Kauno technologijos universitetas

Matematikos ir gamtos mokslų fakultetas

Laukimo laiko tarp dviejų bitkoino arbitražo galimybių matematinis modelis

Baigiamasis magistro studijų projektas

Saida Balčiūnaitė

Projekto autorė

Doc. dr. Audrius Kabašinskas

Vadovas

Doc. prakt. dr. Arvydas Jadevičius

Vadovas

Kaunas, 2023

Kauno technologijos universitetas

Matematikos ir gamtos mokslų fakultetas

Laukimo laiko tarp dviejų bitkoino arbitražo galimybių matematinis modelis

Baigiamasis magistro studijų projektas

Didžiųjų verslo duomenų analitika (6213AX001)

Saida Balčiūnaitė

Projekto autorė

Doc. dr. Audrius Kabašinskas
Vadovas

Doc. prakt. dr. Arvydas Jadevičius
Vadovas

Doc. dr. Kęstutis Lukšys
Recenzentas

Doc. dr. Raminta Vaitiekūnienė
Recenzentė

Kaunas, 2023

Kauno technologijos universitetas

Matematikos ir gamtos mokslų fakultetas

Saida Balčiūnaitė

Laukimo laiko tarp dviejų bitkoino arbitražo galimybių matematinis modelis

Akademinio sąžiningumo deklaracija

Patvirtinu, kad:

1. baigiamąjį projektą parengiau savarankiškai ir sąžiningai, nepažeisdama(s) kitų asmenų autoriaus ar kitų teisių, laikydamasi(s) Lietuvos Respublikos autorių teisių ir gretutinių teisių įstatymo nuostatų, Kauno technologijos universiteto (toliau – Universitetas) intelektinės nuosavybės valdymo ir perdavimo nuostatų bei Universiteto akademinės etikos kodekse nustatytų etikos reikalavimų;

2. baigiamajame projekte visi pateikti duomenys ir tyrimų rezultatai yra teisingi ir gauti teisėtai, nei viena šio projekto dalis nėra plagijuota nuo jokių spausdintinių ar elektroninių šaltinių, visos baigiamojo projekto tekste pateiktos citatos ir nuorodos yra nurodytos literatūros sąraše;

3. įstatymų nenumatytų piniginių sumų už baigiamąjį projektą ar jo dalis niekam nesu mokėjęs (-usi);

4. suprantu, kad išaiškėjus nesąžiningumo ar kitų asmenų teisių pažeidimo faktui, man bus taikomos akademinės nuobaudos pagal Universitete galiojančią tvarką ir būsiu pašalinta(s) iš Universiteto, o baigiamasis projektas gali būti pateiktas Akademinės etikos ir procedūrų kontrolieriaus tarnybai nagrinėjant galimą akademinės etikos pažeidimą.

Saida Balčiūnaitė

Patvirtinta elektroniniu būdu

Saida Balčiūnaitė. Laukimo laiko tarp dviejų bitkoino arbitražo galimybių matematinis modelis. Magistro studijų baigiamasis projektas / vadovai doc. dr. Audrius Kabašinskas ir doc. prakt. dr. Arvydas Jadevičius; Kauno technologijos universitetas, Matematikos ir gamtos mokslų fakultetas.

Studijų kryptis ir sritis (studijų krypčių grupė): Taikomoji matematika (Matematikos mokslai).

Reikšminiai žodžiai: efektyvi rinka, arbitražas, bitkoinas, laukimo laiko pasiskirstymas, Markovo grandinė.

Kaunas, 2023. 63 p.

Santrauka

Remiantis efektyvios rinkos hipoteze, efektyviose rinkose arbitražo įvykių neturėtų būti arba jie labai greitai panaikinami, kadangi turto kaina atspindi visą turimą informaciją ir neįmanoma nugalėti rinkos, t.y. uždirbti iš nerizikingų sandorių, pasinaudojus kainų skirtumais tarp rinkų. Atsiradusi elgsenos finansų sritis metė iššūkį ilgą laiką nusistovėjusiai efektyvios rinkos hipotezei teigdama, kad investuotojai ne visada racionalūs ir arbitražo galimybės gali egzistuoti, o arbitražo prekyba gali būti pelninga. Mažai tikėtina, kad visos rinkos yra efektyvios ir verta atsiriboti nuo efektyvios rinkos hipotezės. Dar pakankamai nauja, mažai reguliuojama ir toliau besivystanti kriptovaliutų rinka vertinama kaip neefektyvi rinka, kurioje dažnai pasitaiko didelių, pasikartojančių arbitražo galimybių tarp biržų. Vis dėlto jomis pasinaudoti nėra taip paprasta. Investuotojui nėra aišku, kurioje biržoje laukti arbitražo galimybių ir kur verta laikyti savo lėšas. Taip pat sandoriai turi būti atlikti beveik akimirksniu prieš tai įvertinus ar jie bus pelningi.

Šio baigiamojo magistro studijų projekto tikslas – įvertinti arbitražą kaip vieną iš investavimo strategijų kriptovaliutų rinkoje ir sukurti laukimo laiko tarp dviejų bitkoino arbitražo matematinį modelį. Pasirinkta nagrinėti bitkoino, kuris vis dar sudaro didžiausią kriptovaliutos rinkos kapitalizacijos dalį ir yra populiariausia kriptovaliuta, dviejų metų arbitražo įvykius, kai parduodama „Bitstamp“, „Bitbay“ ir „CEX.IO“ kriptovaliutos biržose, o perkama kitose 19-tose biržose. Norima išnagrinėti arbitražo investavimo strategiją ir sukurti laukimo laiko tarp dviejų arbitražo galimybių matematinį modelį, įvertinant laiko tarp dviejų bitkoino arbitražų pasiskirstymą ir sukuriant Markovo grandinės modelį. Parodyta, kad geriausiai laukimo laiko pasiskirstymą nusako dviejų gama skirstinių mišiniai atskirai įvertinus tikimybę, kad laukimo laikas yra lygus nuliui. Vis dėlto sunkiai įmonoma pasirinkti vieną skirstinį ar skirstinių mišinį, įvertinant laiką tarp arbitražo įvykių vienoje biržoje. Verta nagrinėti kiekvienos poros laukimo laiko tarp arbitražo įvykių pasiskirstymą atskirai. Sukurtas Markovo grandinės modelis su dviem būsenomis: arbitražas ir nėra arbitražo, kuris parodo, kad turime arbitražo įvykį vidutiniškai po 2–4 minučių ir jis pasikartos maždaug kas minutę. Gautos stacionariosios tikimybės parodė, kad su didesne tikimybe arbitražo įvykio nebus, o tai nežymus efektyvios rinkos požymis.

Saida Balčiūnaitė. Mathematical model for forecasting of waiting time between two bitcoin arbitrage possibilities. Master's Final Degree Project / supervisors doc. dr. Audrius Kabašinskas and doc. prakt. dr. Arvydas Jadevičius; Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Kaunas University of Technology.

Study field and area (study field group): Applied Mathematics (Mathematical Sciences).

Keywords: efficient market, arbitrage, bitcoin, waiting-time distribution, Markov chain.

Kaunas, 2023. 63.

Summary

According to the efficient market hypothesis, arbitrage events should not exist or are eliminated very quickly, since the asset price reflects all available information and it is impossible to beat the market, i.e., profit from risk-free trades by taking advantage of price differences between markets. The emerging field of behavioral finance challenged the long-established efficient market hypothesis by arguing that investors are not always rational and that arbitrage opportunities may exist. It is unlikely that all markets are an efficient and it is worth distancing yourself from the efficient market hypothesis. Still fairly new, with little regulation and still developing, the cryptocurrency market is seen as an inefficient market that often has large and repetitive arbitrage opportunities between exchanges. However, "catching" them is not so easy. It is not clear to the investor in which exchange to wait for arbitrage opportunities and where it is worth keeping his funds. Trades must be completed at approximately the same time before they can be judged to be profitable.

The purpose of this final thesis of master's studies is to evaluate arbitrage as one of the investment strategies in the cryptocurrency market and to create a mathematical model of the waiting time between two bitcoin arbitrages. For this thesis, bitcoin was chosen to be examined, as it is still the most popular cryptocurrency and has the largest share of the cryptocurrency market capitalization, as well as two years of bitcoin arbitrage events, with sales on "Bitstamp", "BitBay" and "CEX.IO" crypto exchanges and purchases on 19 other exchanges. In the thesis, arbitrage investment strategy was examinated and a mathematical model of the waiting time between two arbitrage opportunities was created. It was done by estimating the time distribution between two arbitrages and creating a Markov chain model. It has been shown that the most suitable waiting time distribution is described by mixtures of two gamma distributions after separately estimating the probability that the waiting time is equal to zero. However, it is difficult to select a single distribution or a mixture of distributions when evaluating the time between arbitrage events in a single exchange. It is worth examining the distribution of waiting times between arbitrage events for each pair separately. Markov chain model with two states: arbitrage and no arbitrage showed that we have an arbitrage event in average 2–4 minutes and it will repeat again every minute. The resulting stationary probabilities showed that there is a higher probability of no arbitrage, which is a slight indication of an efficient market.

Turinys

Lentelių sąrašas

Paveikslų sąrašas

Santrumpų ir terminų sąrašas

Santrumpos:

APT – arbitražo kainodaros teorija (angl. *Arbitrage price theory*);

CAPM – kapitalo turto kainodaros modelis (angl. *Capital Asset Pricing Model*);

CTRW – nepertraukiamo laiko atsitiktinis ėjimas (angl. *Continuous-time random walk*);

HFT – dažna trumpalaikio pobūdžio prekyba (angl. *High-frequency trading*);

HMM – paslėptas Markovo modelis (angl. *Hidden Markov model*);

MLE – didžiausio tikėtinumo metodas (angl. *Maximum likelihood estimation*);

MME – momentų metodas (angl. *Moment of methods*);

ZIP – nulinės vertės Puasono skirstinys (angl. *Zero-inflated Poisson);*

WTD – laukimo laiko pasiskirstymas (angl. *The waiting time distribution*).

Įvadas

Arbitražas, kaip investavimo strategija, apibrėžia beveik tuo pačiu metu vykdomą identiškų ar panašių finansinių vertybinių popierių pardavimą ir pirkimą, siekiant pasipelnyti iš kainų skirtumų skirtingose rinkose. Investuotojas pasinaudojęs arbitražo galimybe ne tik atranda atsiradusius rinkos neefektyvumus, bet ir juos pašalina atlikus sandorį. Arbitražo sąvoka yra glaudžiai susijusi, bet priešinga rinkos efektyvumo teorijai, kuri apibrėžia rinką kaip tobulai efektyvią, kai visas lygiavertis turtas turi tą pačią kainą. Daugelis svarbių tradicinių finansų ekonomikos išvadų yra pagrįstos prielaida, kad nėra arbitražo ir tai yra viena iš pagrindinių vienijančių principų tiriant tradicines finansų rinkas ir turto kainodarą. Tačiau XXI amžiaus pradžioje efektyvios rinkos hipotezės dominavimas tapo mažiau universalus. Elgesio finansai atsirado kaip prieštaringa sritis, siekiant paaiškinti tas anomalijas, kurios liko iš tradicinių finansų ekonomikos teorijų. Šiuose tyrimuose bandoma paprieštarauti vienai iš pagrindinių efektyvios rinkos prielaidų – investuotojai yra racionalūs. Neteisingų kainų nustatymo anomalijos rinkoje atsiranda dėl investuotojų neracionalumo, o jas pašalinti nėra lengva.

Kriptovaliutos įgyja vis didesnę reikšmę investavimo srityje, o jų kapitalizacijos dalis pasaulinėje rinkoje ir prekybos apimtys vis auga. Nėra abejonių, kad arbitražo galimybes galima pastebėti ir jomis pasinaudoti nuolat, o kriptovaliutų rinkose arbitražo „gaudymas“ tapo vienu iš daugiausiai pelno generuojančių veiklų. Tačiau, dėl didelio neapibrėžtumo, arbitražo susidarymas yra sunkiai prognozuojamas, o investuotojui sunku nustatyti, kurioje kriptovaliutos biržoje jo laukti ir laikyti laisvas lėšas. Bitkoinas vis dar išlieka populiariausia kriptovaliuta ir sudaro daugiau nei 50 % visos rinkos kapitalizacijos. Todėl šiame darbe nagrinėjami bitkoino arbitražo įvykiai tarp skirtingų biržų.

Pirmoje darbo dalyje – literatūros apžvalga, kurioje aptariamos pagrindinės finansų ekonomikos temos susijusios su efektyvia rinka, arbitražo galimybėmis, kriptovaliutų rinka ir jos dinamika bei metodais leidžiančiais įvertinti laukimo laiką. Antroje dalyje aptariama bitkoino charakteristika ir tyrimo duomenų, kuriuos sudaro bitkoino arbitražo įvykiai, aprašomoji statistika. Taip pat aprašomi metodai naudojami tyrime: pagrindiniai skirstiniai ir Markovo grandinė. Trečioje dalyje pateikta tyrimo eiga ir rezultatai taikant pasirinktus metodus. Norėdami įvertinti laukimo laiką tarp dviejų bitkoino arbitražo galimybių, atliksime skirstinių priderinimą ir pasinaudosime Markovo grandinės modeliu turint dvi būsenas: arbitražas ir nėra arbitražo.

Šio darbo tikslas – išanalizuoti arbitražo galimybes ir sukurti matematinį modelį laukimo laikui tarp dviejų bitkoino arbitražo galimybių prognozuoti.

Šiam tikslui pasiekti iškelti šie uždaviniai:

1. išanalizuoti arbitražą kaip vieną iš investavimo strategijų pasirinkimą investuotojui kriptovaliutų rinkoje;
2. įvertinti laukimo laiko tarp dviejų arbitražų pasiskirstymą;
3. sukurti Markovo grandinės modelį ir atlikti prognozavimą.

1. Literatūros apžvalga

Bendrąja prasme, investavimas yra daiktas arba turtas, įsigytas siekiant gauti pajamų arba padidinti įsigyto turto vertę. Investicija gali reikšti bet kokią priemonę ar mechanizmą, naudojama ateities pajamoms generuoti su tikslu ne suvartoti prekę, o naudoti ją ateityje gerovei kurti. Investicija visada susijusi su tam tikro kapitalo išlaidomis šiandien – laiku, pastangomis, pinigais ar turtu – tikintis, kad ateityje atsipirks daugiau nei buvo investuota iš pradžių. Kadangi investavimas yra orientuotas į ateities augimo ar pajamų potencialą, su investicija visada yra susijęs tam tikras rizikos lygis. Tai rizikai sumažinti investuotojai dažnai formuoja savo investicinį portfelį įtraukus kelias investavimo rūšis: akcijas, vertybinius popierius, fondai, nekilnojamas turtas, auksas ir kiti. Vienas iš naujausių investavimo būdų – kriptovaliutos.

Yra keletas skirtingų investavimo strategijų ir jos skiriamos atsižvelgiant į rizikos toleranciją, investavimo stilių, ilgalaikius finansinius tikslus ir prieigą prie kapitalo. Tačiau kiekvienas investuotojas tikisi gauti maksimalų pelną iš jo investicijos pagal jo rizikos tolerancijos lygį ir sukonstruoti optimaliausią portfelį šiam tikslui. Šiame darbe nagrinėjama arbitražo investavimo strategija ir atliktas laiko tarp dviejų arbitražų modeliavimas.

1.1. Efektyvi rinka

Finansų ekonomikoje nagrinėjamos finansų rinkos ir dalyvių priimami sprendimai įvertinant ateities įvykius. Finansų ekonomikos modeliai paprastai yra suformuoti įvertinus laiką, neapibrėžtumą, galimybes ir informaciją. Kai nagrinėjamas neapibrėžtumas, turime įvertinti racionalumo ir rinkos efektyvumo prielaidas.

Efektyvios rinkos hipotezė pirmą kartą suformuluota ekonomisto E. Fama apie 1970 metus [1]. Pagrindinė mintis, kad rinka yra efektyvi, kai bet kuriuo metu kainos visiškai atspindi visą turimą informaciją apie konkrečias akcijas ir (arba) rinką. Visa informacija jau įtraukta į kainą, todėl neverta bandyti „aplenkti“ rinkos, kai nėra nuvertintų ar pervertintų vertybinių popierių ar akcijų. Joks investuotojas neturi pranašumo prognozuodamas akcijų kainos grąžą, nes niekas neturi prieigos prie informacijos, kuri dar nėra prieinama. Pagal efektyvios rinkos hipotezės apibrėžimą, efektyvi rinka gali egzistuoti, jei tenkinamos šios sąlygos:

i) egzistuoja daug racionalaus pelno maksimizavimo investuotojų, kurie aktyviai dalyvauja rinkoje, todėl racionaliai vertina vertybinius popierius;
ii) jei kai kurie investuotojai nėra racionalūs, jų neracionalūs sandoriai atšaukia vienas kitą arba racionalūs investuotojai panaikina jų įtaką neveikdami kainų;
iii) informacija yra nebrangi ir plačiai prieinama rinkos dalyviams maždaug tuo pačiu metu. Investuotojai greitai ir visapusiškai reaguoja į naują informaciją, todėl akcijų kainos atitinkamai koreguojamos.

Ekonomistai išskiria tris rinkos efektyvumo lygius. Pirmajame lygyje kainos atspindi informaciją, esančią ankstesnių kainų istorijoje. Tai vadinama silpnu rinkos efektyvumu. Jei rinkos yra efektyvios silpnąja prasme, tada neįmanoma gauti nuolat didesnio pelno tiriant ankstesnę grąžą. Antrasis efektyvumo lygis reikalauja, kad kainos atspindėtų ne tik ankstesnes kainas, bet ir visą kitą viešą informaciją. Tai žinoma kaip pusiau stiprus rinkos efektyvumas. Jei rinkos yra pusiau stiprios, kainos nedelsiant prisitaikys prie viešos informacijos: paskutinio ketvirčio pelno paskelbimas, nauja akcijų emisija arba pasiūlymas sujungti dvi bendroves. Esant stipriam rinkos efektyvumui, kainos atspindi visą informaciją, kurią galima gauti kruopščiai išanalizavus įmonę ir ekonominius rodiklius [2].

Apie 1953 metus M. Kendall‘as išspausdino darbą apie akcijų ir prekių kainų elgesį, kuriame vietoj to, kad rasti reguliarius kainų ciklus, pastebėjo akcijų ir prekių kainų atsitiktinę tvarką [3]. Jis pasiūlė, kad akcijų kainos vaikšto atsitiktine tvarka ir nuoseklūs vertės pokyčiai yra nepriklausomi. Tai reiškia, kad kainų pokyčiai nepriklauso vienas nuo kito. Jei kainų pokyčiai išliktų, koreliacija būtų teigiama. Išnagrinėjus įvairias įmonių akcijas ir jų koreliacijos koeficientą tarp kiekvienos dienos kainų pokyčio, pastebima nereikšminga tendencija: po kainų kilimo seka tolimesnis kilimas. Taigi šiandieninis kainų pokytis investuotojams beveik nesuteikė supratimo apie galimus pokyčius rytoj. Pakankamai nesunku įsitikinti kodėl konkurencingose rinkose kainos turi svyruoti atsitiktinai. Jei praeities kainų pokyčiai galėtų būti naudojami prognozuojant būsimus kainų pokyčius, investuotojai galėtų lengvai uždirbti. Investuotojams bandant pasinaudoti bet kokia praeities kainų informacija, rinka ir kainos reaguoja iš karto ir išnyks bet koks pelnas gautas tiriant kainų pokyčius.

Po šio M. Kendall‘o atradimo dauguma ekonomistų pritaria teorijai, kad akcijų kainos arti atsitiktinio pasivaikščiojimo, tačiau ginčijasi dėl tam tikrų akcijų grąžos modelių svarbos, kurie būtų šios teorijos išimtys. Jei nuoseklios grąžos yra atsitiktinės, šių grąžų dispersija turėtų didėti proporcingai intervalui per kurį grąža yra matuojama. Taigi dviejų dienų grąžos dispersija turėtų būti dvigubai didesnė nei vienos dienos grąžos dispersija. Metinės grąžos dispersija turėtų būti 12 kartų didesnė už mėnesinės grąžos dispersiją ir taip toliau, bet tai ne visada gali būti tiesa. Pavyzdžiui, dviejų mėnesių grąžos dispersija atrodo šiek tiek didesnė nei du kartus už mėnesio grąžos dispersiją. Tai rodo, kad akcijų kainos turi tam tikrą trumpalaikį pagreitį, o kainų pokyčiai turi tendenciją keistis. Veiksmingai rinkai reikia protingų investuotojų, kurie susirenka informaciją ir bando iš jos pasipelnyti. Turi būti gaunamas tam tikras pelnas, kad būtų galima susigrąžinti su informacija susijusias išlaidas. Tačiau jei sąnaudos yra mažos, palyginti su bendra parduodamų vertybinių popierių rinkos verte, finansų rinka vis tiek gali būti beveik efektyvi.

Devintame dešimtmetyje prasidėjo diskusijos apie efektyvaus rinkos modelio suderinamumą su akcijų rinkomis, kurių kainos, dividendai ir pajamos turi laiko eilučių savybes. Didelį susirūpinimą kėlė tai, kad šios akcijos rodo pernelyg didelį nepastovumą, palyginti su tuo, kas būtų prognozuojama pagal efektyvų rinkos modelį. Aptiktos anomalijos gali būti laikomos nukrypimais nuo pagrindinės tiesos apie rinkos efektyvumą, tačiau jei didžioji dalis akcijų rinkos nepastovumo būtų nepaaiškinta, tai leistų suabejoti pagrindiniais visos efektyvios rinkos teorijos pagrindais. R. J. Shiller‘is 1981 metais paskelbtame straipsnyje metė iššūkį efektyvios rinkos hipotezei ir teigė, kad racionalūs investuotojai įkainotų akcijas pagal dabartinę tikėtinų būsimų dividendų vertę [4]. Tačiau jis nustatė (darant prielaidą, kad reali palūkanų norma yra pastovi), kad akcijų kainos svyruoja labiau, nei galima paaiškinti dividendų svyravimais. Šią, didesnę nei tikėtasi, dispersiją R. Shiller‘is priskyrė psichologiniams veiksniams, teigdamas, kad investuotojai neturi elgtis racionaliai. Ir būtent tai įrodo, kad akcijų rinka turi būti neefektyvi. Dabar pripažįstama, kad didelės akcijų kainos, palyginti su pajamomis, rodo mažesnę vėlesnę grąžą ir atvirkščiai. Tai reiškia priešingai nei efektyvios rinkos hipotezėje, kantrus investuotojas ilgainiui turėtų gebėti įveikti rinką lažindamasis prieš trumpalaikius rinkos pokyčius.

Artėjant prie XXI amžiaus, diskusijos nukrypo į žmogaus psichologijos modelių, susijusių su finansų rinkomis, kūrimą [5]. Būtent tada pradėta plėtoti elgsenos finansų teorija. Ši teorija teigia, kad investuotojų ir finansų specialistų sprendimus veikia emocijos, o tai turi poveikį rinkoms. Be to, psichologinis poveikis gali turėti įtakos visoms rinkos anomalijoms, ypač tokių kaip didelis akcijų kainų kilimas ar kritimas. Elgsenos finansų tikslas – padėti suprasti, kodėl žmonės pasirenka tam tikrus finansinius sprendimus ir kaip tie pasirinkimai gali paveikti rinkas. Iš tiesų, turime atsiriboti nuo prielaidos, kad finansų rinkos visada veikia gerai ir kad kainų pokyčiai visada atspindi tikrą informaciją. Įrodymai iš elgsenos finansų padeda suprasti įvairias rinkų anomalijas, kurių ištakos gali būti žmogiškosios klaidos.

R. J. Shiller‘is savo darbe 2003 metais nupasakoja visą kelią nuo efektyvios rinkos hipotezės ir tų laikų, kai plačiai buvo manoma, kad efektyvios rinkos hipotezė yra neabejotinai įrodyta, iki elgsenos finansų atsiradimo [6]. Būtent finansų ir kitų socialinių mokslų bendradarbiavimas leido pagilinti žinias apie finansų rinkas. Verta pabrėžti, kad vertinant elgsenos finansų poveikį, nesitikima atrasti metodą greitai ir patikimai uždirbti pinigus iš finansų rinkos neefektyvumo. Tačiau rinkos įvertinimas remiantis efektyvios rinkos hipoteze, gali lemti neteisingą įvykių, tokių kaip akcijų rinkų burbulai, interpretaciją. E. Fama pateikė savo įžvalgą apie elgsenos finansus ir kelias pagrindines kritikas. Pirmoji, kad sunku pasakyti ar aptiktos rinkos anomalijos buvo dėl investuotojų nepakankamos ar per daug drastiškos reakcijos. Antroji buvo tai, kad anomalijos išnyko laikui bėgant arba tobulėjant tyrimų metodikai. R. J. Shiller‘is įsitikinęs, kad pirmoji jo kritika atspindi neteisingą požiūrį į elgesio finansų psichologinį pagrindą. Nėra jokio psichologinio principo galinčio įvertinti, kad žmonės reaguoja per daug ar nepakankamai ir nenuostabu, kad finansinių anomalijų tyrimai tokio principo taip pat neatskleidžia. Antroji kritika yra pakankamai silpna. Atrodo, kad pati pagrindinė anomalija – per didelis nepastovumas – vargu ar buvo atmesta ir vien tai, kad anomalijos kartais išnyksta arba laikui bėgant keičiasi, nėra įrodymas, kad rinkos yra visiškai racionalios.

Nors ir teoriniai efektyvios rinkos modeliai turi savo vietą kaip idealaus pasaulio iliustracijos ar apibūdinimai, negalima jų laikyti kaip tiksliai apibūdinančias faktines rinkas. Dauguma ekonomistų pritaria, kad reikia atsiriboti nuo prielaidos, kad finansų rinkos visada veikia gerai ir kad kainų pokyčiai visada atspindi tikrą informaciją. Elgsenos finansų tyrimai padeda geriau suprasti pasaulinio akcijų rinkų bumą ar jų žlugimą, o iššūkis ekonomistams yra paversti šią realybę geresne jų modelių dalimi.

1.2. Arbitražas

Arbitražas – tai beveik tuo pačiu metu vykstantis identiškų ar panašių finansinių priemonių pirkimas ir pardavimas, siekiant pasipelnyti iš kainos skirtingose rinkose [7]. Ši strategija naudoja trumpalaikius kainų skirtumus dėl rinkos neveiksmingumo ir tuos neefektyvumus pašalina. Arbitražo galimybės kartais pasitaiko, tačiau gerai išsivysčiusiose rinkose su racionaliais pelno siekiančiais asmenims jos labai retos. Pelno maksimizavimo investuotojai bandys panaudoti arbitražo galimybes, kai tik jos atsiras. Paprastai manoma, kad dalis pusiausvyros tobuloje rinkoje apibrėžimo yra ta, kad nėra gryno arbitražo galimybių. Veiksmingoje rinkoje, jei kainos nukrypsta, arbitražas priverčia jas grįžti atgal. Investuotojas perka per mažai įkainotus vertybinius popierius (pakeldamas jų kainas), o parduoda pervertintus (sumažindamas jų kainas). Pelnas uždirbamas perkant pigiai, parduodant brangiai ir laukiant, kol kainos susilygins su pagrindais. Taigi arbitražinė prekyba dažnai vadinama konvergencijos prekyba.

Santykinės vertės arbitražo strategijos yra investavimo strategijos, kurios naudoja netinkamą to paties arba susijusio turto kainodarą finansų rinkose. Vienu metu perkami ir parduodami skirtingi vertybiniai popieriai – taip investuotojai gali gauti naudos iš dviejų vertybinių popierių santykinės vertės. Šioje strategijoje svarbi analizė, siekiant nustatyti, ar turtas yra nuvertintas, ar pervertintas, ir atitinkamai jį reikėtų pirkti ar parduoti. Santykinės vertės arbitražas taip pat vadinamas porų prekyba. Taip yra todėl, kad taikydamas santykinės vertės arbitražą investuotojas investuoja į porą susijusių vertybinių popierių ar akcijų. Idealiu atveju jie turės dideles koreliacijas.

