



**Kauno technologijos universitetas**  
Matematikos ir gamtos mokslų fakultetas

# **Trupmeninės eilės logistinio žemėlapiu laikinojo stabilizavimo algoritmų tyrimas**

Baigiamasis magistro studijų projektas

---

**Ernestas Uzdila**  
Projekto autorius

**Lekt. dr. Tadas Telksnys**  
Vadovas

---

**Kaunas, 2023**



**Kauno technologijos universitetas**  
Matematikos ir gamtos mokslų fakultetas

# **Trupmeninės eilės logistinio žemėlapiu laikinojo stabilizavimo algoritmų tyrimas**

Baigiamasis magistro studijų projektas  
Magistro baigiamasis projektas (6211AX006)

---

**Ernestas Uzdila**  
Projekto autorius

**Lekt. dr. Tadas Telksnys**  
Vadovas

**Lekt. dr. Rasa Šmidkaitė**  
Recenzentė

---

**Kaunas, 2023**



**Kauno technologijos universitetas**

Matematikos ir gamtos mokslų fakultetas

Ernestas Uzdila

## **Trupmeninės eilės logistinio žemėlapiu laikinojo stabilizavimo algoritmu tyrimas**

Akademinio sąžiningumo deklaracija

Patvirtinu, kad:

1. baigiamąjį projektą parengiau savarankiškai ir sąžiningai, nepažeisdama(s) kitų asmenų autoriaus ar kitų teisių, laikydamasi(s) Lietuvos Respublikos autorių teisių ir gretutinių teisių įstatymo nuostatų, Kauno technologijos universiteto (toliau – Universitetas) intelektinės nuosavybės valdymo ir perdavimo nuostatų bei Universiteto akademinės etikos kodekse nustatytų etikos reikalavimų;
2. baigiamajame projekte visi pateikti duomenys ir tyrimų rezultatai yra teisingi ir gauti teisėtai, nei viena šio projekto dalis nėra plagijuota nuo jokių spausdintinių ar elektroninių šaltinių, visos baigiamojo projekto tekste pateiktos citatos ir nuorodos yra nurodytos literatūros sąrašė;
3. įstatymų nenumatytų piniginių sumų už baigiamąjį projektą ar jo dalis niekam nesu mokėjęs (-usi);
4. suprantu, kad išaiškėjus nesąžiningumo ar kitų asmenų teisių pažeidimo faktui, man bus taikomos akademinės nuobaudos pagal Universitete galiojančią tvarką ir būsiu pašalinta(s) iš Universiteto, o baigiamasis projektas gali būti pateiktas Akademinės etikos ir procedūrų kontrolieriaus tarnybai nagrinėjant galimą akademinės etikos pažeidimą.

Ernestas Uzdila

*Patvirtinta elektroniniu būdu*

Uzdila, Ernestas. Trupmeninės eilės logistinio žemėlapių laikinojo stabilizavimo algoritmų tyrimas. Magistro baigiamasis projektas / vadovas dr. Tadas Telksnys; Kauno technologijos universitetas, matematikos ir gamtos mokslų fakultetas.

Studijų kryptis ir sritis (studijų kryptių grupė): Taikomoji matematika (Matematikos mokslai).

Reikšminiai žodžiai: stabilizavimas, valdymo uždavinys, konvergavimas, trupmeninis logistinis žemėlapis.

Kaunas, 2023. 42 p.

### **Santrauka**

Šis tyrimas yra apie diskretinių žemėlapių stabilizavimą. Diskretieji žemėlapiai turi stabilius bei nestabilius atraktorius. Todėl šio tyrimo kontekste stabilizavimas yra procesas, kurio metu bandoma išlaikyti trajektoriją kuo arčiau nestabilios orbitos kiek įmanoma ilgesniam laikui. Tai naudinga kai kurių sistemų atveju, kai pasitelkiant stabiliomis trajektorijomis sistemos sudaroma nauda (pavyzdžiui, cheminių medžiagų išskyrimo kiekis, elektros energijos pagamintas kiekis ir panašiai) yra mažesnė, negu tuo atveju, kai sistemoje pasitelktume kokią nors nebūtinai stabilią trajektoriją. Todėl atsiranda poreikis stabilizuoti nestabilias orbitas kokiam nors laiko tarpui.

Nestabilios trajektorijos laikino stabilizavimo trupmeniniame logistiniame žemėlapyje įgyvendinimui visų pirma atliekama literatūros apžvalga, aprėpianti iteracinius žemėlapius bei jų taikymus, valdymo uždavinius ir jų sprendimo būdų principus, ir iteracinius trupmeninius žemėlapius, jų taikymus bei stabilizavimo bandymus literatūroje. Taip pat lyginami klasikinis, išplėstinis apverčiamasis bei trupmeninis logistiniai žemėlapiai ir randami pagrindiniai jų savybių skirtumai, o literatūros apžvalgos pabaigoje aptariama H-rangų skaičiavimo metodologija, kai pritaikomas SVD metodas.

Po literatūros analizės atliekamas skaitinis bei analitinis trupmeninio logistinio žemėlapių konvergavimo savybių tyrimas, po kurio bandoma taikyti naiviają valdymo schemą minėtajam žemėlapiui, o galiausiai pritaikoma H-rangais grįsta impulsinė valdymo schema, gebanti laikinai stabilizuoti trupmeninio logistinio žemėlapių trajektorijas periodiškai.

Author's Uzdila, Ernestas. Investigation of temporary stabilization algorithms for the fractional logistic map. Master's Final Degree Project / supervisor doc. Tadas Telksnys; Faculty of mathematics and natural sciences, Kaunas University of Technology.

Study field and area (study field group): Applied Mathematics (Mathematical Sciences).

Keywords: stabilization, control problem, convergence, fractional logistic map.

Kaunas, 2023. 42 pages.

### **Summary**

This paper is about discrete map stabilization. Said maps possess both stable and unstable attractors which is why stabilization in this work's context means a process during which a map's unstable trajectory is held as close as possible to the unstable orbit for as long as it is possible to do so. Due to not all systems yield the best results traversing just the stable orbits, there is a need to stabilize unstable trajectories for higher valued results.

To realize such a temporary stabilization scheme first literature analysis is conducted, spanning topics like iterative maps and their applications, control problems and the principles behind solving them, and fractional logistic maps, their applications and stabilization attempts in literature. Another phase of said literature review includes comparisons between the classical, the invertible extended and fractional logistic maps to solidify the core differences of their properties. The final part of the literature review is the discussion of H-ranks and the methodology of using SVD to compute the aforementioned H-rank values.

After the literature review a computational and analytical convergence property analysis of the fractional logistic map is conducted. After that is the application attempt of a naïve stabilization scheme to stabilize the fractional logistic map's trajectory. Finally, an extensive description of an impulse-based control scheme successfully applied to the fractional logistic map to temporarily yet periodically stabilize the fractional logistic map's trajectory.

