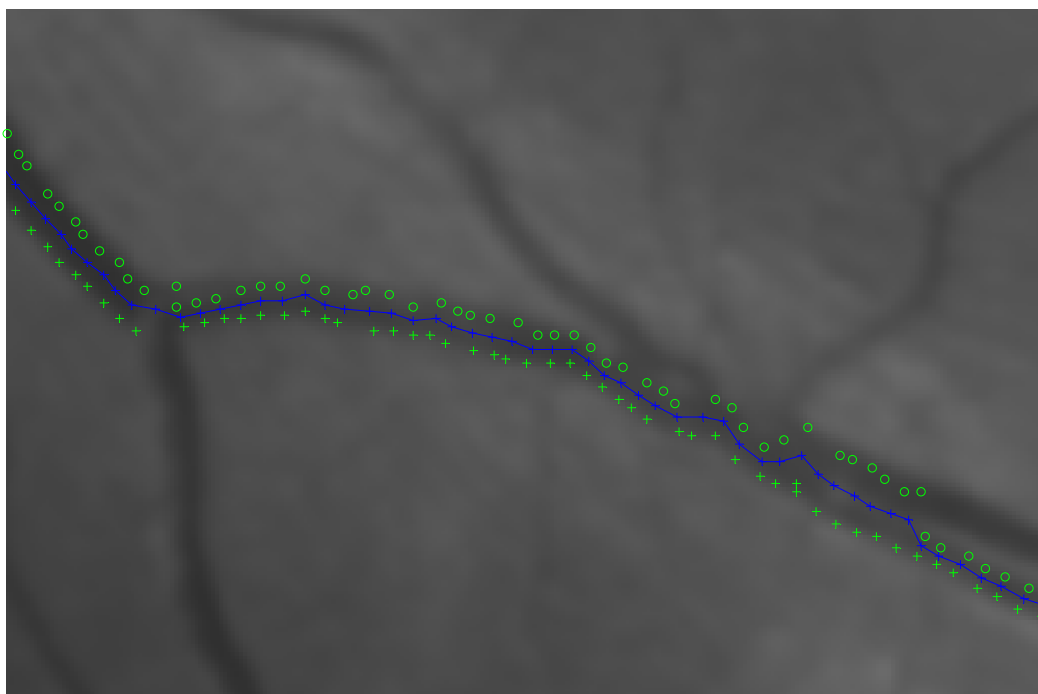
- kryptį nuo $(i-3)$ -ojo centrinio taško iki $(i-2)$ -ojo,
- šios krypties ir ankstesniame žingsnyje rastos krypties vidurkį,
- statmenį $(i-1)$ -ajame žingsnyje rastam skerspjūviui,
- statmenis gradientui vienoje ir kitoje pjūvio pusėje.

Tiesa, taip modifikavus algoritmą kartais kraujagyslės gale „apsisukama“. Dėl to verta tikrinti, ar naujai gauto skerspjūvio „kairė“ ir „dešinė“ nėra susikeitę vietomis. Tai daroma atmetant skerspjūvius, kurių vektoriaus CD skaliarinė sandauga su ankstesnio skerspjūvio analogišku vektoriumi yra neigiama.

Taip modifikuotas metodas jau beveik visada gerai atpažįsta kraujagysles. Pasitaiko, kad ne tuo keliu nusukama šakojimosi ir persidengimo vietose, bet to gana sunku išvengti žymiai nepadidinant skaičiavimų laiko. Be to, šis metodas prastai atpažįsta kraujagysles, kai pasireiškia šviesos refleksas (17 pav.), nors jį galima beveik pašalinti filtruojant vaizdą (18 pav.). Žinoma, taip padidėja galimybė, kad bus neatskirtos greta einančios kraujagyslės.



17 pav. Kraujagyslės su šviesos refleksu, rastos naudojant pasiūlyto kraujagyslių trasavimo metodo antrąją versiją (nefiltravus vaizdo), fragmentas



18 pav. Kraujagyslės su šviesos refleksu, rastos naudojant pasiūlyto kraujagyslių trasavimo metodo antrąją versiją (nufiltravus vaizdą), fragmentas

Akivaizdu, kad toks trasavimo metodas tinka rasti linijoms ir kitokiuose vaizduose.

3.2. Kelių projektavimas

Šis metodas taip pat iš principo gali būti panaudotas projektuojant kelius. Tiesa, šiuo atveju vingiuotumo nauda sunkiau nusakoma, nes jis nevienareikšmiškai nusako važiavimo sudėtingumą (kelias be vingių šiek tiek padidina tikimybę užmigti prie vairo). Be to, keliai paprastai projektuojami taip, kad susidėtų iš atkarpų ir apskritimo lankų – nevingiuotų linijų (23). Dėl to perėjimo taškuose kreivumo išvestinė begalinė, o visuose kituose – lygi nuliui, tad įvertis neegzistuoja. Tokiu atveju galima nagrinėti ne kelio centrinę liniją, o automobilio trajektoriją, tačiau ji gali priklausyti ne tik nuo kelio formos, bet ir nuo vairavimo stiliaus bei eismo sąlygų.

3.3. Funkcijų interpoliavimas ir aproksimavimas

Funkcijos dažnai interpoliuojamos ir aproksimuojamos naudojant įvairius splainus, ypač kubinius splainus. Žinoma, kad kubinis splainas – tai linija, minimizuojanti funkcionalą

$$J(f) = \int_a^b |f''(x)|^2 dx. \quad (13)$$

Akivaizdu, kad šis funkcionalas mažai skiriasi nuo 7 formule apibrėžto įverčio (kreivumas čia aproksimuotas antrąja funkcijos išvestine). Galima tikėtis, kad pakeitus šį funkcionalą į nusakytą 10 ar 11 formule (gal pasinaudojus ta pačia kreivumo aproksimacija), būtų lengvai aproksimuojamos nevingiuotos linijos – apskritimo lankai. Atitinkamas išraiškas būtų galima išvesti panaudojus vingiuotumui išvestą Oilerio lygties išraišką (3 priedas ir 4 priedas).

Išvados

- Palyginti esami vingiuotumo vertinimo metodai ir nustatyta, kad visi jie turi gana rimtų trūkumų ir nepakankamai tiksliai vertina vingiuotumą.
- Pasiūlytas naujas vingiuotumo vertinimo metodas, naudojantis kreivumo išvestinės kvadrato integralą, labiau tinkamas vingiuotumo įvertinimui.
- Nustatyta, kad pasiūlytas metodas atsparus lygiagrečiajam postūmiui ar posūkiams, nėra atsparus mastelio transformacijai (padidinus visas koordinates du kartus, įvertis sumažėja aštuonis kartus). Įvertis lygus nuliui nevingiuotoms linijoms (tiesės atkarpoms ir apskritimo lankams).
- Iš išnagrinėtųjų metodų vingiuotas ir nevingiuotas kraujagysles akies dugno vaizduose geriausiai atskiria siūlomas metodas su koordinačių išvestinių filtravimu: mažiausia įverčio vingiuotai kraujagyslei reikšmė didesnė už didžiausią įverčio nevingiuotai kraujagyslei reikšmę.
- Sukurtas ir išbandytas vienas kraujagyslių trasavimo metodas, palengvinantis kraujagysles atitinkančių linijų gavimą.
- Išvesta Oilerio lygties išraiška (tiek naudojant kreivumo aproksimaciją, tiek jos nenaudojant) vingiuotumui, apskaičiuotam pagal siūlomą metodą, kuri vėliau galėtų būti panaudota vingiuotumo minimumų ir maksimumų radimui.

Literatūra

1. M. Grušeckij, V. Marozas, D. Jegelevičius, R. Ulickienė. Kraujagyslių tinklo optiniuose akies dugno vaizduose trasavimo algoritmas, Elektronika ir elektrotechnika, Nr. 2(58), 2005, p. 83-87, ISSN 1392-9631
2. Darius Jegelevičius. Oftalmologinių diagnostinių signalų apdorojimas telemedicinos sistemose. Daktaro disertacija. Kauno technologijos universitetas, 2002
3. Akių ligų vadovas. Sudarytojai Aldona Blužienė, Vytautas Jašinskas, Šiauliai, 2005
4. Širdies ligos. Sudarytojas P. Zabiela, Kaunas, 1991
5. Imran Akram, Adrian Rubinstein. Common retinal signs, Optometry Today, T. 45, Nr. 2, 2005, p. 33-36, ISSN: 0268-5485
6. S. Chaudhuri, S. Chatterjee, N. Katz, M. Nelson, M. Goldbaum. Detection of Blood Vessels in Retinal Images Using Two-Dimensional Matched Filters. IEEE Transactions on Med Imaging, T. 8, Nr. 3, 1989, p. 263-269
7. Aram V. Chobanian, George L. Bakris, Henry R. Black, William C.ushman, Lee A. Green, Joseph L. Izzo Jr, Daniel W. Jones, Barry J. Materson, Suzanne Oparil, Jackson T. Wright Jr, Edward J. Rocella. The Seventh Report of the Joint National Committee on Prevention, Detection, Evaluation, and Treatment of High Blood Pressure: The JNC 7 Report. JAMA 2003, Nr. 289(19) p. 2560-2571
8. Kenneth H. Fritzsche. Computer Vision algorithms for Retinal Vessel width change detection and quantification. Pasiūlymas atlikti daktarines studijas. Rensselaer Polytechnic Institute, 2002 [žiūrėta 2006-05-07]. Prieiga per internetą: http://www.cs.rpi.edu/~fritz2/ken_candidacy.pdf
9. K. G. Goh, W. Hsu, M. Li Lee, H. Wang. ADRIS: An Automatic Diabetic Retinal Image Screening System. Medical Data Mining and Knowledge Discovery, T. 60, Studies in Fuzziness and Soft Computing. Sudarytojas K. J. Cios, Physica-Verlag, 2001, p. 181-210,
10. Henry Gray. Anatomy of the Human Body. Philadelphia: Lea & Febiger, 1918, Bartleby.com, 2000 [žiūrėta 2005-05-25]. Prieiga per internetą: <http://www.bartleby.com/107/>.
11. Enrico Grisan, Marco Foracchia, Alfredo Ruggeri. A novel method for automatic evaluation of retinal vessel tortuosity. Proceedings of the 25th Annual International Conference of the IEEE EMBS, Cancun, Mexico, 2003

12. William E. Hart, Michael Goldbaum, Brad Cote, Paul Kube, Mark R. Nelson. Automated measurement of retinal vascular tortuosity. *International Journal of Medical Informatics*, T. 53, Nr. 2-3, p. 239-252, 1999
13. Yuji Hatanaka, Takeshi Hara, Hiroshi Fujita, Masaru Aoyama, Hideya Uchida, Testuya Yamamoto. Automated Analysis of the Distributions and Geometries of Blood Vessels on Retinal Fundus Images. *Medical Imaging 2004: Image Processing. Proceedings of SPIE*, T. 5370(3), 2004, p. 1621-1628
14. J. A. Kylstra, T. Wierzbicki, M. L. Wolbarsht, M. B. Landers, E. Stefansson. The relationship between retinal vessel tortuosity, diameter, and transmural pressure. *Graefe's Archive for Clinical and Experimental Ophthalmology*, T. 224, Nr. 5, 1986, p. 477 - 480
15. Huiqi Li, Opas Chutatape. A Model-Based Approach for Automated Feature Extraction in Fundus Images. *Proceedings of the Ninth IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV 2003)*, T. 1, p. 394
16. Martin Mächler, Very Smooth Nonparametric Curve Estimation by Penalizing Change of Curvature, Research Report No 71. Seminar für Statistik, Eidgenössische Technische Hochschule, 1993
17. Finlay A. McAlister, Sharon E. Straus. Measurement of blood pressure: an evidence based review. *British Medical Journal*, 2001, Nr. 322(7291), p. 908–911
18. Richard M. Pearson. Optometric Grading Scales for use in everyday practice. *Optometry Today*, T. 43, Nr. 20, 2003, ISSN: 0268-5485
19. Axel Pinz, Stefan Bernogger, Peter Datlinger, Andreas Kruger. Mapping the human retina, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, T.17, Nr. 4, 1998, p. 606-619
20. Allen H. Reed, Kevin B. Briggs, Dawn L. Lavoie. Porometric Properties of Siliciclastic Marine Sand: A Comparison of Traditional Laboratory Measurements With Image Analysis and Effective Medium Modeling. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, T. 27, Nr. 3, 2002
21. James S. Wolffsohn, Genevieve A. Napper, Suit-May Ho, Andrew Jaworski, Tamara L. Pollard. Improving the description of the retinal vasculature and patient history taking for monitoring systemic hypertension. *Ophthalmic and Physiological Optics*, T. 21, Nr. 6, 2001, p. 441-449.
22. Medical Dictionary Search Engine [žiūrēta 2005-05-25]. Prieiga internetu: <http://www.books.md/>

23. Field Manual No. 5-430-00-1 (FM 5-4300-00-1), Air Force Joint Pamphlet No. 32-8013, Vol I (AFJPAM32-8013, Vol I) Planning and Design of Roads, Airfields, and Heliports in the Theater of Operations – Road Design. Headquarters, Department of the Army, Department of the Air Force, Washington, DC, 1994
24. В. Суворов. Последняя республика: Почему Советский Союз проиграл Вторую мировую войну. Москва., 1995

Padėkos

Už paramą darbe ir vertingus patarimus dėkoju:

- doc. Vaidotui Marozui,
- prof. habil.dr. A. Lukoševičiui ir visam Biomedicininės inžinerijos instituto kolektyvui,
- prof., hab. dr. Alvydui Paunksniui, doc. dr. Valerijui Barzdžiukui ir visam KMUK akių ligų klinikos kolektyvui.