Investuotojai, naudodamiesi savo žiniomis ir rinkos pokyčiais, bando nustatyti arbitražo galimybes, vadinamuoju rizikos arbitražu. Kitas arbitražo tipas – grynas arbitražas, kai bandoma pasipelnyti iš laikino rinkų neveiksmingumo, kai skirtingose rinkose arba tarp skirtingų finansinio turto skiriasi kainos. Taip vienu metu vykdant pirkimo ir pardavimo sandorius, galima užfiksuoti pelną, būdingą kainų skirtumams. Kainų neatitikimai dažniausiai egzistuoja labai trumpai, todėl reikalingas greitas sandorių įvykdymas. Dažniausiai kainų skirtumai labai maži ir norint gauti didelį pelną reikalingas nemažas kapitalas. Dėl šių priežasčių ši investavimo strategija nėra naudojama smulkių investuotojų ir jiems sunku pasipelnyti iš grynos arbitražinės prekybos.

Deja, tačiau arbitražas yra sudėtingesnis, nei atrodo. Prekybos išlaidos gali būti didelės, o kai kuriuos sandorius sunku atlikti, net ir nustačius per brangias akcijas ar vertybinius popierius. Kiek tai gali turėti naudos, kai jų nėra investuotojo portfelyje. Norima parduoti brangiai, bet kaip parduoti akcijas, kurių investuotojas neturi? Šioje vietoje atsiranda skolintų vertybinių popierių pardavimas. Investuotojai juos perka iš kito investuotojo portfelio ir tada parduoda. Tikimasi, kad kaina kris ir bus galima atpirkti akcijas pigiau, nei jos buvo parduotos.

Arbitražo teorija tapo pagrindinė priemonė analizuojant finansines rinkas ir finansinius sprendimus. Tai gali būti laikoma bet kurios pagrįstos finansinio turto kainų teorijos pagrindu. Arbitražo vertinimas leidžia atskleisti esamas nerizikingas arbitražo galimybes tais atvejais, kai reikia pasirinkti iš dviejų ar daugiau finansinio sprendimo alternatyvų. Vienas iš pagrindinių finansų ekonomikos principų – vertybinių popierių rinkose negali egzistuoti arbitražas. Jei jis egzistuotų, investuotojai galėtų pasiekti begalinį turtą. Ekonomikos teorija teigia, kad arbitražas yra investavimo galimybė, kuri tiesiogine prasme yra per gera, kad būtų tiesa. Tačiau vis dėlto arbitražo galimybės pasitaiko ir su tuo atsiranda klausimas: kokia yra optimali investavimo strategija, kai rinkos turi arbitražo galimybes [8]?

Tradiciškai mąstant, investuotojas iš karto pasinaudos arbitražo galimybe, kai ji atsiranda. Tačiau dažnai pasitaiko, kad investuotojai laukia geresnio laiko prekybai, kad būtų gautas maksimalus pelnas, arba įvertinus sandorių kaštus, ta arbitražo galimybė nebus pelninga. Todėl daug dėmesio skiriama analizuojant optimalią arbitražo strategiją dinamiškoje ekonomikoje, kai investuotojas konkuruoja su tais pačiais prekybininkais, naudojančiais tais pačiais kainų nukrypimais rinkoje. Būtina įvertinti fiksuotas ir proporcingas sandorių išlaidas atsižvelgus į sandorio dydį ir laiką [9].

1.2.1. Arbitražo kainodaros teorija

Arbitražo kainodaros teorijos (angl. *Arbitrage price theory*, APT) pagrindinė idėja pagrįsta tuo, kad turto grąžą galima numatyti naudojant tiesinį ryšį tarp tikėtinos turto grąžos ir daugelio makroekonominių kintamųjų, kurie fiksuoja riziką. APT daro prielaidą, kad rinkos neveiksmingumas kartais atsiranda, bet yra kontroliuojamas investuotojų, kurie nustato ir nedelsiant pašalina tokias galimybes, kai jos atsiranda. Tai naudinga priemonė siekiant nustatyti laikinus finansinio turto kainų neatitikimus. Ši teorija yra alternatyva kapitalo turto kainodaros modeliui (angl. *Capital Asset Pricing Model*, CAPM), kuris naudojamas teoriškai tinkamai turto grąžos normai nustatyti. Skirtingai nuo CAPM, nėra prielaidos, kad rinkos yra visiškai veiksmingos, o kaip tik, kad rinkos kartais neteisingai įvertina finansinio turto kainą ir tik po pasitaisymo grįžta į tikrąją vertę. Naudojat APT investuotojai tikisi pasinaudoti bet kokiais nukrypimais nuo tikrosios rinkos vertės. APT formulė, kuri lyginant su CAPM (kuri atsižvelgia tik į rinkos riziką), turi daug daugiau veiksnių ir norint nustatyti finansinio turto jautrumą makroekonominėms rizikoms, reikia atlikti daug tyrimų. APT veiksniai yra sisteminė rizika, kurios negalima sumažinti diversifikuojant investicijų portfelį. Patys patikimiausi makroekonominiai veiksniai: kainų prognozės, infliacija, BVP, pajamingumo kreivės pokyčiai, rinkos indeksai ar valiutų kursai.

Dėl savo paprastumo ir lankstumo APT tinka įvairiems praktiniams pritaikymams. Čia kritiškai apžvelgiamos trys taikymo sritys: turto paskirstymas, kapitalo kainos apskaičiavimas ir valdomų fondų vertinimas. Taip pat investuotojai naudojantys APT tikisi pasinaudoti bet kokiais nukrypimais nuo tikrosios rinkos vertės. Kadangi investuotojai daro prielaidą, kad modelis yra teisingas ir rado kainų nukrypimus, kurie leistų uždirbti iš šios arbitražo galimybės, su tuo ateina ir rizika ar ši prielaida yra tikrai teisinga [10].

1.2.2. Arbitražo ribų teorija

Daugumoje mokslinių straipsnių daroma prielaida, kad efektyvioje rinkoje nebus arbitražo galimybių, nes mažiau neracionalūs investuotojai egzistuoja su racionaliais. Rinkoje, kurioje veikia nevisiškai racionalūs ir racionalūs investuotojai, racionalieji neleis daryti įtakos kainoms, prekiaujant netinkamai įkainotais vertybiniais popieriais ar akcijomis taikant arbitražo procesą. Taigi efektyvioje rinkoje negali būti arbitražo galimybių, nes konkurencija pakoreguos kainas iki teisingų verčių. Nors ir efektyvios rinkos hipotezė pripažįsta, kad gali būti ir neracionalių investuotojų, tačiau viena iš silpniausių efektyvios rinkos hipotezės prielaidų, kad pačios rinkos yra racionalios ta prasme, kad nešališkai prognozuoja ateitį. Tokiu atveju, finansiniai burbulai neturėtų egzistuoti. Analogiškai ekonomistai daro prielaidą, kad neefektyvioje rinkoje atsiras arbitražo galimybės, kurios greitai neišnyksta. Jei rinkoje vyrauja neracionalūs investuotojai, tai nereiškia, kad kainos finansų rinkose visiškai atspindi visą turimą informaciją. Ryšys tarp efektyvių rinkų ir arbitražo galimybių egzistavimo atrodo intuityviai teisingas [11].

Labai dažnai investuotojai pritaria, kad tam tikras turtas yra pervertintas arba nuvertintas, tačiau neprekiauja atitinkamai. Pasitaiko nemažai kainų svyravimų ir tam tikro turto kainos neatitikimų lyginant su panašios natūros turtu, tačiau standartinės rinkos negali paaiškinti tokio esminio neteisingo kainų nustatymo. Panašiai, kai tam tikros užsienio valiutos per daugelį metų buvo pervertintos ar nuvertintos, tačiau investuotojai bijo per anksti prekiauti šia neteisinga kaina. Vienas iš galimų paaiškinimų, kad ne visi rinkos dalyviai yra racionalūs. Pasiremiant elgsenos finansų pagrindu, prekybininkai gali prekiauti remdamiesi investuotojų nuotaikomis ir nepaisyti svarbios informacijos. Nors yra nemažai ginčų tarp ekonomistų ar šie ribotai racionalūs prekiautojai iš tikrųjų daro įtaką kainoms. Efektyvių rinkų hipotezės šalininkai teigia, kad racionalūs investuotojai anuliuos bet kokią neteisingą kainodarą.

Pagal efektyvių rinkų hipotezės principą, arbitražo strategijos yra nerizikingos ir profesionalūs prekiautojai nori užimti neribotas pozicijas. Tačiau iš tikrųjų, bet koks arbitražas yra susijęs su tam tikra rizika, nes rinkos nėra baigtinės. Kai netinkamai įkainotas turtas nėra perteklinis, arbitražo strategija yra rizikinga, net jei racionalūs prekiautojai rūpinasi tik galutiniu arbitražo strategijos pelnu. Kitaip tariant, arbitražinė prekyba yra nerizikinga tik tuo atveju, jei turime netinkamai įkainoto turto pakaitalą. Papildoma rizika kyla dėl investuotojų neapibrėžtumo: kada kiti investuotojai pradės naudotis arbitražo galimybe. Ši rizika susijusi su neapibrėžtumu dėl kainos korekcijos laiko [12].

Pagal R. Thaler‘į ir N. Barberis, elgsenos finansai turi du pagrindinius blokus: arbitražo ribų teoriją ir psichologiją. Sukurta arbitražo ribų teorija teigia, kad kainos ilgą laiką gali išlikti nesubalansuotos dėl racionalių prekiautojų apribojimų. Ši teorija siekia paaiškinti, kad egzistuoja arbitražo galimybės, kurios greitai neišnyksta ir teigia, kad investuotojai gali neturėti naudos iš rinkos nukrypimų, kuriuos sukelia mažiau ar visai neracionalūs prekybininkai. Psichologija sugrupuoja visus galimus nukrypimus, kuriuos galima pamatyti finansų rinkose. Jie suprato, kad vien matematika negali paaiškinti žmonių sąveikos ir pradėjo maišyti psichologiją su ekonomika. Pelningos investavimo strategijos nebuvimas nereiškia, kad nėra neteisingos kainos. Kainos gali klysti nesukūrę pelno galimybių [13].

1.2.3. Nepertraukiamo laiko atsitiktinis ėjimas

Rinkos efektyvumas tapo labai populiaria tyrimų tema, kurie parodė, kad iš istorinių duomenų nuspėjami modeliai gali būti panaudoti sistemingai perteklinei grąžai generuoti. Statistiniu arbitražu vadinama strategija, kurioje naudojama vidutinė grąžos analizė ir siekiama gauti pelną investuojant į įvairius portfelius labai trumpam laikui ir uždirbant iš trumpalaikių kainų skirtumų. Skirtumas tarp dviejų portfelių turėtų būti pastovus ir atsižvelgiantis į sandorio išlaidas bei likvidumo riziką. Jis parodo neteisingos kainos nustatymo lygį. Statistinio arbitražo strategijos susideda iš ribinių sąlygų arba barjerų lygių optimizavimo, kuriems esant arba viršijus, užimama ilgoji arba trumpoji pozicija. Tikėtinas pelnas, kurį sukuria strategija tam tikru laikotarpiu, priklauso nuo barjerų lygių. Jie sąlygoja numatomą sandorių dažnumą ir pelną iš vieno sandorio. Plačios ribinės sąlygos sukuria didelį pelną vienam sandoriui, bet sumažina numatomų sandorių skaičių.

Investuotojai paprastai nustato arbitražo situacijas taikydami matematinio modeliavimo metodus. Dauguma statistinio arbitražo strategijų naudoja dažnius trumpalaikio pobūdžio prekybos (angl. *High-frequency trading*, HFT) algoritmus, kad panaudotų nedidelį neefektyvumą, kuris dažnai trunka kelias milisekundes. Reikalingos didelės abiejų akcijų pozicijos, norint gauti pakankamą pelną iš tokių nedidelių kainų pokyčių. Tai padidina statistinio arbitražo strategijų riziką.

Viena iš statistinio arbitražo strategijų – porų prekybos strategija, kai akcijos suskirstytos į poras pagal esminius arba rinkos panašumus. Dviejų portfelių skirtumas arba kainų skirtumas modeliuojamas naudojant nepertraukiamo laiko atsitiktinį ėjimą (angl. *Continuous-time random walk*, CTRW). Nepertraukiamas atsitiktinis ėjimas yra klasikinio atsitiktinio ėjimo modelio, pradėto E. Montroll‘o ir G. Weiss‘o 1965 metais, tęsinys. CTRW buvo pristatytas kaip teorinis metodas difuzijos procesui apibūdinti, kuriame klajojanti dalelė laukia atsitiktinio laiko tarp šuolių. Jis modeliuoja dalelės stebėjimo erdvės taške x momentu t tikimybės tankio funkcijos dinamiką. Panašūs procesai vyksta finansų rinkose, kur laikas tarp sandorių yra stochastinis ir kur prekyba šokteli mažomis kainomis. Šiais laikais CTRW sistema plačiai naudojama finansuose, siekiant prognozuoti ir analizuoti akcijų ir išvestinių finansinių priemonių kainų elgseną, apskaičiuojant tikimybės tankio funkciją p randant tam tikrą kainą tam tikru laiku t [14].

Aprašytos dvi pagrindinės CTRW formos, skirtos modeliuoti finansinio turto kainą: Markovo modelis (be atminties) ir ne Markovo modelis. CTRW Markovo lygtis apibūdina standartinę dinamiką finansinių priemonių kainai modeliuoti. Modelis gali būti vertinamas kaip geometrinio Brownian‘o judėjimo apibendrinimas, nes jis naudoja turto grąžos pasiskirstymą kaip unikalų veiksnį modeliuojant turto kainos svyravimą laikui bėgant. Yra žinoma, kad turto grąža yra leptokurtinė, o nepriklausomos ir vienodai paskirstytos nuosavybės grąžos prielaida neįvertina realios ekstremalių įvykių tikimybės. Ne Markovo CTRW yra Markovo CTRW plėtinys, kuriame laikas tarp operacijų, vadinamas laukimo laiku, ir turto grąža yra modeliuojami stochastiškai. Laukimo laiko pasiskirstymas atspindi rinkos likvidumą. Sandoris labai nelikvidžioje rinkoje, t. y. kai laukimo laikas yra neįprastai ilgas, virsta staigiais kainos pokyčiais, o sandoris atliktas labai likvidžiu laikotarpiu turi labai mažai įtakos kainai. Kadangi laukimo laiko pasiskirstymas perteikia svarbią informaciją apie kainų formavimąsi, galima tikėtis, kad ne Markovo metodas pranoks atminties neturintį modelį [15].

1.2.4. Dažnūs trumpalaikio pobūdžio prekybos sandoriai

Technologijų pažanga per pastaruosius du dešimtmečius pakeitė rinkos veikimą. Akcijų rinkose nebedominuoja žmonės, esantys biržos biure ir vykdantys sandorius. Dabar daugelis įmonių ar privačių investuotojų taiko kompiuterinius algoritmus, kurie gauna elektroninius duomenis, juos analizuoja, skelbia kainas ir inicijuoja sandorius. Investuotojai, kurie naudoja kompiuterius prekybos procesui automatizuoti, vadinami algoritminiais prekiautojais. Dažna trumpalaikio pobūdžio prekyba (angl. *High-frequency trading*, HFT) yra algoritminių prekybininkų prekybos būdas finansų rinkose, kai naudojamos kompiuterinės programos, kad per kelias sekundes būtų galima atlikti didelius pavedimų skaičius. Norint pasinaudoti susidariusiu arbitražo įvykiu, tam reikia atlikti pirkimo ir pardavimo sandorius lygiai tą pačią akimirką. Būtent šiam tikslui pasiekti naudojama HFT. Paprastai greičiausią vykdymo greitį turintys prekiautojai yra pelningesni nei prekiautojai, kurių vykdymo greitis lėtesnis. Šiandien HFT sudaro didelę akcijų rinkos veiklos dalį.

Daugelis finansinių priemonių yra ekonomiškai susijusios viena su kita arba ta pati finansinė priemonė yra prekiaujama skirtingose biržose. Vieno turto kainai išėjus iš rikiuotės palyginus su kitu turtu, turinčių tą patį ekonominį santykį, investuotojas gali pasinaudoti arbitražo galimybe ir užsidirbti pinigų parduodamas pigesnį turtą ir pirkdamas brangesnį. Jei šis sandoris įvyksta, tai vyksta rinkos sureguliavimas ir pigesnio turto kaina brangsta, o brangesnio – pinga. Kadangi strategija tokia paprasta, tokios galimybės greitai išnyksta. Taip pat, norint sumažinti šios strategijos riziką, pirkimas ir pardavimas turi vykti tuo pačiu metu. Dėl šių priežasčių investuotojai turi naudoti EHF technologiją. Investuotojai pasirinkdami arbitražo strategiją lenktyniauja vienas prieš kitą, kad pasinaudotų pelningais prekybos sandoriais, kol jie neišnyko [16].

Nemažai akademinių darbų analizuoja EHF poveikį finansų rinkoms ir turto kainai, siekdami ištirti algoritminių prekybininkų naudojamas strategijas, jų pelningumą ir ryšį su bendros rinkos ypatybėmis, įskaitant likvidumą, kainų nustatymą ir kintamumą. Priklausomai nuo modelio HFT gali pagerinti arba pabloginti rinkos charakteristikas. J. Cvitanic‘as kartu su A. Kirilenko 2010 metais sukūrė pirmąjį teorinį modelį skirta išsiaiškinti kaip HFT veikia rinkos sąlygas [17]. Pagrindinė jų išvada, kad su HFT prekyba sandorių kainos skirsis. Sandorių kainų skirstinys bus su plonesnėmis uodegomis ir daugiau reikšmių aplink vidurkį. HFT didina rinkos likvidumą, akcijų kainas ir mažina sandorių išlaidas.

Laikui bėgant HFT algoritmai tapo sudėtingesni, jų skaičiavimo galia didėjo ir struktūros sudėtingėjo. Šiuo metu algoritmai jau yra pagrindiniai įvairių finansinių programų veikėjai, kurie pasirodė esą veiksmingesni už jų žmogiškuosius analogus, ir tapo visai suprantamu įrankiu finansų rinkose. Naudojant šiuos algoritmus, galima maksimaliai panaudoti susidariusį arbitražą ir galimai pašalinti rinkos neveiksmingumą.

1.3. Kriptovaliutos

Kriptovaliutos – skaitmeninė valiuta, sukurta naudojant blokų grandinės (angl. *blockchain*) technologiją, kuri leidžia atlikti mokėjimus ir kitas operacijas be centralizuoto prižiūrėtojo. Tai reiškia, kad kiekvieno sandorio duomenys nėra renkama jokio centrinio subjekto, o jie perduodami visiems dalyviams. Kriptovaliutos naudoja įvairias kasybos technologijas, atsižvelgiant į jų konkrečius reikalavimus, o jų gavyba atliekama sprendžiant sudėtingus kriptografinius maišos galvosūkius, siekiant patikrinti operacijų blokus, kurie atnaujinami decentralizuotoje blokų grandinės knygoje. Kriptovaliuta remiasi šifravimo algoritmų sprendimo teorija, kad būtų sukurtos unikalios maišos, kurių skaičius yra baigtinis [18].

Bitkoinas labiausiai paplitusi ir žinomiausia pasaulyje kriptovaliuta, sukurta 2008 metais. Prieš tai buvo daug publikuotų straipsnių apie tarpusavio valiutos sistemą, tačiau nei viena nebuvo įdiegta. Bitkoinas naudojamas ne tik kaip valiuta, bet ir investavimo tikslais ir kartais vertinama kaip spekuliacinė prekė. 2023 metų kovo mėnesio duomenimis yra išgauta ir apyvartoje apie 19 milijonų bitkoinų ir liko iškasti apie 2 mln., o vieno bitkoino vertė apie 27 327 EUR[1].

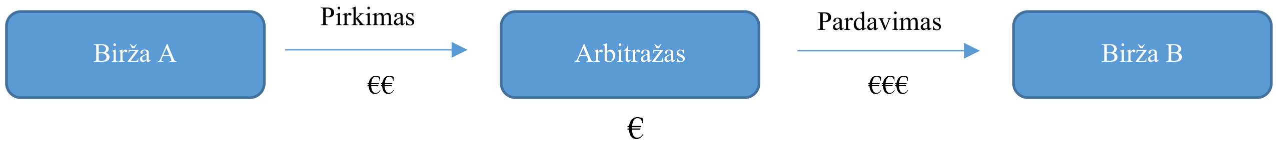
Kriptovaliutų rinka nuo pat jų atsiradimo labai pasikeitė. Dabar daugybė investuotojų prekiauja įvairiausiomis kriptovaliutomis įvairiose biržose pasauliniu mastu. Daug dėmesio skiriama dramatiškiems kainų svyravimams, apimčiai, bet ir vis dažniau kalbama apie kriptovaliutų rinkos efektyvumą ir arbitražo galimybės tose rinkose. Kadangi kriptovaliutų rinka vis dar yra patraukli investuotojams, kurie pirmenybę teikia rizikingoms ir trumpalaikėms strategijoms, tai arbitražo „gaudymas“ yra viena iš dažniausių strategijų prekiaujant šioje rinkoje.

1.3.1. Arbitražo galimybės kriptovaliutos rinkoje

Kriptovaliutų rinka yra labai unikali norint nagrinėti arbitražo galimybes. Yra daug biržų, kurios yra nepriklausomos ir veikia lygiagrečiai įvairiose šalyse. Atskirai vertinant, dauguma šių biržų veikia kaip tradicinės akcijų biržos, kuriose prekybininkai vykdo pirkimo ir pardavimo sandorius, o birža veda centralizuotą pavedimų knygą. Tačiau priešingai nei tradicinėse, reguliuojamose akcijų

[1] Ayushi Abrol. How Many Bitcoins Are There And How Many Are Left To Mine (2023). Prieiga per internetą: https://www.blockchain-council.org/cryptocurrency/how-many-bitcoins-are-left/

rinkose, kriptovaliutų rinka neturi jokių nuostatų, užtikrinančių, kad investuotojai gautų geriausią kainą atlikdami sandorius. Tokių mechanizmų nebuvimas padidina investuotojų, galinčių prekiauti įvairiose rinkose, vaidmenį.



1 pav. Arbitražo prekyba tarp skirtingų biržų

Nagrinėjant kainų formavimąsi kriptovaliutų rinkose matoma didelių ir pasikartojančių kainų nuokrypių įvairiose biržose, kurios dažnai išlieka kelias valandas, kai kuriais atvejais ir savaites. Taip pat kainų nuokrypiai įvairiose šalyse (ar regionuose) yra daug didesni nei toje pačioje šalyje. Dideli nukrypimai egzistuoja net tarp šalių, kuriose mainai labiausiai likvidūs, pavyzdžiui, JAV, Japonija ir kiek mažesniu mastu, Europa. Skaičiuojama, kad vidutinis dienos kainų santykis tarp JAV ir Pietų Korėjos nuo 2017 m. gruodžio mėn. iki 2018 m. vasario pradžios buvo didesnis nei 15 % ir net keletą dienų pasiekė 40 %. Tarp JAV ir Europos – apie 3 %, o tarp JAV ir Japonijos – 10 %. Kasdien galimo arbitražo pelno suma dažnai siekdavo daugiau nei 75 mln. Priešingai kainų nuokrypiai tarp biržų toje pačioje šalyje paprastai neviršija 1 %. Arbitražinis pelnas gaunamas perkant bitkoinus regionuose, kuriuose bitkoinų kainos yra žemos, tarkime, JAV, ir parduodant regionuose, kuriuose bitkoinų kainos yra didelės, pavyzdžiui, Korėjoje. Šiai prekybai reikalingas kapitalas JAV, o Korėjoje gaunamas pelnas. Jei šio pelno nepavyks sklandžiai grąžinti iš Korėjos į JAV, arbitražo kapitalas gali „užstrigti" šalyje. Be to, kainų nukrypimai įvairiose šalyse yra labai asimetriški. Šalyse už JAV ir Europos ribų kriptovaliutomis paprastai prekiaujama brangiau palyginti su JAV ir beveik niekada ne mažesne nei JAV kaina. Įvairiose šalyse pastebimi dideli kainų skirtumai. Arbitražo skirtumai atsiranda ir išnyksta tuo pačiu metu įvairiose šalyse. Žinoma, kainų skirtumai galėtų išlikti tik tuo atveju, jei kapitalo rinkos yra suskaidytos arba kapitalas keliauja lėtai tarp rinkų. Kapitalo srautų kontrolė sumažina efektyvų arbitražo naudojimą. Analizės rodo, kad kainų nukrypimai įvyksta ypač greito kriptovaliutų kainų augimo laikotarpiais. Kadangi kainos stipriai reaguoja į užsakymų srautus, šie laikotarpiai taip pat sutampa su laikais, kai pasaulyje ypač stipriai išauga kriptovaliutų paklausa.

Arbitražiniai skirtumai tarp kriptovaliutų yra mažesni (tarkime, bitkoinas į eterį arba dašą) dėl lygiai tokių pačių pasikeitimų, kai matome didelius ir nuolatinius arbitražo skirtumus dėl dekretinės valiutos. Pavyzdžiui, tuo pačiu laikotarpiu, kai JAV ir Korėjos dolerio ir bitkoino kainos skirtumas buvo daugiau nei 20 %, eteris ir bitkoino kainos skirtumas buvo vidutiniškai 3 %. Be to, eterio ir dekretinių valiutų kaina rodo tokį pat didelį arbitražo pasiskirstymą tarp biržų kaip ir bitkoinų rinka. Kadangi pagrindinis skirtumas tarp dekretinių ir kriptovaliutų yra nesugebėjimas užtikrinti kapitalo kontrolės, tai tokia kontrolė prisideda prie didelio arbitražo skirtumo tarp regionų.

Nors ir teoriškai atrodo galima lengvai pasinaudoti arbitražo galimybe, atsiradusia tarp skirtingų regionų rinkų, tačiau praktiškai tai nėra taip paprasta įgyvendinti. Situacija, kai kaina Korėjoje yra didesnė už kainą JAV, būtų nerizikingas arbitražas. Galima nusipirkti bitkoinų JAV, parduoti juos už Korėjos voną Korėjoje, iškeisti vonus į dolerius ir tada pervesti dolerius atgal į JAV. Deja, bet praktikoje kriptovaliutų operaciją užregistruoti bitkoinų blokų grandinėje užtrunka apie valandą. Be to, keitimas paprastai trunka nuo kelių valandų iki kelių dienų, kol pervedama dekretine valiuta. Per tą laiką arbitražo galimybė gali išnykti. Dėl to, norėdamas užfiksuoti arbitražo galimybę, investuotojas turi tuo pačiu metu nusipirkti kriptovaliutą biržoje, kur kaina yra žema, ir parduoti jį biržoje, kurioje kaina yra aukšta.