## Turinys

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Lentelių sąrašas</b> .....   | <b>7</b>  |
| <b>Paveikslų sąrašas</b> .....  | <b>8</b>  |
| <b>Santrumpų ir terminų sąrašas</b> .....                                       | <b>9</b>  |
| <b>Įvadas</b> .....   | <b>10</b> |
| <b>1. Teorinis pagrindimas</b> .....  | <b>12</b> |
| 1.1. Iteraciniai žemėlapiai ir jų taikymas.....                                 | 12        |
| 1.2. Valdymo uždaviniai ir jų sprendimų būdų principai .....                    | 13        |
| 1.3. Trupmeniniai žemėlapiai ir jų taikymas .....                               | 13        |
| 1.4. H-rangų radimas .....  | 14        |
| 1.4.1. Hankelio determinantas bei SVD taikymo pavyzdys.....                     | 15        |
| 1.5. Klasikinis logistinis žemėlapis .....                                      | 17        |
| 1.6. Išplėstasis apverčiamasis logistinis žemėlapis .....                       | 19        |
| 1.7. Konvergavimo tipai logistiniuose žemėlapiuose.....                         | 20        |
| 1.7.1. Asimptotinis ir neasimptotinis konvergavimas .....                       | 20        |
| 1.7.2. Konvergavimas klasikiniame logistiniame žemėlapyje .....                 | 21        |
| 1.7.3. Konvergavimas išplėstiniame apverčiamajame logistiniame žemėlapyje ..... | 22        |
| <b>2. Tyrimo objektas ir metodai</b> .....                                      | <b>26</b> |
| 2.1. Naudotos priemonės .....   | 26        |
| 2.2. Trupmeninis logistinis žemėlapis .....                                     | 26        |
| 2.2.1. Konvergavimas trupmeninės eilės logistiniame žemėlapyje.....             | 27        |
| <b>3. Rezultatai ir jų aptarimas</b> .....                                      | <b>29</b> |
| 3.1. Konvergavimo tipai trupmeniniame logistiniame žemėlapyje.....              | 29        |
| 3.1.1. Analitinis tyrinėjimas .....   | 29        |
| 3.1.2. Skaitinis tyrinėjimas .....  | 31        |
| 3.2. Naivusis valdymo metodas bei atminties efektas .....                       | 32        |
| 3.2.1. Naivioji valdymo schema klasikiniame logistiniame žemėlapiui.....        | 32        |
| 3.2.2. Naivioji valdymo schema trupmeniniame logistiniame žemėlapiui .....      | 33        |
| 3.3. H-rangais grįsta valdymo schema .....                                      | 34        |
| 3.4. Keli valdymo impulsai vienas po kito .....                                 | 36        |
| <b>Išvados</b> .....  | <b>38</b> |
| <b>Literatūros sąrašas</b> .....  | <b>39</b> |

## Lentelių sąrašas

- 1 lentelė.** Klasikinio, išplėstinio apverčiamojo bei trupmeninės eilės logistinių žemėlapių apverčiamumo, atminties horizonto ilgio ir stabilizavimo trukmės aptartų savybių lentelė ..... 28
- 2 lentelė.** Skaitiniame tyrime naudotų parametrų pavadinimai, reikšmės bei paaiškinimai ..... 31

## Paveikslų sąrašas

|  |    |
|--|----|
| <b>1 pav.</b> Klasikinio logistinio žemėlapių bifurkacijų diagrama, kai $a \in [0,4]$ , grafikas sudarytas pagal [3] .....   | 18 |
| <b>2 pav.</b> Klasikinio logistinio žemėlapių bifurkacijų diagrama, kai $a \in 3.5, 4$ , grafikas sudarytas pagal [3] .....  | 18 |
| <b>3 pav.</b> Neapverčiamos sistemos vizualizavimo schema. Pilnai apverčiama sistema neleidžia neasimptotiniam konvergavimui egzistuoti sistemoje [41] .....   | 20 |
| <b>4 pav.</b> Klasikinio logistinio žemėlapių H-rangų (kairėje) ir pereinamųjų procesų grafikai (dešinėje), kai $a = 3.3$ , o $x_0 \in [0,1]$ . Juodai pažymėti apskritimai yra pereinamųjų procesų taškų pozicija H-rangų spalvinėje vizualizacijoje pagal kintamąjį $x_0$ [1]..... | 22 |
| <b>5 pav.</b> H-rangų (a) ir bifurkacijos diagrama (b) išplėstinio apverčiamojo logistinio žemėlapiui [1] 23   |    |
| <b>6 pav.</b> Išplėstinio apverčiamojo logistinio žemėlapių H-rangų (kairėje) ir pereinamųjų procesų grafikai (dešinėje), kai $a = 3$ , o $x_0 \in [0,1]$ [1]. Balti apskritimai su skaičiais H-rangų grafikuose, esančiuose kairėje, nusako tarpinių procesų reikšmes.....          | 24 |
| <b>7 pav.</b> H-rangų (a) ir bifurkacijos diagrama (b) trupmeninės eilės išplėstinio logistinio žemėlapiui [1], kai $\nu = 0,8$ [1].....   | 27 |
| <b>8 pav.</b> Trupmeninio logistinio žemėlapių trajektorijos, kai pradinė sąlyga lygi $x_0 = x^* = 1 - 1/a$ , kai $a = 3$ , o $\nu = 0,8$ (a dalyje), o b dalyje – kai $a = 2,75, \nu = 0,8$ .....   | 30 |
| <b>9 pav.</b> Trupmeninio logistinio žemėlapių konvergavimo tipų grafikas, kai $a = 3$ ir $\alpha = 0,8$ . .....   | 32 |
| <b>10 pav.</b> Naivus trupmeninio logistinio žemėlapių trajektorijos stabilizavimas, kai parametrai $a = 3$ , $\alpha = 0,8$ , $\delta = 0,05$ . .....   | 33 |
| <b>11 pav.</b> Trupmeninio logistinio žemėlapių apribojimų pažeidimas, kai parametrai $a = 3$ , $\alpha = 0,8$ ir $\delta = 0.05$ per skirtingus valdymo impulsus.....   | 35 |
| <b>12 pav.</b> Dviejų trupmeninio logistinio žemėlapių vieno stabilizavimo atvejų grafikas, kai parametrai $a = 3$ , $\alpha = 0,8$ ir $\delta = 0.05$ .....   | 36 |
| <b>13 pav.</b> Trupmeninio logistinio žemėlapių trijų nuoseklių stabilizavimų grafikas, kai parametrai $a = 3$ , $\alpha = 0,8$ ir $\delta = 0.05$ .....   | 37 |



## Santrumpų ir terminų sąrašas

### Santrumpos:

SVD – singuliarių verčių dekompozicija (angl. *Singular Value Decomposition*).

Trupmeninis logistinis žemėlapis – trupmeninių skirtumų logistinis žemėlapis.