1 priedas. Autoriaus publikacijų, susijusių su šiuo darbu, sąrašas

1. Patašius, Martynas; Jegelevičius, Darius; Marozas, Vaidotas; Lukoševičius, Arūnas. Akies dugno kraujagyslių vingiuotumo apibrėžimas kreivumo išvestinės kvadrato integralu // Informacijos mokslai : mokslo darbai. ISSN 1392-0561. 2005, Vol. 34. p. 232-236.
2. Patašius, Martynas; Marozas, Vaidotas; Lukoševičius, Arūnas; Jegelevičius, Darius. Evaluation of tortuosity of eye blood vessels using the integral of square of derivative of curvature // EMBEC'05[Elektroninis išteklius]: the 3rd European Medical and Biological Engineering Conference: IFMBE European Conference on Biomedical Engineering, November 20 - 25, 2005, Prague: proceedings. ISSN 1727-1983. 2005, Vol. 11. p. [1-4].

2 priedas. Vingiuotumo, apskaičiuoto siūlomu metodu, nulių radimas

Iš pradžių žinoma, kad:

$$V_{pn} = \frac{V_{pi}}{L}$$

$$V_{pi} = \int_{t_1}^{t_2} (k'(t))^2 dt$$

$$k = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} ds$$

Neparametrinės funkcijos atveju:

$$k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\begin{aligned} \frac{dk}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} y''' - \left((1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} \right)' y''}{(1 + y'^2)^3} = \\ &= \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} y''' - \frac{3}{2} \sqrt{1 + y'^2} \cdot 2y'y''^2}{(1 + y'^2)^3} = \frac{\sqrt{1 + y'^2} \left((1 + y'^2) y''' - 3y'y''^2 \right)}{\sqrt{1 + y'^2} \cdot (1 + y'^2)^{\frac{5}{2}}} = \\ &= \frac{(1 + y'^2) y''' - 3y'y''^2}{(1 + y'^2)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

$$V_{pi} = \int_{x_1}^{x_2} (k'(x))^2 dt = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right)'^2 dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{(1 + y'^2) y''' - 3y'y''^2}{(1 + y'^2)^{\frac{5}{2}}} \right)^2 dx$$

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$V_{pn} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} (k'(x))^2 dx}{\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx}$$

Prisilyginame vingiuotumą nuliui:

$$V_{pn} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} (k'(x))^2 dx}{\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2} dx} = 0$$

$$\int_{x_1}^{x_2} (k'(x))^2 dx = 0$$

Kadangi realiojo skaičiaus kvadratas negali būti neigiamas, galima teigti, kad:

$$k' = \frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}} = 0, \quad \forall x \in [x_1, x_2]$$

Padauginame iš vardiklio (kuris negali būti lygus nuliui).

$$(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 = 0, \quad \forall x \in [x_1, x_2]$$

arba

$$y''' = \frac{3y'y''^2}{1+y'^2}, \quad \forall x \in [x_1, x_2]$$

Nesunku įsitikinti, kad viena iš šios lygties šaknų yra tiesė:

$$y'' = y''' = 0, \quad \forall x \in [x_1, x_2]$$

Taip pat galima tikėtis, kad išvestąją lygtį tenkina ir bet koks apskritimo lankas.

3 priedas. Oilerio lygties išvedimas vingiuotumui, apskaičiuotam siūlomam metodu, naudojant kreivumo aproksimaciją

Vingiuotumas yra funkcionalas. Tam, kad būtų galima rasti jo minimumus ir maksimumus, reikia užrašyti jam Oilerio lygtį. Iš pradžių žinoma, kad:

$$V_{pm} = \frac{V_{pi}}{L}$$

$$V_{pi} = \int_{t_1}^{t_2} (k'(t))^2 dt$$

$$k = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} ds$$

Neparametrinės funkcijos atveju:

$$k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \approx y''$$

$$V_{pm} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} (k'(x))^2 dx}{\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx} \approx \frac{\int_{x_1}^{x_2} y''^2 dx}{\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx}$$

$$\frac{dk}{dx} \approx \frac{d}{dx}(y'') = y'''$$

$$V_{pi} = \int_{x_1}^{x_2} (k'(x))^2 dx \approx \int_{x_1}^{x_2} y''^2 dx$$

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Oilerio lygtį galima užrašyti tokios formos funkcionalui:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx$$

$$\frac{d}{dx} \left(\dots \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \frac{dF}{dy^{(n)}} - \frac{dF}{dy^{(n-1)}} \right) + \frac{dF}{dy^{(n-2)}} \right) + \dots + (-1)^{n-1} \frac{dF}{dy'} \right) + (-1)^n \frac{dF}{dy} = 0$$

$$\frac{dF}{dy} - \frac{d}{dx} \frac{dF}{dy'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{dF}{dy''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{dF}{dy^{(n)}} = 0$$

Pertvarkome turimą funkcionalą:

$$V_{pi}(x) = \int_{x_1}^x (k'(x))^2 dx \approx \int_{x_1}^x y''^2 dx$$

$$L(x) = \int_{x_1}^x \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$V_{pn} = \frac{V_{pi}}{L} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{d}{dx} \frac{V_{pi}(x)}{L(x)} \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{L(x) \cdot \frac{dV_{pi}(x)}{dx} - V_{pi}(x) \cdot \frac{dL(x)}{dx}}{L^2(x)} \right) dx$$

Pažymime:

$$v_{pn} = \frac{L(x) \cdot \frac{dV_{pi}(x)}{dx} - V_{pi}(x) \cdot \frac{dL(x)}{dx}}{L^2(x)}$$

$$V_{pn} = \int_{x_1}^{x_2} v_{pi}(x, y, y', y'', y''') dx$$

Kadangi:

$$\frac{dv_{pn}}{dy} = 0$$

Oilerio lygtis:

$$-\frac{d}{dx} \frac{dv_{pn}}{dy'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{dv_{pn}}{dy''} - \frac{d^3}{dx^3} \frac{dv_{pn}}{dy'''} = 0$$

Pažymime:

$$v_{pi} = y^{m^2}$$

$$l = \sqrt{1 + y'^2}$$

$$V_{pi}(x) \approx \int_{x_1}^x v_{pi} dx$$

$$L(x) = \int_{x_1}^x l dx$$

$$v_{pn} = \frac{\int_{x_1}^x l dx \cdot \frac{d}{dx} \int_{x_1}^x v_{pi} dx - \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot \frac{d}{dx} \int_{x_1}^x l dx}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2} = \frac{\int_{x_1}^x l dx \cdot v_{pi} - \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot l}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dv_{pn}}{dy'} &= \frac{d}{dy'} \left(\frac{\int_{x_1}^x l dx \cdot v_{pi} - \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot l}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2} \right) = \\
&= \frac{\frac{d}{dy'} \left(\int_{x_1}^x l dx \cdot v_{pi} - \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot l \right) \cdot \left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2 + \frac{d}{dy'} \left(\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2 \right) \cdot \left(\int_{x_1}^x l dx \cdot v_{pi} - \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot l \right)}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^4} = \\
&= \frac{\left(\frac{d}{dy'} \left(\int_{x_1}^x l dx \cdot v_{pi} \right) - \frac{d}{dy'} \left(\int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot l \right) \right) \cdot \left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^4} = \\
&= \frac{2 \int_{x_1}^x l dx \cdot \int_{x_1}^x \frac{dl}{dy'} dx \cdot \left(\int_{x_1}^x l dx \cdot v_{pi} - \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot l \right)}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^4} = \\
&= \frac{\left(\int_{x_1}^x \frac{dl}{dy'} dx \cdot v_{pi} + \int_{x_1}^x l dx \cdot \frac{dv_{pi}}{dy'} - \int_{x_1}^x \frac{dv_{pi}}{dy'} dx \cdot l - \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot \frac{dl}{dy'} \right) \cdot \left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^4} = \\
&= \frac{2 \int_{x_1}^x l dx \cdot \int_{x_1}^x \frac{dl}{dy'} dx \cdot \left(\int_{x_1}^x l dx \cdot v_{pi} + \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot l \right)}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^4} = \\
&= \frac{\int_{x_1}^x \frac{dl}{dy'} dx \cdot v_{pi} + \int_{x_1}^x l dx \cdot \frac{dv_{pi}}{dy'} - \int_{x_1}^x \frac{dv_{pi}}{dy'} dx \cdot l - \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot \frac{dl}{dy'}}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2} = \\
&= \frac{2 \int_{x_1}^x \frac{dl}{dy'} dx \cdot \left(\int_{x_1}^x l dx \cdot v_{pi} + \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot l \right)}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^3}
\end{aligned}$$

$$\frac{dl}{dy'} = \frac{d}{dy'}(\sqrt{1+y'^2}) = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\frac{dv_{pi}}{dy'} = \frac{d}{dy'}(y^{m2}) = 0$$

$$\frac{dl}{dy''} = \frac{d}{dy''}(\sqrt{1+y'^2}) = 0$$

$$\frac{dl}{dy'''} = \frac{d}{dy'''}(\sqrt{1+y'^2}) = 0$$

$$\frac{dv_{pn}}{dy''} = \frac{d}{dy''} \left(\frac{\int_{x_1}^x l dx \cdot v_{pi} - \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot l}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2} \right) = \frac{\frac{d}{dy''} \left(\int_{x_1}^x l dx \cdot v_{pi} - \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot l \right)}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{d}{dy''} \left(\int_{x_1}^x l dx \cdot v_{pi} \right) - \frac{d}{dy''} \left(\int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot l \right)}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2} = \frac{\int_{x_1}^x l dx \cdot \frac{dv_{pi}}{dy''} - \int_{x_1}^x \frac{dv_{pi}}{dy''} dx \cdot l}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2}$$

$$\frac{dv_{pn}}{dy'''} = \frac{d}{dy'''} \left(\frac{\int_{x_1}^x l dx \cdot v_{pi} - \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot l}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2} \right) = \frac{\frac{d}{dy'''} \left(\int_{x_1}^x l dx \cdot v_{pi} - \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot l \right)}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{d}{dy'''} \left(\int_{x_1}^x l dx \cdot v_{pi} \right) - \frac{d}{dy'''} \left(\int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot l \right)}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2} = \frac{\int_{x_1}^x l dx \cdot \frac{dv_{pi}}{dy'''} - \int_{x_1}^x \frac{dv_{pi}}{dy'''} dx \cdot l}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2}$$

$$\frac{dv_{pi}}{dy''} = \frac{d}{dy''}(y^{m2}) = 0$$

$$\frac{dv_{pi}}{dy'''} = \frac{d}{dy'''}(y^{m2}) = 2y'''$$

Įrašome į Oilerio lygties išraišką:

$$-\frac{d}{dx} \frac{dv_{pn}}{dy'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{dv_{pn}}{dy''} - \frac{d^3}{dx^3} \frac{dv_{pn}}{dy'''} = 0$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx} \frac{\int_{x_1}^x \frac{dl}{dy'} dx \cdot v_{pi} + \int_{x_1}^x l dx \cdot \frac{dv_{pi}}{dy'} - \int_{x_1}^x \frac{dv_{pi}}{dy'} dx \cdot l - \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot \frac{dl}{dy'}}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2} + \\
& + \frac{d}{dx} \frac{2 \int_{x_1}^x \frac{dl}{dy'} dx \cdot \left(\int_{x_1}^x l dx \cdot v_{pi} + \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot l \right)}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^3} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\int_{x_1}^x l dx \cdot \frac{dv_{pi}}{dy''} - \int_{x_1}^x \frac{dv_{pi}}{dy''} dx \cdot l}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2} - \\
& - \frac{d^3}{dx^3} \frac{\int_{x_1}^x l dx \cdot \frac{dv_{pi}}{dy'''} - \int_{x_1}^x \frac{dv_{pi}}{dy'''} dx \cdot l}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dv_{pm}}{dy'} &= \frac{\int_{x_1}^x \frac{dl}{dy'} dx \cdot v_{pi} + \int_{x_1}^x l dx \cdot \frac{dv_{pi}}{dy'} - \int_{x_1}^x \frac{dv_{pi}}{dy'} dx \cdot l - \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot \frac{dl}{dy'}}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2} \\
&= \frac{2 \int_{x_1}^x \frac{dl}{dy'} dx \cdot \left(\int_{x_1}^x l dx \cdot v_{pi} + \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot l \right) - \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot y^{m^2}}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^3} + \frac{\int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot y^{m^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} + \\
&+ \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot 0 - \int_{x_1}^x 0 dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} - \frac{\int_{x_1}^x y^{m^2} dx \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} - \\
&\frac{2 \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot y^{m^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^3} \\
&= \frac{2 \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \int_{x_1}^x y^{m^2} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^3} = \\
&= \frac{\int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot y^{m^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} - \frac{\int_{x_1}^x y^{m^2} dx \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} - \frac{2 \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot y^{m^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^3} - \\
&\frac{2 \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \int_{x_1}^x y^{m^2} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_{pn}}{dy''} &= \frac{\int_{x_1}^x l dx \cdot \frac{dv_{pi}}{dy''} - \int_{x_1}^x \frac{dv_{pi}}{dy''} dx \cdot l}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2} = \\ &= \frac{-\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot 0 - \int_{x_1}^x 0 dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} = 0 \\ \frac{dv_{pn}}{dy'''} &= \frac{\int_{x_1}^x l dx \cdot \frac{dv_{pi}}{dy'''} - \int_{x_1}^x \frac{dv_{pi}}{dy'''} dx \cdot l}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2} = \\ &= \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot 2y''' - 2 \int_{x_1}^x y''' dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} \end{aligned}$$

Irašome:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \frac{dv_{pn}}{dy'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{dv_{pn}}{dy''} - \frac{d^3}{dx^3} \frac{dv_{pn}}{dy'''} &= 0 \\ -\frac{d}{dx} \frac{\int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot y^{m^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} + \frac{d}{dx} \frac{\int_{x_1}^x y^{m^2} dx \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} + \frac{d}{dx} \frac{2 \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot y^{m^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^3} + \\ + \frac{d}{dx} \frac{2 \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \int_{x_1}^x y^{m^2} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^3} + \frac{d^2}{dx^2} 0 - \\ - \frac{d^3}{dx^3} \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot 2y''' - 2 \int_{x_1}^x y''' dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{\int_{x_1}^x y^{m^2} dx \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} - \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot y^{m^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} +$$

$$+ \frac{d}{dx} \frac{2 \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot y^{m^2} + 2 \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \int_{x_1}^x y^{m^2} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^3} -$$

$$- \frac{d^3}{dx^3} \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot 2y^m - 2 \int_{x_1}^x y^m dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} = 0$$

Integruojame abi puses:

$$\frac{\int_{x_1}^x y^{m^2} dx \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} - \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot y^{m^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} +$$

$$+ 2 \cdot \frac{\int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot y^{m^2} + \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \int_{x_1}^x y^{m^2} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^3} -$$

$$- \frac{d^2}{dx^2} \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot 2y^m - 2 \int_{x_1}^x y^m dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} = 0$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\int_{x_1}^x y^{m^2} dx \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} - \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot y^{m^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} + \\
& + 2 \cdot \frac{\int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot y^{m^2} + \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \int_{x_1}^x y^{m^2} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^3} - \\
& - \frac{d^2}{dx^2} \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot y^m - \int_{x_1}^x y^m dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} = 0 \\
& \frac{\int_{x_1}^x y^{m^2} dx \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} - \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot y^{m^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} + \\
& + 2 \cdot \frac{\int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot y^{m^2} + \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \int_{x_1}^x y^{m^2} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^3} - \\
& - \frac{d^2}{dx^2} \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot y^m - \int_{x_1}^x y^m dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot y''' - \int_{x_1}^x y''' dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{dx^2 \left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} = \\
& = \frac{d^2 \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot y'''}{dx^2 \left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} - \frac{d^2 \int_{x_1}^x y''' dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{dx^2 \left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} = \\
& = \frac{d^2}{dx^2} \frac{y'''}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} - \frac{d^2 \int_{x_1}^x y''' dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{dx^2 \left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} = \\
& = \frac{d}{dx} \frac{y^{(4)} \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx - y''' \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} - \\
& \frac{d}{dx} \frac{\frac{d}{dx} \left(\int_{x_1}^x y''' dx \cdot \sqrt{1+y'^2} \right) \cdot \left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^4} - \\
& \frac{d \left(\int_{x_1}^x y''' dx \cdot \sqrt{1+y'^2} \right) \cdot \frac{d}{dx} \left(\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2 \right)}{dx \left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^4} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dx} \frac{y^{(4)} \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx - y''' \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} - \\
&\frac{d}{dx} \frac{y''' \cdot \sqrt{1+y'^2} + \int_{x_1}^x y''' dx \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} - \\
&-2 \frac{d}{dx} \frac{\left(\int_{x_1}^x y''' dx \cdot \sqrt{1+y'^2} \right) \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \frac{d}{dx} \left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^4} = \\
&= \frac{d}{dx} \frac{y^{(4)} \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} - \frac{d}{dx} \frac{y''' \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} - \\
&\frac{d}{dx} \frac{y''' \cdot \sqrt{1+y'^2} + \int_{x_1}^x y''' dx \cdot \frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} - \\
&-2 \frac{d}{dx} \frac{\left(\int_{x_1}^x y''' dx \cdot \sqrt{1+y'^2} \right) \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^4} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dx} \frac{y^{(4)}}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} - \frac{d}{dx} \frac{y''' \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - \\
&\frac{d}{dx} \frac{y''' \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - \frac{d}{dx} \frac{\int_{x_1}^x y''' dx \cdot \frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - \\
&-2 \frac{d}{dx} \frac{\int_{x_1}^x y''' dx \cdot \sqrt{1+y'^2} \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^4} = \\
&= \frac{y^{(5)} \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx - y^{(4)} \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - 2 \frac{d}{dx} \frac{y''' \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - \\
&\frac{d}{dx} \frac{\int_{x_1}^x y''' dx \cdot \frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - 2 \frac{d}{dx} \frac{\int_{x_1}^x y''' dx \cdot \sqrt{1+y'^2} \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^4} = \\
&= \frac{y^{(5)} \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx - y^{(4)} \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - 2 \frac{d}{dx} \frac{y''' \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - \\
&\frac{d}{dx} \frac{\int_{x_1}^x y''' dx \cdot \frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - 2 \frac{d}{dx} \frac{\int_{x_1}^x y''' dx \cdot (1+y'^2)}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^3} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{y^{(5)} \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx - y^{(4)} \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} \\
&= \frac{-2 \frac{d}{dx} \left(y''' \cdot \sqrt{1+y'^2} \right) \cdot \left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2 - y''' \cdot \sqrt{1+y'^2} \cdot \frac{d}{dx} \left(\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2 \right)}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^4} \\
&= \frac{\frac{d}{dx} \left(\int_{x_1}^x y''' dx \cdot \frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}} \right) \cdot \left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2 - \int_{x_1}^x y''' dx \cdot \frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}} \cdot \frac{d}{dx} \left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^4} \\
&= \frac{-2 \frac{d}{dx} \left(\int_{x_1}^x y''' dx \cdot (1+y'^2) \right) \cdot \left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^3 - \int_{x_1}^x y''' dx \cdot (1+y'^2) \cdot \frac{d}{dx} \left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^3}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^6} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{y^{(5)} \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx - y^{(4)} \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} - \\
&- 2 \frac{\left(\frac{d}{dx} y''' \cdot \sqrt{1+y'^2} + y''' \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{1+y'^2} \right) \cdot \left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^4} + \\
&+ 2 \frac{2y''' \cdot \sqrt{1+y'^2} \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \frac{d}{dx} \left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^4} - \\
&- \frac{\left(\frac{d}{dx} \int_{x_1}^x y''' dx \cdot \frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}} + \int_{x_1}^x y''' dx \cdot \frac{d}{dx} \frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}} \right) \cdot \left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^4} + \\
&+ \frac{\int_{x_1}^x y''' dx \cdot \frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}} \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \frac{d}{dx} \left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^4} - \\
&- 2 \frac{\left(\frac{d}{dx} \int_{x_1}^x y''' dx \cdot (1+y'^2) + \int_{x_1}^x y''' dx \cdot \frac{d}{dx} (1+y'^2) \right) \cdot \left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^3}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^6} - \\
&- 2 \frac{3 \int_{x_1}^x y''' dx \cdot (1+y'^2) \cdot \left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2 \cdot \frac{d}{dx} \left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^6} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{y^{(5)} \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx - y^{(4)} \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - 2 \frac{y^{(4)} \cdot \sqrt{1+y'^2} + y''' \cdot \frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} + \\
&+ 4 \frac{y''' \cdot \sqrt{1+y'^2} \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^4} - \frac{y''' \cdot \frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}} + \int_{x_1}^x y''' dx \cdot \frac{d}{dx} \frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} + \\
&+ \frac{\int_{x_1}^x y''' dx \cdot \frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}} \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^4} - 2 \frac{y''' \cdot (1+y'^2) + \int_{x_1}^x y''' dx \cdot 2y'y''}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^3} + \\
&+ 6 \frac{\int_{x_1}^x y''' dx \cdot (1+y'^2) \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^4} = \\
&= \frac{y^{(5)} \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx - y^{(4)} \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - 2 \frac{y^{(4)} \cdot \sqrt{1+y'^2} + y''' \cdot \frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} + \\
&+ 4 \frac{y''' \cdot (1+y'^2)}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^3} - \frac{y''' \cdot \frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}} + \int_{x_1}^x y''' dx \cdot \frac{(2y'' + y'y''') \cdot \sqrt{1+y'^2} - y'y'' \cdot \frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}}}{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} + \\
&+ \frac{y'y'' \int_{x_1}^x y''' dx}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^3} - \frac{y''' \cdot (1+y'^2) + 2y'y'' \int_{x_1}^x y''' dx}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^3} + \\
&+ 6 \frac{\int_{x_1}^x y''' dx \cdot (1+y'^2) \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^4} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{y^{(5)} \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx - y^{(4)} \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - 2 \frac{y^{(4)} \cdot \sqrt{1+y'^2} + y''' \cdot \frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} + \\
&+ 4 \frac{y''' \cdot (1+y'^2)}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^3} - \frac{y''' \cdot \frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}} + \int_{x_1}^x y''' dx \cdot \left(\frac{(2y'' + y'y''') \cdot \sqrt{1+y'^2}}{1+y'^2} - \frac{y'y'' \cdot \frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}}}{1+y'^2}\right)}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} + \\
&+ \frac{y'y'' \int_{x_1}^x y''' dx}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^3} - \frac{y''' \cdot (1+y'^2) + 2y'y'' \int_{x_1}^x y''' dx}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^3} + \\
&+ 6 \frac{\int_{x_1}^x y''' dx \cdot (1+y'^2) \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^4} = \\
&= \frac{y^{(5)} \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx - 3y^{(4)} \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - 3 \frac{y''' \cdot \frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} + \\
&+ 3 \frac{y''' \cdot (1+y'^2)}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^3} - \frac{\int_{x_1}^x y''' dx \cdot \left(\frac{2y'' + y'y'''}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{y'^2 y''^2}{(\sqrt{1+y'^2})^3}\right)}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - \\
&- 3 \frac{y'y'' \int_{x_1}^x y''' dx}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^3} + 6 \frac{\int_{x_1}^x y''' dx \cdot (1+y'^2) \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^4}
\end{aligned}$$