Galimos dvi investuotojo strategijos. Pirma, nustatyti neigiamą kriptovaliutos poziciją prekiaujant su marža, kuri yra panaši į skolintų vertybinių popierių pardavimą, tačiau neleidžia fiziškai atsiskaityti. Prekybos marža reiškia pinigų skolinimąsi iš maklerio įmonės sandoriams atlikti. Šiuo atveju arbitražas gali pasipelnyti iš prekybos tik tuo atveju, jei kainos abiejose biržose ateityje susilygins. Antra strategija yra išlaikyti teigiamą kriptovaliutų balansą abiejose biržose ir tuo pačiu metu pirkti bei parduoti bitkoinus abiejose biržose, kai vienos biržos kaina skiriasi nuo kitos. Natūralu, kad kriptovaliutų likutis sumažės biržoje, kur kriptovaliutų kaina yra aukšta, o biržoje, kur kaina žema, padidės. Norėdami jį papildyti, investuotojai turi perkelti kriptovaliutą iš biržos su dideliu likučiu į tą, kurioje mažas likutis, ir atvirkščiai. Idealiu atveju norėtųsi akimirksniu perkelti prekybos pelną iš biržų, kuriose pardavė kriptovaliutą, į tas, kuriose kriptovaliuta yra pigi, ir tada pakartoti sandorį. Arbitražas tampa efektyvesnis, kuo greičiau arbitražas gali perkelti kapitalą iš vienos sąskaitos į kitą, tačiau kai kuriose biržose šis perkėlimas gali užtrukti iki kelių dienų. Reikėtų nepamiršti ir sandorių mokesčių, tačiau jų dydžiai yra per maži užkirsti kelią investuotojui įgyvendinti pirmiau minėtas strategijas [19].

Kriptovaliutomis prekiaujama dešimtyse įvairiausių internetinių platformų, kurios vadinamos biržomis ir tai daroma skirtingomis pirkimo (angl. *bid*) ir pardavimo (angl. *ask*) kainomis. Ši savybė suteikia arbitražo galimybę sumažinant ilgųjų pozicijų kainą ir maksimaliai padidinant trumpųjų pozicijų kainą įvairiose biržose. Kadangi skolintų vertybinių popierių pardavimas biržose nėra įmanomas, ilgoji pozicija visada turi būti įvykdyta anksčiau. Dar visai neseniai šie stiprūs arbitražai buvo įmanomi tik teoriškai dėl operacijų konfigūracijos blokų grandinių sistemoje ir dėl laiko, reikalingo perversti dekretinę valiutą iš investuotojo banko sąskaitos į jo skaitmeninę sąskaitą biržoje. Tačiau šiuo metu galimi momentiniai sandoriai ir pervedimai. Norint pasiekti pelningą arbitražą prie ilgųjų ir trumpųjų pozicijų, turėtų būti pridėti ir operacijų mokesčiai. Galima parodyti, kad taikydami klasikinius statistikos metodus, kriptovaliutų grąža, skaičiuojama kasdien, atsižvelgiant į skirtingas kainas pagrindinėse biržose, iš esmės yra visiškai koreliuojama ir kad visos sistemos rizika (kintamumas) dažniausiai paaiškinama atsitiktinumu [20].

Šiame darbe modeliuojamas laikas tarp dviejų arbitražų, kai arbitražo įvykis atsiranda prekiaujant su kitomis kriptovaliutų biržomis. Tokia strategija vadiname kelių platformų prekybos strategija (angl. *cross-platform trading strategy*). Apskritai ši strategija gali būti įgyvendinama atliekant tuo pačiu metu sandorius skirtingose biržose arba su labai nedideliu laiko skirtumu. Akivaizdu, kad kuo didesnis laiko skirtumas tarp sandorių, tuo didesnė kainų pokyčių rizika. Tačiau, norint vykdyti sandorius tuo pačiu laiku, lėšos turi būti tose biržose, kur atsiranda arbitražo galimybė. Tai būtina, nes lėšų disponavimas gali užtrukti net keletą dienų. Jei investuotojas negali ar nenori laikyti tam tikrą kiekį lėšų keliose biržose tarp kurių atlieka sandorius, galimai dėl alternatyviųjų sąnaudų išaugimo arba dėl mažo biržų patikimumo (pavyzdžiui „FTX“ bankrotas 2022 metų lapkritį), tai investuotojas turi pervesti lėšas tarp dviejų biržų, kai atsiranda arbitražo galimybė. Šio pervedimo trukmė priklauso nuo blokų grandinės patvirtinimo greičio ir sukuria nedidelį laiko skirtumą tarp arbitražo operacijų dėl kurio susiduriama su kainos pokyčių rizika. Kitas svarbus dalykas – prekiauti su kuo daugiau skirtingų kriptovaliutų biržų, kad būtų galima rasti didžiausią siūlomą kainą (angl. *bid*) už kurią pirkėjas žada sumokėti ir atlikti mainus su birža, kurioje yra mažiausia kaina (angl. *ask*) už kurią pardavėjas žada parduoti. Skirtumas tarp šių dviejų sandorių yra didžiausia įmanoma arbitražo galimybė tuo metu. Norint išgauti kuo didžiausią pelną šie sandoriai turi įvykti beveik tuo pačiu metu, kadangi arbitražo galimybė pasirodo labai trumpam laikotarpiui. Taigi investuotojai ieškantis arbitražo galimybių labai dažnai pasitelkia robotus ir automatizuotus algoritmus veikiančius nuolatos.

Kriptovaliutų rinka nuo pat jos atsiradimo po truputi iškovojo vis didesnę rinkos kapitalizacijos dalį, tapo brandesnė ir konkurencingesnė, tačiau 2022 metų lapkritį įvykęs trečios pagal dydį kriptovaliutos biržos „FTX“ bankrotas įnešė daug nestabilumo ir investuotojų nepasitikėjimo kriptovaliutomis rinkomis. Pavyzdžiui, įmonės „Grayscale Bitcoin Trust“ (GBTC), kurio rinkos kapitalizacija yra maždaug 10,5 milijardo JAV dolerių ir kuriai priklauso apie 3,5 % pasaulio bitkoino, akcijos vertė krito per 39 %. Kainos kritimas atsirado dėl to, kad išsigandę investuotojai bandė atsiimti savo lėšas ir sukūrė arbitražo galimybes kriptovaliutų rinkoje. Taigi šis „FTX“ biržos žlugimas lėmė dideles arbitražo galimybes, kurios išliko mažiausiai kelias savaites.

Šis „FTX“ bankrotas galėjo būti nulemtas to, kad pastaraisiais metais pastebimi sumažėję kriptovaliutų kainų nukrypimai rinkoje. Padidėjusi konkurencija tarp biržų arba rinkos susiskaidymas galėjo sumažinti prekybos sąnaudas ir pagerinti investuotojų delsą. Panaudoti arbitražo galimybes tapo pigiau ir mažiau rizikinga. Daugiau investuotojų gali nuspręsti pasinaudoti arbitražo galimybėmis ir taip pasiekti efektyvesnę kainodarą. Taip pat profesionalių investuotojų skaičiaus išaugimas rinkoje ir didėjantis institucinių investuotojų įsitraukimas. Taigi turime vis daugiau veiksnių rinkoje, kurie lemia efektyvesnę rinką ir rečiau pasitaikančius arba mažiau pelningesnius arbitražo įvykius [21].

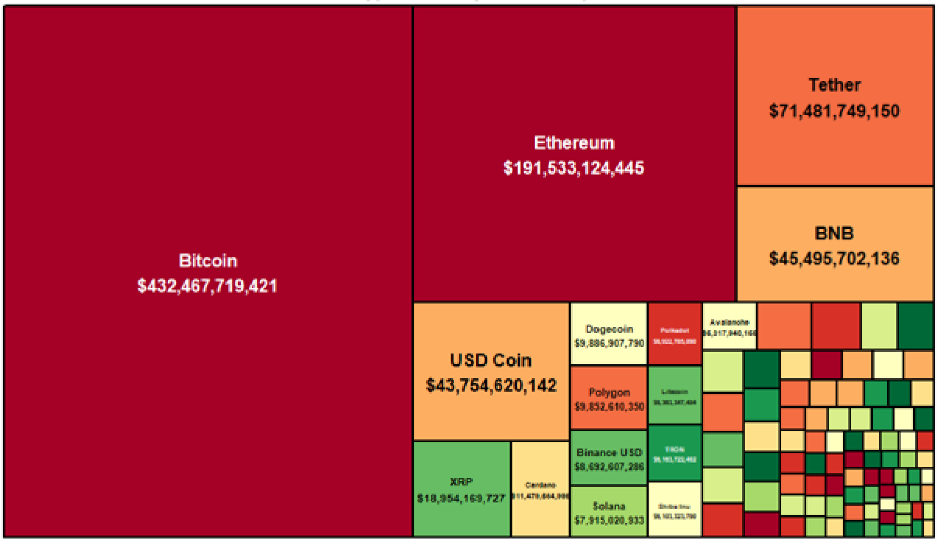
Paskutinieji metai kriptovaliutų ekosistemai buvo ypač nesėkmingi: vos per vienerius metus kriptovaliutos prarado apie 2 trilijonus JAV dolerių rinkos vertės ir 2022 metų lapkritį įvykęs „FTX“ grupės žlugimas. Šis kriptovaliutų biržos ir rizikos draudimo fondo žlugimas laikomas vienu iš didžiausių finansinių nesėkmių nuo 2008 metų pasaulinės finansų krizės, sukėlęs labai daug sąmyšio rinkoje ir paskatinęs kalbas apie koordinuotą kriptovaliutų reguliavimą. Daugelio nuomone „FTX“ nesėkmė buvo klasikinė likvidumo krizė, kuri peraugo į mokumo krizę. Panašiai kaip su „Lehmann Brothers“ 2008 metais. Kai finansų tarpininkas negali gauti pakankamai likvidumo, kad galėtų tęsti savo veiklą, tai dažnai tampa mokumo krize, kuri gali sukelti didesnį nepasitikėjimo praradimą tame sektoriuje ar galbūt finansinę krizę, kuri stebima kriptovaliutų rinkoje 2022 metais. Nepaisant „FTX“ pastangų užtikrinti rinkos dalyvių pasitikėjimą ir bandyti atstatyti savo mokumą parduodant įmonę konkurentams „Binance“, teko skelbti bankrotą ir prisiimti daugybę nemokumo ieškinių visame pasaulyje.

Bikoinas, kriptovaliutos ir decentralizuoti finansai buvo pristatyti kaip alternatyva galinti išvengti tradicinių finansų rinkų nesėkmių, kurios baigiasi finansinėmis krizėmis. Dėl skaidrios technologinės sistemos, kriptovaliuta buvo tiksliai sukurta panaikinant tradicinės finansų rinkos problemas: interesų konfliktų iš daugelio galingų tarpininkų, informacijos asimetrijos, svarbiausių funkcijų ir rinkų centralizavimas, daugybės prastai informuotų ir pernelyg entuziastingų rinkos dalyvių. Vis dėlto vis dažniau pradedama teigti, kad nepaisant kriptovaliutų rinkos pradinių ketinimų, per mažiau nei 15 metų ši rinka išsivystė taip, kad pastebimos visos klasikinės rinkos nesėkmes ir išoriniai padariniai. Norint, kad kriptovaliutų ekosistema tinkamai veiktų ateityje, reikia reguliavimo ir priežiūros sistemų, kurias turime tradicinėse rinkose [22].

1.3.2. Kriptovaliutų rinkos dinamika ir kapitalizacija

Rinkos kapitalizacija yra bendra visų įmonės akcijų vertė arba, kriptovaliutų atveju, visų iškastų monetų vertė, apskaičiuojama padauginus bendrą kriptovaliutų skaičių iš jų kainos. Įvertinti vien tik kriptovaliutos ar kitų finansinių rūšių kainos nepakanka ir būtina atsižvelgti į rinkos kapitalizacijos vertę, kuri gali įvertinti apytikslį turto stabilumą. Kuo kriptovaliuta turi didesnę rinkos kapitalizaciją, tuo ji bus stabilesnė ir nebus tokia jautri rinkos pokyčiams: nepatirs staigių nuostolių ar didelių pelnų. Nepaisant didėjančios kriptovaliutų svarbos finansų pasaulyje, vis dar trūksta išsamios visos rinkos analizės, kadangi dauguma tyrimų sutelktos į vieną iš kriptovaliutų.

Kriptovaliutų rinka 2017 metų birželį viršijo 100 milijardų JAV dolerių rinkos kapitalizacijos barjerą, o 2022 metų pabaigoje pasaulinės kriptovaliutų rinkos kapitalizacija lygi 829 milijardų JAV dolerių. Nors ir tai net aštuonis kartus daugiau nei prieš penkerius metus, tačiau lyginus su 2022 metų pradžia kapitalizacija sumažėjo net 64 % [23]. Kriptovaliutos rinkos kapitalizacijos augimas yra tikrai įspūdingas, tačiau dabartinė kapitalizacijos vertė lyginant su pasaulinės rinkos kapitalizacija yra ypač maža. Akcijų ir obligacijų rinkos kapitalizacija 2022 metų gruodžio 31 dieną lygi 136 trilijonų JAV dolerių[2], o visų privačių rinkų – 11,7 trilijonų JAV dolerių[3]. Taigi akcijų ir obligacijų rinkos kapitalizacija yra daugiau nei 164 kartus didesnė lyginant su kriptovaliutos rinka.



2 pav. Kriptovaliutos rinkos kapitalizacijos vertės pasiskirstymas

Bitkoinas atsirado 2009 metais, o antroji kriptovaliuta tik 2011 metais, todėl nestebina, kad bitkoinas tapo garsiausia ir labiausiai dominuojanti kriptovaliuta iki šių dienų. Šiuo metu bitkoinas sudaro daugiau nei 50 % visos kriptovaliutos rinkos kapitalizacijos. Tačiau naujausi tyrimai rodo, kad bitkoinas pradėjo perleisti didelę rinkos dalį kitoms kriptovaliutomis ir kitos kriptovaliutos kaip

[2] MSCI (2022). Prieiga per internetą :https://www.mfs.com/content/dam/mfs-enterprise/mfscom/sales-tools/sales-ideas/mfsp_fly_558963.pdf
[3] McKinsey Global Private Markets Review 2023. Prieiga per internetą: https://www.mckinsey.com/industries/private-equity-and-principal-investors/our-insights/mckinseys-private-markets-annual-review

eteris ir teteris išsikovoja vis didesnę rinkos kapitalizacijos dalį. Kai 2018 metais bitkoinas žengė pirmuosius žingsnius į finansų pasaulį, akcijų rinkos kapitalizacija pasaulyje sudarė 35 trilijonus JAV dolerius. Palyginus šį skaičių su dabartine kriptovaliutų rinkos kapitalizacija puikiai suprantame, kad vis dėlto bendrame rinkos kapitalizacijos kontekste kriptovaliutos sudaro labai mažą dalį. Atsiradęs bitkoinas tapo dideliu žaidėju tarp investuotojų, kurie norėjo išbandyti naujus investavimo būdus, nepaisant rizikos.

Nemažai akademinių darbų patvirtina silpną kriptovaliutos rinkos dinamiką ir jos ryšius su akcijų rinka bei kitais išoriniais faktoriais, o tai reiškia reikia dėti daugiau pastangų nustatyti galimą kriptovaliutų ryšį su realiu ekonominiu scenarijumi. Tai būtų naudina investuotojams, aptariant bitkoino kaip portfelio diversifikatoriaus vaidmenį ir rekuliacijos formuotojams, nes atsiskleistų daugiau informacijos apie kriptovaliutų įtaką ir poveikį tradicinėms finansų rinkoms. Vienas iš esminių skirtumų tarp akcijų ir kriptovaliutų rinkų – kainos nepastovumas. Kintamumas (angl. *volatility*), kuris nusako kiek ir kaip greitai kainos keičiasi tam tikrame laiko intervale, kriptovaliutų rinkose yra daug didesnis nei tradicinėse akcijų rinkose. Pastebėta, kad bitkoino kainų kintamumas yra 30 kartų didesnis nei pagrindinių valiutų, nagrinėjant nuo 2014 metų iki 2017 metų laikotarpį. Kadangi šis rodiklis yra vienas iš pagrindinių veiksnių, turinčių įtakos investuotojo sprendimams, tai gali būti pagrindinė priežastis lemianti sprendimą pereiti nuo akcijų prie kriptovaliutų rinkos. Palyginimui, pastaraisiais metais akcijų rinka siūlo daug žemesnį pelningumo lygį negu bitkoinas. Spartus bitkoino kainų augimas nustebino net optimistiškiausius rinkos stebėtojus. Vienas doleris investuotas į bitkoiną 2010 metų spalio 27 dieną išaugo iki 103 453 USD iki 2018 metų sausio 31 dienos, o ta pati investicija į S&P500 akcijų indeksą per tą patį laikotarpį išaugo iki 2,65 USD. Tokį didelį skirtumą lėmė didelis bitkoino kintamumas.

A. Mai atliktoje analizėje nagrinėjant laikotarpį nuo 2013 iki 2019 metų pastebėjo teigiamą ryšį tarp kriptovaliutos ir akcijų rinkos kapitalizacijos. Tiksliau, kai akcijų rinkos kapitalizacija patiria vieno vieneto prieaugį, tai kriptovaliutos rinkos kapitalizacija išauga per 9,64e07. Taigi investuotojai turintys didesnę rizikos toleranciją nepereina iš akcijų į kriptovaliutų rinką, tačiau jie išlaiko savo pozicijas akcijų rinkoje arba toliau investuoja abiejose rinkose. Investicija į kriptovaliutos rinką leidžia apdrausti investicijų portfelį ir labiau jį diversifikuoti. Šie pastebėjimai gali būti atsakymas, kodėl nors kriptovaliutos rinkos kapitalizacija išaugo ypač sparčiai nuo jos atsiradimo, tačiau vis dar sudaro ypač mažą dalį viso pasaulio rinkos kapitalizacijos dalį [24].

1.4. Laukimo laiko modeliavimas

Laukimo laiko, kol įvyks tam tikras įvykis, modeliavimas yra dažnas uždavinys įvairiose srityse. Žinant laukimo laiko pasiskirstymą galima rasti tikimybę kiek laiko mums reikia laukti tam tikroje būsenoje prieš pereinant į kitą. Teorijoje eksponentinis skirstinys nusako laiką tarp dviejų puasono procesų būsenų, kai įvykiai vyksta pastoviai ir vienodu dažniu, bet taip pat dažnai tam naudojamas gama skirstinys. Ne vienas darbas nagrinėja klientų laukimą iki kol jis bus aptarnautas arba keleivių laukimą iki viešojo transporto atvykimo. Viename iš darbų sukurtas matematinis modelis, remiantis Pekine surinktais duomenimis, kuris skirtas apskaičiuoti vidutinį keleivių laukimo laiką, persėdant iš geležinkelio tranzito į autobusą. Parodyta, kad lognormalaus ir gamos skirstiniai geriausiai tinka tiesioginio ir netiesioginio persėdimo keleiviams [25].

Finansų rinkose ne tik kainos gali būti modeliuojamos kaip atsitiktiniai dydžiai, bet ir laukimo laikas, kai laikas tarp dviejų iš eilės operacijų skiriasi stochastiškai. Laukimo laiko pasiskirstymas (angl. *The waiting time distribution*, WTD) yra įprastas įrankis diskretiesiems stochastiniems procesams analizuoti ir matuoja delsos laiko pasiskirstymą tarp paskesnių peršokimo įvykių („šuolių“) atskirame stochastiniame procese. Ekomonikoje dažniausiai WTD naudojamas akcijos rinkų svyravimams analizuoti. Tačiau laukimo laiko pasiskirstymas taip pat gali būti naudojamas kaip kiekybinis rinkos efektyvumo matavimo metodas ir ieškant arbitražo galimybių mums svarbu pasinaudoti neefektyvia rinkos būkle. Šis metodas gali būti taikomas likvidžioms finansų rinkoms ir turi aiškių pasekmių investuotojams, reguliavimo institucijoms ir politikos formuotojams. Investuotojai gali pasinaudoti šia priemone priimdami investicinius sprendimus esant veiksmingai rinkos būklei, o tie, kurie tikisi pagauti arbitražo galimybes, gali naudoti šį rodiklį siekdami pasinaudoti neefektyvia rinkos būkle [26].

S. Osmekhin‘as ir F. Deleze sako darbe analizuoja ryšį tarp laukimo laiko skirstinio ir rinkos efektyvumo, kai statistinis arbitražas optimizuojamas tiek Markovo, tiek ne Markovo nepertraukiamo laiko atsitiktinio ėjimo formoms. Finansuose pakankamai plačiai naudojamas nepertraukiamo laiko atsitiktinis ėjimas prognozuojant ir analizuojant akcijų kainų elgseną, apskaičiuojant tam tikros kainos tam tikru laiku *t* tikimybės tankio funkciją. Pritaikant Markovo ir ne Markovo prekybos strategiją buvo rasta, kad laukimo laiko eksponentinio skirstinio parametras yra geras rinkos efektyvumo rodiklis [14]. Atrodo įprasta manyti, kad sandoriai finansų rinkose vyksta pagal Puasono procesą, o laukimo laikas, t.y. laiko intervalas tarp sandorių, seka eksponentinį pasiskirstymą. Tačiau naujausi empiriniai tyrimai pastebėjo, kad laukimo laiko pasiskirstymas skirtingose rinkose nėra eksponentinis. Todėl, norint kiekybiškai ir sistemingai suprasti rinkos elgesį, svarbu patikrinti eksponentinės pasiskirstymo hipotezės pagrįstumą [27].

Galima rasti pakankamai daug akademinių tyrimų apie tam tikro įvykio numatymo metodus. Ypač populiari tema po 2008 metų ekonominės krizės buvo rasti gerą būdą išprognozuoti sekančią ekonominę krizę randant kokie kintamieji daro tam didžiausią įtaką. Finansinių kintamųjų prognozavimas, naudojant išplėstinius modeliavimo metodus, buvo vienas iš plačiausiai tyrinėtų akademinės literatūros temų. Arbitražo įvykis akcijų ar kriptovaliutų rinkose gali būti nagrinėjamas panašiai kaip akcijų rinkos krizės įvykiai. Viename iš akademinių darbų skirtų akcijų rinkų krizės įvykių prognozavimui pritaikyti keli metodai: atsitiktiniai miškai, neuroniniai tinklai, atraminių vektorių klasifikavimas. Atliktų tyrimų rezultatai yra tvirti įrodymai, kad akcijų rinkos krizės yra nuolatinės ir atrinkus tinkamus kintamuosius gilieji neuroniniai tinklai žymiai padidina krizės įvykio klasifikavimo tikslumą ir siūlo patikimą būdą sukurti pasaulinį sisteminį ankstyvojo įspėjimo įrankį, kuris yra efektyvesnis ir jautresnis rizikai nei dabartiniai [28].

Markovo grandinių pritaikymas, nustatant finasines krizes, taip pat dažnas. Akademikai L. De Angelisa ir L. J. Paas‘as savo darbe analizavo akcijų rinkos dinamiką ir krizių aptikimą taikant Markovo grandines [29]. Šis tyrimas, naudojant akcijų rinkų indeksus, padėjo nustatyti stabilius ir neramius laikotarpius bei tikimybę akcijų rinkos būsenos pasikeitimui. Turint omenyje, kad akcijų kainos yra arti atsitiktinio pasivaikščiojimo, Markovo grandinės metodas tinkamas pasirinkimas analizuojant akcijų rinkas. Šis metodas paremtas principu, jog praeitis nėra reikšminga numatant kitą būseną ir svarbi tik esamojo laiko informacija. Tačiau jis dažniausiai pasirenkamas tada, kai norime žinoti išreikštą tam tikros akcijų kainų būklės tikimybę ateityje, o analizuojamos trys būsenos: kai akcijų kaina didėja, mažėja arba nekinta. Kadangi įvairūs rinkos veiksniai daro įtaką akcijų rinkos veiklos būklei, nė vienas metodas negali tiksliai prognozuoti pokyčių akcijų rinkoje kiekvieną dieną. Markovo grandinės prognozavimo metodas nėra išimtis, bet mes galima derinti prognozių, gautų naudojant Markovo grandinę, rezultatus su kitais veiksniais ir laikyti juos sprendimų priėmimo pagrindu [30].

1.5. Literatūros apžvalgos santrauka

Finansų ekonomikoje akcijų kainos analizė ir prognozavimas pritaikant įvairius metodus bei prekybos strategijas, kurių viena iš jų arbitražo radimas, yra dažna akademinių darbų tema. Nors ir akademikai neturi vieningos nuomonės apie rinkos efektyvumą ir ar tikrai vis dar galima rasti arbitražo galimybių šiandienos rinkose, ši tema vis dar išlieka populiari. Padaugėjo akademinių darbų ir analizės kriptovaliutų rinkai. Atsiradus naujai turto klasei, t.y. kriptovaliutų rinkai, buvo atlikta daug įvairių tyrimų, skirtų šiai rinkai išanalizuoti, daugiausia dėmesio skiriant įvairioms statistinėms charakteristikoms [31]. Šiame darbe atlikta literatūros apžvalga, kurioje aptariama efektyvios rinkos hipotezė, arbitražo galimybės ir su jomis susijusias teorijas tokias kaip arbitražo ribų ar kainodaros. Atskirai apžvelgiama literatūra kriptovaliutų rinkai ir jos dinamikai bei arbitražo radimą šioje rinkoje. Galiausiai aptariama literatūra skirta laiko modeliavimui. Daugiausia dėmesio skiriant laikui tarp dviejų įvykių skirstinio parinkimui ir Markovo grandinei, kurie gali būti pritaikyti ir modeliuojant laiką tarp dviejų arbitražų įvykių.

Pagrindinė efektyvios rinkos teorijos idėja, kad neturėtų būti arbitražo galimybių, t.y. uždirbti iš sandorių, kuriais panaudojami kainų skirtumai tarp rinkų. Vis dėlto arbitražo įvykiai įmanomi efektyviose rinkose ir arbitražinė prekyba yra skatinama, nes prisideda prie rinkos efektyvumo ir likvidumo įvairiose rinkose. Bet kokie efektyvios rinkos nukrypimai yra pataisomi arbitražine prekyba, tačiau tai nėra toks dažnas įvykis, kad ši strategija būtų pelninga. Atsiradus elgsenos finansams abejonės tarp akademikų dėl efektyvios rinkos hipotezės išaugo. Elgsenos finansų įžvalgos paneigė ilgai nusistovėjusią nuomonę, kad investuotojai paprastai racionalūs, o vertybinių popierių ar akcijų kainos – efektyvios.

Nors ir tradicinėse rinkose yra sunku atrasti arbitražo galimybių, tačiau turime visiškai kitokią situaciją kriptovaliutų rinkoje. Kriptovaliutų prekybininkai galėjo rasti reikšmingų ir didėjančių arbitražo galimybių tarp kriptovaliutų rinkų nuo 2013 iki 2018 metų. Be to, kainų skirtumai buvo nuoseklūs daugiau nei penkerius metus ir pusę visų arbitražo galimybių buvo pakankamai dideli, kad padengtų sandorio išlaidas, o skirtumai išliko pakankamai ilgai, kad būtų galima jais pasinaudoti. Taigi investuotojai ne tik galėjo atrasti arbitražo galimybes, jomis pasinaudoti, bet ir iš to nemažai uždirbti [32].

Keliamas klausimas ar tos pačios strategijos taikomos akcijų rinkose pateikia tuos pačius rezultatus. Pritaikant atsitiktinio miško ir logistinės regresijos metodus, buvo prognozuojama kriptovaliutų kaina. Eksperimentas, kai buvo perkama kriptovaliuta su geriausia prognoze ir parduodant skolintas kriptovaliutas su blogiausia prognoze, parodė statistiškai ir ekonomiškai reikšmingą grąžą bei leido daryti išvadą, kad ši jauna ir auganti rinka gali (dar) nesilaikyti pusiau stiprios rinkos efektyvumo formos. Pastebima, kad grąža bus reikšminga, kai laukiama iki trijų minučių atlikti pirkimą ar pardavimą. Taigi statistinio arbitražo strategija yra verta dėmesio kriptovaliutų rinkose ir pritaikant mašininio mokymo metodus galima aptikti arbitražo galimybes [33].