### Terminai:

**Logistinis žemėlapis** – polinominis žemėlapis, pasižymintis chaotiniu elgesiu ir yra išpopuliarėjęs biologo Roberto May dėka [1].

**H-rangas** – sistemos sudėtingumo matavimo vienetas [1]. Aukštesnis H-rangas reiškia sistema yra sudėtingesnė negu sistema pasižyminti žemu H-rangu.

**Skirtuminės lygtys** – tai lygtys, kurios nusako kintamojo skirtumus ir šių lygčių klasifikacija priklauso nuo lygties eilės, kuri nusakoma pagal didžiausio skirtumo eilę (pavyzdžiui,  $y(t + 1) - y(t)$  yra pirmos eilės skirtumas, o  $y(t + 2) - y(t)$  – antros eilės skirtumas, kai  $t$  yra laikas, o  $y$  – funkcija), autonomiškumą bei tiesiškumą [46].

## Įvadas

Netiesinių diskretauso laiko žemėlapių valdymas yra aktyviai nagrinėjama valdymo teorijos užduotis. Valdymo uždaviniai yra dinaminų sistemų būsenų stebėjimo ir valdymo procesai, trunkantys tam tikrą laiko tarpą [43]. Diskretauso laiko žemėlapių valdymas yra populiarus dėl to, kad šie žemėlapiai yra taikomi įvairiose srityse: fizikoje, biomedicinoje, ekonomikoje, inžinerijoje ir populiacijos dinamikoje [17, 16]. Klasikinių valdymo uždavinių pavyzdžiai netiesiniams iteraciniams žemėlapiams yra pateikiami [18] šaltinyje, o iš naujesnių nagrinėjamų temų bei taikymų galima pateikti ne vieną pavyzdį. Pavyzdžiui, neuroniniais tinklais grįstos grįžtamojo ryšio (angl. *feedback control*) valdymo schemas [19], plėšrūnų ir aukos valdymo sistemos [20], evoliuciniai metaeuristiniai metodai, taikomi Henon'o žemėlapių stabilizavime ir panašiai.

Viena iš aktyviai tyrinėjamų ir daug pritaikymų turinčių diskrečių sistemų yra trupmeniniai iteraciniai žemėlapiai. Šie žemėlapiai pasižymi išskirtine savybe kuri vadinama nelokalumu (kitai sistemos būsenai nusakyti naudojami ne tik greta esantys nariai, bet nariai gali būti parenkami globaliai, todėl yra įtraukiamos beveik visos arba kartais net visos buvusios būsenos [6]) ir yra taikomi ekonomikoje [28], fizikoje [29], epidemiologijoje [31, 32], net informacinėje saugoje [30] bei vaizdų užšifravime [26, 27].

Kadangi iteraciniai trupmeniniai logistiniai žemėlapiai yra plačiai taikomi, jų valdymas taip pat sulaukė daug dėmesio kaip tyrimų objektas. Pavyzdžiui, trupmeninio skirtumo logistiniam žemėlapiui, pagrįstam pakeitimo entropija bei *fuzzy* logika, yra sudaromos grįžtamojo ryšio schemas [33], kuriamos diskretauso laiko trupmeninės eilės sistemos, pagrįstos skirtuminėmis lygtimis (angl. *difference equations* [1, 46]) ir joms išvedamos būtinosios optimalumo sąlygos [34], taip pat yra sėkmingai taikomos epidemiologijoje sulaikymo (pavyzdžiui, užkrėtimų mažinimo) valdymo diskretauso laiko trupmeninės eilės ir kelių veiksmų su vėlinimu sistemose [42]. Kitaip tariant, įvairiose srityse yra tiriamas ir/arba taikomas iteracinių trupmeninių logistinių žemėlapių valdymas. Dėl didelio populiarumo įvairiose taikymo srityse susilaukusios trupmeninio logistinio žemėlapio stabilizavimo temos šiame darbe yra siūloma valdymo schema, skirta stabilizuoti trupmeniniam logistiniam žemėlapio nestabilioms periodo-1 orbitoms. Šio tyrimo atveju stabilizavimas yra procesas, kurio metu bandoma išlaikyti trajektoriją kuo arčiau nestabilios orbitos kuo ilgesnį laiko tarpą.

**Tyrimo tikslas** – pristatyti impulsų valdymo schemą, skirtą stabilizuoti trupmeninio skirtumo logistinio žemėlapio nestabiliai periodo-1 orbitai.

Šiam tikslui pasiekti iškeliami tokie uždaviniai:

1. Atlikti literatūros apžvalgą trimis aspektais:
  - 1.1. Aptariant iteracinius žemėlapius bei jų taikymus, valdymo uždavinius ir jų sprendimo būdus bei trupmeninius žemėlapius, jų taikymus ir trupmeninių logistinių žemėlapių stabilizavimo pavyzdžius literatūroje.
  - 1.2. Lyginant klasikinį, išplėstinį apverčiamąjį ir trupmeninį logistinius žemėlapius tarpusavyje bei randant esminius skirtumus tarp šių logistinių žemėlapių.
  - 1.3. Ištiriant H-rangų radimo SVD metodą.

2. Išnagrinėti trupmeninio logistinio žemėlapių konvergavimo savybes pasitelkiant analitinį bei skaitinį tyrimą.
3. Pritaikyti naiviają valdymo schemą trupmeniniam logistiniam žemėlapiui bei aptarti schemos taikymo rezultatus.
4. Sukurti H-rangais grįstą impulsinę valdymo schemą bei aptarti jos rezultatus.

## 1. Teorinis pagrindimas

Šioje darbo dalyje yra nagrinėjami iteraciniai žemėlapiai ir jų taikymai, valdymo uždaviniai ir jų sprendimų metodologija, trupmeniniai žemėlapiai bei jų taikymai, nagrinėjamas H-rangu skaičiavimas, kai pasitelkiama SVD metodologija. Galiausiai, yra gilnamasi į konvergavimo tipus klasikiniame, išplėstiniame apverčiamajame ir trupmeniniame logistiniuose žemėlapuose bei yra tiriamos ir lyginamos minėtų logistinių žemėlapių savybės.

### 1.1. Iteraciniai žemėlapiai ir jų taikymas

Iteraciniai žemėlapiai yra dinaminės sistemos, nusakomos iteracinėmis žemėlapių funkcijomis ir yra naudojami tirti periodo-dvigubėjimo kelią į chaosą, Lyapunov'o eksponentes bei Feigenbaum'o skaičius [44]. Keli gerai žinomi iteraciniai žemėlapiai yra logistinis žemėlapis [44], Diufingo žemėlapis [45], Gauso žemėlapis [13, 44] ir Henon'o žemėlapis [23, 44]. Iteraciniai žemėlapiai dažniausiai skirstomi į du tipus: paprastuosius bei trupmeninius. Logistinis žemėlapis yra laikomas vienu iš paprastojo tipo žemėlapių ir jo sudarymas pasitelkia įprastąsias diferencialines lygtis skaičiuoti pirmos eilės skirtumams, o, pavyzdžiui, trupmeninis logistinis žemėlapis priklauso trupmeninių iteracinių žemėlapių tipui, nes trupmeniniam logistiniam žemėlapiui sudaryti naudojamos Kaputo diferencialinės lygtys [6] iš kurių sudaromi Kaputo skirtumai [6], kurie taikomi trupmeniniams logistiniams žemėlapiams sudaryti [1, 6]. Vienas iš skirtumų tarp šių iteracinių žemėlapių tipų yra atminties horizonto ilgyje (kiek praeities narių užtenka suskaičiuoti sekančiam sekos nariui). Pavyzdžiui, logistinis bei išplėstinis apverčiamasis žemėlapis pasižymi vienetiniu atminties horizontu, o trupmeninis – horizontu, siekiančiu pradinę sąlygą imtinai.