Irašome:

$$\begin{aligned}
& \frac{\int_{x_1}^x y^{m^2} dx \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} - \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot y^{m^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} + \\
& + 2 \frac{\int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot y^{m^2} + \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \int_{x_1}^x y^{m^2} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^3} - \\
& - \frac{y^{(5)} \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx - 3y^{(4)} \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} + 3 \frac{y''' \cdot \frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - \\
& - 3 \frac{y''' \cdot (1+y'^2)}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^3} + \frac{\int_{x_1}^x y''' dx \cdot \left(\frac{2y'' + y'y'''}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{y'^2 y''^2}{(\sqrt{1+y'^2})^3}\right)}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} + \\
& + 3 \frac{y'y'' \int_{x_1}^x y''' dx}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^3} - 6 \frac{\int_{x_1}^x y''' dx \cdot (1+y'^2) \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^4} = 0
\end{aligned}$$

Dauginame iš $\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2$:

$$\begin{aligned}
& \int_{x_1}^x y^{m^2} dx \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} - \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot y^{m^2} + \\
& + 2 \frac{\int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot y^{m^2} + \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \int_{x_1}^x y^{m^2} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} - \\
& - y^{(5)} \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx + 3y^{(4)} \cdot \sqrt{1+y'^2} + 3y''' \cdot \frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}} - \\
& - 3 \frac{y''' \cdot (1+y'^2)}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} + \int_{x_1}^x y''' dx \cdot \left(\frac{2y'' + y'y'''}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{y'^2 y''^2}{(\sqrt{1+y'^2})^3} \right) + \\
& + 3 \frac{y'y'' \int_{x_1}^x y''' dx}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} - 6 \frac{\int_{x_1}^x y''' dx \cdot (1+y'^2) \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} = 0
\end{aligned}$$

Taip gaunama pati lygtis:

$$\begin{aligned}
& \int_{x_1}^x y^{m^2} dx \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} - \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot y^{m^2} + \\
& + 2 \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot y^{m^2} + 2 \frac{\int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \int_{x_1}^x y^{m^2} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} - \\
& - y^{(5)} \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx + 3y^{(4)} \cdot \sqrt{1+y'^2} + 3y''' \cdot \frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}} - \\
& - 3 \frac{y''' \cdot (1+y'^2)}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} + \int_{x_1}^x y''' dx \cdot \left(\frac{2y'' + y'y'''}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{y'^2 y''^2}{(\sqrt{1+y'^2})^3} \right) + \\
& + 3 \frac{y'y'' \int_{x_1}^x y''' dx}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} - 6 \frac{\int_{x_1}^x y''' dx \cdot (1+y'^2) \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{x_1}^x y^{m^2} dx \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} + \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot y^{m^2} + \\
& + 2 \frac{\int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \int_{x_1}^x y^{m^2} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} - \\
& - y^{(5)} \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx + 3y^{(4)} \cdot \sqrt{1+y'^2} + 3y''' \cdot \frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}} - \\
& - 3 \frac{y''' \cdot (1+y'^2)}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} + \int_{x_1}^x y''' dx \cdot \left(\frac{2y'' + y'y'''}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{y'^2 y''^2}{(\sqrt{1+y'^2})^3} \right) + \\
& + 3 \frac{y'y'' \int_{x_1}^x y''' dx}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} - 6 \frac{\int_{x_1}^x y''' dx \cdot (1+y'^2) \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} = 0, \quad \forall x \in [x_1, x_2]
\end{aligned}$$

Tai ir yra Oilerio lygtis tokiam funkcionalui. Nesunku įsitikinti, kad bet kokia tiesė tenkina šią lygtį. Toliau ją sprendžiant būtų galima rasti vingiuotumo maksimumus ir minimumus.

4 priedas. Oilerio lygties išvedimas vingiuotumui, apskaičiuotam siūlomam metodu, nenaudojant kreivumo aproksimacijos

Vingiuotumas yra funkcionalas. Rasime jo ekstremales.

$$V_{pi} = \frac{V_{pi}}{L}$$

$$V_{pi} = \int_{t_1}^{t_2} (k'(t))^2 dt$$

$$k = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} ds$$

Neparametrinės funkcijos atveju:

$$k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$V_{pi} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} (k'(x))^2 dx}{\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right)'^2 dx}{\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx}$$

$$\frac{dk}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} y''' - \left((1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} \right)' y''}{(1 + y'^2)^3} =$$

$$= \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} y''' - \frac{3}{2} \sqrt{1 + y'^2} \cdot 2y'y''^2}{(1 + y'^2)^3} = \frac{\sqrt{1 + y'^2} \left((1 + y'^2) y''' - 3y'y''^2 \right)}{\sqrt{1 + y'^2} \cdot (1 + y'^2)^{\frac{5}{2}}} =$$

$$= \frac{(1 + y'^2) y''' - 3y'y''^2}{(1 + y'^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$V_{pi} = \int_{x_1}^{x_2} (k'(x))^2 dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right)'^2 dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{(1 + y'^2) y''' - 3y'y''^2}{(1 + y'^2)^{\frac{5}{2}}} \right)^2 dx$$

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Oilerio lygtį galima užrašyti tokios formos funkcionalui:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx$$

$$\frac{d}{dx} \left(\dots \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \frac{dF}{dy^{(n)}} - \frac{dF}{dy^{(n-1)}} \right) + \frac{dF}{dy^{(n-2)}} \right) + \dots + (-1)^{n-1} \frac{dF}{dy'} \right) + (-1)^n \frac{dF}{dy} = 0$$

$$\frac{dF}{dy} - \frac{d}{dx} \frac{dF}{dy'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{dF}{dy''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{dF}{dy^{(n)}} = 0$$

Pertvarkome turimajį funkcionalą:

$$V_{pi}(x) = \int_{x_1}^x (k'(x))^2 dt = \int_{x_1}^x \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}} \right)^2 dx$$

$$L(x) = \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx$$

$$V_{pn} = \frac{V_{pi}}{L} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{d}{dx} \frac{V_{pi}(x)}{L(x)} \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{L(x) \cdot \frac{dV_{pi}(x)}{dx} - V_{pi}(x) \cdot \frac{dL(x)}{dx}}{L^2(x)} \right) dx$$

Pažymime:

$$v_{pn} = \frac{L(x) \cdot \frac{dV_{pi}(x)}{dx} - V_{pi}(x) \cdot \frac{dL(x)}{dx}}{L^2(x)}$$

$$V_{pn} = \int_{x_1}^{x_2} v_{pi}(x, y, y', y'', y''') dx$$

Kadangi:

$$\frac{dv_{pn}}{dy} = 0$$

Oilerio lygtis:

$$-\frac{d}{dx} \frac{dv_{pn}}{dy'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{dv_{pn}}{dy''} - \frac{d^3}{dx^3} \frac{dv_{pn}}{dy'''} = 0$$

Pažymime:

$$v_{pi} = \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}} \right)^2$$

$$l = \sqrt{1+y'^2}$$

$$V_{pi}(x) = \int_{x_1}^x v_{pi} dx$$

$$L(x) = \int_{x_1}^x l dx$$

$$\begin{aligned}
v_{pn} &= \frac{\int_{x_1}^x l dx \cdot \frac{d}{dx} \int_{x_1}^x v_{pi} dx - \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot \frac{d}{dx} \int_{x_1}^x l dx}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2} = \frac{\int_{x_1}^x l dx \cdot v_{pi} - \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot l}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2} \\
\frac{dv_{pn}}{dy'} &= \frac{d}{dy'} \left(\frac{\int_{x_1}^x l dx \cdot v_{pi} - \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot l}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2} \right) = \\
&= \frac{\frac{d}{dy'} \left(\int_{x_1}^x l dx \cdot v_{pi} - \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot l \right) \cdot \left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2 + \frac{d}{dy'} \left(\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2 \right) \cdot \left(\int_{x_1}^x l dx \cdot v_{pi} - \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot l \right)}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^4} = \\
&= \frac{\left(\frac{d}{dy'} \left(\int_{x_1}^x l dx \cdot v_{pi} \right) - \frac{d}{dy'} \left(\int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot l \right) \right) \cdot \left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^4} = \\
&= \frac{2 \int_{x_1}^x l dx \cdot \int_{x_1}^x \frac{dl}{dy'} dx \cdot \left(\int_{x_1}^x l dx \cdot v_{pi} - \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot l \right)}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^4} = \\
&= \frac{\left(\int_{x_1}^x \frac{dl}{dy'} dx \cdot v_{pi} + \int_{x_1}^x l dx \cdot \frac{dv_{pi}}{dy'} - \int_{x_1}^x \frac{dv_{pi}}{dy'} dx \cdot l - \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot \frac{dl}{dy'} \right) \cdot \left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^4} = \\
&= \frac{2 \int_{x_1}^x l dx \cdot \int_{x_1}^x \frac{dl}{dy'} dx \cdot \left(\int_{x_1}^x l dx \cdot v_{pi} + \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot l \right)}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^4} = \\
&= \frac{\int_{x_1}^x \frac{dl}{dy'} dx \cdot v_{pi} + \int_{x_1}^x l dx \cdot \frac{dv_{pi}}{dy'} - \int_{x_1}^x \frac{dv_{pi}}{dy'} dx \cdot l - \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot \frac{dl}{dy'}}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2}
\end{aligned}$$

$$\frac{2 \int_{x_1}^x \frac{dl}{dy'} dx \cdot \left(\int_{x_1}^x l dx \cdot v_{pi} + \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot l \right)}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^3}$$

$$\frac{dl}{dy'} = \frac{d}{dy'} \left(\sqrt{1+y'^2} \right) = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\frac{dv_{pi}}{dy'} = \frac{d}{dy'} \left(\left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}} \right)^2 \right) = \frac{d}{dy'} \left(\frac{\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right)^2}{(1+y'^2)^5} \right) =$$

$$= \frac{(1+y'^2)^5 \cdot \frac{d}{dy'} \left(\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right)^2 \right) - \frac{d}{dy'} \left((1+y'^2)^5 \right) \cdot \left(\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right)^2 \right)}{(1+y'^2)^{10}} =$$

$$= \frac{(1+y'^2)^5 \cdot 2 \left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right) \cdot (y''' \cdot 2y' - 3y''^2)}{(1+y'^2)^{10}} =$$

$$= \frac{5(1+y'^2)^4 \cdot 2y' \cdot \left(\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right)^2 \right)}{(1+y'^2)^{10}} =$$

$$= \frac{2 \left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right) \cdot (y''' \cdot 2y' - 3y''^2)}{(1+y'^2)^5} - \frac{10y' \cdot \left(\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right)^2 \right)}{(1+y'^2)^6}$$

$$\frac{dl}{dy''} = \frac{d}{dy''} \left(\sqrt{1+y'^2} \right) = 0$$

$$\frac{dl}{dy'''} = \frac{d}{dy'''} \left(\sqrt{1+y'^2} \right) = 0$$

$$\frac{dv_{pm}}{dy''} = \frac{d}{dy''} \left(\frac{\int_{x_1}^x l dx \cdot v_{pi} - \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot l}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2} \right) = \frac{\frac{d}{dy''} \left(\int_{x_1}^x l dx \cdot v_{pi} - \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot l \right)}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{d}{dy''} \left(\int_{x_1}^x l dx \cdot v_{pi} \right) - \frac{d}{dy''} \left(\int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot l \right)}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2} = \frac{\int_{x_1}^x l dx \cdot \frac{dv_{pi}}{dy''} - \int_{x_1}^x \frac{dv_{pi}}{dy''} dx \cdot l}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dv_{pn}}{dy'''} &= \frac{d}{dy'''} \left(\frac{\int_{x_1}^x l dx \cdot v_{pi} - \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot l}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2} \right) = \frac{d}{dy'''} \left(\frac{\int_{x_1}^x l dx \cdot v_{pi} - \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot l}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2} \right) = \\
&= \frac{\frac{d}{dy'''} \left(\int_{x_1}^x l dx \cdot v_{pi} \right) - \frac{d}{dy'''} \left(\int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot l \right)}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2} = \frac{\int_{x_1}^x l dx \cdot \frac{dv_{pi}}{dy'''} - \int_{x_1}^x \frac{dv_{pi}}{dy'''} dx \cdot l}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2} = \\
\frac{dv_{pi}}{dy''} &= \frac{d}{dy''} \left(\frac{\left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}} \right)^2}{(1+y'^2)^5} \right) = \frac{d}{dy''} \left(\frac{\left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^5} \right)^2}{(1+y'^2)^5} \right) = \\
&= \frac{\frac{d}{dy''} \left(\left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^5} \right)^2 \right)}{(1+y'^2)^5} = \frac{2 \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^5} \right) \cdot \frac{d}{dy''} \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^5} \right)}{(1+y'^2)^5} = \\
&= -\frac{2 \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^5} \right) \cdot 6y'y''}{(1+y'^2)^5} = -\frac{12 \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^5} \right) \cdot y'y''}{(1+y'^2)^5} = \\
\frac{dv_{pi}}{dy'''} &= \frac{d}{dy'''} \left(\frac{\left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}} \right)^2}{(1+y'^2)^5} \right) = \frac{d}{dy'''} \left(\frac{\left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^5} \right)^2}{(1+y'^2)^5} \right) = \\
&= \frac{\frac{d}{dy'''} \left(\left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^5} \right)^2 \right)}{(1+y'^2)^5} = \frac{2 \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^5} \right) \cdot \frac{d}{dy'''} \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^5} \right)}{(1+y'^2)^5} = \\
&= \frac{2 \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^5} \right) \cdot (1+y'^2)}{(1+y'^2)^5} = \frac{2 \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^4} \right)}{(1+y'^2)^4}
\end{aligned}$$