Vis dėlto arbitražo susidarymas yra sunkiai prognozuojamas ir nėra lengva investuotojui iš susidariusių arbitražo galimybių gauti maksimalų pelną. Dažnūs trumpalaikio pobūdžio prekybos sandoriai ir jiems naudojamos kompiuterinės programos leidžia per kelias sekundes atlikti didelius pavedimų skaičius ir beveik tuo pačiu metu atlikti pirkimo ir pardavimo sandorius maksimaliai panaudojant arbitražo galimybę. Tačiau investuotojas taip pat turi turėti lėšas toje kriptovaliutų biržoje, kurioje turime arbitražą. Todėl svarbu įvertinti arbitražo galimybes kiekvienoje biržoje ir nuspręsti kurioje laikyti lėšas, kad investuotojas turėtų galimybę uždirbti ir maksimizuoti pelną iš arbitražo prekybos.

2. Tyrimo objektas ir metodai

2.1. Aprašomoji statistika

2.1.1. Bitkoinas

Viena iš populiariausių kriptovaliutų – bitkoinas (angl. *Bitcoin*, BTC), kurį išrado S. Nakamoto 2008 metais. Šios skaitmeninės valiutos, paremtos blokų grandinės technologija, rinkos kapitalas 2023 metų kovo 30 dieną net 566 milijardas JAV dolerių[4], o kiekvieną dieną įvyksta net apie 300 tūkstančių sandorių[5].

Per pastaruosius penkerius metus bitkoino vertė smarkiai išaugo. Pats didžiausias augimas įvykęs 2020 metų viduryje, kai jo vertė pakilo daugiau nei 3 kartus. Bitkoino kaina pasiekė visų laikų aukščiausią lygį 2021 metų lapkritį, kai vertė viršijo 65 000 JAV dolerių. Tačiau ši vertė neišliko ilgai ir po itin daug svyravimų nuo 2021 metų antros pusės matomas didelis nuvertėjimas.

3 pav. Bitkoino kainų svyravimai nuo 2017 m. rugsėjo 23 dienos iki 2023 m. balandžio 30 dienos

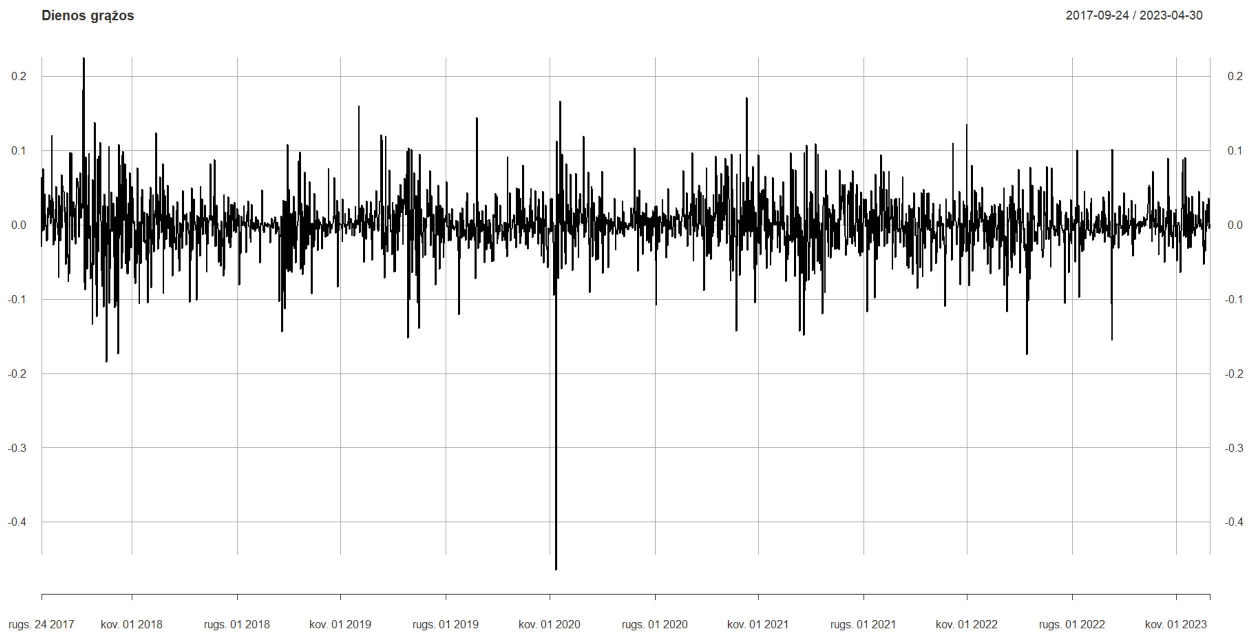
Nagrinėjant bitkoinio dienos grąžas matyti, kad grąžos svyruoja tarp –7 554 ir 7 293 JAV dolerių, o vidutinė dienos grąža lygi 12 JAV dolerių. Kai turime bitkoino logaritmines dienos grąžas matyti, kad grąžos svyruoja tarp –0,46 iki 0,23.

[4] Prieiga per: https://coinmarketcap.com/

[5] Prieiga per: https://www.statista.com/statistics/730806/daily-number-of-bitcoin-transactions/

1 lentelė. Bitkoino logaritminių dienos grąžų pagrindinės charakteristikos

Minimumas	–0,4647302
Pirmasis kvartilis	–0,0154135
Mediana	0,0011030
Vidurkis	0,0009993
Trečiasis kvartilis	0,0180983
Maksimumas	0,2251190



4 pav. Bitkoino logaritminės dienos grąžos nuo 2017 m. rugsėjo 24 dienos iki 2023 m. balandžio 30 dienos

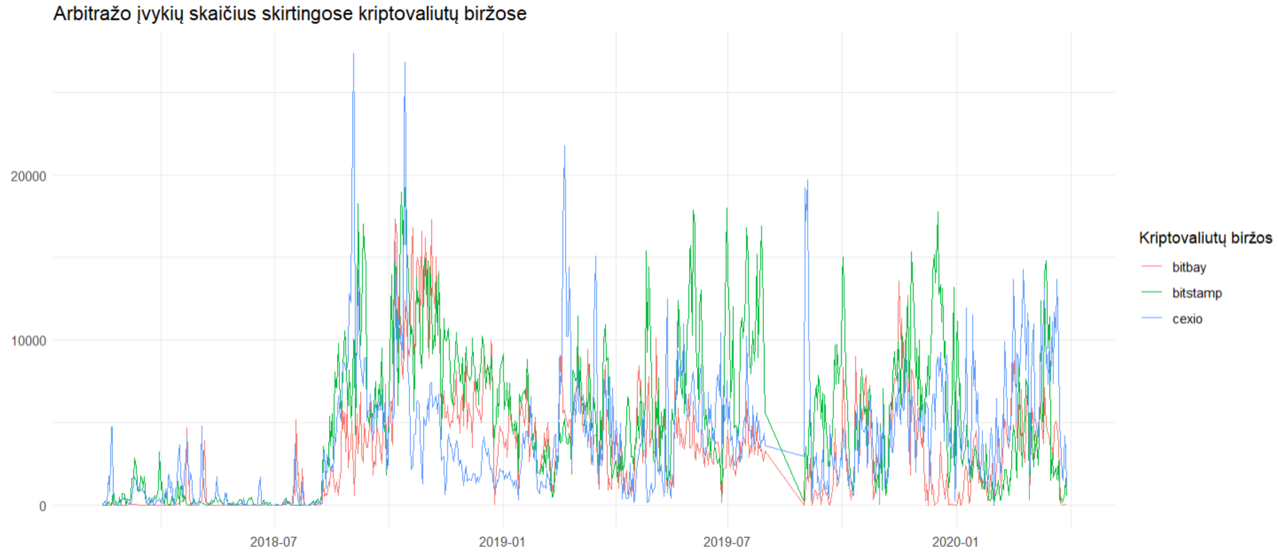
Yra nemažai kriptovaliutų biržų, kurios prekiauja įvairiomis kriptovaliutomis. Pačios didžiausios kriptovaliutų biržos pagal sandorių skaičių yra „Binance“, kuri per dieną turi apie 4 milijardus JAV dolerių prekybos apimties, tuomet turime „IndoEx“ su prekybos apimtimi lygia 3 milijardams JAV dolerių ir „BitForex“ su 2 milijardų JAV dolerių prekybos apimtimi. Tačiau šiame darbe pasirinktos kriptovaliutos biržos, kurios turėjo daugiausiai galimų arbitražo įvykių turimame duomenų rinkinyje. Pradedant nuo „Bitstamp“, kuri įkurta 2011 metais, Liuksemburge ir turinti daugiau nei 4 mln. klientų bei apie 49 milijonus JAV dolerių prekybos apimties. Kita – „Bitbay“ veikianti nuo 2014 metų ir įkurta Lenkijoje, šiuo metu turinti daugiau kaip 400 tūkst. aktyvių klientų ir atliekanti apie 1200 transakcijų per minutę. Šios kriptovaliutos biržos prekybos apimtys apie 926 tūkstančių JAV dolerių kiekvieną dieną. Galiausiai turime „CEX.IO“, kuri vykdo savo veiklą nuo 2013 metų ir turi net daugiau nei 4 mln. naudotojų. Per visą veiklos laiką turėjo daugiau kaip 40 mln. pirkimų naudojant jų platformą.

2.1.2. Arbitražo įvykiai

Turime kiekvienos nagrinėjamos biržos arbitražo įvykius su laiko žyma prekiaujant BTCEUR valiuta. Pasiūlymas parduoti buvo vienoje iš šių trijų biržų, o pasiūlymas pirkti galėjo būti dar kitose 19-ose biržose. Mes turime arbitražo įvykio susidarymą, bet investuotojas pats priima sprendimą ar šia arbitražo galimybe pasinaudoti. Svarbu paminėti, kad sandorio pelnas be mokesčių visada bus didesni ir niekada nebus neigiami, tačiau įvertinus mokesčius sandorius ne tik nėra toks pelningas, bet ir kartais susidaro nuostolis.

2 lentelė. Nagrinėjamos kriptovaliutų biržos ir jų duomenys

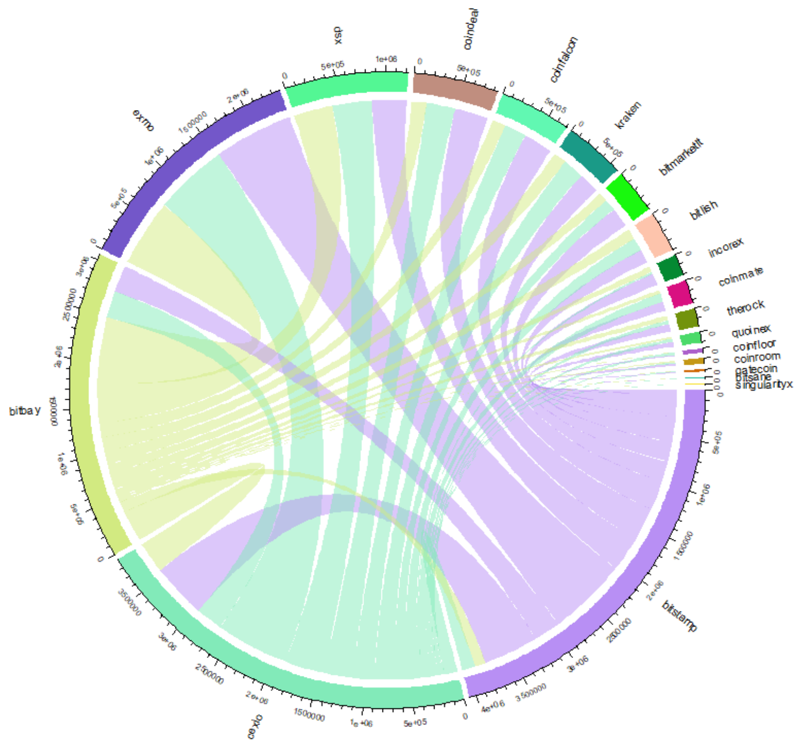
	„Bitstamp“	**„Bitbay“**	**„CEX.IO“**
Laikotarpis	2018-02-12 13:25:12 – 2020-03-30 23:48:51	2018-02-12 22:30:44 – 2020-03-30 23:31:52	2018-02-12 12:04:11 – 2020-03-30 23:48:51
Arbitražo įvykių skaičius	3 804 125	2 479 940	2 960 616
Maksimalus sandorio pelnas (be mokesčių)	10 453,10	5 716,92	8 704,63
Maksimalus sandorio pelnas (su mokesčiais)	9 435,64	5 429,40	8 146,91



5 pav. Arbitražo įvykių skaičius skirtingose kriptovaliutų biržose nagrinėjamame laikotarpyje

Daugiausiai arbitražo įvykių turime „Bitstamp“ biržoje, o mažiausiai – „CEX.IO“. Įvertinus arbitražo įvykių skaičių tendenciją, per visą nagrinėjamą laikotarpį, matome, kad vidutiniškas arbitražo įvykių skaičius per dieną apie 4 373, o didžiausias net 27 338. 2018 metų spalio 14 dieną per visas kriptovaliutų biržas buvo net 58 419 arbitražo įvykių.

Panagrinėjus daugiau pirkimo ir pardavimo pasiūlymų srautus tarp biržų, matome, kad daugiausiai pasiūlymų pirkti buvo biržoje „Exmo“ ir tas pasiūlymų skaičius pasidalina vienodai tarp visų trijų nagrinėjamų biržų. Panaši tendencija ir su kitomis biržomis, tik skiriasi srauto dydis. Biržos „Bitstamp“ atveju, antrą didžiausią srautą turi su „CEX.IO“ birža, tačiau „CEX.IO“ neturi tokio didelio srauto su šia birža. Tai reiškia, kad „Bitstamp“ biržoje, kuri turi didžiausią arbitražo įvykių skaičių iš visų trijų nagrinėjamų biržų, dažniausiai turime didžiausią pasiūlytą bitkoino kainą, kad joje parduodant ir perkant kitoje biržoje turime arbitražo įvykį, bet pirkti joje ir parduoti „Bitbay“ ar „CEX.IO“ biržoje pasiūlymų mažai. Jei prekyba vyktų tik tarp šių trijų biržų, tai turėtume turėti daug lėšų „Bitstamp“ biržoje, kadangi pagal srautus būtų daugiausiai pasiūlymų joje parduoti.



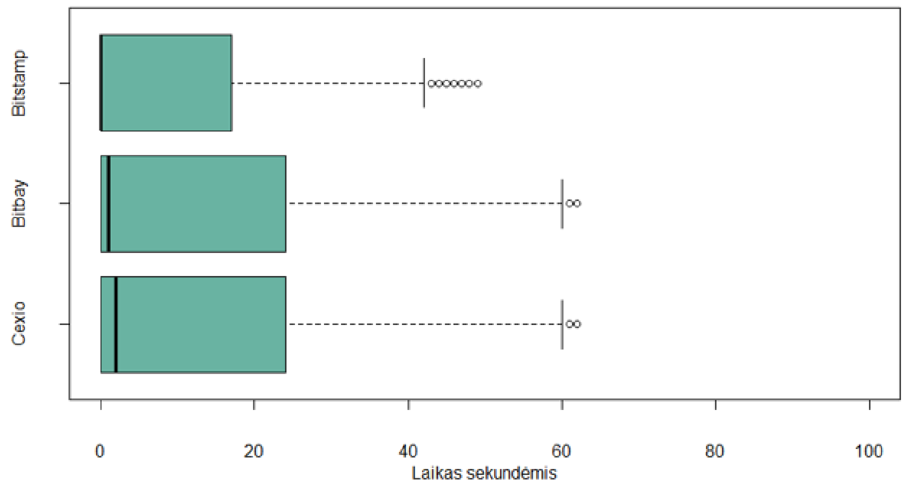
6 pav. Arbitražo įvykių pasiskirstymas tarp kriptovaliutų biržų

Apskaičiavus laiko tarpus tarp kiekvieno arbitražo įvykio matome, kad maksimalus laikas visose kriptovaliutų biržose yra ypač didelis palyginus su kitomis charakteristikomis. Galima numanyti, kad turime nemažai išskirčių duomenyse. Vidutiniškai arbitražas gali pasikartoti per 17 sekundžių „Bitstamp“ biržoje, per 26,7 sekundžių „Bitbay“ biržoje ir per 22,3 sekundes „CEX.IO“ biržoje. Taigi rezultatai yra labai panašūs kiekvienoje biržoje.

3 lentelė. Laiko tarp dviejų arbitražo įvykių pagrindiniai aprašomosios statistikos rodikliai

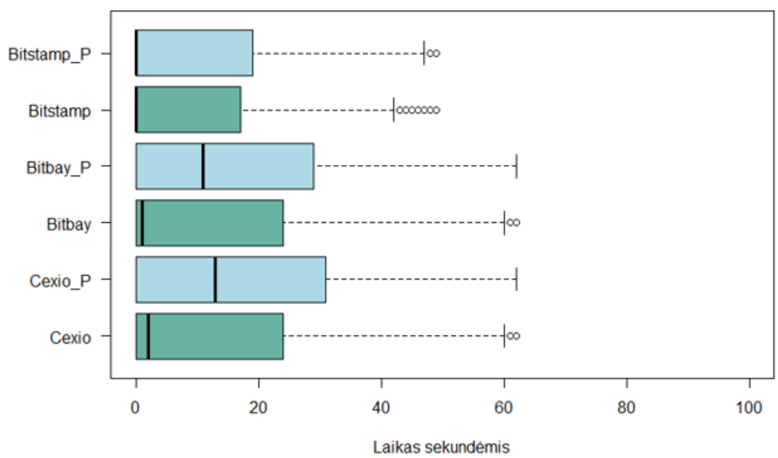
	„Bitstamp“	**„Bitbay“**	**„CEX.IO“**
Minimumas	0	0	0
Pirmasis kvartilius	0	0	0
Mediana	0	2	3
Vidurkis	17	26,7	22,3
Trečiasis kvartilius	20	25	25
Maksimumas	2 678 454	2 678 552	2 678 552

Panaikiname išskirtis taikant kvantilių metodą. Po šio pertvarkymo maksimalus laikas tarp arbitražo įvykių tampa 49 sekundės „Bitstamp“ biržoje, 62 sekundės „Bitbay“ ir „CEX.IO“ biržose. Taip pat turime pakoreguotą vidurkį, kuris 8,88 sekundės „Bitstamp“ biržoje, 12,68 sekundės „Bitbay“ biržoje ir 12,59 sekundės „CEX.IO“ biržoje.



7 pav. Laiko tarp dviejų arbitražų sklaida po išskirčių panaikinimo

Įdomu įvertinti, koks būtų laikas tik tarp dviejų pelningų arbitražo įvykių. Tokiu atveju panaikiname visus arbitražo įvykius, kurie būtų nuostolingi įtraukus visus transakcijos mokesčius. Maksimaliam arbitražo įvykio laikui šis pakeitimas neturėjo reikšmės, tačiau padidėjo vidutinis laikas tarp dviejų arbitražų. „Bitstamp“ atveju vidutinis laikas yra 8,8 sekundės, tačiau tarp pelningų arbitražų turime 9,6 sekundes. Kitose biržose šis skirtumas daug didesnis. „Bitbay“ vidutinis laikas tarp arbitražų – 12,68 sekundės, o tarp pelningų arbitražų – 15,48 sekundės. „CEX.IO“ rezultatas labai panašus ir vidutinis laikas tarp arbitražų – 12,59 sekundės, o tarp pelningų arbitražų – 16,56 sekundės.



8 pav. Laiko tarp dviejų arbitražų sklaida lyginant su pelningais arbitražo įvykiais

2.2. Puasono, eksponentinis ir gama skirstiniai

Duomenis arba atsitiktinius kintamuosius, kurie modeliuoja laiką tarp įvykių, vadiname laukimo laiku. Darome prielaidą, kad laukimo laikas T visada yra teigiamas ir neribotas: $T \in [0, \infty)$. Laukimo laikas gali būti tolydus arba diskretus. Kadangi turime duomenis su arbitražo įvykiais ir jų laiko žymomis, galima nustatyti ir laiką tarp šių įvykių.

Laukimo laikas t_i tarp *i*-ojo arbitražo įvykio ir *(i+1)*-ojo arbitražo įvykio apskaičiuojamas pagal (1) formulę:

$$t_i = s_{i+1} - s_i; \tag{1}$$

čia s_i yra laikas, kai įvyksta *i*-atas arbitražo įvykis.

Laikome arbitražo įvykį, kaip atsitiktinį dydį indeksuota laike, o visas šis atsitiktinių dydžių rinkinys yra stochastinis procesas. Vienas iš labiausiai taikomų stochastinių procesų – Puasono procesas. Tai diskrečių įvykių modelis, kai vidutinis laikas tarp įvykių yra žinomas ir įvykių dažnis išlieka pastovus laikui bėgant. Tikslus įvykių laikas yra atsitiktinis ir įvykio atsiradimas nepriklauso nuo įvykio prieš jį.

Homogeniniu Puasono procesu su parametru λ vadiname procesą $\{X_t, t \in [0, \infty)\}$ apibrėžtą tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, jei teisingos šios trys savybės:

1. $X_0 = 0$;
2. su visais $0 < t_1 < \cdots < t_n$ priaugliai $X_{t1}, X_{t2} - X_{t1}, \ldots, X_{tn} - X_{tn-1}$ yra nepriklausomi;
3. jei $0 \leq s < t < \infty$, tai $X_t - X_s$ turi Puasono skirstinį su parametru $\lambda\,(t - s)$, t.y.
   $P(X_t - X_s = k) = \frac{[\lambda\,(t-s)]^k}{k!} \exp\{-\lambda(t-s)\}$, su visais $k \in$ N.

Puasono skirstinys yra diskretus tikimybių skirstinys išreiškiantis tikimybę, kad tam tikras įvykių skaičius įvyks per fiksuotą laiko intervalą, jei šie įvykiai įvyksta nuolat ir yra nepriklausomi [34].

Sakysime, kad atsitiktinis dydis X yra pasiskirstęs pagal Puasono skirstinį su parametru $\lambda > 0$, tuomet tikimybė, kad įvyks *k* įvykių per tam tikrą laiką apskaičiuojama pagal (2) formulę:

$$f(k, \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}; \tag{2}$$

čia k – įvykių skaičius, kurių tikimybę norime apskaičiuoti ir λ – vidutinis įvykių skaičius per tam tikrą laikotarpį.

Jei atsitiktinis dydis X pasiskirstęs pagal Puasono skirstinį, tai $EX = \lambda$ ir $VAR(X) = \lambda$.

Puasono skirstinio atveju atsitiktinis dydis *X* gali turėti tik neneigiamas sveikųjų skaičių reikšmes, tačiau $Poi(\lambda)$ skirstinys gali būti netinkamas, kai *X* su didele tikimybe įgauna reikšmę 0. Tokiu atveju pamodifikuotas Puasono skirstinys, žinomas kaip nulinės vertės Puasono skirstinys (*angl. zero-inflated Poisson,* ZIP), tampa naudingu. ZIP skirstinys su parametru π ir λ žymimas $ZIP(\pi, \lambda)$ ir tikimybių pasiskirstymo funkcija randama pagal (3) formulę:

$$P(X = k) = \begin{cases} \pi + (1 - \pi)\exp(-\lambda), & kai\ k = 0 \\ \frac{(1-\pi)\exp(-\lambda)\lambda^k}{k!}, & kai\ k \in \{1,2,\ldots\} \end{cases}; \tag{3}$$

čia π – papildomų nulių tikimybė, kuri $0 \leq \pi \leq 1$ ir λ – numatomas Puasono skaičius k-ajam įvykiui, kuris $\lambda \geq 0$.

Parametras π suteikia papildomą tikimybę, kai vertė yra lygi nuliui. Jei šio parametro nėra, ZIP skirstinys susivienodina su Puasono skirstiniu. Jei $X \sim ZIP(\pi, \lambda)$, tai $EX = \lambda(1 - \pi)$ ir $VAR(X) = \lambda(1 - \pi)(1 + \lambda\pi)$.

Tarkime, kad turime nepriklausomus ir vienodus stebėjimus $X_1, X_2, \dots, X_n$ pasiskirsčiusius pagal $ZIP(\pi, \lambda)$. Pirmas tikslas įvertinti parametrus π ir λ, o tam padaryti dažniausiai naudojamas momentų metodas (angl. *Moment of methods*, MME) ar didžiausio tikėtinumo metodas (angl. *Maximum likelihood estimation,* MLE). Šiame darbe bus naudojamas pastarasis.

Taikant didžiausios tikėtinumo metodą žinome, kad turint stebėjimus $\tilde{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ pasiskirsčiusius pagal $ZIP(\pi, \lambda)$ tikėtinumo funkcija $L(\pi, \lambda \mid \tilde{X})$ apibrėžiama pagal (4) formulę:

$$L(\pi, \lambda \mid \tilde{X}) = \prod_{i=1}^{n} P(X = X_i). \tag{4}$$

Apibrėžkime Y, kuris nusako X_i reikšmių lygiu nuliui skaičių. Tada pasinaudojus tikėtinumo funkcija gauname (5) formulę:

$$L(\pi, \lambda \mid \tilde{X}) = \left(\pi + (1-\pi)e^{-\lambda}\right)^{Y} \prod_{i=1, X_i \neq 0}^{n} (1-\pi)e^{-\lambda} \frac{\lambda^{X_i}}{X_i!}. \tag{5}$$

Tikėtinumo funkcija bus apskaičiuojama pagal (6) lygybę:

$$L_* = Y ln\left(\pi + (1-\pi)e^{-\lambda}\right) + (n-Y)\ln(1-\pi) - (n-Y)\lambda + n\bar{X} ln\,\lambda - \ln \prod_{i=1}^{n} X_i! \tag{6}$$

Apskaičiuodami tikėtinumo funkcijos išvestines π ir λ atžvilgiu ir nustadydami jas lygias nuliui, gausime (7) lygtis:

$$\frac{n\bar{X}}{\lambda} = \frac{Y\,(1+\pi)e^{-\lambda}}{\pi + (1-\pi)e^{-\lambda}} + n - Y$$

$$\frac{Y\,(1-\pi)\left(1-e^{-\lambda}\right)}{\pi + (1-\pi)e^{-\lambda}} = n - Y \tag{7}$$

Didžiausio tikėtinumo metodo π ir λ reikšmės yra būtent šių dviejų lygčių sprendiniai [35].

Eksponentinis skirstinys yra vienas iš plačiai naudojamų tikimybinių skirstinių, kai laikas tarp Puasono proceso įvykių pasiskirsto eksponentiškai ir įvykiai vyksta nuolat ir nepriklausomai. Jis dažnai naudojamas modeliuojant laiką tarp įvykių.

Sakysime, kad atsitiktinis dydis X yra pasiskirstęs pagal eksponentinį skirstinį su parametru $\lambda > 0$, žymimas $X \sim Exponential(\lambda)$ ir tikimybės tankio funkcija gauname pagal (8) formulę:

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & kai\ x \geq 0 \\ 0, & kai\ x < 0 \end{cases}; \tag{8}$$

čia λ – yra skirstinio parametras, dažnai vadinamas greičio parametru, kuris $\lambda > 0$.

Jei $X \sim Exponential(\lambda)$, tai $EX = \frac{1}{\lambda}$ ir $VAR(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Viena iš svarbiausių eksponentinių skirstinių savybių, kad jis yra be atminties. Tai reiškia įvykiai neturi įtakos laukimo laiko pasiskirstymui ir visi įvykiai yra nepriklausomi. Jei mums svarbu, kad skirstinys turi atmintį, gali tikti Veibulio skirstinys.

Jei atsitiktinis dydis X yra pasiskirstęs pagal eksponentinį skirstinį su parametru $\lambda > 0$, tada X yra be atminties, tai yra:

$$P(X > x + a \mid X > a) = P(X > x), kai\ a, x \geq 0. \tag{9}$$

Puasono skirstinys susijęs su įvykių skaičiumi per fiksuotą laikotarpį, o eksponentinis skirstinys – su laiku tarp nuoseklių įvykių. Tarkime, kad įvykiai įvyksta atsitiktinai λ greičiu tokiu būdu, kad jų atsiradimas gali būti modeliuojamas kaip Puasono procesas. Tada:

1. $N(t)$ – įvykių, kurie įvyko per intervalą t, skaičius turintis Puasono skirstinį su parametru λt: $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$;
2. T – laukimo laikas tarp dviejų įvykių turinti eksponentinį skirstinį su parametru λ: $T \sim M(\lambda)$.