Iteraciniai žemėlapiai apima plačią aibę įvairių žemėlapių, o kadangi iteraciniai žemėlapiai taikomi mokslo srityse kaip fizikoje, biomedicinoje, ekonomikoje, inžinerijoje ir populiacijos dinamikoje [16, 17], netiesinių diskretaus laiko iteracinių žemėlapių valdymo uždavinys yra ir dabar aktuali tyrimo tema valdymo teorijoje.

Klasikinių valdymo uždavinių bei schemų pavyzdžiai netiesiniams iteraciniams žemėlapiams yra pateikiami [18] šaltinyje, o iš naujesnių atvejų yra pateikiama šie kontrolės uždavinių sprendinių taikymo pavyzdžiai:

1. neuroninių tinklų grįsta grįžtamojo ryšio (angl. *feedback control*) valdymo schema yra pateikiama [19];
2. plėšrūno ir aukos valdymo sistema su *Allee* efektu pateikiama [20];
3. dinaminė išplėstinė su vėlinimu grįžtamojo ryšio valdymo schema su Rösslerio sistema [21];
4. Ott'o-Grebogi-York'o metodas yra naudojamas sudaryti skaitinio chaoso kontrolės schemą logistiniam žemėlapiui [22];
5. evoliuciniai metaeuristiniai metodai, naudojami Henon'o žemėlapių stabilizavime [23];
6. baigtinio laiko be modelio prisitaikanti valdymo schema, pagrįsta neparimetriniu dinaminio nežinomos netiesinės sistemos įgyvendinimu [24].

## 1.2. Valdymo uždaviniai ir jų sprendimų būdų principai

Valdymo uždaviniai yra dinaminių sistemų būsenų stebėjimo ir valdymo procesas, trunkantis tam tikrą laiko tarpą, kad būtų sumažinamas koks nors įvykdymo rodiklio indeksas [43]. Valdymo uždaviniai neretai skaidomi į impulsų valdymo (angl. *impulse control*) uždavinius ir grįžtamojo ryšio valdymo (angl. *feedback control*) uždavinius. Grįžtamojo ryšio valdymo uždaviniai pasižymi dinamišku nenutrūkstamu grįžtamuoju ryšiu, matuojamu sensoriais. Kitaip sakant, tam tikrą laiką yra stebimas signalas ir priklausomai nuo jo kitimo (grįžtamojo ryšio sistemoje valdiklis yra į sistemą įterpta funkcija ir jos kintančios reikšmės pagal sistemos būsenos kaitas nulemia, kokias reikšmes funkcija pateiks) nusprendžiama, ar reikalingos korekcijos, ar ne [36]. Tačiau nors grįžtamuoju ryšiu grįstas valdymas greitai reaguoja į pokyčius sistemoje, reikalingas nenutrūkstantis procesas, kurio metu stebimos sistemos išvestys ir koreguojamos įvestys [25]. Vienas iš svarbių grįžtamojo ryšio valdymo trūkumų yra pačios įrangos apribojimai: valdymo sistemos našumas negali būti geresnis negu paties jutiklio [36]. Kita problema slypi fiziniame realizavime, kadangi jokia fizinė sistema negali pakeisti būsenos iš karto – turi praeiti laiko tarpas, per kurį įvyksta pokytis. Yra laiko tarpas iki kol sistema atsižvelgs į pokytį valdyme arba pokytį dirgikliuose. Pavyzdžiui, dinaminė fizinės sistemos elgsena nusako, kaip sistema pasikeis priklausomai nuo pokyčio jos aplinkoje, nuo tikslingo pokyčio įvesties kaip, pavyzdžiui, variklio galios sumažinimas ar padidinimas, arba nuo netikėtų pokyčių kaip stipri vėjo jėga, verčianti lėktuvą leistis žemiau negu numatyta [36]. Dinaminės sistemos elgesys priklauso nuo to, kas jai buvo padaryta. Kitaip tariant, pokytis priklauso nuo sistemos istorijos. Neužtenka žinoti, kokios yra dabartinės įvestys – net jeigu lėktuvas yra jau nebeveikiamas stiprių žemyn judančių vėjų (pavyzdžiui, vėjas nusilpo, nes nutolta nuo jo keliaujant pirmyn), reikia tam tikro laiko tarpo, kad lėktuvas galėtų pakilti į buvusį aukštį. Todėl iškyla problema naudojant grįžtamojo ryšio valdymo sistemas: jeigu įvedamas pokytis per anksti sprendžiant pagal nukrypimą nuo norimos išvesties, ateityje sistema gali nepasiekti norimų rezultatų, o jeigu į sistemą įvedamas pokytis per vėlai – sistema galimai nepasieks norimos būsenos net ir po ilgo laiko tarpo [36].

Impulsų grįstos valdymo sistemos yra pagrįstos tam tikro dydžio perturbacijos įvedimu į impulsų valdymo sistemą (ši perturbacija vadinama impulsu) tam tikru laiku pagal nustatytą tikslo funkciją [37]. Šiame darbe siūloma schema yra neinvazinė kaip grįžtamojo ryšio valdymo schema, nes pats trupmeninis logistinis žemėlapis yra keičiamas ir maža tam tikros iteracijos metu įvedama perturbacija sugeba laikinai stabilizuoti sistemą. Stabilizavimas šiuo atveju yra sistemos trajektorijos išlaikymas priimtinos ribose (pavyzdžiui, lėktuvo išlaikymas priimtame aukštyje ar mišinio temperatūros laikymas tarp tam tikrų temperatūrų priimtinos mažiausios ir didžiausios reikšmės).

## 1.3. Trupmeniniai žemėlapiai ir jų taikymas

Trupmeniniai iteraciniai žemėlapiai sudaro svarbų diskrečių sistemų poaibį. Ne taip kaip sveikųjų skaičių eilės atitikmenys, tokie žemėlapiai pasižymi išskirtine savybe - nelokalumu. Tai reiškia, kad sistemos būseną nusako ne tik jos gretimais nariais, bet globaliai įtraukiant reikšmingą dalį (kartais ir visas) praeities būsenų [25]. Trupmeninių iteracinių žemėlapių formulėje (žr. 2.2h formulę) trupmeninė dalis, pažymėta  $\nu$  raide, nusako trupmeninio iteracinio žemėlapio trupmeninę eilę. Be to, jeigu  $\nu = 1$ , tada trupmeninis logistinis žemėlapis taps klasikiniu logistiniu žemėlapis. Trupmeninio logistinio žemėlapio „trupmeniškumo“ savybė kyla iš 1.2 skyriuje minėtų Kaputo skirtumų [6], kurie yra paremti trupmeninės eilės išvestinėmis.