Irašome:

$$-\frac{d}{dx} \frac{dv_{pn}}{dy'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{dv_{pn}}{dy''} - \frac{d^3}{dx^3} \frac{dv_{pn}}{dy'''} = 0$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx} \frac{\int_{x_1}^x \frac{dl}{dy'} dx \cdot v_{pi} + \int_{x_1}^x l dx \cdot \frac{dv_{pi}}{dy'} - \int_{x_1}^x \frac{dv_{pi}}{dy'} dx \cdot l - \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot \frac{dl}{dy'}}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2} \\
& \frac{d}{dx} \frac{2 \int_{x_1}^x \frac{dl}{dy'} dx \cdot \left(\int_{x_1}^x l dx \cdot v_{pi} + \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot l \right)}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^3} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\int_{x_1}^x l dx \cdot \frac{dv_{pi}}{dy''} - \int_{x_1}^x \frac{dv_{pi}}{dy''} dx \cdot l}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2} \\
& \frac{d^3}{dx^3} \frac{\int_{x_1}^x l dx \cdot \frac{dv_{pi}}{dy'''} - \int_{x_1}^x \frac{dv_{pi}}{dy'''} dx \cdot l}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dv_{pn}}{dy'} &= \frac{\int_{x_1}^x \frac{dl}{dy'} dx \cdot v_{pi} + \int_{x_1}^x l dx \cdot \frac{dv_{pi}}{dy'} - \int_{x_1}^x \frac{dv_{pi}}{dy'} dx \cdot l - \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot \frac{dl}{dy'}}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2} \\
&= \frac{2 \int_{x_1}^x \frac{dl}{dy'} dx \cdot \left(\int_{x_1}^x l dx \cdot v_{pi} + \int_{x_1}^x v_{pi} dx \cdot l \right) - \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}} \right)^2}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^3} + \frac{\int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}} \right)^2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} + \\
&+ \frac{\left(\frac{2 \left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right) \cdot (y''' \cdot 2y' - 3y''^2)}{(1+y'^2)^5} - \frac{10y' \cdot \left(\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right)^2 \right)}{(1+y'^2)^6} \right)}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} \cdot \frac{1}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} \\
&+ \frac{\int_{x_1}^x \left(\frac{2 \left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right) \cdot (y''' \cdot 2y' - 3y''^2)}{(1+y'^2)^5} - \frac{10y' \cdot \left(\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right)^2 \right)}{(1+y'^2)^6} \right) dx}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \\
&- \frac{\int_{x_1}^x \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}} \right)^2 dx \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} \\
&- \frac{2 \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}} \right)^2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2 \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \int_{x_1}^x \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}} \right)^2 dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^3} = \\
& = \frac{\int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}} \right)^2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} + \\
& + \frac{\left(\frac{2((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot (y''' \cdot 2y' - 3y''^2)}{(1+y'^2)^5} - \frac{10y' \cdot \left(\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right)^2 \right)}{(1+y'^2)^6} \right)}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} \\
& \frac{\int_{x_1}^x \left(\frac{2((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot (y''' \cdot 2y' - 3y''^2)}{(1+y'^2)^5} - \frac{10y' \cdot \left(\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right)^2 \right)}{(1+y'^2)^6} \right) dx}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}} \\
& - \frac{\int_{x_1}^x \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}} \right)^2 dx \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} \\
& - \frac{2 \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}} \right)^2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2 \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \int_{x_1}^x \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}} \right)^2 dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^3} \\
\frac{dv_{pn}}{dy''} &= \frac{\int_{x_1}^x l dx \cdot \frac{dv_{pi}}{dy''} - \int_{x_1}^x \frac{dv_{pi}}{dy''} dx \cdot l}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2} = \\
&= \frac{- \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \frac{12 \left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right) \cdot y'y''}{(1+y'^2)^5}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} + \\
&+ \frac{\int_{x_1}^x \frac{12 \left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right) \cdot y'y''}{(1+y'^2)^5} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} \\
\frac{dv_{pn}}{dy'''} &= \frac{\int_{x_1}^x l dx \cdot \frac{dv_{pi}}{dy'''} - \int_{x_1}^x \frac{dv_{pi}}{dy'''} dx \cdot l}{\left(\int_{x_1}^x l dx \right)^2} = \\
&= \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \frac{2 \left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right)}{(1+y'^2)^4} - \int_{x_1}^x \frac{2 \left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2}
\end{aligned}$$

Irašome:

$$-\frac{d}{dx} \frac{dv_{pn}}{dy'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{dv_{pn}}{dy''} - \frac{d^3}{dx^3} \frac{dv_{pn}}{dy'''} = 0$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{d}{dx} \frac{\int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}} \right)^2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} \\
& - \frac{d}{dx} \left(\frac{2 \left(\frac{((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot (y''' \cdot 2y' - 3y''^2)}{(1+y'^2)^5} - \frac{10y' \cdot \left(\frac{((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2)^2}{(1+y'^2)^6} \right)}{(1+y'^2)^6} \right)}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} \right) + \\
& + \frac{d}{dx} \left(\frac{\int_{x_1}^x \left(\frac{2 \left(\frac{((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot (y''' \cdot 2y' - 3y''^2)}{(1+y'^2)^5} - \frac{10y' \cdot \left(\frac{((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2)^2}{(1+y'^2)^6} \right)}{(1+y'^2)^6} \right)}{dx} \right)}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \right) + \\
& + \frac{d}{dx} \frac{\int_{x_1}^x \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}} \right)^2 dx \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} + \\
& + \frac{d}{dx} \frac{2 \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}} \right)^2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} + \\
& + \frac{d}{dx} \frac{2 \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \int_{x_1}^x \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}} \right)^2 dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^3} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{d^2}{dx^2} \frac{-\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \frac{12((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot y'y''}{(1+y'^2)^5}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} + \\
& + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\int_{x_1}^x \frac{12((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot y'y''}{(1+y'^2)^5} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - \\
& - \frac{d^3}{dx^3} \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \frac{2((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2)}{(1+y'^2)^4} - \int_{x_1}^x \frac{2((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} = 0
\end{aligned}$$

Vieną kartą integruojame pagal x :

$$\begin{aligned}
& \frac{\int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}} \right)^2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} \\
& \frac{\left(\frac{2((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot (y''' \cdot 2y' - 3y''^2)}{(1+y'^2)^5} - \frac{10y' \cdot \left(\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right)^2 \right)}{(1+y'^2)^6} \right)}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} \\
& \frac{\int_{x_1}^x \left(\frac{2((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot (y''' \cdot 2y' - 3y''^2)}{(1+y'^2)^5} - \frac{10y' \cdot \left(\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right)^2 \right)}{(1+y'^2)^6} \right) dx}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}} \\
& \frac{\int_{x_1}^x \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}} \right)^2 dx \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} \\
& \frac{2 \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}} \right)^2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} \\
& \frac{2 \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \int_{x_1}^x \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}} \right)^2 dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{d}{dx} \frac{-\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \frac{12((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot y'y''}{(1+y'^2)^5}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} + \\
& + \frac{d}{dx} \frac{\int_{x_1}^x \frac{12((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot y'y''}{(1+y'^2)^5} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - \\
& - \frac{d^2}{dx^2} \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \frac{2((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2)}{(1+y'^2)^4} - \int_{x_1}^x \frac{2((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} = 0
\end{aligned}$$

arba

$$\begin{aligned}
& \frac{\int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}} \right)^2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} \\
& \frac{\left(\frac{2((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot (y''' \cdot 2y' - 3y''^2)}{(1+y'^2)^5} - \frac{10y' \cdot \left(((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2)^2 \right)}{(1+y'^2)^6} \right)}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} \\
& \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx + \\
& + \frac{\int_{x_1}^x \left(\frac{2((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot (y''' \cdot 2y' - 3y''^2)}{(1+y'^2)^5} - \frac{10y' \cdot \left(((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2)^2 \right)}{(1+y'^2)^6} \right) dx}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} \\
& \cdot \sqrt{1+y'^2} + \frac{\int_{x_1}^x \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}} \right)^2 dx \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} + \\
& + \frac{2 \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}} \right)^2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^3} + \\
& + \frac{2 \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \int_{x_1}^x \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}} \right)^2 dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^3} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{d}{dx} \frac{-\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \frac{12((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot y'y''}{(1+y'^2)^5}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} + \\
& + \frac{d}{dx} \frac{\int_{x_1}^x \frac{12((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot y'y''}{(1+y'^2)^5} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - \\
& - \frac{d^2}{dx^2} \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \frac{2((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2)}{(1+y'^2)^4} - \int_{x_1}^x \frac{2((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} = 0
\end{aligned}$$

Pirmasis išdiferencijuotas dėmuo:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx} \frac{-\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \frac{12((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot y'y''}{(1+y'^2)^5}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} = \\
& = -\frac{\frac{d}{dx} \left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \frac{12((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot y'y''}{(1+y'^2)^5} \right) \cdot \left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^4} + \\
& + \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \frac{12((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot y'y''}{(1+y'^2)^5}\right) \cdot \frac{d}{dx} \left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^4} = \\
& = -\frac{\frac{d}{dx} \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \frac{12((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot y'y''}{(1+y'^2)^5}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - \\
& - \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \frac{d}{dx} \frac{12((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot y'y''}{(1+y'^2)^5}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} + \\
& + \frac{\frac{12((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot y'y''}{(1+y'^2)^5} \cdot 2 \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \frac{d}{dx} \left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^3} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx} \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \frac{12((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot y'y''}{(1+y'^2)^5} \\
= & \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2}{12 \frac{d}{dx} \left(((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot y'y'' \right) \cdot (1+y'^2)^5} \\
& \frac{(1+y'^2)^{10}}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} + \\
& \frac{\left(12((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot y'y'' \right) \cdot \frac{d}{dx} \left((1+y'^2)^5 \right)}{(1+y'^2)^{10}} + \\
& \frac{12((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot y'y''}{(1+y'^2)^5} \cdot 2 \frac{d}{dx} \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \\
= & \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2}{\frac{d}{dx} \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \frac{12((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot y'y''}{(1+y'^2)^5}} \\
& \frac{12 \frac{d}{dx} \left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right) \cdot y'y'' + 12((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot \frac{d}{dx} (y'y'')}{(1+y'^2)^5} + \\
& \frac{\left(12((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot y'y'' \right) \cdot 10y'y''(1+y'^2)^4}{(1+y'^2)^{10}} + \\
& \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{12\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right)\cdot y'y''}{(1+y'^2)^5}\cdot 2\frac{d}{dx}\int_{x_1}^x\sqrt{1+y'^2}dx \\
& + \frac{\left(\int_{x_1}^x\sqrt{1+y'^2}dx\right)^2}{\sqrt{1+y'^2}} = \\
& = -\frac{12\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right)\cdot y'y''}{(1+y'^2)^5} - \\
& \frac{12\cdot\left(2y'y''+(1+y'^2)y^{(4)}-3y''^3-6y'y''y'''\right)y'y''+\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right)\cdot\left(y''^2+y'y'''\right)}{(1+y'^2)^5} + \\
& -\frac{\int_{x_1}^x\sqrt{1+y'^2}dx}{\left(12\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right)\cdot y'y''\right)\cdot 10y'y''(1+y'^2)^4} + \\
& +\frac{\left(12\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right)\cdot y'y''\right)\cdot 10y'y''(1+y'^2)^4}{(1+y'^2)^{10}} + \\
& +\frac{12\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right)\cdot y'y''}{(1+y'^2)^5}\cdot 2\sqrt{1+y'^2} = \\
& +\frac{\left(\int_{x_1}^x\sqrt{1+y'^2}dx\right)^2}{\sqrt{1+y'^2}\cdot 12\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right)\cdot y'y''} = \\
& = -\frac{\left(1+y'^2\right)^5\cdot\left(\int_{x_1}^x\sqrt{1+y'^2}dx\right)^2}{-12\cdot\left(2y'y''+(1+y'^2)y^{(4)}-3y''^3-6y'y''y'''\right)y'y''+\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right)\cdot\left(y''^2+y'y'''\right)} + \\
& +\frac{\left(12\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right)\cdot y'y''\right)\cdot 10y'y''}{\left(1+y'^2\right)^5\cdot\int_{x_1}^x\sqrt{1+y'^2}dx} + \\
& +\frac{\left(12\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right)\cdot y'y''\right)\cdot 10y'y''}{\left(1+y'^2\right)^6\cdot\int_{x_1}^x\sqrt{1+y'^2}dx} + \\
& +\frac{24\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right)\cdot y'y''\sqrt{1+y'^2}}{\left(1+y'^2\right)^5\cdot\left(\int_{x_1}^x\sqrt{1+y'^2}dx\right)^2}
\end{aligned}$$