Kitas atsitiktinio dydžio skirstinys, kuris taip pat kaip eksponentinis skirstinys numato laukimo laiką tarp įvykių – gama skirstinys. Skirtumas tarp dviejų šių skirstinių, kad eksponentinis skirstinys numato laukimo laiką iki pačio pirmojo įvykio, o gama skirstinys numato laukimo laiką, kol įvyks k-asis įvykis.

Gama skirstinys nusako laukimo laiką, kol įvyks baigtinis skaičius nepriklausomų įvykių, darant prielaidą, kad įvykiai vyksta pastoviu greičiu ir tikimybė, kad per nedidelį laiko tarpą įvyks daugiau nei vienas įvykis, yra nereikšminga. Gama pasiskirstymas modeliuoja laiką, reikalingą α įvykiams įvykti, atsižvelgiant į tai, kad įvykiai Puasono procese įvyksta atsitiktinai, o vidutinis laikas tarp įvykių yra β.

Sakysime, kad atsitiktinis dydis X yra pasiskirstęs pagal gamą skirstinį su formos parametru α, kuris daro įtaką skirstinio smailumui ir skalės parametru β, kuris turi daugiausiai įtakos skirstinio sklaidai, ir žymimas $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$. Tikimybės tankio funkcija bus gaunama pagal (10) formulę:

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}; \tag{10}$$

čia α – formos parametras; β – skalės paramtras. Abu jie $\alpha, \beta > 0$.

Jei $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, tai $EX = \frac{\alpha}{\beta}$ ir $VAR(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$.

Parametrų įvertinimui naudojami įvairūs metodai bet vienas iš populiariausių didžiausio tikėtinumo metodas, kuris naudojamas ir šiame darbe [36].

2.3. Skirstinių mišiniai

Vis dėlto nagrinėjant realius duomenis dažnai pasitaiko, kad standartiniai skirstiniai nėra tinkami nagrinėjamiems duomenims. Atsitiktiniai kintamieji galėjo būti sugeneruoti iš kelių skirstinių mišinio. Šiuo atveju skirstinių mišinys yra svertinė K skirstinių suma $\{g_1(x; \Theta_1), \dots, g_K(x; \Theta_K)\}$, kur svorių $\{w_1, \dots, w_k\}$ suma lygi vienam. Kiekvienas skirstinys šiame mišinyje turi savo parametrus. Taigi, skirstinių mišinys apibrėžiamas pagal (11) formulę:

$$f(x; \Theta_1, \dots, \Theta_K) = \sum_{k=1}^{K} w_k g_k(x; \Theta_K); \tag{11}$$

čia w_k – skirstinių svoris, kuris $\sum_{k=1}^{K} w_k = 1$; $g_k(x; \Theta_K)$ – skirstinio tikimybių tankio funkcija.

Skirstiniai gali būti iš skirtingų šeimų, tačiau tokiu atveju pasunkina skirstinių radimą ir dažnai yra sunkiai išsprendžiamas uždavinys. Vis dėlto dažniausiai turime kelių skirstinių mišinį, kai skirstiniai yra iš tos pačios šeimos, tačiau su skirtingais parametrais.

Turėdami *n* dydžio imtį $\{x_1, \dots, x_n\}$ ir norėdami įvertinti dviejų skirstinių $g_1(x; \Theta_1)$ ir $g_2(x; \Theta_2)$ tinkamumą turime rasti:

$$f(x; \Theta_1, \Theta_2) = w g_1(x; \Theta_1) + (1 - w) g_2(x; \Theta_2). \tag{12}$$

Taikant didžiausio tikėtinumo metodą, įvertinant šio skirstinių mišinio apytikslius parametrus turime:

$$L(\Theta_1, \Theta_2) = f(x_1, \dots, x_n;\ \Theta_1, \Theta_2) = \prod_{i=1}^{n} [w g_1(x_i; \Theta_1) + (1 - w) g_2(x_i; \Theta_2)] \tag{13}$$

$$\ell(\Theta_1, \Theta_2) = \sum_{i=1}^{n} log[w g_1(x_i; \Theta_1) + (1 - w) g_2(x_i; \Theta_2)] \text{ [36].}$$

Skirstinių mišiniams rasti tyrimo rezultatų skyriuje naudosime R paketus „mixtools“, „mixdist“ ir „gamlss.mx“.

2.4. Markovo grandinė

Norėdami modeliuoti neapibrėžtumą, paprastai tikimybių skirstiniai taikomi į kiekybiškai apibūdinančius galimų rezultatų rinkinius. Taip darant yra svarbu šių paskirstymų specifikaciją pagrįsti procesų supratimu. Stochastinis procesas yra atsitiktinių dydžių rinkinys, indeksuotas pagal laiką *t* ir būseną *i*. Pavyzdžiui, galima sakyti, kad $\{i, t \geq 0\}, t \in T$. Vienas iš stochastinio procesų yra Markovo grandinė [38].

Markovo grandinė yra stochastinis procesas, kurio metu tikimybė p_{ij}, kad atsitiktinis dydis X yra *j* būsenoje bet kuriuo laiko momentu *t+1* priklauso tik nuo būsenos *i*, kurioje jis buvo *t* momentu, bet ne nuo būsenos ankstesniais laiko momentais.

$$P\{X(t+1) = j | X(0) = i_0, \dots, X(t-1) = i_{t-1}, X(t) = i\} = P\{X(t+1) = j | X(t) = i\} = p_{ij} \tag{14}$$

Jei procesas laikui bėgant pastovus, tai Markovo grandinę visiškai lemia Markovo perėjimo matrica, kuri gaunama pagal (15) formulę:

$$\Pi = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix}; \tag{15}$$

čia p_{ij} – tikimybė pereiti iš būsenos *i* į *j*, kuri $p_{ij} \geq 0$ ir $\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1$.

Ši perėjimo matrica apibendrina visas N^2 perėjimo tikimybes p_{ij} $(i, j = 1, \dots, N)$ ir pradinį skirstinį $h_0 = (h_{10} h_{20} \dots h_{N0})$, $\sum j h_{j0} = 1$, kuris apibūdina įvairių būsenų pradines tikimybes [39].

Verta paminėti, kad p_{ij} apibrėžimas reiškia, eilučių suma iš matricos Π yra lygi 0 esant šioms sąlygoms:

i. visos Markovo grandinės būsenos bendrauja viena su kita (t.y. iš kiekvienos būsenos galima pereiti, galbūt daugiau nei vienu žingsniu, į kiekvieną kitą būseną);
ii. Markovo grandinė nėra periodinė (periodinė Markovo grandinė, kai į būseną galima grįžti tik lygiu žingsnių skaičiumi);
iii. Markovo grandinė nenutolsta į begalybę.

Tikimybė $p_i(n)$, kad atsitiktinis dydis yra būsenoje i laiko momentu n, artėja prie π_i, kai n tolsta į begalybę. Šios ribojančios tikimybės arba pusiausvyros tikimybės gali būti apskaičiuojamos iš vadinamųjų balanso lygčių. Šios lygtys subalansuoja tikimybę išeiti ir patekti į būseną.

Markovo grandinės modeliavimui tyrimų rezultatų skyriuje naudosime R paketus „markovchain" ir „dtmcA".

2.5. Tolydaus laiko Markovo grandinė

Kai turime diskretaus laiko Markovo grandinės $\{X_n, n = 0,1,2, ...\}$ atlieka perėjimus tik sveikaisiais skaičiais, t.y.

$$P(X_{n+1} = j|X_n = i). \tag{16}$$

Tai reiškia procesas gali pasilikti tam tikroje būsenoje tik sveikąjį skaičių laiko prieš atlikdamas kitą perėjimą. Jei sveikojo skaičiaus trukmę pakeisime į tolydžius perėjimo laikus pagal eksponentinį pasiskirstymą, gausime tolydaus laiko Markovo grandinę.

Tarkime, kad $\{X(t), t \geq 0\}$ tolydaus laiko stochastinis procesas įgaunantis reikšmes neneigiamų sveikųjų skaičių aibėje, tai vadiname tolydaus laiko Markovo grandine, jei kiekvieną kartą jai patenkant į būseną i [40]:

i. laikas praleistas tam tikroje būsenoje prieš atliekant perėjimą į kitą būseną yra eksponentiškai pasiskirstęs su vidurkiu $\frac{1}{v_i}, T_i \sim Exp(v_i)$;
ii. kai paliekant būseną i, grandinė patenka į būseną j su tam tikra tikimybe p_{ij}, kuri bendrai tenkina $p_{ij} \geq 0, \sum_j p_{ij} = 1$.

Nors ir nagrinėjamiems duomenis tolydaus laiko Markovo grandinė būtų tinkama, nuspręsta šiame darbe įgyvendinti tik diskretaus laiko Markovo grandinę.

2.6. Paslėptas Markovo modelis

Vienas iš didžiausių rinkos dalyvių iššūkių, tai dažni finansinių rinkos pokyčiai dėl įvairių makroekonomikos padarinių. Tai vadiname rinkos režimais ir paslėptas Markovo modelis naudojamas tiems režimams atpažinti. Skirtingose rinkų režimo fazėse grąžos vidurkis, dispersija ir kiti rodikliai gali skirtis, o tai daro didelę įtaką laiko eilučių sėkmingam modeliavimui, kuris pagrįstas stacionarumu. Atpažinus tam tikrą rinkos režimą galima pakeisti investavimo strategiją, kuri leistų maksimizuoti galimą grąžą ar geriau įvertinti riziką.

Paslėpti Markovo modeliai (angl. *Hidden Markov model*, HMM) yra Markovo grandinių procesas, kai pagrindinis stochastinis procesas su „paslėptomis“ būsenomis, kurios tiesiogiai nestebimos, bet gali būti stebimos tik per kitą stochastinių procesų rinkinį. HMM linkęs užsilikti tam tikroje būsenoje ir tada staigiai pereiti į naują. Būtent tokį modelio elgesį norima pritaikyti rinkos režimams.

Bendruoju atveju HMM sudarytas iš penkių dalių (S, K, Π, A, B):

i. $S = \{1,...,N\}$: būsenų rinkinys. Būsena laike t žymima s_t;

ii. $K = \{k_1,...,k_m\}$: išvesties rinkinys. Diskretaus skirstinio atveju M yra stebėjimų pasirinkimų skaičius;

iii. pradinių būsenų skirstinys $\Pi = \{\pi_i\}, i \in S. \pi_i$ apibrėžtas kaip $\pi_i = P(s_1 = i)$;

iv. būsenų perėjimų tikimybinis skirstinys $A = \{a_{ij}\}, i, j \in S$ ir $a_{ij} = P(s_{t+1}|s_t), 1 \leq i, j \leq N$;

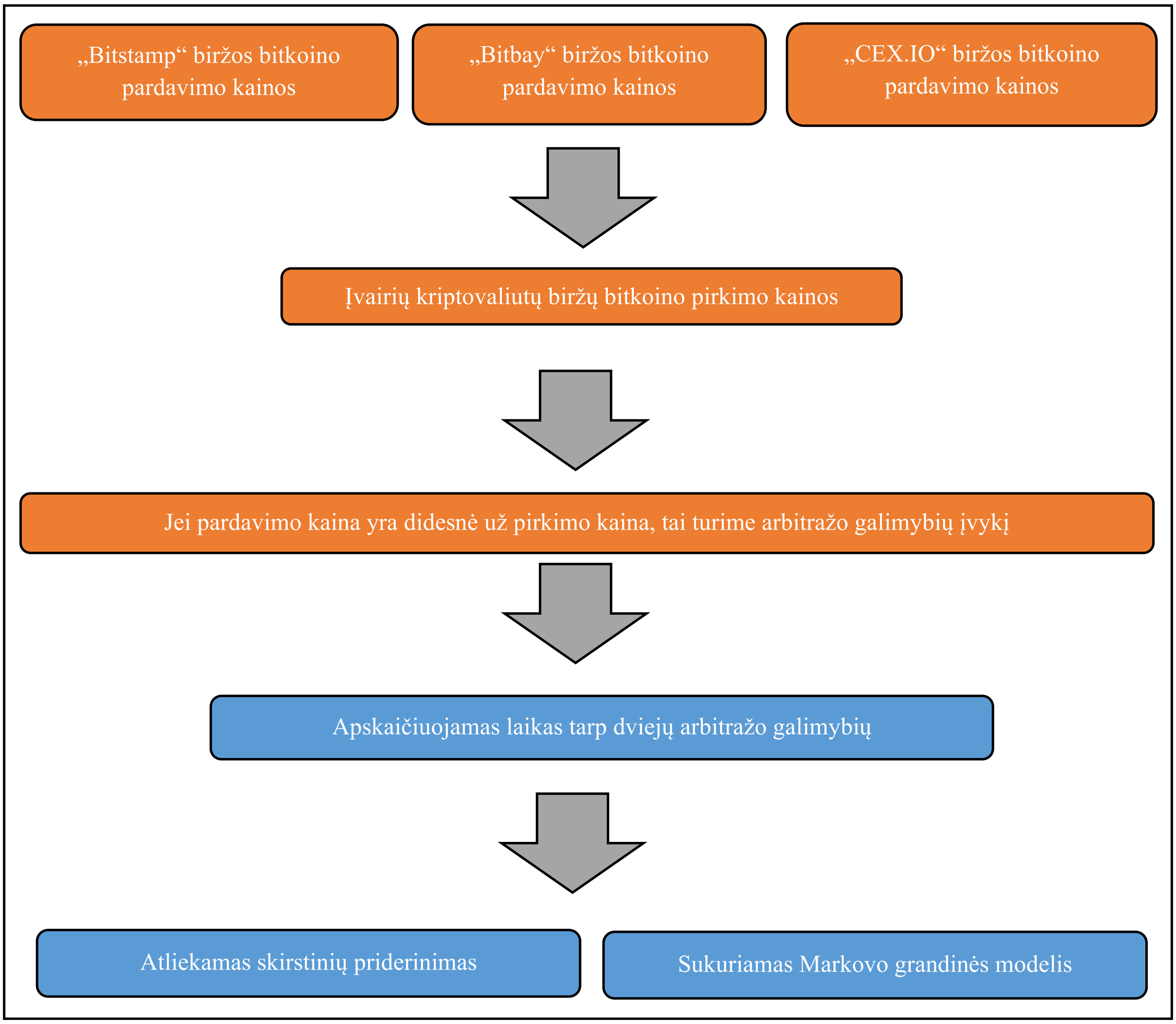
v. stebėjimų tikimybinis skirstinys $B = b_j(o_t)$. Tikimybinė funkcija kiekvienai būsenai j lygi $b_j(o_t) = P(o_t|s_t = j)$.

HMM atveju nėra žinoma kas sukuria stebėjimų seką. Būsenų skaičius, perėjimo tikimybės ir stebėjimo būsenos forma yra nežinoma. Užuot suderinus kiekvieną būseną su deterministine išvestimi, HMM būsena yra susieta su tikimybine funkcija. Laike t stebėjimas o_t yra generuojamas taikant tikimybinę funkciją $b_j(o_t)$, kuri yra susieta su būsenos j tikimybe [41]:

$$b_j(o_t) = P(o_t|s_t = j). \tag{17}$$

2.7. Tyrimo eigos schema

1. Realiu laiku gaunamos „Bitstamp“, „Bitbay“ ir „CEX.IO“ biržų bitkoino pardavimo kainos.
2. Realiu laiku gaunamos įvairių kriptovaliutų biržų bitkoino pirkimo kainos.
3. Jei siūloma pardavimo kaina yra didesnė už siūloma pirkimo kaina kitoje biržoje, tuomet fiksuojamas arbitražo įvykis, kuriame nurodomas jo dydis ir leidžiama pačiam investuotojui priimti sprendimą ar šio arbitražo įvykiu jis nori pasinaudoti.
4. Šiame tyrime, nauodojant šiuos duomenis apie arbitražo galimybes, apskačiuojamas laikas tarp dviejų arbitražo įvykių.
5. Įvertinamas laiko tarp dviejų arbitražų pasiskirstymas taikant eksponentinį, puasono nulinės vertės ir gama skirstinių mišinius.
6. Sukuriamas Markovo grandinės modelis su dviem būsenomis: arbitražas ir nėra arbitražo, atskirus 20 % duomenų, kurie buvo skirti testuoti modelį.

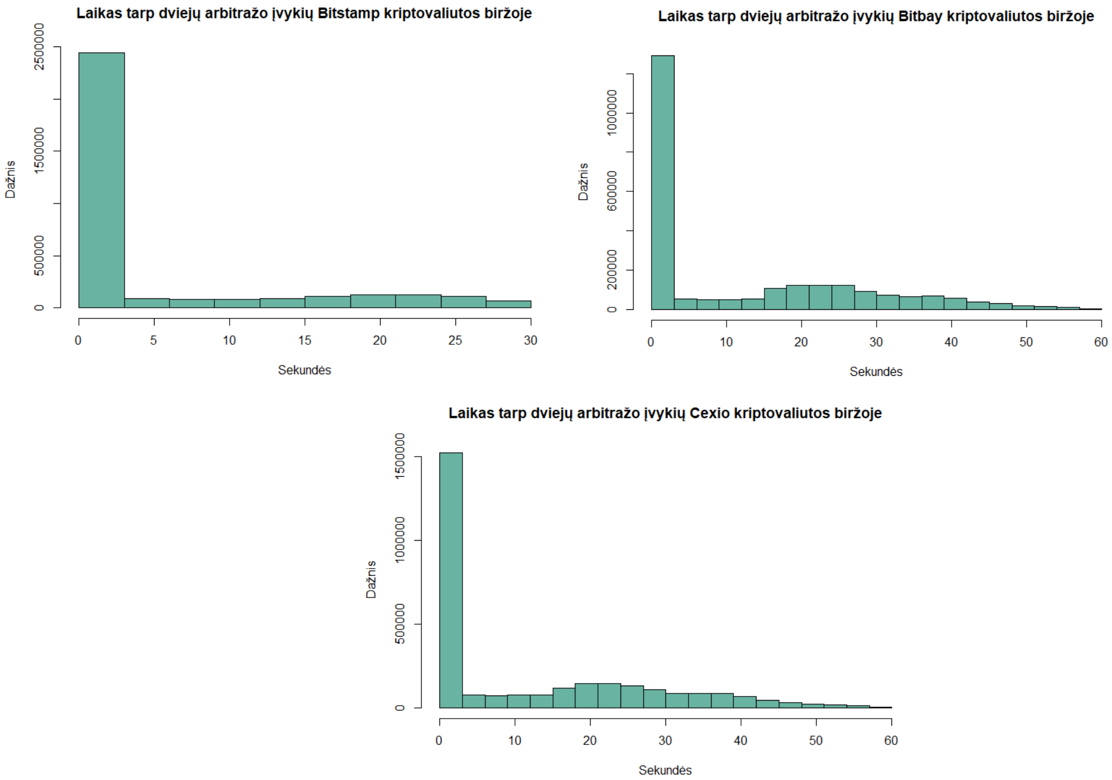


9 pav. Tyrimo eigos schema

3. Tyrimų rezultatai ir jų aptarimas

3.1. Skirstinio priderinimas

Pradėkime nuo laiko tarp dviejų arbitražų įvykių pasiskirstymo histogramos, kuri gali mums suteikti įžvalgų apie duomenų kreivumą, uodegas ar iškrypimus ir padėti palyginti su standartiniais analitiniais skirstiniais. Visų nagrinėjamų kriptovaliutų biržų histogramos yra labai panašios, kadangi didžioji dauguma reikšmių yra ties 0 sekundžių. Visos kitos reikšmės yra daug retesnės, todėl mažai tikėtina, kad turime eksponentinį skirstinį. Vis dėlto atlikime detalesnę analizę.



10 pav. Laiko tarp dviejų arbitražo įvykių histogramos

Eksponentinis skirstinys priklauso tik nuo vieno parametro λ, kas palengvina šito skirstinio panaudojimą duomenims. Žinome, kad vidutiniškas laikas tarp dviejų arbitražų yra lygus 8,88 sekundės „Bitstamp“ kriptovaliutų biržoje, tuomet 12,68 sekundės „Bitbay“ biržoje ir 12,59 sekundės „CEX.IO“ biržoje. Taigi galima apskaičiuoti λ, kuris lygus:

$$\lambda_{BS} = \frac{1}{EX} = \frac{1}{8{,}88} = 0{,}1126 \text{ per sekundę},$$

$$\lambda_{BB} = \frac{1}{EX} = \frac{1}{12{,}68} = 0{,}0788 \text{ per sekundę},$$

$$\lambda_{CE} = \frac{1}{EX} = \frac{1}{12{,}59} = 0{,}0794 \text{ per sekundę}.$$

Norėdami sužinoti tikimybę, kad per 30 sekundžių turėsime arbitražo įvykį pasitelkiame Puasono skirstinį:

$$P(N_{BS}(30) = 1) = \frac{e^{-30*0{,}1126}\, 30*0{,}1126}{1!} \simeq 0{,}1152.$$

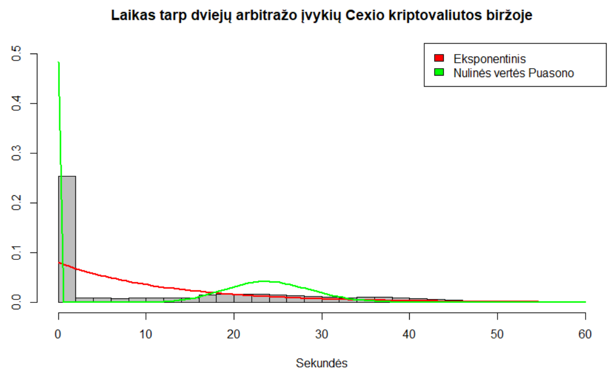
$$P(N_{BB}(30) = 1) = \frac{e^{-30*0,0788}\ 30*0,0788}{1!} \simeq 0,2223.$$

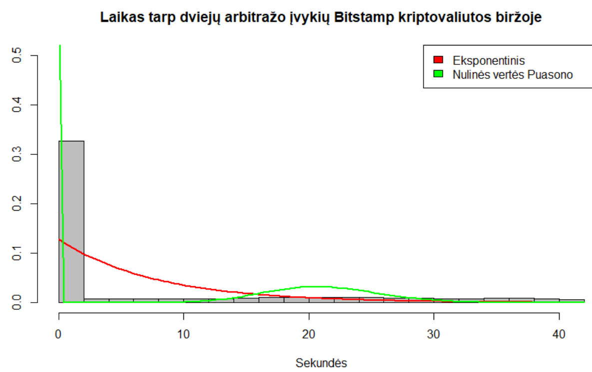
$$P(N_{CE}(30) = 1) = \frac{e^{-30*0,0794}\ 30*0,0794}{1!} \simeq 0,2200.$$

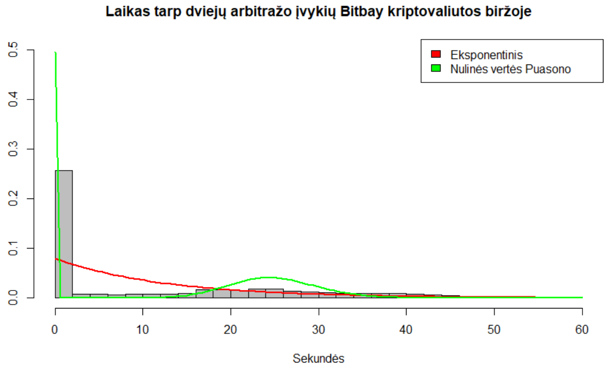
Jei laukimo laikas tarp dviejų arbitražų „Bitstamp“ kriptovaliutų biržoje turėtų eksponentinį pasiskirstimą su parametru 0,1126, tai tikimybė, kad laukimo laikas viršija 30 sekundžių lygi $P(T > 30)$. Kadangi $F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}, kai\ t \geq 0$. Tai $P(T > t) = e^{-\lambda t}$ ir $P(T > 30) = e^{-30*0,1126} \simeq 0,0341$. Taigi tikimybė, kad arbitražo įvykis pasikartos vėliau nei po 30 sekundžių pakankamai maža.

Sulyginus sumodeliuotą eksponentinį skirstinį su realiu skirstiniu, matome, kad skirstiniai panašūs, bet tikrai nesutampa. Sumodeliuotas eksponentinis skirstinys apima tik labai nedidelį nulio reikšmių skaičių. Norėdami visiškai įsitikinti, kad eksponentinis skirstinys nėra tinkamas atliekame suderinamumo hipotezės testą pasinaudojus Kolmogorov-Smirnov‘o ir Anderson-Darling‘o testus, kurių rezultatai matomi 4-oje lentelėje. Kolmogorov-Smirnov‘o testas yra neparametrinis tolydžių, vienmačių tikimybių skirstinių lygybės testas, kurį galima naudoti lyginant imtį su teoriniu tikimybės skirstiniu. Šio testo nulinė hipotezė teigia, kad duomenys atitinka nurodytą skirstinį ir kadangi visų biržų atveju turime p reikšmę < 0.05, tai turime atmesti nulinę hipotezę ir daryti išvadą, kad duomenys statistiškai reikšmingai neatitinka eksponentinį skirstinį. Taip pat Anderson-Darling‘o testas paprastai yra veiksmingesnis palyginti dviejų imčių pasiskirstymą. Atlikus Anderson-Darling‘o testą tik patvirtino, kad eksponentinis skirstinys nenusako šių duomenų pasiskirstymo.

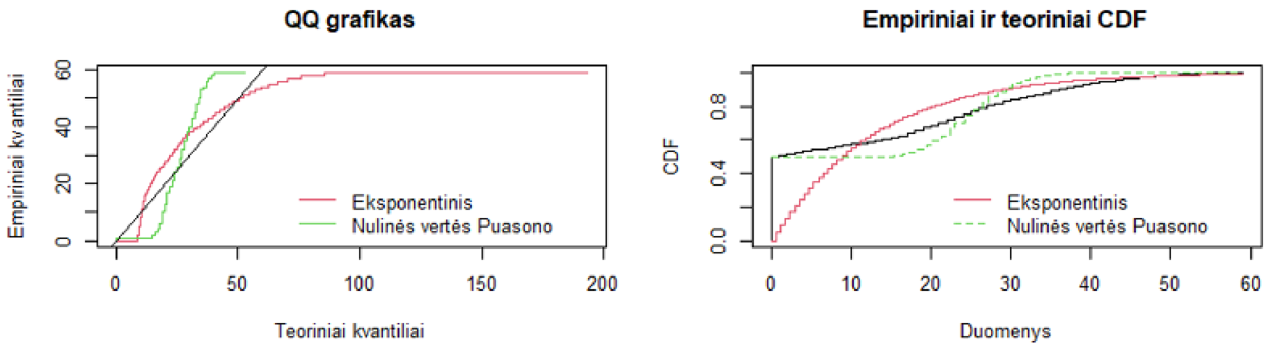
Kadangi turime daug nulio reikšmių verta išbandyti nulinės vertės Puasono skirstinį. Šis skirstinys naudingas, kai turime perteklinių nulio reikšmių ir nulio perteklius yra modeliuojamas nepriklausomai nuo kitų reikšmių. Pasitelkę didžiausio tikėtinumo metodą randame apytikslias parametro reikšmes priderintam ZIP skirstiniui. „Bitstamp“ kriptovaliutų biržai gauname ZIP skirstinį su parametrais $\sigma_{BS} = 0,63$ ir $\mu_{BS} = 21,12$. Tuomet „Bitbay” biržos atveju turime $\sigma_{BB} = 0,50$ ir $\mu_{BB} = 24,84$, o „CEX.IO” atveju – $\sigma_{CE} = 0,48$ ir $\mu_{CE} = 24,11$. Palyginus sumodeliuotą ZIP skirstinį, matome, kad šis skirstinys visų biržų atveju puikiai sumodeliavo nulio reikšmes ir atpažino nedidelį duomenų padidėjimą ties 20–30 sekundžių. Atlikus tuos pačius Kolmogorov-Smirnov‘o ir Anderson-Darling‘o testus gauname labai panašius rezultatus kaip ir eksponentinio skirstinio atveju. Darome išvadą, kad ZIP skirstinys su pateiktais parametrais nenusako mūsų duomenų pasiskirstymo.