Trupmeniniai iteraciniai žemėlapiai yra pritaikomi įvairiose srityse kaip vaizdų užšifravime [26, 27], ekonomikoje [28], fizikoje [29], informacinėje saugoje [30] bei epidemiologijoje [31, 32]. Kadangi trupmeniniai iteraciniai žemėlapiai yra taikomi įvairiose srityse, šių žemėlapių valdymas yra daugelio tyrimų tema. Trupmeninio skirtumo logistiniam žemėlapiui, pagrįstam permutacine entropija bei *fuzzy* logika, yra sudaroma grįžtamojo ryšio schema [33] šaltinyje. Nedeterminuotos diskretaus laiko trupmeninės eilės sistemos, pagrįstos skirtumų lygtimis, būtinų optimalumo sąlygų išvedimas yra [34] šaltinyje. *Backstepping* metodas, skirtas trupmeninėms vienos įvesties ir vienos išvesties sistemoms, ir jo sudarymas aprašomas [35] šaltinyje; taip pat sėkmingai taikomas sulaikomasis valdymas diskretaus laiko trupmeninės eilės ir kelių veiksnių sistemose su vėlinimu [42].

#### 1.4. H-rangų radimas

H-rangų skaičiavimas yra taikomas įvairiuose logistiniuose žemėlapiuose kaip būdas įvertinti žemėlapio sekos algebrinį sudėtingumą. H-rangas taikomas apverčiamajame logistiniame žemėlapyje [5], Gauso žemėlapyje [13], „Bouncer“ sistemoje (dar kitaip vadinama Fermi-Ulam modeliu)[14], trupmeniniame logistiniame žemėlapyje [1] ir kituose žemėlapiuose.

Kadangi šiame tyrime H-rangai suteikia lengvai prieinamą būdą nusakyti trupmeninės eilės logistinio žemėlapio sekos algebrinį sudėtingumą, reikia aptarti ir patį metodą, kuris yra naudojamas šiame tyrime – SVD metodas H-rangų suskaičiavimui [12].

Tarkime duota realiųjų skaičių seka  $(x_j; j = 0, 1, 2 \dots)$ . Hankelio matricų sekai suskaičiuojama ir sudaroma jų determinantų seka  $(d_j; j = 1, 2 \dots)$ , kurie apskaičiuojami pagal formulę:

$$d_j = \det(H_j), H_j = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{j-1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{j-1} & x_j & \dots & x_{2j-2} \end{bmatrix}, j = 1, 2, 3 \dots \quad (1.4.a)$$

čia:  $d_j$  –  $j$ -tosios eilės Hankelio matricos  $H_j$  determinantas, skaičiuojamas kai turime seką  $(x_j, j = 0, 1, 2 \dots)$ .

Jeigu egzistuoja  $n \in \mathbb{N}$  toks, kad  $d_n \neq 0$ , tačiau  $d_{n+j} = 0, j = 1, 2, \dots$ , seka  $(x_j, j = 0, 1, 2 \dots)$  nusako tiesiškai rekurentinę  $n$  eilės seką [15].

Pirmosios  $n$  reikšmės pilnai nusako šias sekas, kadangi likusius narius galima rekurentiškai suskaičiuoti. Taip pat naudojant singuliarių reikšmių dekompoziciją (angl. *Singular Value Decomposition* arba trump. *SVD*) galima suskaičiuoti tiesiškai rekurentinės sekos eilę [1]. Tarkime turime tiesinę rekurentinę  $n$  eilės seką bei ją atitinkančią Hankelio matricą  $H_{n+j}, j > 1$ . Šios Hankelio matricos spektras turi  $n$  nenulinių tikrinių reikšmių bei  $j$  nulines tikrines reikšmes. Todėl Hankelio matricos  $H_{n+j}$  singuliariosios reikšmės  $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq \sigma_{n+j}^2$  sudarytos iš  $n$  nenulinių ir  $j$  nulinių elementų. Viena patogi šio metodo savybė yra tai, kad nereikia suskaičiuoti determinantų sekos  $(d_j, j = 1, 2, \dots)$ , nes užtenka parinkti pakankamai didelį skaičių  $N$  ir apskaičiuoti SVD narius Hankelio matricai  $H_N$ .

Tačiau kadangi pasaulyje sutinkamos sekos negali patenkinti tiesinio rekurentiškumo sąlygos dėl to, kad jos yra sudėtingesnės bei užtrikišmintos, o Hankelio matricos gali būti itin didelės, kai tada

determinanto skaičiavimas yra neefektyvus, todėl reikia sekos H-rangus skaičiuoti pasitelkiant kitą metodologiją.

Tarkime turime realaus pasaulio seką, kuri galimai užteršta triukšmu. Tegu ji būna pažymima  $(x_j; j = 0, 1, 2 \dots)$ . Tada turint šią seką bei ribinę reikšmę  $\epsilon$  ir  $N$  eilės Hankelio matricą, suskaičiuojame  $H_N$  SVD reikšmes. SVD būdu rastas H-rangas sekai  $(x_j; j = 0, 1, 2 \dots)$  pažymimas skaičius  $n$ , kai  $n$  yra eilės numeris singuliarios reikšmės  $\sigma_n^2, n \in \{1, \dots, N\}$ , kuri tenkina nelygybę:

$$\sigma_n^2 \geq \epsilon, \sigma_{n+j}^2 \leq \epsilon, j = 1, 2, \dots, N - n \quad (1.4.b)$$

Ribinės reikšmės  $\epsilon$  bei  $N$  parinkimas yra itin svarbus, nes  $\epsilon$  turi būti parinktas taip, kad nereikšmingos singuliarios reikšmės (tos, kurios artimos 0) būtų atmetamos, o  $N$  turi būti pakankamai didelis, kad aprėptų pakankamai didelę dalį sekos  $(x_j; j = 0, 1, 2 \dots)$  [5]. Ši metodologija leidžia pamatuoti algebrinį sekos sudėtingumą lengvai suprantamu būdu, yra naši skaičiavimų atžvilgiu. SVD metodo taikymas sumažina triukšmo įtaką H-rangų vertėms [1].