Priešpaskutinis dėmuo:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx} \frac{\int_{x_1}^x \frac{12((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot y'y''}{(1+y'^2)^5} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} = \\
& = \frac{\frac{d}{dx} \left(\int_{x_1}^x \frac{12((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot y'y''}{(1+y'^2)^5} dx \cdot \sqrt{1+y'^2} \right) \cdot \left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^4} - \\
& = \frac{\left(\int_{x_1}^x \frac{12((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot y'y''}{(1+y'^2)^5} dx \cdot \sqrt{1+y'^2} \right) \cdot \frac{d}{dx} \left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^4} = \\
& = \frac{\frac{d}{dx} \left(\int_{x_1}^x \frac{12((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot y'y''}{(1+y'^2)^5} dx \right) \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} + \\
& + \frac{\int_{x_1}^x \frac{12((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot y'y''}{(1+y'^2)^5} dx \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - \\
& = \frac{\left(\int_{x_1}^x \frac{12((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot y'y''}{(1+y'^2)^5} dx \cdot \sqrt{1+y'^2} \right) \cdot 2 \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^4} = \\
& = \frac{12((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot y'y'' \cdot \sqrt{1+y'^2}}{(1+y'^2)^5} + \\
& + \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\int_{x_1}^x \frac{12 \left((1+y'^2) y''' - 3y'y''^2 \right) \cdot y'y''}{(1+y'^2)^5} dx \cdot \frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}} \frac{d}{dx} \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} - \\
& - \frac{2 \int_{x_1}^x \frac{12 \left((1+y'^2) y''' - 3y'y''^2 \right) \cdot y'y''}{(1+y'^2)^5} dx \cdot (1+y'^2)}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^3}
\end{aligned}$$