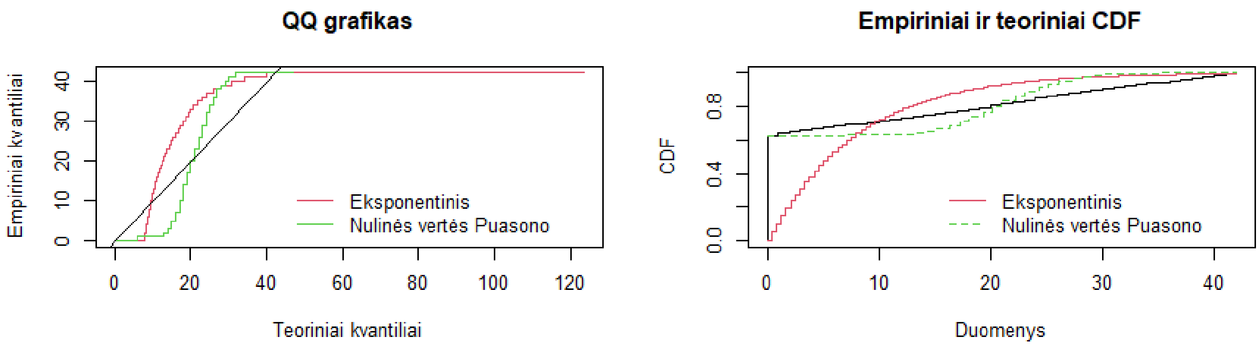




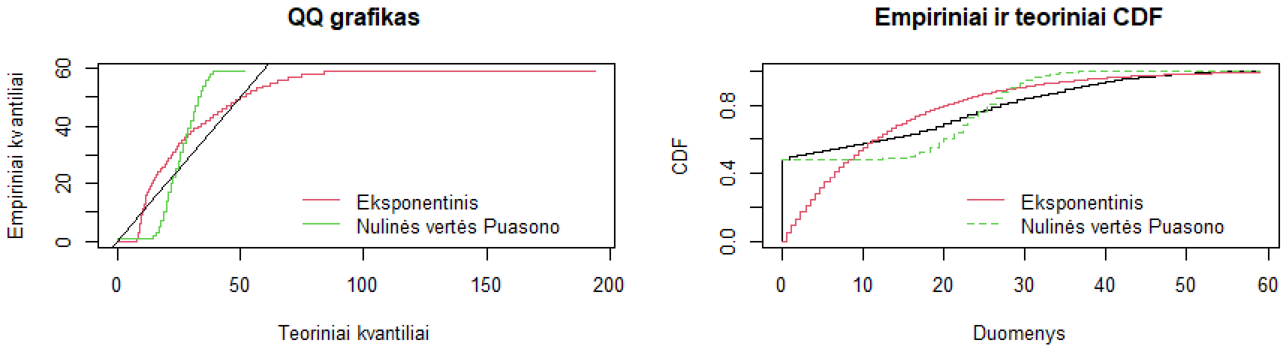
11 pav. Laiko tarp dviejų arbitražo įvykių histograma su sumodeliuotais eksponentinio ir nulinės vertės Puasono skirstiniais



12 pav. Laiko tarp dviejų arbitražo įvykių QQ ir CDF grafikai „Bitbay“ biržai lyginant su sumodeliuoto eksponentinio ir nulinės vertės Puasono skirstiniais



13 pav. Laiko tarp dviejų arbitražo įvykių QQ ir CDF grafikai „Bitstamp“ biržai lyginant su sumodeliuoto eksponentinio ir nulinės vertės Puasono skirstiniais



14 pav. Laiko tarp dviejų arbitražo įvykių QQ ir CDF grafikai „CEX.IO" biržai lyginant su sumodeliuoto eksponentinio ir nulinės vertės Puasono skirstiniais

Lyginant eksponentinio ir nulinės vertės Puasono skirstinių tinkamumą tarpusavyje pasitelkus histogramą, QQ ir CDF grafikus, matome, kad vis dėlto ZIP skirstinys tinkamesnis. Įvertinus AIC, BIC ir tikėtinumo kriterijus, „Bitstamp" kriptovaliutos biržos atveju ZIP skirstinys tinkamesnis, tačiau „Bitbay" ir „CEX.IO" biržoms tinkamesnis eksponentinis skirstinys.

4 lentelė. Laiko tarp dviejų arbitražo skirstinių suderinamumo statistikos sumodeliuotam eksponentiniui ir nulinės vertės Puasono skirstiniui

„Bitstamp"	**Eksponentinis skirstinys**	**Nulinės vertės Puasono skirstinys**
P reikšmė Kolmogorov-Smirnov testui	2,2e–16	2,2e–16
P reikšmė Anderson-Darling testui	1,577e–10	1,577e–10
AIC	22 596 872	21 564 123
BIC	22 596 885	21 564 150
Tikėtinumas (angl. *likelihood)*	–11 298 435	–10 782 060

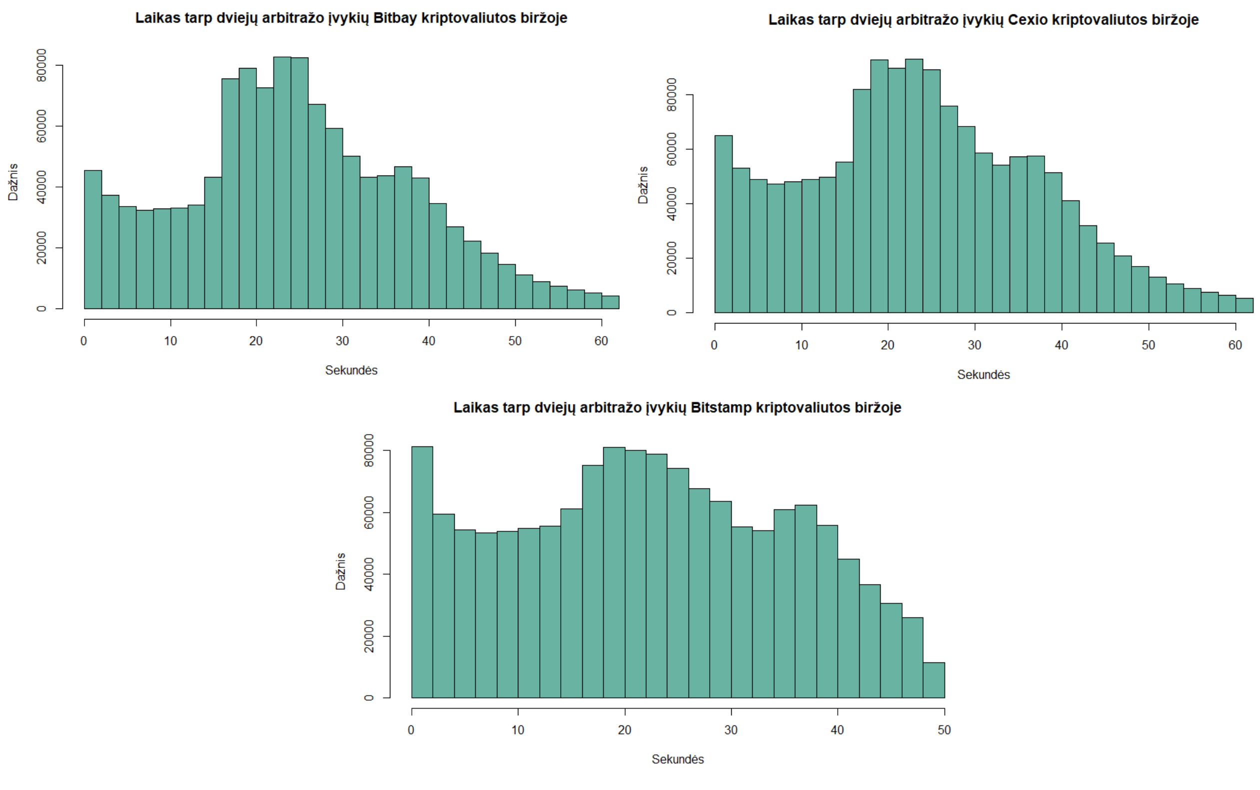
„Bitbay"	**Eksponentinis skirstinys**	**Nulinės vertės Puasono skirstinys**
P reikšmė Kolmogorov-Smirnov testui	2,2e–16	2,2e–16
P reikšmė Anderson-Darling testui	2,419e–10	2,419e–10
AIC	17 454 818	18 946 108
BIC	17 454 831	18 946 133
Tikėtinumas (angl. *likelihood)*	–8 727 408	–9 473 052

„CEX.IO"	**Eksponentinis skirstinys**	**Nulinės vertės Puasono skirstinys**
P reikšmė Kolmogorov-Smirnov testui	2,2e–16	2,2e–16
P reikšmė Anderson-Darling testui	2,027e–10	2,027e–10

AIC	20 795 993	23 853 759
BIC	20 796 006	238 537 85
Tikėtinumas (angl. *likelihood)*	–10 397 996	–11 926 877

Įsitikinome, kad standartiniai skirstiniai naudojami įvertinti laiką tarp dviejų įvykių nėra tinkami šiems duomenų rinkiniams, tačiau verta toliau panagrinėti skirstinių mišinius. Labai puikiai matome, kad 0 sekundžių reikšmė tarp dviejų arbitražo įvykių dominuoja. „Bitstamp“ biržos duomenų rinkinyje šios nulio reikšmės sudaro apie 62,34 % visų reikšmių, „Bitbay“ – 51,76 %, o „CEX.IO“ – 50,22 %. Taigi „Bitstamp“ kriptovaliutos biržoje su tikimybe 0,62 laikas tarp dviejų arbitražo įvykių bus lygus nulis. Atitikankamai „Bitbay“ biržoje su tikimybe 0,52, o „CEX.IO“ biržoje su tikimybe 0,50. Galima pastebėti, kad tikimybė, kad laikas tarp dviejų arbitražo įvykių bus nulis didėja kartu su arbitražo įvykių skaičiumi kriptovaliutos biržoje.

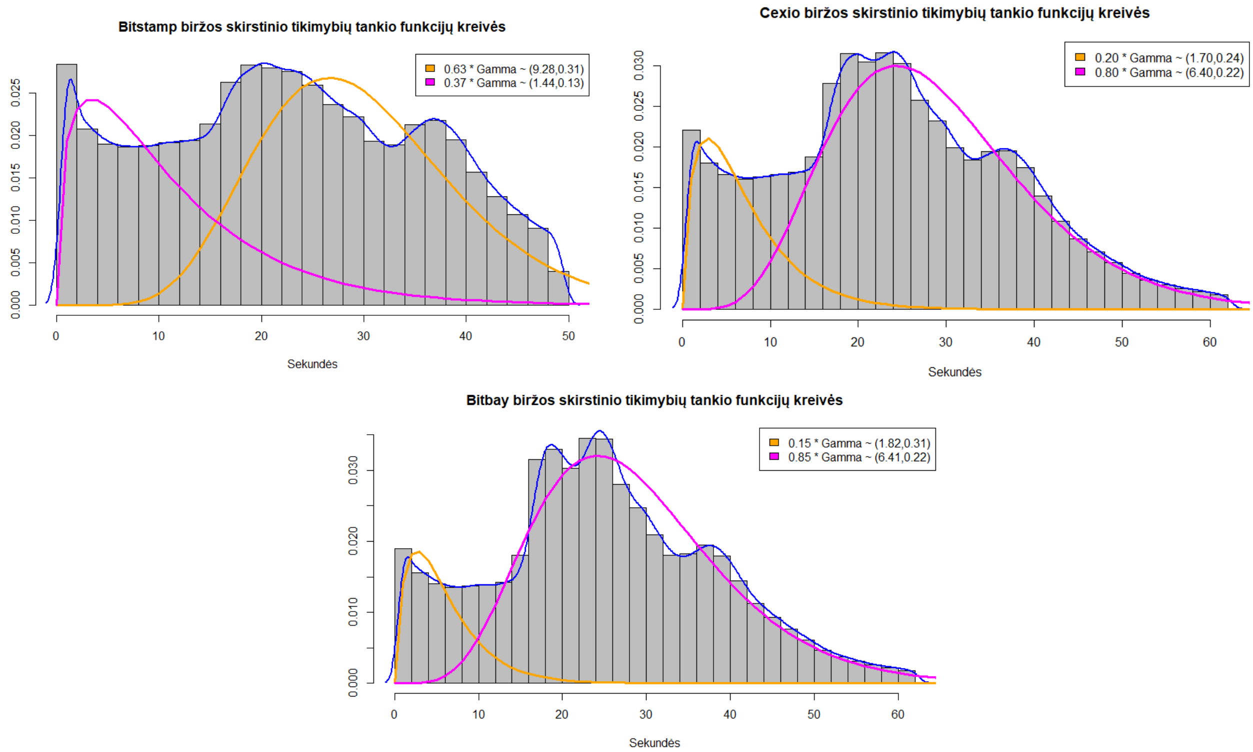
Panaikinus visas nulio reikšmes, laiko tarp dviejų arbitražo pasiskirstymo histogramos tarp visų kriptovaliutų biržų išlieka panašios: turinčios didesnį reikšmių skaičių pradžioje ir tada ties 20–30 sekundžių tarpu.



15 pav. Laiko tarp dviejų arbitražo įvykių histogramos neįtraukiant nulio reikšmių

Nagrinėjama toliau koks skirstinių mišinys gali būti tinkamas šiems duomenims. Darome prielaidą, kad skirstiniai priklauso eksponentinių skirstinių šeimai. Kadangi eksponentinis skirstinys turi tik vieną parametrą ir tikriausiai jo nepakaks nusakyti skirstinių mišinį, tai verta išbandyti gamą skirstinių mišinį.

Randame persidengiančių komponenčių skirstinių rinkinį, pasitelkus tikimybinį klasterizavimo algoritmą (angl. *Expectation maximization,* EM) ir pasirinkus gama skirstinį. Rasti kiekvienai biržai labiausiai tikėtini du gama skirstiniai su parametrais ir proporcijomis. Pateiktose histogramose puikiai matome, kad pradžioje turime gama skirstinį, kuris paaiškina nedidelę dalį pirminių reikšmių ir tada likusi didžioji dalis yra paaiškinama gama skirstinio su visai kitomis parametro reikšmėmis. Nežymiai, tačiau Gama skirstinių parametrai kiekvienoje biržoje skiriasi.



16 pav. Laiko tarp dviejų arbitražo įvykių histogramos neįtraukiant nulio reikšmių su sumodeliuotu dviejų gamos skirstinių mišiniu

Gauname laiko tarp dviejų arbitražų modelį, kurio bendruoju atveju pasiskirstymo funkciją lygi:

$$F(x;\ \Theta_1, \Theta_2) = \begin{cases} C\,,\ \ kai\ x = 0\ ir\ C\ \in [0,1] \\ wF_1(x;\ \Theta_1) + (1-w)F_2(x;\ \Theta_2), \qquad kai\ x > 0 \end{cases}$$

„Bitstamp” biržai pasiskirstymo funkcija lygi:

$$F_{BS}(x;\ \Theta_1, \Theta_2) = \begin{cases} 0.62,\ \ kai\ x = 0 \\ 0.63\Gamma(9.24{,}0.31)\ + 0.37\Gamma(1.44{,}0.13)\,, \qquad kai\ x > 0 \end{cases}$$

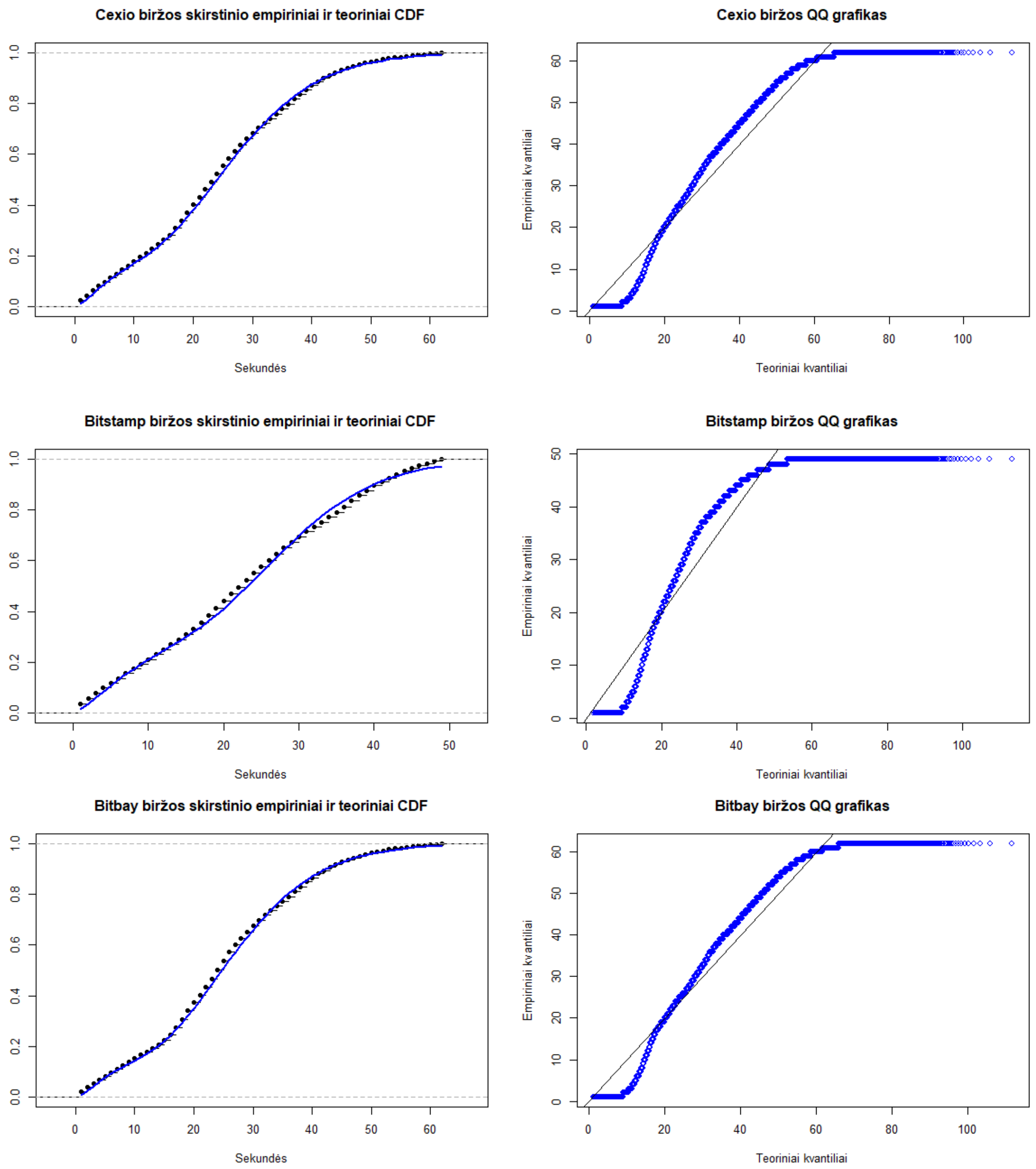
Tuomet „CEX.IO“ biržos atveju pasiskirstymo funkcija lygi:

$$F_{CE}(x;\ \Theta_1, \Theta_2) = \begin{cases} 0.50,\ \ kai\ x = 0 \\ 0.20\Gamma(1.70{,}0.24)\ + 0.80\Gamma(6.40{,}0.22)\,, \qquad kai\ x > 0 \end{cases}$$

Galiausiai „Bitbay“ biržos pasiskirstymo funkcija lygi:

$$F_{BB}(x;\ \Theta_1, \Theta_2) = \begin{cases} 0.52,\ \ kai\ x = 0 \\ 0.15\Gamma(1.82{,}0.31)\ + 0.85\Gamma(6.41{,}0.22)\,, \qquad kai\ x > 0 \end{cases}$$

Nors ir tankio funkcijos grafikas suteikia daug vilčių, kad du gama skirstiniai nusako mūsų duomenų pasiskirstymą, tačiau patikrinkime dar QQ ir CDF grafikus. Matome, kad laiko tarp dviejų arbitražų teorinės ir empirinės pasiskirstymo funkcijos visose biržose beveik identiškos. QQ grafikas taip pat parodo, kad empiriniai ir teoriniai kvantiliai yra labai panašūs, bet turime labai ilgas uodegas.



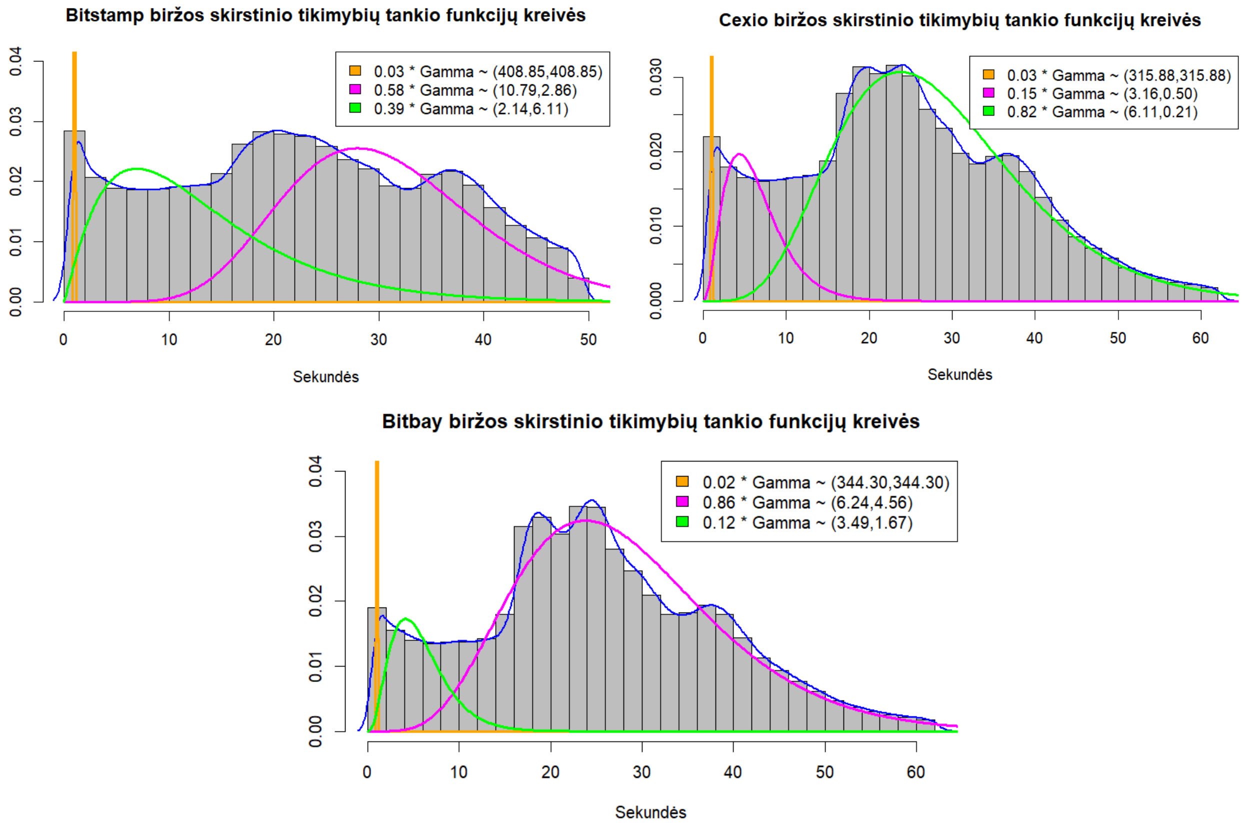
17 pav. Laiko tarp dviejų arbitražo įvykių QQ ir CDF grafikai su sumodeliuotu dviejų gamos skirstinių mišiniu

Nors CDF ir QQ grafikai atrodo neblogai, tačiau atlikus Kolmogorov-Smirnov‘o ir Anderson-Darling‘o testus visoms biržoms, nei vienas iš testų nepatvirtino, kad duomenys pasiskirstę pagal du gama skirstinius su parinktais parametrais. Tikėtinumo rodiklis daug geresnis negu renkantis eksponentinį ar nulinės vertės puasono skirstinį visam duomenų rinkiniui.

5 lentelė. Laiko tarp dviejų arbitražo skirstinių suderinamumo statistiko sumodeliuotam dviejų gamos skirstinių mišiniui

	„Bitbay”	„Bitstamp“	„CEX.IO“
P reikšmė Kolmogorov-Smirnov testui	2,2e–16	2,2e–16	2,2e–16
P reikšmė Anderson-Darling testui	5,016e–10	4,187e–10	4,071e–10
Tikėtinumas (angl. *likelihood)*	–4 721 695	–5 601 093	–5 838 472

Galima pastebėti histrogramose, kad vis dėlto turime ne dvi, o tris viršūnes ir tai kelia klausimą, gal trys skirstiniai gali būti labiau tinkami? Randant trijų gama skirstinių parametrus matome, kad trečiojo skirstinio dalis yra labai maža ir nesuteikia daug informacijos. Atlikus skirstinių suderinimo testus, matome, kad tikėtinumas kažkiek geresnis, tačiau suderinamumo testų *p* reikšmės nepasikeitė.



18 pav. Laiko tarp dviejų arbitražo įvykių histogramos neįtraukiant nulio reikšmių su sumodeliuotu trijų gamos skirstinių mišiniu

6 lentelė. Laiko tarp dviejų arbitražo skirstinių suderinamumo statistikos sumodeliuotam trijų gamos skirstinių mišiniui

	„Bitbay”	„Bitstamp“	„CEX.IO“
P reikšmė Kolmogorov-Smirnov testui	2,2e–16	2,2e–16	2,2e–16
P reikšmė Anderson-Darling testui	5,016e–10	4,187e–10	4,071e–10
Tikėtinumas (angl. *likelihood)*	–4 670 754	–5 493 957	–5 769 386

Skirstinių mišinys dažniausiai atsiranda, kai nagrinėjami duomenys iš skirtingų tipų imčių. Mūsų atveju biržos prekiauja su dar kitomis biržomis ir galbūt priklausomai nuo to su kuria prekiaujama, turime skirtingus duomenų pasiskirstymus. Verta toliau panagrinėti galimas skirstinių tendencijas tarp skirtingų kriptovaliutų biržų. „Bitstamp“, „CEX.IO“ ir „Bitbay“ prekiauja su 18 skirtingų biržų, tačiau dominuoja kelios pagrindinės: prekiauja viena su kita ir dar papildomai su „Exmo“, „Dsx“ ir „Coindeal“.