### 1.4.1. Hankelio determinantas bei SVD taikymo pavyzdys

#### 1.4.1.1. Hankelio matricos, charakteringosios lygties šaknys bei charakteringosios reikšmės

Tarkime turime Fibonačio seką  $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, x_0 = x_1 = 1, n \geq 2$  (1.4.c)

$$x_j = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots\}$$

čia:  $x_j$  – Fibonačio sekos narys,  $j = 0, 1, 2, 3 \dots$

Sudaromos Hankelio matricos iki  $H_5$  imtinai:

$$H_1 = 1, H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}, H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 13 \end{bmatrix}, H_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 13 \\ 3 & 5 & 8 & 13 & 21 \\ 5 & 8 & 13 & 21 & 34 \end{bmatrix} \quad (1.4.d)$$

Tada suskaičiuojama kiekvienos matricos determinantas ir gauname determinantų seką  $d_j = \{1, 1, 0, 0, 0\}$ , kai  $j = 1, 2, 3 \dots$

Kitaip tariant, sekos rangas  $H_n(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34) = 2$ , kadangi egzistuoja  $n \geq 1$ , kad  $H_n \neq 0$ , o  $H_j = 0, \forall j > n$ , tada  $(x_j)_{j=0}^{+\infty}$  yra tiesinė rekurentinė schema [1, 15].

Turint Hankelio determinantus galima nagrinėjamą seką parašyti kanonine forma. Tam reikia suskaičiuoti charakteringas reikšmes iš formulės:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & \rho & \rho^2 \end{vmatrix} = \rho^2 - \rho - 1 = 0 \quad (1.4.e)$$

čia:  $\rho$  – charakteringosios lygties reikšmės, kurios lygios:

$$\rho_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \rho_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad (1.4.f)$$

Minėtąją kanoninę formą, kurios išraiška:

$$x_j = \lambda_1 \rho_1^{j-1} + \lambda_2 \rho_2^{j-1}, j = 1, 2, 3 \dots \quad (1.4.g)$$

čia:  $x_j$  – j-tasis sekos narys;

$\lambda_1, \lambda_2$  – charakteringosios lygties koeficientai;

$\rho_1, \rho_2$  – charakteringosios lygties reikšmės.

Pagal kanoninės lygties išraišką (1.4.g) formulėje, apsisirašome  $x_0$  ir  $x_1$  reikšmes:

$$\begin{cases} x_0 = \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ x_1 = \lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2 = 1 \end{cases} \quad (1.4.h)$$

Kuri išsprendžiama  $\lambda_1$  bei  $\lambda_2$  atžvilgiu:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 - \lambda_2 \\ (1 - \lambda_2)\rho_1 + \lambda_2 \rho_2 = 1 \end{cases} = \begin{cases} \lambda_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \\ \lambda_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \end{cases} \quad (1.4.i)$$

Singuliarių reikšmių dekompozicijos pavyzdys

Matricos  $H_5$  singuliarių reikšmių matrica

$$\Sigma \approx \begin{bmatrix} 54,5601 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4399 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,2197 \cdot 10^{-15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,6717 \cdot 10^{-16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,0421 \cdot 10^{-17} \end{bmatrix} \quad (1.4.k)$$

Matome, kad trys reikšmės yra itin artimos nuliui, o likusios – kur kas didesnės negu 0. Jos yra  $H_5$  Hankelio matricos nenulinės singuliaros reikšmės. Kaip minėta, turime dvi nenulines reikšmes, todėl nagrinėjamos sekos rangas bus lygus dviem.

Jeigu į aibę įvedamas baltas triukšmas, kurį pažymėsime  $\kappa \approx \{4,3599 \cdot 10^{-4}; 2,5926 \cdot 10^{-5}; 0,5497 \cdot 10^{-3}; 0,4353 \cdot 10^{-03}; 0,4204 \cdot 10^{-3}; 0,3303 \cdot 10^{-3}; 0,2046 \cdot 10^{-3}; 0,6193 \cdot 10^{-3}; 0,2997 \cdot 10^{-3}\}$ . Pridedant atitinkančius narius iš  $\kappa$  sekos ir pradinės Fibonači sekos gauname naująją Fibonači seką su triukšmu:

$$H_{5_{\text{triukšmintas}}} \approx \begin{bmatrix} 1,004 & 1,00003 & 2,0005 & 3,0004 & 5,0004 \\ 1,00003 & 2,0005 & 3,0004 & 5,0004 & 8,0003 \\ 2,0005 & 3,0004 & 5,0004 & 8,0003 & 13,0002 \\ 3,0004 & 5,0004 & 8,0003 & 13,0002 & 21,0006 \\ 5,0004 & 8,0003 & 13,0002 & 21,0006 & 34,0003 \end{bmatrix} \quad (1.4.l)$$

Su kuria suskaičiuojamos singuliaros reikšmės:



$$\Sigma_{\text{triukšmintas}} \approx \begin{bmatrix} 54,5615 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4403 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0006 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0003 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0002 \end{bmatrix} \quad (1.4.m)$$

Matoma, kad ir su užtriukšmintą Fibonači seka gavome, kad yra dvi nenulinės reikšmės ir trys arti nulio. Tačiau matyti, kad nenulinės reikšmės yra kur kas didesnės negu su neužtriukšmintą  $H_5$  matrica. Būtent todėl nustatoma tokia  $\epsilon$  reikšmė, kad būtų atskiriamos nulinės ir nenulinės singuliarios reikšmės, o naudojamas parametras  $N$  toks, kad būtų nustatoma didžiausia Hankelio matricos eilė. Taigi visos H-rangų reikšmės yra tarp 0 ir 50 šio tyrimo metu.

### 1.5. Klasikinis logistinis žemėlapis

Klasikinis logistinis žemėlapis, pristatytas biologo Roberto May 1976 metais [2], yra gerai žinomas iteracinis chaotinis žemėlapis, nusakomas formule:

$$x_{k+1} = ax_k(1 - x_k), \text{ kai } k = 0, 1, 2, 3 \dots, \quad (1.5.a)$$

čia  $a$  – valdymo parametras, kintantis tarp 0 ir 4 reikšmių imtinai, kai pradinė sąlyga  $x_0 \in [0, 1]$ ;

$x$  – klasikinio logistinio žemėlapio narių kintamasis, kuris kinta tarp 0 ir 1 imtinai (kaip ir pradinė sąlyga  $x_0$ );

$k$  – indeksas, nusakantis, kelintas logistinio žemėlapio sekos narys yra skaičiuojamas arba naudojamas skaičiavimuose.