Paskutinis dėmuo:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dx^2} \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \frac{2 \left((1+y'^2) y''' - 3y'y''^2 \right)}{(1+y'^2)^4} - \int_{x_1}^x \frac{2 \left((1+y'^2) y''' - 3y'y''^2 \right)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} = \\
& = \frac{d}{dx} \frac{\frac{d}{dx} \left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \frac{2 \left((1+y'^2) y''' - 3y'y''^2 \right)}{(1+y'^2)^4} \right)}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} - \\
& - \frac{d}{dx} \frac{\frac{d}{dx} \left(\int_{x_1}^x \frac{2 \left((1+y'^2) y''' - 3y'y''^2 \right)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot \sqrt{1+y'^2} \right)}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} - \\
& - \frac{d}{dx} \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \frac{2 \left((1+y'^2) y''' - 3y'y''^2 \right)}{(1+y'^2)^4} \cdot \frac{d}{dx} \left(\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2 \right)}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} + \\
& + \frac{d}{dx} \frac{\int_{x_1}^x \frac{2 \left((1+y'^2) y''' - 3y'y''^2 \right)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot \sqrt{1+y'^2} \cdot \frac{d}{dx} \left(\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2 \right)}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dx} \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} + \\
&+ \frac{d}{dx} \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \frac{d}{dx} \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - \\
&- \frac{d}{dx} \frac{\int_{x_1}^x \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - \\
&- \frac{d}{dx} \frac{\int_{x_1}^x \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - \\
&- \frac{d}{dx} \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4} \cdot 2 \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} + \\
&+ \frac{d}{dx} \frac{\int_{x_1}^x \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot \sqrt{1+y'^2} \cdot 2 \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dx} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} + \\
&+ \frac{d}{dx} \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \frac{d}{dx} \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - \\
&- \frac{d}{dx} \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4} \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - \\
&- \frac{d}{dx} \frac{\int_{x_1}^x \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - \\
&- \frac{d}{dx} \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4} \cdot 2 \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} + \\
&+ \frac{d}{dx} \frac{\int_{x_1}^x \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot \sqrt{1+y'^2} \cdot 2 \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{d}{dx} \sqrt{1+y'^2} \cdot \sqrt{1+y'^2} \cdot \frac{d}{dx} \left(\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2 \right)}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2 \cdot \left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^4} + \\
&+ \frac{\frac{d}{dx} \frac{2 \cdot \frac{d}{dx} \left((1+y'^2) y''' - 3y' y''^2 \right)}{(1+y'^2)^4} - \frac{2 \left((1+y'^2) y''' - 3y' y''^2 \right) \cdot \frac{d}{dx} \left((1+y'^2)^4 \right)}{(1+y'^2)^8}}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} + \\
&- \frac{\frac{d}{dx} \frac{2 \left((1+y'^2) y''' - 3y' y''^2 \right)}{(1+y'^2)^4} \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} - \\
&- \frac{\frac{d}{dx} \int_{x_1}^x \frac{2 \left((1+y'^2) y''' - 3y' y''^2 \right)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} - \\
&- \frac{d}{dx} \left(\frac{2 \left((1+y'^2) y''' - 3y' y''^2 \right)}{(1+y'^2)^4} \cdot 2 \cdot \sqrt{1+y'^2} \right) + \\
&+ \frac{d}{dx} \frac{\int_{x_1}^x \frac{2 \left((1+y'^2) y''' - 3y' y''^2 \right)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot 2 \cdot (1+y'^2)}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \cdot \sqrt{1+y'^2} \cdot 2 \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} - \frac{\sqrt{1+y'^2} \cdot 2 \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^4} + \\
&+ \frac{d}{dx} \frac{(1+y'^2)^4}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} - \\
&\frac{d}{dx} \frac{2 \cdot (2y'y''y''' + (1+y'^2)y^{(4)} - 3y'''^3 - 6y'y''y''')}{(1+y'^2)^8} - \\
&\frac{d}{dx} \left(\frac{2 \left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right) \cdot 4(1+y'^2)^3 \cdot 2y'y''}{(1+y'^2)^8} \cdot \sqrt{1+y'^2} \right) + \\
&\frac{d}{dx} \left(\frac{2 \left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right) \cdot \sqrt{1+y'^2}}{(1+y'^2)^4} \cdot \sqrt{1+y'^2} \right) + \\
&+ \frac{2 \left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right) \cdot \sqrt{1+y'^2} \cdot \frac{d}{dx} \left(\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2 \right)}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^4} - \\
&\frac{d}{dx} \left(\int_{x_1}^x \frac{2 \left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) + \\
&+ \frac{\int_{x_1}^x \frac{2 \left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \cdot \frac{d}{dx} \left(\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2 \right)}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^4} - \\
&- 2 \left(\frac{d}{dx} \frac{2 \left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right)}{(1+y'^2)^4} \cdot \sqrt{1+y'^2} + \frac{2 \left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right)}{(1+y'^2)^4} \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{1+y'^2} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\frac{d}{dx} \left(\int_{x_1}^x \frac{2((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot 2 \cdot (1+y'^2) \right)}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} - \\
& - \frac{\int_{x_1}^x \frac{2((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot 2 \cdot (1+y'^2) \cdot \frac{d}{dx} \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \cdot \sqrt{1+y'^2} \cdot 2 \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} - \frac{\sqrt{1+y'^2} \cdot 2 \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^4} + \\
&+ \frac{\frac{d}{dx} \frac{2 \cdot (2y'y''y''' + (1+y'^2)y^{(4)} - 3y''^3 - 6y'y''y''')}{(1+y'^2)^4}}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} - \\
&\frac{2 \cdot (2y'y''y''' + (1+y'^2)y^{(4)} - 3y''^3 - 6y'y''y''')}{(1+y'^2)^4} \cdot \frac{d}{dx} \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} - \\
&\frac{\frac{d}{dx} \frac{2 \left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right) \cdot 4(1+y'^2)^3 \cdot 2y'y''}{(1+y'^2)^8}}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} + \\
&+ \frac{2 \left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right) \cdot 4(1+y'^2)^3 \cdot 2y'y''}{(1+y'^2)^8} \cdot \frac{d}{dx} \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} - \\
&\frac{\frac{d}{dx} \frac{2 \left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right) \cdot \sqrt{1+y'^2}}{(1+y'^2)^4}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} - \frac{2 \left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right) \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{1+y'^2}}{(1+y'^2)^4}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} + \\
&+ \frac{2 \left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right) \cdot \sqrt{1+y'^2} \cdot 2 \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{(1+y'^2)^4}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^4} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\frac{d}{dx} \int_{x_1}^x \frac{2((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} \\
& - \frac{\int_{x_1}^x \frac{2((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} + \\
& + \frac{\int_{x_1}^x \frac{2((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \cdot 2 \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^4} \\
& - 2 \cdot \frac{\frac{d}{dx} ((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2)}{(1+y'^2)^4} \cdot \sqrt{1+y'^2} - \\
& - 2 \cdot \frac{2((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot \frac{d}{dx} ((1+y'^2)^4)}{(1+y'^2)^8} \cdot \sqrt{1+y'^2} - \\
& - 2 \cdot \frac{2((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2)}{(1+y'^2)^4} \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} + \\
& + \frac{\frac{d}{dx} \int_{x_1}^x \frac{2((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot 2 \cdot (1+y'^2)}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} - \\
& - \frac{\int_{x_1}^x \frac{2((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot 2 \cdot \frac{d}{dx} (1+y'^2)}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} - \\
& - \frac{\int_{x_1}^x \frac{2((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot 2 \cdot (1+y'^2) \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \cdot \sqrt{1+y'^2} \cdot 2 \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} - \frac{\sqrt{1+y'^2} \cdot 2 \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^4} + \\
&+ \frac{2 \cdot \frac{d}{dx} (2y'y''y''' + (1+y'^2)y^{(4)} - 3y''^3 - 6y'y''y''')}{(1+y'^2)^4} - \\
&- \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} - \\
&- \frac{2 \cdot (2y'y''y''' + (1+y'^2)y^{(4)} - 3y''^3 - 6y'y''y''') \cdot \frac{d}{dx} (1+y'^2)^4}{(1+y'^2)^4} - \\
&- \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} - \\
&- \frac{2 \cdot (2y'y''y''' + (1+y'^2)y^{(4)} - 3y''^3 - 6y'y''y''') \cdot \sqrt{1+y'^2}}{(1+y'^2)^4} - \\
&- \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} - \\
&- \frac{2 \frac{d}{dx} \left(((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot 4(1+y'^2)^3 \cdot 2y'y'' \right)}{(1+y'^2)^8} + \\
&- \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} + \\
&+ \frac{2 \left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right) \cdot 4(1+y'^2)^3 \cdot 2y'y'' \cdot \frac{d}{dx} \left((1+y'^2)^8 \right)}{(1+y'^2)^{16}} + \\
&+ \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} + \\
&+ \frac{2 \left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right) \cdot 4(1+y'^2)^3 \cdot 2y'y'' \cdot \sqrt{1+y'^2}}{(1+y'^2)^8} - \\
&- \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2 \frac{d}{dx} \left((1+y'^2) y''' - 3y' y''^2 \right)}{(1+y'^2)^4} \cdot \sqrt{1+y'^2} \\
& - \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} + \\
& \frac{2 \left((1+y'^2) y''' - 3y' y''^2 \right) \cdot \frac{d}{dx} \left((1+y'^2)^4 \right)}{(1+y'^2)^8} \cdot \sqrt{1+y'^2} \\
& + \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} - \\
& \frac{2 \left((1+y'^2) y''' - 3y' y''^2 \right)}{(1+y'^2)^4} \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} + \\
& - \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} + \\
& \frac{2 \left((1+y'^2) y''' - 3y' y''^2 \right)}{(1+y'^2)^3} \cdot 2 \\
& + \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^3}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^3} - \\
& \frac{2 \left((1+y'^2) y''' - 3y' y''^2 \right) \cdot \frac{d}{dx} \left((1+y'^2)^4 \right)}{(1+y'^2)^8} \cdot \sqrt{1+y'^2} \\
& + \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} - \\
& \frac{2 \left((1+y'^2) y''' - 3y' y''^2 \right)}{(1+y'^2)^4} \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} + \\
& - \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4} \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \\
& \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}{\int_{x_1}^x \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot \frac{y''\sqrt{1+y'^2} - y' \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}}{1+y'^2}} + \\
& \frac{\int_{x_1}^x \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot y' \cdot 2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^3} - \\
& -2 \cdot \frac{2 \frac{d}{dx} \left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4} \cdot \sqrt{1+y'^2} - \\
& -2 \cdot \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right) \cdot 4(1+y'^2)^3 \cdot 2y'y''}{(1+y'^2)^8} \cdot \sqrt{1+y'^2} - \\
& -2 \cdot \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4} \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} + \\
& \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4} \cdot 2 \cdot (1+y'^2) \\
& \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\int_{x_1}^x \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot 2 \cdot 2y'y''} - \\
& \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\int_{x_1}^x \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot 2 \cdot (1+y'^2) \cdot \sqrt{1+y'^2}} = \\
& \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - \frac{2 \cdot (1+y'^2)}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^3} + \\
&\quad \frac{2 \cdot \frac{d}{dx} \left((1+y'^2)y^{(4)} - 3y''^3 - 4y'y''y''' \right)}{(1+y'^2)^4} \\
&+ \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} - \\
&\quad \frac{2 \cdot \left((1+y'^2)y^{(4)} - 3y''^3 - 4y'y''y''' \right) \cdot 4(1+y'^2)^3 \cdot 2y'y''}{(1+y'^2)^4} \\
&\quad \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} - \\
&\quad \frac{2 \cdot \left((1+y'^2)y^{(4)} - 3y''^3 - 4y'y''y''' \right) \cdot \sqrt{1+y'^2}}{(1+y'^2)^4} \\
&\quad \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - \\
&\quad \frac{2 \left(\frac{d}{dx} \left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right) \cdot 4(1+y'^2)^3 \cdot 2y'y'' \right)}{(1+y'^2)^8} \\
&\quad \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} - \\
&\quad \frac{2 \left(\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right) \cdot 4 \frac{d}{dx} \left((1+y'^2)^3 \right) \cdot 2y'y'' \right)}{(1+y'^2)^8} \\
&\quad \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} - \\
&\quad \frac{2 \left(\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 \right) \cdot 4 \left((1+y'^2)^3 \right) \cdot 2 \frac{d}{dx} (y'y'') \right)}{(1+y'^2)^8} \\
&\quad \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right) \cdot 4(1+y'^2)^3 \cdot 2y'y'' \cdot 8(1+y'^2) \cdot 2y'y''}{(1+y'^2)^{16}} \\
+ & \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{+} \\
& \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right) \cdot 4(1+y'^2)^3 \cdot 2y'y'' \cdot \sqrt{1+y'^2}}{(1+y'^2)^8} \\
+ & \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}{-} \\
& \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right) \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}}{(1+y'^2)^4} \\
- & \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}{-} \\
& \frac{\int_{x_1}^x \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot \frac{y''\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}}{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} + \\
& \frac{\int_{x_1}^x \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot 2y'}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^3} - \\
& -2 \cdot \frac{2\left((1+y'^2)y^{(4)} - 3y''^3 - 4y'y''y'''\right) \cdot \sqrt{1+y'^2}}{(1+y'^2)^4} - \\
& -2 \cdot \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right) \cdot 4(1+y'^2)^3 \cdot 2y'y'' \cdot \sqrt{1+y'^2}}{(1+y'^2)^8} - \\
& -2 \cdot \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right) \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}}{(1+y'^2)^4} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4} \cdot 2 \cdot (1+y'^2) \\
+ & \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\int_{x_1}^x \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot 4y'y''} \\
- & \frac{\int_{x_1}^x \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot 2 \cdot (1+y'^2) \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - \frac{2 \cdot (1+y'^2)}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^3} + \\
&\frac{2 \cdot (2y''^2 y''' + 2y' y''^2 + 2y' y'' y^{(4)} + 2y' y'' y^{(4)} + (1+y'^2) y^{(5)})}{(1+y'^2)^4} \\
&+ \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - \\
&\frac{2 \cdot (9y''^2 y''' + 6y''^2 y''' + 6y' y''^2 + 6y' y'' y^{(4)})}{(1+y'^2)^4} \\
&- \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^3} - \\
&\frac{2 \cdot ((1+y'^2) y^{(4)} - 3y''^3 - 4y' y'' y''') \cdot 4(1+y'^2)^3 \cdot 2y' y''}{(1+y'^2)^4} \\
&- \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^4} - \\
&\frac{2 \cdot ((1+y'^2) y^{(4)} - 3y''^3 - 4y' y'' y''') \cdot \sqrt{1+y'^2}}{(1+y'^2)^4} \\
&- \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^4} \\
&\frac{2 \frac{d}{dx} \left(((1+y'^2) y''' - 3y' y''^2) \cdot 4(1+y'^2)^3 \cdot 2y' y'' \right)}{(1+y'^2)^8} \\
&- \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} + \\
&\frac{2 \left((1+y'^2) y''' - 3y' y''^2 \right) \cdot 4(1+y'^2)^3 \cdot 2y' y'' \cdot 8(1+y'^2)^7 \cdot 2y' y''}{(1+y'^2)^{16}} \\
&+ \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^3} + \\
&\frac{2 \left((1+y'^2) y''' - 3y' y''^2 \right) \cdot 4 \cdot 2y' y'' \cdot \sqrt{1+y'^2}}{(1+y'^2)^5} \\
&+ \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2\left(2y'y''y''' + (1+y'^2)y^{(4)} - 3y''^3 - 6y'y''y'''\right) \cdot \sqrt{1+y'^2}}{(1+y'^2)^4} + \\
& \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}{+} \\
& + \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right) \cdot 4(1+y'^2)^3 \cdot 2y'y'' \cdot \sqrt{1+y'^2}}{(1+y'^2)^8} - \\
& \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}{+} \\
& - \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right) \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}}{(1+y'^2)^4} + \\
& \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}{+} \\
& + \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right) \cdot 2}{(1+y'^2)^3} - \\
& \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^3}{-} \\
& + \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right) \cdot 4(1+y'^2)^4 \cdot 2y'y'' \cdot \sqrt{1+y'^2}}{(1+y'^2)^8} - \\
& \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}{+} \\
& - \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right) \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}}{(1+y'^2)^4} + \\
& \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}{+}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4} \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \\
& - \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}{\int_{x_1}^x \frac{2\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot \frac{y''\sqrt{1+y'^2}-\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}}{1+y'^2}} + \\
& + \frac{\int_{x_1}^x \frac{2\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot y' \cdot 2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^3} - \\
& - 2 \cdot \frac{2\left(2y'y''y''' + (1+y'^2)y^{(4)} - 3y''^3 - 6y'y''y'''\right)}{(1+y'^2)^4} \cdot \sqrt{1+y'^2} - \\
& - 2 \cdot \frac{2\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right) \cdot 4 \cdot 2y'y''}{(1+y'^2)^5} \cdot \sqrt{1+y'^2} - \\
& - 2 \cdot \frac{2\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4} \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} + \\
& + \frac{2\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^3} \cdot 2 \\
& - \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\int_{x_1}^x \frac{2\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot 4y'y''} - \\
& - \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\int_{x_1}^x \frac{2\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot 2 \cdot (1+y'^2) \cdot \sqrt{1+y'^2}} = \\
& \left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - \frac{2 \cdot (1+y'^2)}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^3} + \\
&\frac{2 \cdot (2y''^2 y''' + 2y' y''^2 + 4y' y'' y^{(4)} + (1+y'^2) y^{(5)})}{(1+y'^2)^4} \\
&+ \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - \\
&\frac{2 \cdot (15y''^2 y''' + 6y' y''^2 + 6y' y'' y^{(4)})}{(1+y'^2)^4} \\
&- \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - \\
&\frac{2 \cdot ((1+y'^2) y^{(4)} - 3y''^3 - 4y' y'' y''') \cdot 4 \cdot 2y' y''}{1+y'^2} \\
&- \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - \\
&\frac{2 \cdot ((1+y'^2) y^{(4)} - 3y''^3 - 4y' y'' y''') \cdot \sqrt{1+y'^2}}{(1+y'^2)^4} \\
&- \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} \\
&\frac{2 \left(\frac{d}{dx} ((1+y'^2) y''' - 3y' y''^2) \cdot 4(1+y'^2)^3 \cdot 2y' y''\right)}{(1+y'^2)^8} \\
&- \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - \\
&\frac{2 \left(\left((1+y'^2) y''' - 3y' y''^2\right) \cdot 4 \frac{d}{dx} \left((1+y'^2)^3\right) \cdot 2y' y''\right)}{(1+y'^2)^8} \\
&- \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2\left(\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right) \cdot 4(1+y'^2)^3 \cdot 2 \frac{d}{dx}(y'y'')\right)}{(1+y'^2)^8} \\
& - \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{} + \\
& \frac{2\left(\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right) \cdot 4 \cdot 2y'^2 y''^2 \cdot 8 \cdot 2\right)}{(1+y'^2)^6} \\
& + \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{} + \\
& \frac{2\left(\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right) \cdot 4 \cdot 2y'y''\right)}{(1+y'^2)^5} \cdot \sqrt{1+y'^2} \\
& + \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}{} - \\
& \frac{2\left(2y'y''y''' + (1+y'^2)y^{(4)} - 3y''^3 - 6y'y''y'''\right) \cdot \sqrt{1+y'^2}}{(1+y'^2)^4} \\
& - \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}{} + \\
& \frac{2\left(\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right) \cdot 4 \cdot 2y'y''\right)}{(1+y'^2)^5} \cdot \sqrt{1+y'^2} \\
& + \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}{} - \\
& \frac{2\left(\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right) \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)}{(1+y'^2)^4} \\
& + \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}{} + \\
& \frac{2\left(\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right) \cdot 2\right)}{(1+y'^2)^3} \\
& + \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^3}{} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right)\cdot 4\cdot 2y'y''}{(1+y'^2)^4}\cdot\sqrt{1+y'^2} \\
+ & \frac{\left(\int_{x_1}^x\sqrt{1+y'^2}dx\right)^2}{\left(\int_{x_1}^x\sqrt{1+y'^2}dx\right)^2} \\
- & \frac{2\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right)\cdot\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}}{(1+y'^2)^4}\cdot\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} + \\
& \frac{\left(\int_{x_1}^x\sqrt{1+y'^2}dx\right)^2}{\left(\int_{x_1}^x\sqrt{1+y'^2}dx\right)^2} \\
- & \frac{2\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right)\cdot\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}}{(1+y'^2)^4}\cdot\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \\
& \frac{\left(\int_{x_1}^x\sqrt{1+y'^2}dx\right)^2}{\left(\int_{x_1}^x\sqrt{1+y'^2}dx\right)^2} \\
- & \frac{\int_{x_1}^x\frac{2\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4}dx\cdot\frac{y''\sqrt{1+y'^2}-\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}}{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x\sqrt{1+y'^2}dx\right)^2} + \\
& \frac{2y'\int_{x_1}^x\frac{2\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4}dx}{\left(\int_{x_1}^x\sqrt{1+y'^2}dx\right)^3} \\
+ & \frac{\left(\int_{x_1}^x\sqrt{1+y'^2}dx\right)^3}{\left(\int_{x_1}^x\sqrt{1+y'^2}dx\right)^3} \\
- & 2\cdot\frac{2\left((1+y'^2)y^{(4)}-3y''^3-4y'y''y'''\right)}{(1+y'^2)^4}\cdot\sqrt{1+y'^2} - \\
- & 2\cdot\frac{16y'y''\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^5}\cdot\sqrt{1+y'^2} - \\
- & 2\cdot\frac{2\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4}\cdot\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^3} \cdot 2 \\
+ & \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{(1+y'^2)^3} - \\
& \frac{4y'y'' \int_{x_1}^x \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4} dx}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} - \\
& \frac{\int_{x_1}^x \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot 2 \cdot (1+y'^2) \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} - \frac{2 \cdot (1+y'^2)}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^3} + \\
&\frac{2 \cdot (2y''^2 y''' + 2y' y'''' + 4y' y'' y^{(4)} + (1+y'^2) y^{(5)})}{(1+y'^2)^4} \\
&+ \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^4} - \\
&\frac{2 \cdot (15y''^2 y''' + 6y' y'''' + 6y' y'' y^{(4)})}{(1+y'^2)^4} - \\
&\frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^4} - \\
&\frac{16y' y'' \cdot ((1+y'^2) y^{(4)} - 3y''^3 - 4y' y'' y''')}{1+y'^2} - \\
&\frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^4} \cdot \sqrt{1+y'^2} - \\
&\frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^4} \cdot 2 \left(((1+y'^2) y^{(4)} - 3y''^3 - 4y' y'' y''') \cdot 4(1+y'^2)^3 \cdot 2y' y'' \right) \\
&\frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^4} \cdot 2 \left(((1+y'^2) y'' - 3y' y''') \cdot 4 \cdot 3(1+y'^2)^2 \cdot 2y' y'' \cdot 2y' y'' \right) \\
&\frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2\left(\left(1+y'^2\right)y'''-3y'y''^2\right) \cdot 4 \cdot 2\left(y''^2-y'y'''\right)}{\left(1+y'^2\right)^5} \\
& - \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{+} \\
& \frac{2\left(\left(1+y'^2\right)y'''-3y'y''^2\right) \cdot 4 \cdot 2y'^2y''^2 \cdot 8 \cdot 2}{\left(1+y'^2\right)^6} \\
& + \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{+} \\
& \frac{2\left(\left(1+y'^2\right)y'''-3y'y''^2\right) \cdot 4 \cdot 2y'y'' \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(1+y'^2\right)^5} \\
& + \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}{-} \\
& \frac{2\left(2y'y''y''' + \left(1+y'^2\right)y^{(4)} - 3y''^3 - 6y'y''y'''\right) \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(1+y'^2\right)^4} \\
& - \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}{+} \\
& \frac{2\left(\left(1+y'^2\right)y'''-3y'y''^2\right) \cdot 4 \cdot 2y'y'' \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(1+y'^2\right)^5} \\
& + \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}{-} \\
& \frac{2\left(\left(1+y'^2\right)y'''-3y'y''^2\right) \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}}{\left(1+y'^2\right)^4} \\
& - \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}{+} \\
& \frac{2\left(\left(1+y'^2\right)y'''-3y'y''^2\right) \cdot 2}{\left(1+y'^2\right)^3} \\
& + \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^3}{-}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right)\cdot 4\cdot 2y'y''}{(1+y'^2)^4}\cdot\sqrt{1+y'^2} \\
+ & \frac{\left(\int_{x_1}^x\sqrt{1+y'^2}dx\right)^2}{\left(\int_{x_1}^x\sqrt{1+y'^2}dx\right)^2} \\
- & \frac{2\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right)\cdot\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}}{(1+y'^2)^4}\cdot\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} + \\
& \frac{\left(\int_{x_1}^x\sqrt{1+y'^2}dx\right)^2}{\left(\int_{x_1}^x\sqrt{1+y'^2}dx\right)^2} \\
- & \frac{2\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right)\cdot\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}}{(1+y'^2)^4}\cdot\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \\
& \frac{\left(\int_{x_1}^x\sqrt{1+y'^2}dx\right)^2}{\left(\int_{x_1}^x\sqrt{1+y'^2}dx\right)^2} \\
- & \frac{\int_{x_1}^x\frac{2\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4}dx\cdot\frac{y''\sqrt{1+y'^2}-\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}}{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x\sqrt{1+y'^2}dx\right)^2} + \\
& \frac{\left(\int_{x_1}^x\sqrt{1+y'^2}dx\right)^2}{\left(\int_{x_1}^x\sqrt{1+y'^2}dx\right)^2} \\
+ & \frac{2y'\int_{x_1}^x\frac{2\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4}dx}{\left(\int_{x_1}^x\sqrt{1+y'^2}dx\right)^3} - \\
& \frac{\left(\int_{x_1}^x\sqrt{1+y'^2}dx\right)^3}{\left(\int_{x_1}^x\sqrt{1+y'^2}dx\right)^3} \\
- & 2\cdot\frac{2\left((1+y'^2)y^{(4)}-3y''^3-4y'y''y'''\right)}{(1+y'^2)^4}\cdot\sqrt{1+y'^2} - \\
& \frac{2\left((1+y'^2)y^{(4)}-3y''^3-4y'y''y'''\right)}{(1+y'^2)^4}\cdot\sqrt{1+y'^2} - \\
- & 2\cdot\frac{16y'y''\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^5}\cdot\sqrt{1+y'^2} - \\
& \frac{16y'y''\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^5}\cdot\sqrt{1+y'^2} - \\
- & 2\cdot\frac{2\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4}\cdot\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} + \\
& \frac{2\left((1+y'^2)y'''-3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4}\cdot\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^3} \cdot 2 \\
+ & \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{(1+y'^2)^3} - \\
& \frac{4y'y'' \int_{x_1}^x \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4} dx}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} - \\
& \frac{\int_{x_1}^x \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot 2 \cdot (1+y'^2) \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}
\end{aligned}$$