7 lentelė. Kriptovaliutos biržos su kuriomis vyksta didžiausias arbitražo įvykių skaičius neįtraukiant arbitražo įvykius, kai laikas tarp įvykio yra lygus nuliui

„Bitstamp“ prekyba	**Arbitražo įvykių skaičius**	**Procentas**
„CEX.IO“	577 280	40 %
„Exmo“	338 425	24 %
„Bitbay“	121 581	8 %
„Kraken“	102 360	7 %
„Dsx“	92 664	6 %
„Coindeal“	68 331	5 %

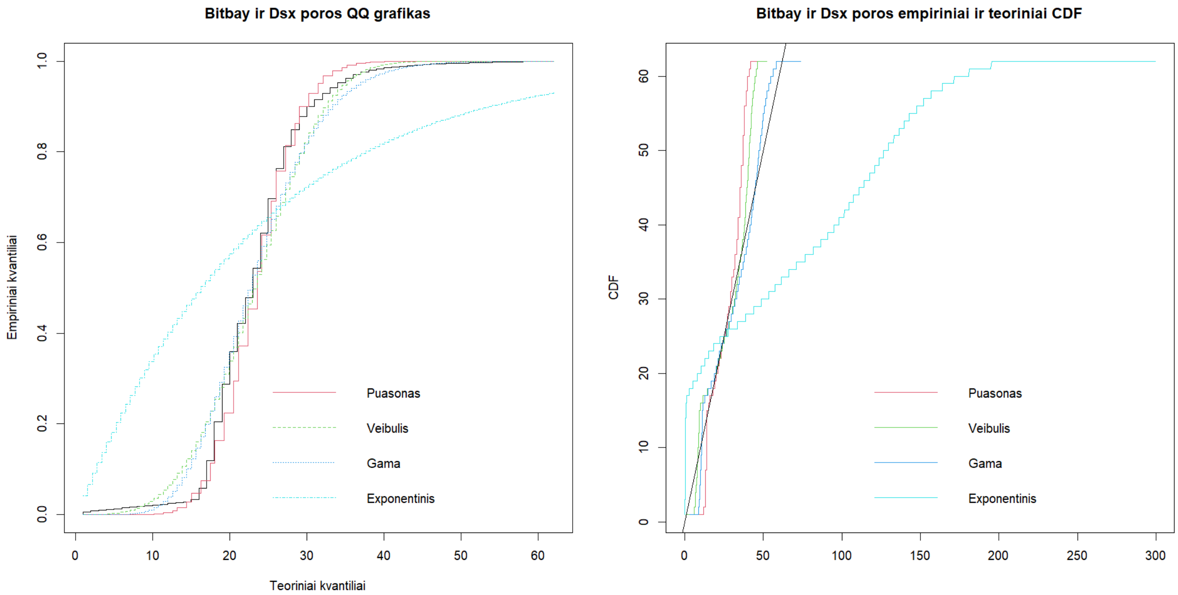
„CEX.IO“ prekyba	**Arbitražo įvykių skaičius**	**Procentas**
„Exmo“	590 434	40 %
„Bitbay“	192 460	13 %
„Dsx“	177 720	12 %
„Bitstamp“	138 724	9 %
„Coindeal“	128 307	9 %
„Kraken“	104 324	7 %

„Bitbay“ prekyba	**Arbitražo įvykių skaičius**	**Procentas**
„Exmo“	437 225	37 %
„CEX.IO“	251 716	21 %
„Dsx“	200 584	17 %
„Bitstamp“	112 118	9 %
„Coindeal“	60 524	5 %
„Coinfalcon“	42 884	4 %

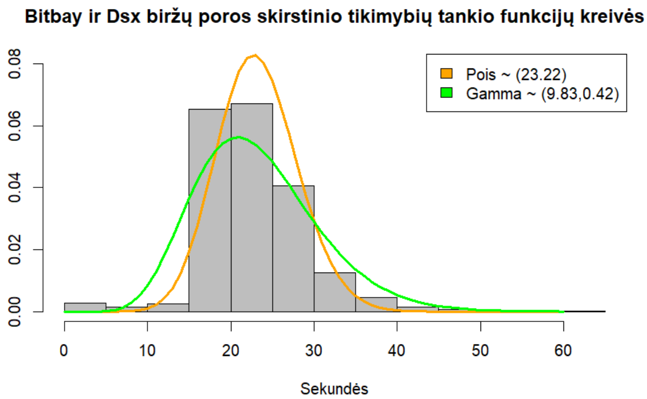
Prieduose pateikti laiko tarp dviejų arbitražų pasiskirstymas per šešias dažniausias kriptovaliutos biržas su kuriomis prekiauja „Bitstamp“, „CEX.IO“ ir „Bitbay“. Galima pastebėti, kad dauguma skirstinių histogramos smarkiai nesiskiria nuo pradinio ir tik kelių biržų laikas tarp arbitražų pasiskirstymas neatitinka bendro skirstinio tendencijų.

Pasiimame vieną iš porų ir atliekam skirstinių priderinimą. Pasirinkta pora, kai pardavimas „Bitbay“ biržoje, o pirkimas – „Dsx“. Išbandomi visi eksponeninių šeimos skirstiniai. QQ grafikas, kuris lygina teorinius ir empirinius kvantilius rodo, kad tinkamiausiais Puasono skirstinys. Tačiau pagal CDF grafiką labiau tiktu gama skirstinys. Abiems atlikus statistinio modelio tinkamumo (angl. *Goodness of fit*) Kolmogorov-Smirnov‘o ir Anderson-Darling‘o testus turime daryti išvadą, kad duomenys statistiškai reikšmingai neatitinka Puasono ir gama skirstinio. Pagal tikėtinumą ir AIC rodiklius labiausiai duomenų pasiskirstymą nusako gama skirstinys.

Praktikoje beveik visada atlikus statistinio modelio tinkamumo testus atmesime nulinę hipotezę, ypač, kai stebėjimų skaičius yra labai didelis, nes tikrieji duomenys niekada nėra paskirstomi pagal jokį teorinį pasiskirstymą. Tačiau daugeliu atvejų duomenų pasiskirstymas yra pakankamai artimas tam tikram teoriniam pasiskirstymui, kad būtų galima gauti gana tikslius rezultatus. Taigi nors ir nepavyko atrasti teorinio skirstinio, kuris nusakytų šitų duomenų pasiskirstymą, bet analizė suteikė daug informacijos, kurie skirstiniai šiems duomenims yra artimiausi.



19 pav. Laiko tarp dviejų arbitražo įvykių QQ ir CDF grafikai „Bitbay“ ir „Dsx“ porai



20 pav. Laiko tarp dviejų arbitražo įvykių histogramos „Bitbay“ ir „Dsx“ porai

8 lentelė. Laiko tarp dviejų arbitražo skirstinių suderinamumo statistikos „Bitbay“ ir „Dsx“ porai

„Bitbay” ir “Dsx” pora	**Puasono skirstinys**	**Gamma skirstinys**
P reikšmė Kolmogorov-Smirnov testui	2,2e–16	2,2e–16
P reikšmė Anderson-Darling testui	2,991e–09	2,991e–09
Tikėtinumas (angl. *likelihood)*	–680 863	–679 323
AIC	1 361 728	1 358 651

3.2. Markovo grandinės modelis

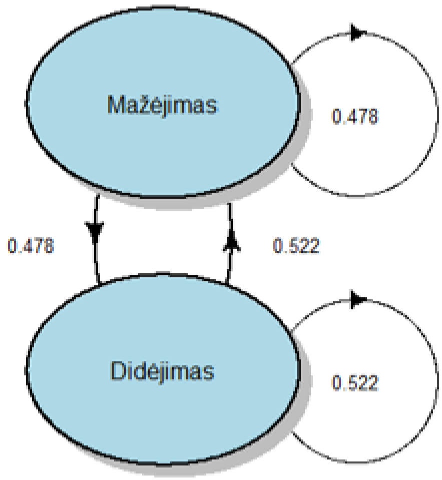
3.2.1. Bitkoinas

Vienas iš Markovo grandinių taikymų yra modeliuoti laiko eilutes, kadangi sėkmingai sugeba analizuoti ir numatyti laiko eilučių duomenis. Kriptovaliutų kainų nepastovumas lemia šios investicijos didelį rizikingumą, todėl dažnai sunku apsispręsti ar verta investuoti. Siekiant pagerinti apsisprendimą investuoti, kainos pokytį galima įvertinti kaip stochastinį procesą, kuris kaip manoma turi Markovo priklausomybę su atitinkamais būsenos perėjimo tikimybių matricomis pagal tam tikrą būsenos tempą.

Pritaikant šį metodą bitkoino dienos grąžoms, pradžioje gauname, kad vidutinė dienos grąža nagrinėjant laikotarpį 2017-09-23 – 2023-04-30 yra 0,001055 % didesnė nei praeitos dienos kaina. Apsibrėžiame Markovo grandinės būsenas:

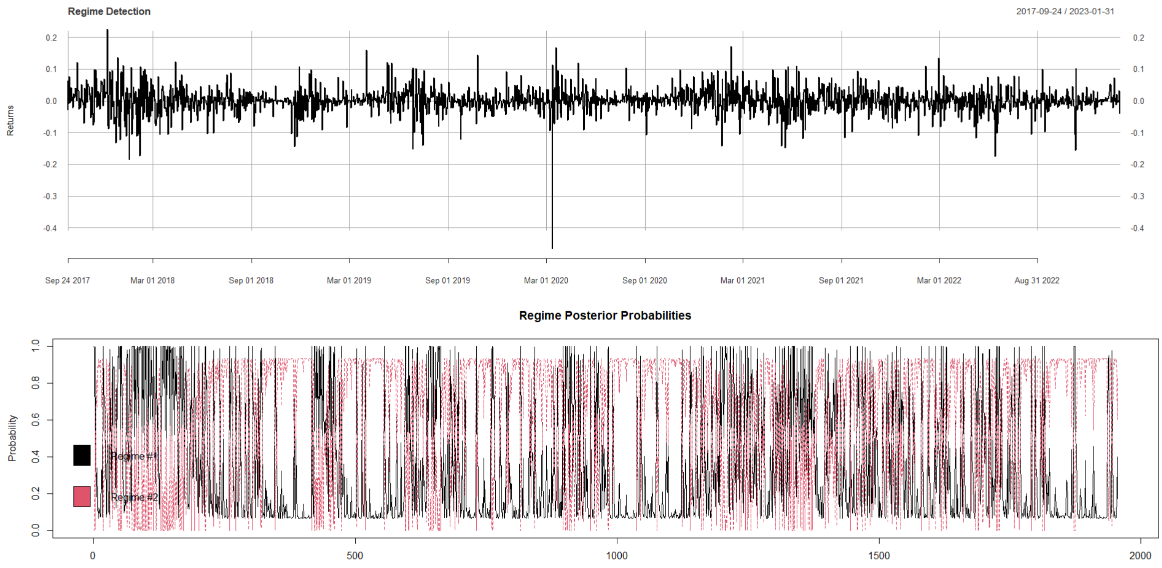
- jei dienos grąža buvo mažesnė nei 0, turime būseną mažėjimas;
- jei dienos grąža buvo didesnė nei 0, tai turime būseną didėjimas.

Sukurtas Markovo grandinės modelis parodo mums, kad tikimybė pereiti iš būsenos, mažėjimas į didėjimas, yra didžiausia. Vis dėlto likusios būsenos perėjimo tikimybė yra labai panaši, o tai tik patvirtina kiek kriptovaliutų grąža gali būti sunkiai prognozuojama.



21 pav. Markovo grandinės perėjimo matrica bitkoino valiutai

Pritaikysime paslėptą Markovo modelį bitkoino grąžoms. Dviejų būsenų paslėptas Markovo modelis pritaikytas naudojant EM algoritmą. Pastebime, kad laikotarpiais, kai rinka buvo ramesnė ir grąžos netokios didelės, tai paslėptas Markovo modelis suteikė didelę tikimybę režimui #2. Kai turime didesnius grąžos pokyčius rinkoje, tuomet modelis suteikia didesnę tikimybę režimui #1. Nors ir nuo 2018 metų antros pusės įmanoma išskirti abu režimus, tačiau nuo 2021 metų rinka tapo labai nepastovi ir sparčiai pradėjo kisti tikimybės tarp abiejų būsenų. Šiame laikotarpyje sunku pamatyti vieną pastovią būseną ilgesniam laikotarpiui. Išbandžius paslėptą Markovo modelį trim būsenom režimų išskyrimas tapo daug sudėtingesnis ir tai leidžia daryti išvadą, kad trijų režimų galimai bitkoinas neturi.

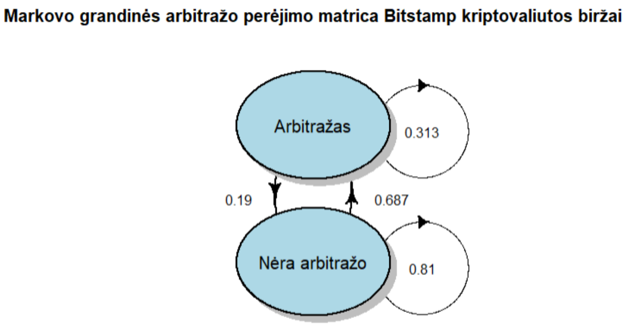


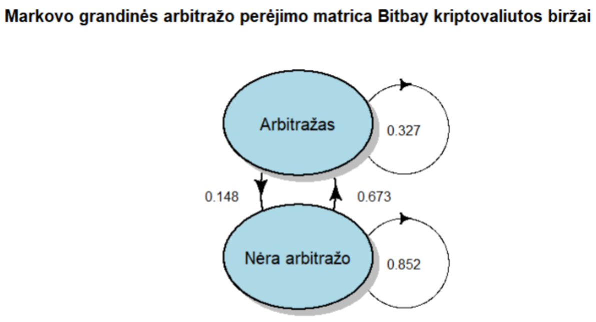
22 pav. Bitkoino grąžų dviejų režimų tikimybės

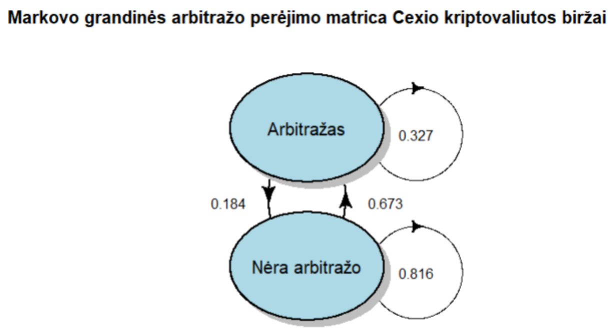
3.2.2. Arbitražo įvykiai

Norint taikyti diskretaus laiko Markovo grandinės modelį turimiems trijų kriptovaliutų biržų arbitražo įvykiams ir laiką tarp jų duomenims, pradžioje turime suskirstyti nagrinėjamą laikotarpį į intervalus ir įvertinti ar tame intervale turime arbitražo įvykį. Kadangi žinome, kad „Bitstamp“ kriptovaliutų biržoje vidutiniškai arbitražas atsiranda per 8,8 sekundžių, „Bitbay“ biržoje vidutiniškai per 12,68 sekundžių ir „CEX.IO“ – 12,59 sekundžių, tai visoms biržoms, kad galėtume palyginti tarpusavyje, intervalas suskirstomas į 15 sekundžių. Gautas duomenų rinkinys su dviem būsenomis.

Matome, kad kriptovaliutų biržos „CEX.IO“ ir „Bitbay“ sukonstruotos Markovo grandinės yra beveik identiškos, tai didelė tikimybė, kad sukurtas modelis vienai biržai puikiai tiks ir kitai. Šių abiejų Markovo grandinės parodo, kad jei neturėjo arbitražo įvykio, tai per ateinančias 15 sekundžių su tikimybe lygia 0,816 „CEX.IO“ biržoje ir su tikimybe 0,852 „Bitbay“ biržoje arbitražo įvykio nebus. Mažesnė tikimybė, kuri lygi 0,673 abiejose biržose, kad turėsime arbitražo įvykį. Panaši tendencija išlieka ir su „Bitstamp“ biržos Markovo grandine, tačiau skiriasi tikimybės. Vertinant šiuos kriptovaliutų biržos arbitražo įvykius turime net 0,81 tikimybę, kad jei neturime arbitražo įvykio per kitas 15 sekundžių jo ir nebus. Tačiau vos mažesnė tikimybė 0,687, kad vis dėlto pereisime į arbitražo būseną.







23 pav. Markovo grandinės perėjimo matricos tarp arbitražo ir nėra arbitražo būsenų

Nors ir pradžioje darėme prielaidą, kad tinkamiausias intervalo suskaidymas būtų atsižvelgiant į nagrinėjamų duomenų laiko tarp dviejų arbitražų vidurkį, tačiau verta atlikti detalesnę analizę su kokiu intervalu Markovo grandinės modelis turėtų geriausius rezultatus. Norint patikrinti kiek sukurtas Markovo grandinės modelis gali teisingai prognozuoti kitą būseną realiems duomenims, padalinsime duomenų rinkinius į mokymo ir testavimo imtis. Paskutinės 20 % reikšmių ir bus mūsų testavimo imtis. Likusios reikšmės naudojamos Markovo grandinės kūrimui. Norint surasti optimaliausią laiko intervalo išskaidymą, nagrinėjamas laikotarpis suskirstomas į kelis skirtingus laiko intervalus ir palyginamas rezultatus.

Pradedant nuo „Bitstamp“ kriptovaliutos biržos vietoj 15 sekundžių išbandomi 10, 30, 40 ir atliekamas tyrimas kaip tai paveikia būsenų pasikeitimo tikimybes.

9 lentelė. Skirtingų laiko intervalo išskaidymo rezultatai „Bitstamp“ biržos Markovo grandinei

10 sekundžių intervalas	Arbitražas	Nėra arbitražo
Arbitražas	0.2430737	0.7569263
Nėra arbitražo	0.1116450	0.8883550

15 sekundžių intervalas	Arbitražas	Nėra arbitražo
Arbitražas	0.3144211	0.6855789
Nėra arbitražo	0.1854104	0.8145896

30 sekundžių intervalas	Arbitražas	Nėra arbitražo
Arbitražas	0.7892652	0.2107348
Nėra arbitražo	0.1962376	0.8037624

40 sekundžių intervalas	Arbitražas	Nėra arbitražo
Arbitražas	0.3656164	0.6343836
Nėra arbitražo	0.2808252	0.7191748

Matome, kad pasirinktas 30 sekundžių intervalas turi pakankamai dideles tikimybes, jei turime arbitražo būseną, kad ji ir toliau išliks ir jei nėra arbitražo, su didele tikimybe arbitražo įvykio ir nebus. Perėjimo tikimybė iš arbitražo nebuvimo būsenos į arbitražą nėra didelė, tačiau ji didžiausia, kai turime 40 sekundžių intervalą. Mažiausiu pasirinktu 10 sekundžių intervalo atveju, tikimybė, kad iš arbitražo nebuvimo pereisime į arbitražo būsena yra ypač maža, bet kad iš arbitražo būsenos nebeturėsime arbitražo įvykio per kitas 10 sekundžių yra labai didelė.

„Bitbay“ ir „CEX.IO“ kriptovaliutų biržose pasirenkam 15 sekundžių išbandomi 10, 30, 40 ir atliekamas tyrimas kaip tai paveikia būsenų perėjimo tikimybes. Tendencija išlieka labai panaši, kaip ir nagrinėjant „Bitstamp“ biržą, tačiau skiriasi pačios tikimybės. Šių abiejų biržų atveju didžiausia tikimybė pereiti iš arbitražo nebuvimo į arbitražo būseną, kai turime 40 sekundžių intervalą, bet tuo pačiu, esant arbitražo būsenai daug didesnė tikimybė pereiti į arbitražo nebūvimą.

Taikant 30 sekundžių intervalą turime ypač didelę tikimybę, kad jei turime arbitražo įvykį, tai ši būsena pasikartos.

10 lentelė. Skirtingų laiko intervalo išskaidymo rezultatai „Bitbay“ biržos Markovo grandinei

10 sekundžių intervalas

	Arbitražas	Nėra arbitražo
Arbitražas	0.23503340	0.7649666
Nėra arbitražo	0.08756804	0.9124320

15 sekundžių intervalas

	Arbitražas	Nėra arbitražo
Arbitražas	0.3057285	0.6942715
Nėra arbitražo	0.1419595	0.8580405

30 sekundžių intervalas

	Arbitražas	Nėra arbitražo
Arbitražas	0.7783294	0.2216706
Nėra arbitražo	0.1392978	0.8607022

40 sekundžių intervalas

	Arbitražas	Nėra arbitražo
Arbitražas	0.3584535	0.6415465
Nėra arbitražo	0.2080950	0.7919050

11 lentelė. Skirtingų laiko intervalo išskaidymo rezultatai „CEX.IO“ biržos Markovo grandinei

10 sekundžių intervalas

	Arbitražas	Nėra arbitražo
Arbitražas	0.2350418	0.7649582
Nėra arbitražo	0.1030862	0.8969138

15 sekundžių intervalas

	Arbitražas	Nėra arbitražo
Arbitražas	0.3055761	0.6944239
Nėra arbitražo	0.1695334	0.8304666

30 sekundžių intervalas

	Arbitražas	Nėra arbitražo
Arbitražas	0.7755758	0.2244242
Nėra arbitražo	0.1800967	0.8199033

40 sekundžių intervalas

	Arbitražas	Nėra arbitražo
Arbitražas	0.3578573	0.6421427
Nėra arbitražo	0.2531189	0.7468811

Užtenka vien palyginti būsenų perėjimų tikimybes, kad žinotume jog visoms biržoms tinkamiausias 30 sekundžių intervalas. Visų kitų laiko intervalų atžvilgiu nesvarbu ar turim arbitražo ar arbitražo nebuvimo įvykį, didžiausia tikimybė, kad arbitražo kitoje būsenoje ir nebus. Tokiam modeliui jautrumo rodiklis visada bus lygus nuliui ir Markovo grandinė netenkins pagrindinės savybės.

Tęsiame toliau su 30 sekundžių intervalu. Įvertinti modelio tikslumą gausime sumaišymo matricas ir jautrumo, specifiškumo ir tikslumo rodiklius. Kadangi duomenų kiekis yra pakankamai didelis, tai 20 % duomenų atskyrimas į testavimo imtį beveik nepaveikė būsenų perėjimo tikimybių. Imant 30 sekundžių intervalą „Bitstamp“ biržos atveju paskutinė būsena validavimo imtyje – arbitražo, „Bitbay“ ir „CEX.IO“ atveju – nėra arbitražo. Startuojama iš šios būsenos ir prognozuojama visas likusias. Kadangi Markovo grandinės modelis yra be atminties, tai mums tik svarbu kokią turime būseną dabar, kad išprognozuotume kitą. Pagal tai galima sulyginti su tikra būsena ir gauti sumaišymo matricą. Sumaišymo matrica (angl. *confusion matrix*) yra populiarus klasifikavimo modelių veikimo pavyzdys, kuris apima teisingas ir neteisingas klasifikuotas reikšmes palyginus su faktiniais bandymų duomenų rezultatais. Pasinaudojus sumaišymo matrica galima gauti modelio jautrumą (angl. *sensitivity*), kuris parodo teisingai išprognozuotų faktinių arbitražo ir bendro faktinių arbitražo įvykių skaičiaus santykį. Taip pat specifiškumą (angl. *Specificity*), parodo teisingai išprognozuotų faktinių nėra arbitražo ir bendro faktinių nėra arbitražo įvykių skaičiaus santykį. Galiausiai tikslumas (angl. *Accuracy*) parodo teisingai numatytų ir visų būsenų skaičiaus santykį.

Imant 30 sekundžių intervalą Markovo grandinės „Bitstamp“ atveju turime:

$$Jautrumas = \frac{TP}{(TP + FN)} = \frac{178\,904}{178\,904 + 53\,449} = 0.76997$$

$$Specifiškumas = \frac{TN}{(TN + FP)} = \frac{161\,893}{53\,448 + 161\,893} = 0.75180$$

$$Tikslumas = \frac{TN + TP}{TN + TP + FN + FP} = \frac{178\,904 + 161\,893}{178\,904 + 161\,893 + 53\,448 + 53\,449} = 0.76123$$

Gauname pakankamai gerus rezultatus ir visų trijų rodiklių reikšmės yra visai didelės. Markovo grandinės modelis imant 30 sekundžių intervalą vienodai prognozavo ir arbitražo įvykius ir įvykius, kai arbitražo nėra.

12 lentelė. Sumaišymo matrica „Bitstamp“ biržos Markovo modeliui 30 sekundžių intervalui

Tikrai būsena

Išprognozuota būsena	Arbitražas	Nėra arbitražo	Iš viso išprognozuotos būsenos	Preciziškumas (angl. *precision*)
Arbitražas	178 904	53 448	232 352	77 %
Nėra arbitražo	53 449	161 893	215 342	75,18 %
Iš viso tikros būsenos	232 353	215 341	447 694	
Išsamumas (angl. *recall*)	77 %	75,18 %		

Imant 30 sekundžių intervalą Markovo grandinės „Bitbay“ atveju turime:

$$Jautrumas = \frac{TP}{(TP + FN)} = \frac{227\,797}{227\,797 + 8\,222} = 0.96516$$

$$Specifiškumas = \frac{TN}{(TN + FP)} = \frac{203\,313}{203\,313 + 8\,221} = 0.96113$$

$$Tikslumas = \frac{TN + TP}{TN + TP + FN + FP} = \frac{227\,797 + 203\,313}{227\,797 + 8\,221 + 8\,222 + 203\,313} = 0.96326$$

Šios biržos atveju turime net geresnius rezultatus. Sukurtam modeliui vienodai pavyko išprognozuoti arbitražo įvykius ir įvykį, kai nėra arbitražo.

13 lentelė. Sumaišymo matrica „Bitbay“ biržos Markovo modeliui 30 sekundžių intervalui

Tikrai būsena

Išprognozuota būsena	Arbitražas	Nėra arbitražo	Iš viso išprognozuotos būsenos	Preciziškumas (angl. *precision*)
Arbitražas	227 797	8 221	236 018	96,52 %

Nėra arbitražo	8 222	203 313	211 535	96,11 %
Iš viso tikros būsenos	236 019	211 534	447 553	
Išsamumas (angl. *recall*)	96,52 %	96,11 %		

Imant 30 sekundžių intervalą Markovo grandinės „CEX.IO“ atveju turime:

$$Jautrumas = \frac{TP}{(TP + FN)} = \frac{285\,007}{285\,007 + 17\,040} = 0.94358$$

$$Specifiškumas = \frac{TN}{(TN + FP)} = \frac{128\,710}{128\,710 + 17\,039} = 0.88309$$

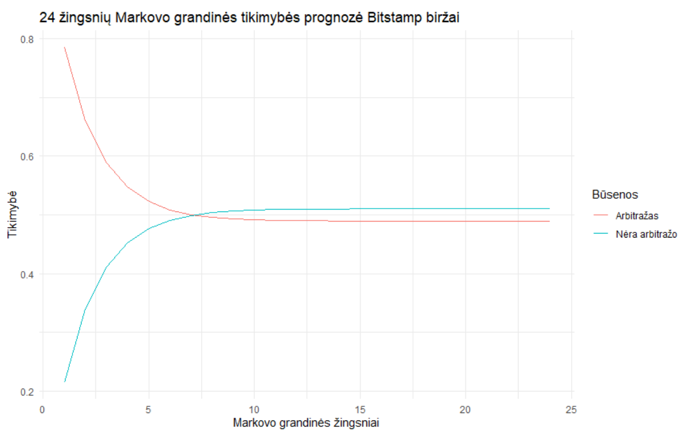
$$Tikslumas = \frac{TN + TP}{TN + TP + FN + FP} = \frac{128\,710 + 285\,007}{128\,710 + 285\,007 + 17\,039 + 17\,040} = 0.92390$$

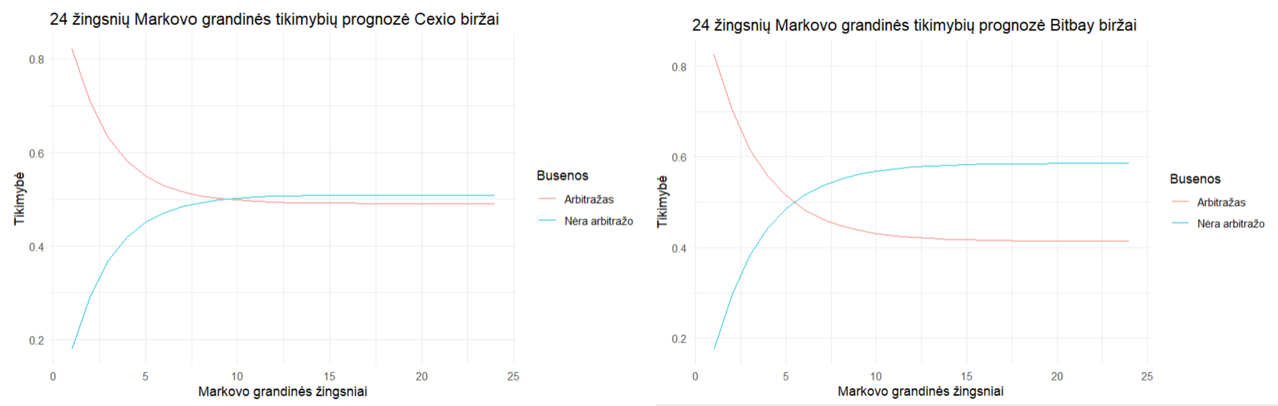
Šios biržos atveju Markovo grandinei silpniau sekėsi išprognozuoti įvykį, kai nėra arbitražo, tačiau jautrumo ir tikslumo rodikliai vis vien labai aukšti.