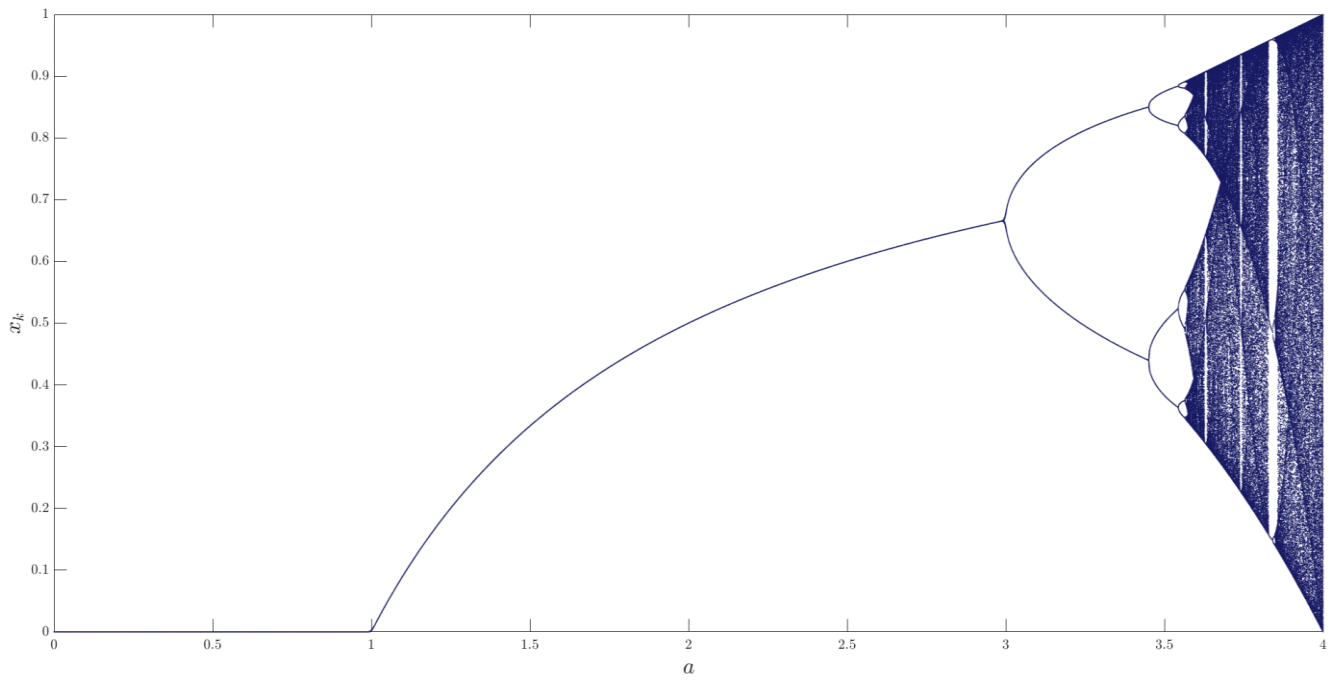
Viena iš logistinio žemėlapio savybių yra jo neapverčiamumas, kadangi (1.5.a) formulėje esanti lygtis negali vienareikšmiškai būti išspręsta  $x_k$  atžvilgiu, nes sprendžiant minėtąją lygtį gaunama išraiška, turinti daugiau negu vieną sprendinį:

$$x_k = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4ax_{k+1}}}{2a}. \quad (1.5.b)$$

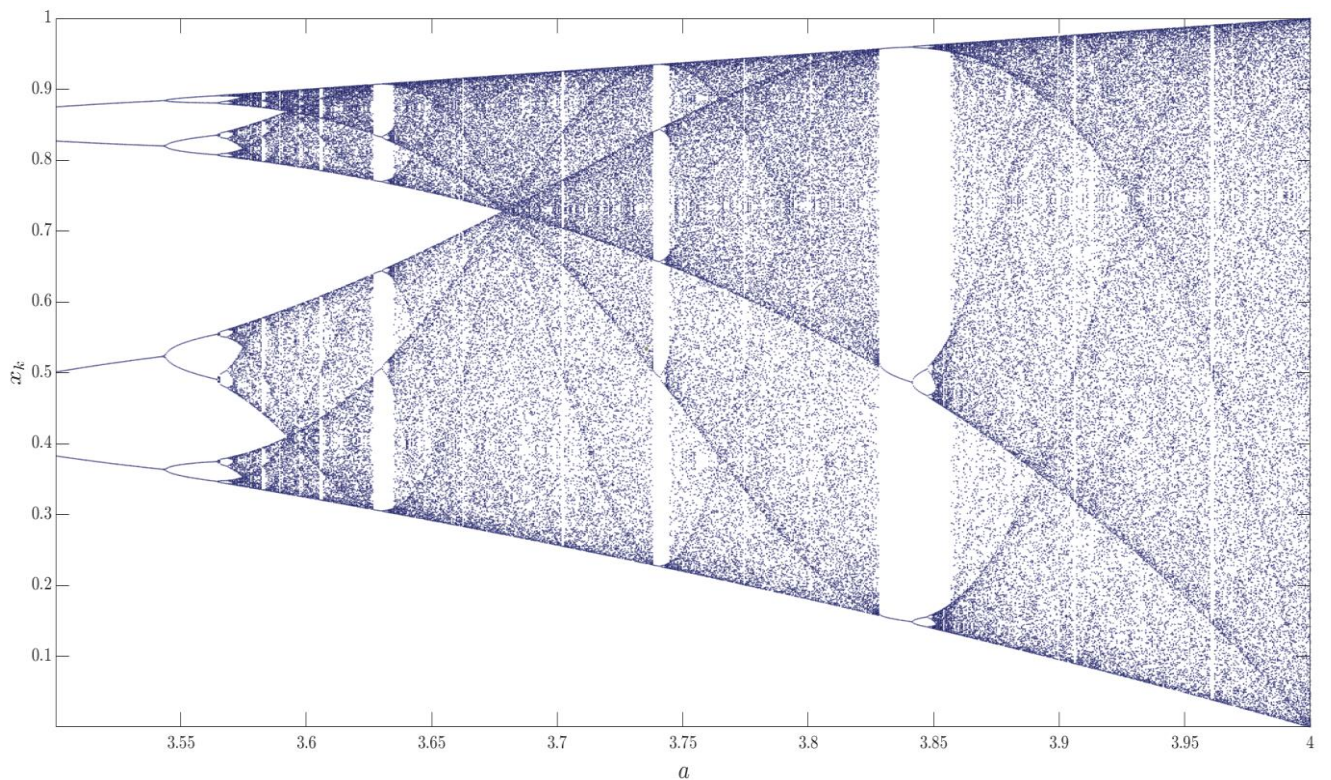
Ši savybė svarbi klasikiniam logistiniam žemėlapui todėl, nes klasikinio logistinio žemėlapio neapverčiamumas leidžia jo trajektorijas stabilizuoti amžinai, kadangi vyksta neasimptotinis konvergavimas tiksliai į fiksuotą tašką per tam tikrą baigtinį skaičių iteracijų (apie neasimptotinį konvergavimą daugiau 1.7.1 skyriuje).

Klasikinis logistinis žemėlapis taip pat pasižymi atminties horizonto ilgiu, lygiu vienam. Tai reiškia, kad kitai sekos reikšmei  $x_{k+1}$  suskaičiuoti reikia tik nario  $x_k$ , o ne visų narių iki pradinės sąlygos [1].