Pati Oilerio lygtis:

$$\begin{aligned}
& \frac{\int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}} \right)^2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} \\
& \frac{\left(\frac{2((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot (y''' \cdot 2y' - 3y''^2)}{(1+y'^2)^5} - \frac{10y' \cdot \left(((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2)^2 \right)}{(1+y'^2)^6} \right)}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} \\
& \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx + \\
& \frac{\int_{x_1}^x \left(\frac{2((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2) \cdot (y''' \cdot 2y' - 3y''^2)}{(1+y'^2)^5} - \frac{10y' \cdot \left(((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2)^2 \right)}{(1+y'^2)^6} \right) dx}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} \\
& \cdot \sqrt{1+y'^2} + \frac{\int_{x_1}^x \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}} \right)^2 dx \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} + \\
& \frac{2 \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \cdot \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}} \right)^2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^3} + \\
& \frac{2 \int_{x_1}^x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} dx \cdot \int_{x_1}^x \left(\frac{(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2}{(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}} \right)^2 dx \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^3} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\sqrt{1+y'^2} \cdot 12 \left((1+y'^2) y''' - 3y'y''^2 \right) \cdot y'y''}{(1+y'^2)^5 \cdot \left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} - \\
& - 12 \cdot \frac{\left(2y'y'' + (1+y'^2) y^{(4)} - 3y'''^2 - 6y'y''y''' \right) y'y'' + \left((1+y'^2) y''' - 3y'y''^2 \right) \cdot (y''^2 + y'y''')}{(1+y'^2)^5 \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} + \\
& + \frac{\left(12 \left((1+y'^2) y''' - 3y'y''^2 \right) \cdot y'y'' \right) \cdot 10y'y''}{(1+y'^2)^6 \cdot \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} + \frac{24 \left((1+y'^2) y''' - 3y'y''^2 \right) \cdot y'y'' \sqrt{1+y'^2}}{(1+y'^2)^5 \cdot \left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} + \\
& + \frac{12 \left((1+y'^2) y''' - 3y'y''^2 \right) \cdot y'y''}{(1+y'^2)^5} \cdot \sqrt{1+y'^2} + \\
& + \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2}{\int_{x_1}^x \frac{12 \left((1+y'^2) y''' - 3y'y''^2 \right) \cdot y'y''}{(1+y'^2)^5} dx \cdot \frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}} \frac{d}{dx} \sqrt{1+y'^2}} - \\
& - \frac{2 \int_{x_1}^x \frac{12 \left((1+y'^2) y''' - 3y'y''^2 \right) \cdot y'y''}{(1+y'^2)^5} dx \cdot (1+y'^2)}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^3} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} + \frac{2 \cdot (1+y'^2)}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^3} - \\
& \frac{2 \cdot (2y''^2 y''' + 2y' y'''' + 4y' y'' y^{(4)} + (1+y'^2) y^{(5)})}{(1+y'^2)^4} - \\
& - \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} + \\
& \frac{2 \cdot (15y''^2 y''' + 6y' y'''' + 6y' y'' y^{(4)})}{(1+y'^2)^4} + \\
& + \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} + \\
& \frac{16y' y'' \cdot ((1+y'^2) y^{(4)} - 3y''^3 - 4y' y'' y''')}{1+y'^2} + \\
& + \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} + \\
& \frac{2 \cdot ((1+y'^2) y^{(4)} - 3y''^3 - 4y' y'' y''') \cdot \sqrt{1+y'^2}}{(1+y'^2)^4} + \\
& + \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2} + \\
& \frac{2 \left(((1+y'^2) y^{(4)} - 3y''^3 - 4y' y'' y''') \cdot 4(1+y'^2)^3 \cdot 2y' y'' \right)}{(1+y'^2)^8} + \\
& + \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} + \\
& \frac{2 \left(((1+y'^2) y''' - 3y' y''^2) \cdot 4 \cdot 3(1+y'^2)^2 \cdot 2y' y'' \cdot 2y' y'' \right)}{(1+y'^2)^8} + \\
& + \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2\left(\left(1+y'^2\right)y'''-3y'y''^2\right) \cdot 4 \cdot 2\left(y''^2-y'y'''\right)}{\left(1+y'^2\right)^5} \\
+ & \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{-} \\
& \frac{2\left(\left(1+y'^2\right)y'''-3y'y''^2\right) \cdot 4 \cdot 2y'^2y''^2 \cdot 8 \cdot 2}{\left(1+y'^2\right)^6} \\
- & \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{-} \\
& \frac{2\left(\left(1+y'^2\right)y'''-3y'y''^2\right) \cdot 4 \cdot 2y'y'' \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(1+y'^2\right)^5} + \\
& \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}{-} \\
& \frac{2\left(2y'y''y''' + \left(1+y'^2\right)y^{(4)} - 3y''^3 - 6y'y''y'''\right) \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(1+y'^2\right)^4} + \\
& \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}{-} \\
& \frac{2\left(\left(1+y'^2\right)y'''-3y'y''^2\right) \cdot 4 \cdot 2y'y'' \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(1+y'^2\right)^5} + \\
& \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}{-} \\
& \frac{2\left(\left(1+y'^2\right)y'''-3y'y''^2\right) \cdot \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}}{\left(1+y'^2\right)^4} + \\
& \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^2}{-} \\
& \frac{2\left(\left(1+y'^2\right)y'''-3y'y''^2\right) \cdot 2}{\left(1+y'^2\right)^3} + \\
& \frac{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx\right)^3}{-}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right) \cdot 4 \cdot 2y'y'' \cdot \sqrt{1+y'^2}}{(1+y'^2)^4} + \\
& \quad \left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2 \\
& + \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right) \cdot y'}{(1+y'^2)^4 \sqrt{1+y'^2}} - \\
& \quad \left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2 \\
& + \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right) \cdot y'}{(1+y'^2)^4 \sqrt{1+y'^2}} + \\
& \quad \left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2 \\
& + \frac{\int_{x_1}^x \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot \frac{y''\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}}{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} - \\
& - \frac{2y' \int_{x_1}^x \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right)}{(1+y'^2)^4} dx}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^3} + \\
& + 2 \cdot \frac{2\left((1+y'^2)y^{(4)} - 3y''^3 - 4y'y''y'''\right) \cdot \sqrt{1+y'^2}}{(1+y'^2)^4} + \\
& + 2 \cdot \frac{16y'y''\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right) \cdot \sqrt{1+y'^2}}{(1+y'^2)^5} + \\
& + 2 \cdot \frac{2\left((1+y'^2)y''' - 3y'y''^2\right) \cdot y'}{(1+y'^2)^4 \sqrt{1+y'^2}} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2 \left((1+y'^2) y''' - 3y'y''^2 \right)}{(1+y'^2)^3} \cdot 2 \\
& \quad + \frac{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx}{\int_{x_1}^x \frac{2 \left((1+y'^2) y''' - 3y'y''^2 \right)}{(1+y'^2)^4} dx} + \\
& \quad + \frac{4y'y'' \int_{x_1}^x \frac{2 \left((1+y'^2) y''' - 3y'y''^2 \right)}{(1+y'^2)^4} dx}{\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx} + \\
& \quad + \frac{\int_{x_1}^x \frac{2 \left((1+y'^2) y''' - 3y'y''^2 \right)}{(1+y'^2)^4} dx \cdot 2 \cdot (1+y'^2) \cdot \sqrt{1+y'^2}}{\left(\int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dx \right)^2} = 0, \quad \forall x \in [x_1; x_2]
\end{aligned}$$

Sprendžiant šią lygtį būtų galima rasti vingiuotumo, rasto naudojant siūlomą metodą maksimumus ir minimumus.

5 priedas. Autoriaus publikuotų darbų sąrašas