14 lentelė. Sumaišymo matrica „CEX.IO“ biržos Markovo modeliui 30 sekundžių intervalui

		Tikrai būsena			
		Arbitražas	Nėra arbitražo	Iš viso išprognozuotos būsenos	Preciziškumas (angl. *precision*)
Išprognozuota būsena	Arbitražas	285 007	17 039	302 046	94,36 %
	Nėra arbitražo	17 040	128 710	145 750	88,31 %
	Iš viso tikros būsenos	302 047	145 749	447 796	
	Išsamumas (angl. *recall*)	94,36 %	88,31 %		

Įvertinkime kaip keisis būsenų perėjimo tikimybė kitiems 24 grandinės žingsniams, o t.y. kitoms 12 minučių, jei startuotume iš arbitražo būsenos. Pateiktame grafike matome, kad kažkur po 7 žingsnio (po 3,5 minutės) arbitražo ir arbitražo nebuvimo būsenų tikimybės susivienodina. Jei startuojame iš ne arbitražo įvykio, tai turime veidrodinę situaciją, kad išlikti toje pačioje būsenoje tikimybė yra labai didelė, bet po 7 žingsnio jinai susivienodina.





24 pav. 24 žingsnių Markovo grandinės tikimybės prognozė „Bitstamp“, „CEX.IO“ ir „Bitbay“ biržai

Naudinga patikrinti stacionarios būsenos (angl. *steady state*) tikimybę. Markovo grandinės stacionari būsena yra ilgalaikė tikimybė, kad sistema bus kiekvienoje būsenoje. Kitaip tariant, tai tikimybė, kai pritaikytų perėjimų skaičius nebeturi įtakos būsenos vektoriui, t.y. dabartinė elgsena tęsis ir ateityje. Gauname Markovo grandinės stacionarių būsenų vektorius.

$$CE = [Arbitražas \quad Nėra\ arbitražo] = [0{,}45 \quad 0{,}55]$$

$$BS = [Arbitražas \quad Nėra\ arbitražo] = [0{,}48 \quad 0{,}52]$$

$$BB = [Arbitražas \quad Nėra\ arbitražo] = [0{,}39 \quad 0{,}61]$$

Taip pat verta patikrinti vidutinį perėjimo laiką (angl. *mean first passage time*) pereinant pirmą kartą iš vienos būsenos į kitą. Vidutinis pirmojo praėjimo laikas yra naudingas kriterijus analizuojant Markovo modelių elgseną.

15 lentelė. Markovo vidutinis būsenos perėjimo laikas „Bitstamp“, „Bitbay“ ir „CEX.IO“ biržoms

	Vidutinis perėjimo laikas į nėra arbitražo įvykį	Vidutinis perėjimo laikas į arbitražo įvykį
„Bitstamp”	4,654914 žingsniai arba 2,33 minutės	4,853621žingsniai arba 2,42 minutės
„Bitbay”	5,744034 žingsniai arba 2,87 minutės	8,124014 žingsniai arba 4 minutės
„CEX.IO“	5,609499 žingsniai arba 2,80 minutės	5,813445 žingsniai arba 2,90 minutės

Atitinkamai galima apskaičiuoti pirmąjį vidutinį pasikartojimo laiką (numatomą žingsnių skaičių norint grįžti į būseną, jei ji buvo pradinė) kiekvienai pasikartojančiai perėjimo būsenai.

16 lentelė. Markovo vidutinis pasikartojimo laikas „Bitstamp“, „Bitbay“ ir „CEX.IO“ biržoms

	Vidutinis arbitražo įvykio pasikartojimmo laikas	Vidutinis nėra arbitražo įvykio pasikartojimmo laikas
„Bitstamp”	2,042688 žingsniai arba 1,02 minutės	1,959060 žingsniai arba 0,98 minutės
„Bitbay”	2,414340 žingsniai arba 1,20 minutės	1,707044 žingsniai arba 0,85 minutės
„CEX.IO“	2,036357 žingsniai arba 1,02 minutės	1,964918 žingsniai arba 0,98 minutės

Viena iš Markovo grandinės savybių, kad ji turi būti neredukuojama (angl. *irreducible*), o tai reiškia, kad bet kurią būseną j galima pasiekti iš bet kurios būsenos i per baigtinį žingsnių skaičių.

Kiekviena Markovo grandinės būsena komunikuoja viena su kita. Atlikus statistinį testą gauname, kad visų biržų Markovo grandinės yra neredukuojamos ir ši savybė yra tenkinama.

Išvados

1. Arbitražo galimybės kriptovaliutų rinkoje egzistuoja ir arbitražo prekyba vis dar populiari strategija tarp investuotojų. Tačiau pasinaudoti arbitražo galimybe ir iš jos uždirbti nėra taip lengva. Investuotojai turi reaguoti greitai, turėti lėšas kriptovaliutų biržoje, kurioje susidaro arbitražo galimybė ir prekiauti su įvairiomis biržomis norint gauti maksimalų pelną. Tam įgyvendinti naudojamos kompiuterinės programos, galinčios gauti visą informaciją realiu laiku iš įvairių kriptovaliutų biržų ir akimirksniu ne tik nuspręsti ar atsiradusi arbitražo galimybė yra pelninga pagal investuotojo lūkesčius, bet ir atlikti pirkimo ir pardavimo sandorius.
2. Įvertinus laiką tarp dviejų bitkoino arbitražo pastebime, kad duomenų pasiskirstymas artimiausias dviejų gama skirstinių mišiniui, kai atskiriame nulines reikšmes su tam tikra tikimybe. Tačiau suderinamumo testai nepatvirtino, kad du gama skirstiniai gali nusakyti nagrinėjamų duomenų pasiskirstymą. Nors ir nepavyko atrasti teorinį skirstinį ar jų mišinio, kuris pilnai nusakytų laiką tarp arbitražo įvykių pasiskirstymą, bet tai suteikė daug informacijos tolimesniems tyrimams. Galimi sandoriai, arbitražo įvykiai ir laukimo laikas tarp arbitražo įvykių skiriasi priklausomai su kuriomis biržomis atliekami pirkimo ir pardavimo sandoriai. Neužtenka nagrinėti visas arbitražo galimybes parduodant vienoje biržoje ir perkant bet kurioje kitoje, o reikia atskirai nagrinėti kiekvienos poros laiką tarp arbitražų pasiskirstymą. Taigi svarbu ne tik kur parduodama, bet ir kur perkamas bitkoinas. Bendrai arbitražo pasiskirstymai yra sunkiai identifikuojami, tačiau biržų porų lygmenyje tą galima padaryti šiek tiek tiksliau. Taip pat įtakos gali turėti biržos rolė, kuri nusako ar tai kriptovaliutos birža, kurioje daugiau atliekami tik pardavimai ar ir pirkimai. Analizė gali būti tęsiama apsvarstant kitas galimas tendencijas, kurios gali turėti įtakos duomenų pasiskirstymui. Tokios kaip paros laikos, savaitės dienos ir panašiai.
3. Sukurtas Markovo grandinės modelis kiekvienai kriptovaliutų biržai sugebėjo išprognozuoti kitą būseną su tikslumu 0,92 „CEX.IO“ biržai, 0,96 „Bitbay“ biržai ir 0,76 „Bitstamp“ biržai. Markovo grandinės prognozavimo rezultatai patvirtino, kad užtenka žinoti dabartinę būseną, kad nesunkiai išprognozuoti kitą, t.y. arbitražo įvykio tikimybė priklausoma tik nuo esamos sistemos būsenos. Markovo grandinės modelis padėjo įvertinti, kad vidutiniškai lauksime apie 2–4 minutes iki arbitražo įvykio, jei startuosime iš nėra arbitražo būsenos, o startavus iš arbitražo įvykio ši būsena pasikartos maždaug po 1 minutės. Ilgiausiai arbitražo būsenos lauksime „Bitbay“ biržoje. Verta paminėta, kad darant prognozavimą tam pačiam laikotarpiui visoms trim kriptovaliutų biržoms, „CEX.IO“ birža turėjo du kartus daugiau arbitražo nei nėra arbitražo būsenų ir tai daugiausiai iš visų nagrinėjamų biržų, o „Bitstamp“ ir „Bitbay“ būsenų arbitražas ir nėra arbitražo skaičius yra beveik toks pat. Tai leidžia manyti, kad arbitražo galimybių skaičius kriptovaliutų biržose gali kisti ir reikia detalesnio tyrimo surandant priežastingumą. Taip pat Markovo grandinės modelio stacionarios būsenos parodė, kad didesnė tikimybė jog arbitražo įvykio nebus, o tai gali reikšti, kad ilguoju laikotarpiu galimai kriptovaliutų rinkoje turime nežymu efektyvumo požymį. Vis dėlto Markovo grandinės modelis yra be atminties, o tai nėra visiškai patikimas modelis. Jis gali padėti investuotojui priimti sprendimą, tačiau jei Markovo grandinės modeliui nepavyktų atspėti būsenos, reikalingas sudėtingesnis modelis.

Literatūros sąrašas

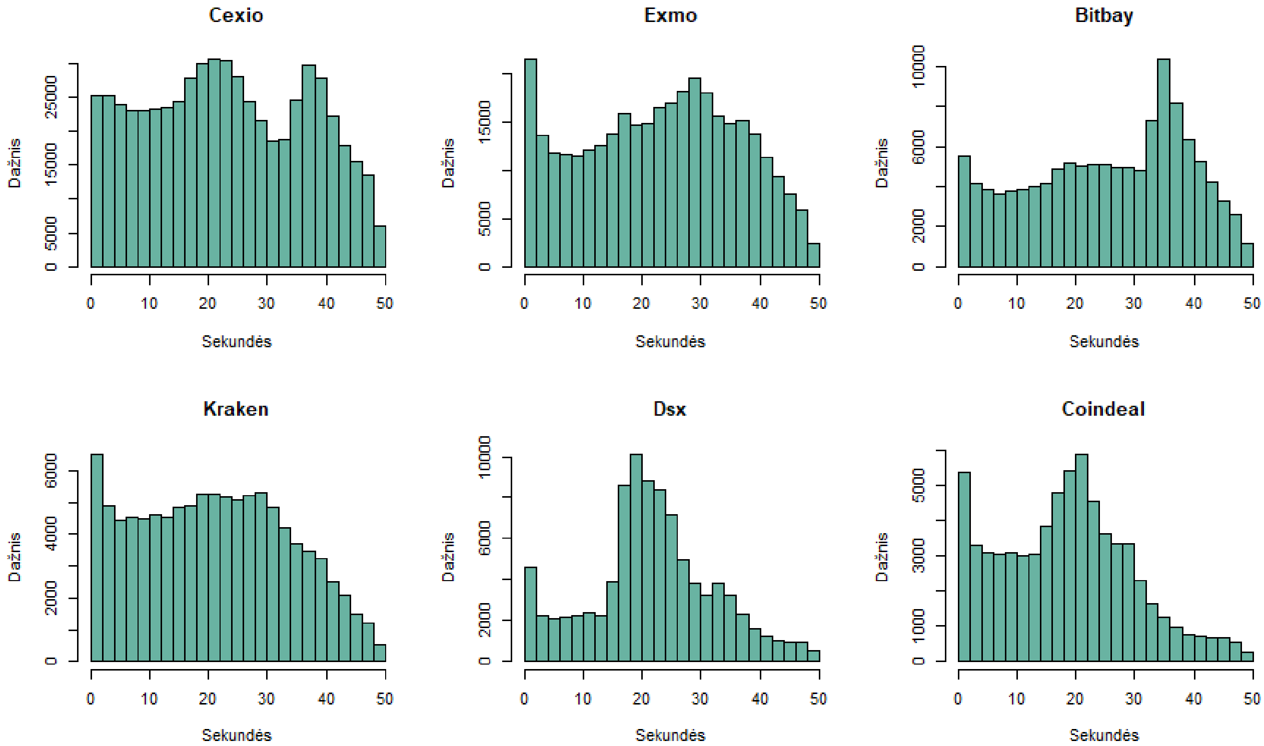
1. FAMA, E.F. Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. The Journal of Finance, 1970, vol. 25, no. 2, 383-417. ISSN 0022-1082.
2. BREALEY, R.A. ir S. MYERS. Principles of Corporate Finance. 2-oji laida. New York: McGraw-Hill Book Company, 1988. ISBN 0071001530.
3. KENDALL, M.G. ir A.B. HILL. The Analysis of Economic Time-Series-Part I: Prices. Wiley of the Royal Statistical Society, 1953, vol. 116, no. 1,11-34. ISSN 0035-9238.
4. SHILLER, R.J. Do Stock Prices Move Too Much to be Justified by Subsequent Changes in Dividends? The American Economic Review [interaktyvus]. 1981, Vol. 71, no. 3, 421-436 [žiūrėta 2023-04-20]. Prieiga per: doi:10.3386/w0456.
5. HOMMOND, R.C. Behavioral Finance: Its History and its Future. Southeastern University – Lakeland. Selected Honors Theses [interaktyvus]. 2015 [žiūrėta 2023-04-20]. Prieiga per: https://firescholars.seu.edu/honors/30.
6. SHILLER, R.J. From Efficient Markets Theory to Behavioral Finance. Journal of Economic Perspectives, 2003, vol. 17, no. 1, 83-104. ISSN 0895-3309.
7. KABAŠINSKAS, A. ir K. ŠUTIENĖ. Key Roles of Crypto-Exchanges in Generating Arbitrage Opportunities. Entropy [interaktyvus]. 2021, Vol. 23, no. 4, 455 [žiūrėta 2023-04-20]. Prieiga per: dio:10.3390/e23040455.
8. LIU, J. ir F.A. LONGSTAFF. Losing Money on Arbitrage: Optimal Dynamic Portfolio Choice in Markets with Arbitrage Opportunities. The Review of Financial Studies, 2004, vol. 17, no. 3, 611-641. ISSN 0893-9454.
9. JARROW, R.A., H. LI, L. WEI ir Y. GUAN. Facing an Arbitrage Opportunity: Trade Or Wait? SSRN Electronic Journal [interaktyvus]. 2014 [žiūrėta 2023-04-20]. Prieiga per: doi:10.2139/ssrn.2536239.
10. HUBERMAN, G. ir Z. WANG. Arbitrage Pricing Theory. Staff Reports 216, Federal Reserve Bank of New York [interaktyvus]. 2005 [žiūrėta 2023-04-20]. Prieiga per: https://www0.gsb.columbia.edu/faculty/ghuberman/APT-Huberman-Wang.pdf.
11. HERSCHBERG, M. Limits to Arbitrage: An Introduction to Behavioral Finance and a Literature Review. Palermo Business Review, 2012, no. 7, 7-23. ISSN 0328-5715.
12. ABREU, D. ir M.K. BRUNNERMEIER. Synchronization Risk and Delayed Arbitrage. Journal of Financial Economics [interaktyvus]. 2002, vol. 66, no. 2-3, 341-360 [žiūrėta 2023-04-20]. Prieiga per: doi:10.1016/S0304-405X(02)00227-1.
13. BARBERIS, N.C. ir R.H. THALER. A Survey of Behavioral Finance. Handbook of the Economics of Finance [interaktyvus]. 2002, vol. 1, no. 18, 1053-1128 [žiūrėta 2023-04-20]. Prieiga per: doi:10.3386/w9222.
14. OSMEKHIN, S. ir F. DÉLÈZE. Waiting-Time Distribution and Market Efficiency: Evidence from Statistical Arbitrage. Department of Finance and Statistics. Hanken School of Economics [interaktyvus]. 2015 [žiūrėta 2023-04-20]. Prieiga per: https://www.efmaefm.org/0efmameetings/EFMA%20ANNUAL%20MEETINGS/2015-Amsterdam/papers/EFMA2015_0324_fullpaper.pdf.

15. OSMEKHIN, S. ir F. DÉLÈZE. Application of Continuous - Time Random Walk to Statistical Arbitrage. Journal of Engineering Science and Technology Review, 2015, vol. 8, no. 1, 91-95. ISSN 1791-9320.
16. ANGEL, J.J. ir D. MCCABE. Fairness in Financial Markets: The Case of High Frequency Trading. Journal of Business Ethics, 2013, vol. 112, no. 4, 585-595. ISSN 0167-4544.
17. CVITANIĆ, J. ir A. A. KIRILENKO. High Frequency Traders and Asset Prices. SSRN Electronic Journal [interaktyvus]. 2010 [žiūrėta 2023-04-20]. Prieiga per: doi: 10.2139/ssrn.1569075.
18. MUKHOPADHYAY, U., A. SKJELLUM, O. HAMBOLU, J. OAKLEY, L. YU ir R. BROOKS. A Brief Survey of Cryptocurrency Systems. IEEE [interaktyvus]. 2016 [žiūrėta 2023-04-20]. Prieiga per: doi: 10.1109/PST.2016.7906988.
19. MAKAROV, I. ir A. SCHOAR. Trading and Arbitrage in Cryptocurrency Markets. Journal of Financial Economics, 2020, vol. 135, no. 2, 293-319. ISSN 0304-405X.
20. BISTARELLI, S., A. CRETAROLA, G. FIGÀ-TALAMANCA ir M. PATACCA. Model-Based Arbitrage in Multi-Exchange Models for Bitcoin Price Dynamics. Digital Finance, 2019, vol. 1, no. 1-4, 23-46. ISSN 2524-6984.
21. CRÉPELLIÈRE, T., M. PELSTER ir S. ZEISBERGER. Arbitrage in the Market for Cryptocurrencies. Journal of Financial Markets [interaktyvus]. 2022 [žiūrėta 2023-04-20]. Prieiga per: doi: 10.1016/j.finmar.2023.100817.
22. ARNER, D.W., D.A. ZETZSCHE, R.P. BUCKLEY ir J. KIRKWOOD. The Financialization of Crypto: Lessons from FTX and the Crypto Winter of 2022-2023. University of Hong Kong Faculty of Law Research Paper No. 2023/19 [interaktyvus]. 2023 [žiūrėta 2023-04-20]. Prieiga per: doi: 10.2139/ssrn.4372516.
23. BARONCHELLI, A., A. ELBAHRAWY, L. ALESSANDRETTI, A. KANDLER ir R. PASTOR-SATORRAS. Evolutionary Dynamics of the Cryptocurrency Market. The Royal Society, 2017, vol. 4, no. 11. ISSN 2054-5703.
24. MAI, E. Connections between Stock Market and Bitcoin Market. Radboud University [interaktyvus]. 2019 [žiūrėta 2023-04-20]. Prieiga per: https://theses.ubn.ru.nl/handle/123456789/8411.
25. GUO, S., L. YU, X. CHEN ir Y. ZHANG. Modelling Waiting Time for Passengers Transferring from Rail to Buses. Transportation Planning and Technology, 2011, vol. 34, no. 8, 795-809. ISSN 0308-1060.
26. HUSSAIN, S.M., S. OSMEKHIN ir F. DÉLÈZE. Short-Term Market Efficiency Indicator Based on the Waiting-Time Distribution. Review of Managerial Science, 2021, vol. 15, no. 6, 1561-1572. ISSN 1863-6683.
27. SAZUKA, N. On the Gap between an Empirical Distribution and an Exponential Distribution of Waiting Times for Price Changes in a Financial Market. Physica A, 2007, vol. 376, 500-506. ISSN 0378-4371.
28. CHATZIS, S.P., V. SIAKOULIS, A. PETROPOULOS, E. STAVROULAKIS ir N. VLACHOGIANNAKIS. Forecasting Stock Market Crisis Events using Deep and Statistical Machine Learning Techniques. Expert Systems with Applications, 2018, vol. 112, 353-371. ISSN 0957-4174.

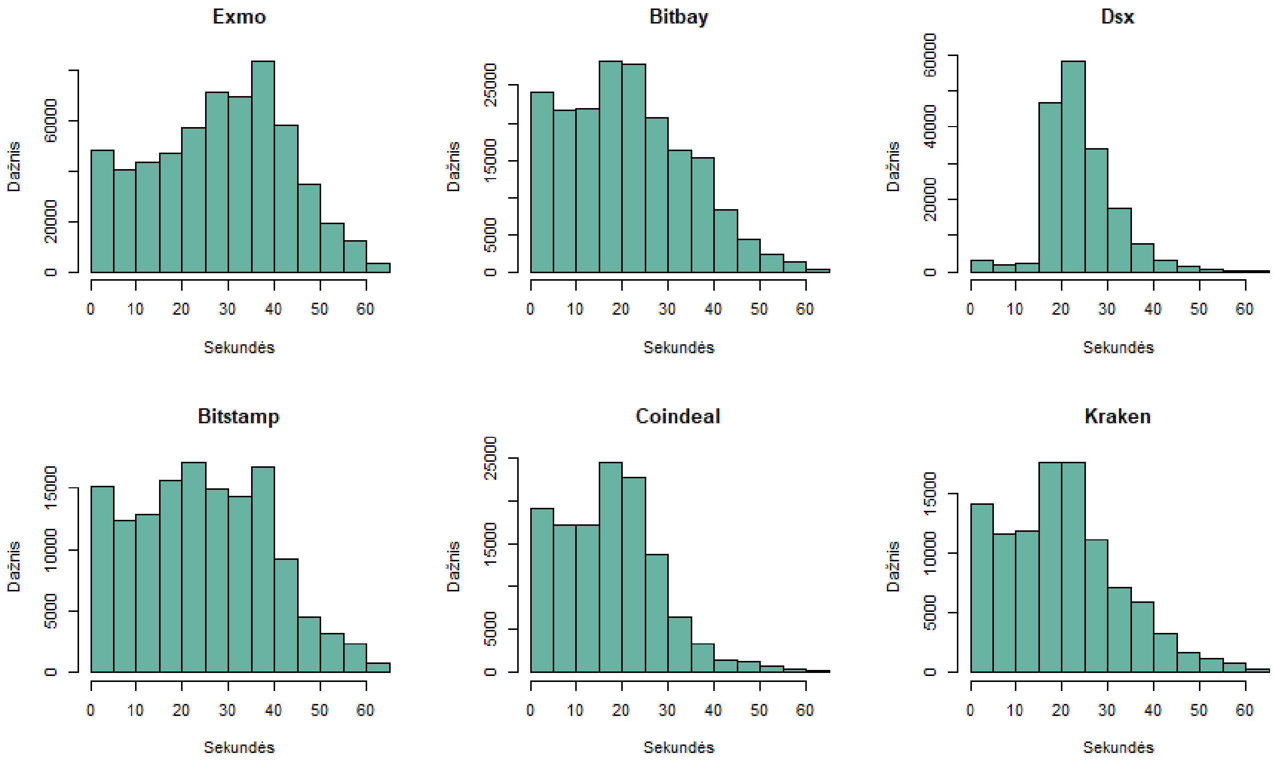
29. DE ANGELIS, L. ir L.J. PAAS. A Dynamic Analysis of Stock Markets using a Hidden Markov Model. Journal of Applied Statistics, 2013, vol. 40, no. 8, 1682-1700. ISSN 0266-4763.
30. ZHANG, D. ir X. ZHANG. Study on Forecasting the Stock Market Trend Based on Stochastic Analysis Method. International Journal of Business and Management, 2009, vol. 4, no. 6. ISSN 1833-3850.
31. WĄTOREK, M., S. DROŻDŻ, J. KWAPIEŃ, L. MINATI ir kiti. Multiscale Characteristics of the Emerging Global Cryptocurrency Market. Physics Reports, 2021, vol. 901, 1-82. ISSN 0370-1573.
32. KRÜCKEBERG, S. ir P. SCHOLZ. Decentralized Efficiency? Arbitrage in Bitcoin Markets. Financial Analysts Journal, 2020, vol. 76, no. 3, 135-152. ISSN 0015-198X.
33. FISCHER, T.G., C. KRAUSS ir A. DEINERT. Statistical Arbitrage in Cryptocurrency Markets. Journal of Risk and Financial Management, 2019, vol. 12, no.1, 31-46. ISBN 1911-8074.
34. RAČKAUSKAS A. Atsitiktiniai Procesai. Vilniaus universitetas [interaktyvus]. 2014 [žiūrėta 2023-04-20]. Prieiga per: http://web.vu.lt/mif/a.medziunas/wp-content/uploads/2021/02/Rackauskas-1.pdf.
35. BECKETT, S., J. JEE, T.NCUBE, S. POMPILUS ir kiti. Zero-Inflated Poisson (ZIP) Distribution: Parameter Estimation and Applications to Model Data from Natural Calamities. Involve – a journal of Mathematics, 2014, vol. 7, no. 6, 751-767. ISSN 1944-4176.
36. CAROLYNNE A.K. Gamma and Related Distributions. A Thesis Submitted to the School of Mathematics, University of Nairobi [interaktyvus]. 2013 [žiūrėta 2023-04-20]. Prieiga per: http://erepository.uonbi.ac.ke/bitstream/handle/11295/58770/Gamma%20And%20Related%20 Distributions.pdf?sequence=3.
37. GHOJOGH A., M. CROWLEY, B. GHOJOGH ir F. KARRAY. Fitting A Mixture Distribution to Data: Tutorial. Cornell University [interaktyvus]. 2019 [žiūrėta 2023-04-20]. Prieiga per: https://arxiv.org/pdf/1901.06708.pdf.
38. BHAR R. ir S. HAMORI. Hidden Markov Models.Applications to Financial Economics. New York: Springer, 2004. ISBN 1402078994.
39. BICKENBACH, F. ir E. BODE. Markov Or Not Markov - this should be a Question. Kiel Institute of World Economics [interaktyvus]. 2001 [žiūrėta 2023-04-20]. Prieiga per: https://www.files.ethz.ch/isn/124233/kap1086.pdf.
40. ANDERSON, W.J. Continuous Time Markov Chains. New York: Springer, 1991. ISBN 0387973699.
41. ZHANG, Y. Prediction of Financial Time Series with Hidden Markov Models. B.Eng. Shandong University, China [interaktyvus]. 2004 [žiūrėta 2023-04-20]. Prieiga per: https://www.cs.sfu.ca/~anoop/students/rzhang/rzhang_msc_thesis.pdf.

Priedai

1 priedas. „Bitstamp“ kriptovaliutos biržos laiko tarp arbitražo įvykių pasiskirstymas per TOP 6 kriptovaliutos biržas neįtraukiant nulio reikšmių



2 **priedas. „CEX.IO“ kriptovaliutos biržos laiko tarp arbitražo įvykių pasiskirstymas per TOP 6 kriptovaliutos biržas neįtraukiant nulio reikšmių**



3 priedas. „Bitbay“ kriptovaliutos biržos laiko tarp arbitražo įvykių pasiskirstymas per TOP 6 kriptovaliutos biržas neįtraukiant nulio reikšmių