Vienas populiariausių logistinio žemėlapio dinamikos atvaizdavimo būdų yra bifurkacijos diagrama:



**1 pav.** Klasikinio logistinio žemėlapio bifurkacijų diagrama, kai  $a \in [0,4]$ , grafikas sudarytas pagal [3]



**2 pav.** Klasikinio logistinio žemėlapio bifurkacijų diagrama, kai  $a \in [3.5, 4]$ , grafikas sudarytas pagal [3]

Klasikinio logistinio žemėlapio bifurkacijų diagramos abscisių ašyje yra pažymėtas valdymo parametras  $a$ , o ordinačių ašyje – kintamasis  $x$ . Matyti, kad priklausomai nuo  $a$  reikšmės, logistinis žemėlapis elgiasi skirtingai:

1. Kai  $a \in [0,1]$ ,  $x$  reikšmė yra lygi nuliui. Kitaip tariant, 0 yra vieno taško atraktorius, kai  $a < 1$ .
2. Kai  $a \in (1,3)$ , sistema vis tiek turi vieną atraktorių, kai  $a = 3$ , tačiau  $x$  reikšmė didėja didėjant iki  $a$  reikšmės, lygios 3.
3. Kai  $a = 3$ , sistemoje nutinka pirmoji periodo dvigubėjimo bifurkacija, kurioje  $N$  periodo atraktorius tampa  $2N$  dydžio atraktoriumi, kai  $N$  yra periodo numeris [3].

Dalis bifurkacijų nutinka apytiksliai šiose  $a$  reikšmėse:  $a = \{3, 3,45, 3,54, 3,564, 3,569\}$  iki pat  $a = 3,57$ , nuo kurios prasideda chaotinė diagramos dalis. Tačiau svarbu atminti, kad ne visos likusios diagramos dalys po minėtosios  $a$  reikšmės yra chaotinės. Pagal 2 paveikslą galima pastebėti, jog tarp visų  $a$  reikšmių, apytiksliai didesnių negu 3,57, yra ir „balti tarpai“, nusakantys nechaotinę diagramos dalį. Ši savybė yra itin pastebima  $a = 3,83$  aplinkoje, kurioje galima matyti vyraujančią periodo-3 režimą [3].

### 1.6. Išplėstasis apverčiamasis logistinis žemėlapis

Diskretus žemėlapis  $x_{k+1} = f(x_k)$  yra apverčiamas, jeigu  $x_k$  gali išreikšiamas taip:

$$x_k = f^{-1}(x_k), \quad (1.6.a)$$

čia  $x_k$  – išplėstojo apverčiamo logistinio žemėlapio vertė, kai indeksas  $k = 0, 1, 2, \dots$ ;  $f$  bei jos atvirkštinė funkcija  $f^{-1}$  – vienareikšmės funkcijos.

Vienmatis neapverčiamas iteracinis žemėlapis gali būti paverčiamas į apverčiamą iteratyvų žemėlapi, padidinant jo dimensijos dydį [1, 4]. Pavyzdžiui, jeigu pridėtume antrą lygtį prie klasikinio logistinio žemėlapio lygties, gautume išplėstąjį apverčiamą logistinį žemėlapi, sudarytą iš lygčių sistemos [1, 5]:

$$\begin{cases} x_{k+1} = ax_k(1 - x_k) + y_k; \\ y_{k+1} = bx_k, \end{cases} \quad (1.6.b)$$

čia  $a \in [0,4]$ ,  $b \in [0, a]$  ir  $k = 0, 1, 2, \dots$

Iš (4) formulės gauname  $x_k$  ir  $y_k$  išraiškas:

$$\begin{cases} x_k = \frac{y_{k+1}}{b}; \\ y_k = x_{k+1} - \frac{a}{b^2} y_{k+1} (b - y_{k+1}), \end{cases} \quad (1.6.c)$$

čia  $x_k, y_k$  – išplėstojo apverčiamojo logistinio žemėlapio vertės, kai indeksas  $k = 0, 1, 2, \dots$ ;

$a, b$  – valdymo parametrai.

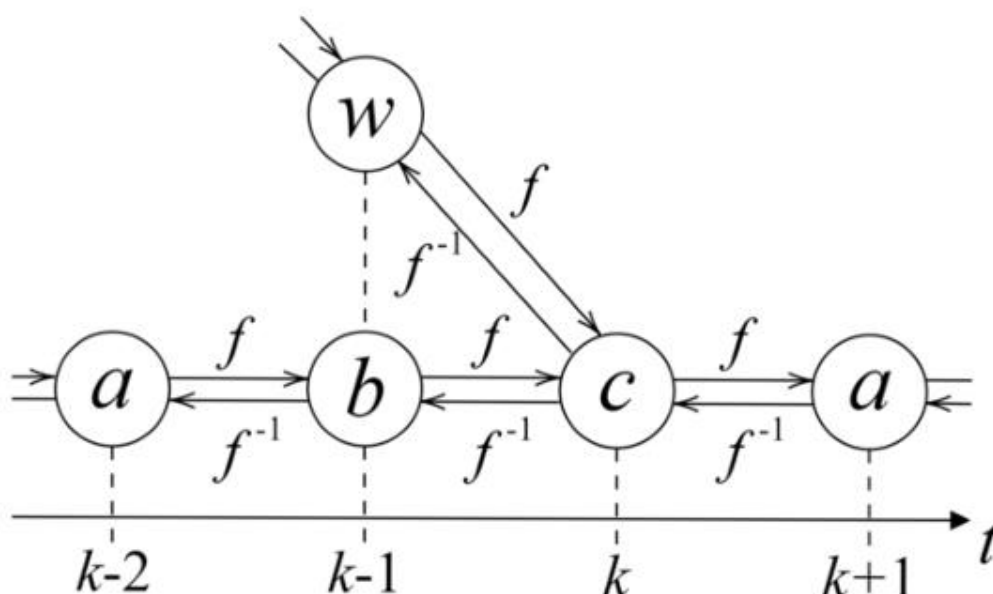
Galime matyti, kad ir klasikinio logistinio žemėlapio, ir išplėstinio apverčiamojo logistinio žemėlapio atvejais atminties horizontas yra vieno žingsnio. Kaip minėta, kitai reikšmei, pažymėtai indeksu  $k + 1$ , apskaičiuoti reikia vieno elemento –  $k$ -tojo nario.

## 1.7. Konvergavimo tipai logistiniuose žemėlapiuose

### 1.7.1. Asimptotinis ir neasimptotinis konvergavimas

Neasimptotinis konvergavimas yra konvergavimo tipas, kurio metu žemėlapis patenka į pastovią orbitą tiksliai po baigtinio iteracijų skaičiaus, o asimptotinis konvergavimas pasižymi tokia savybe, kad asimptotinio konvergavimo metu žemėlapis konverguoja į pastovią orbitą, kai  $k \rightarrow +\infty$ . Tačiau neasimptotinis konvergavimas gali egzistuoti tik tada, kai žemėlapis yra neapverčiamasis [1].

Kitaip sakant, tokiaime žemėlapyje nario reikšmė  $x_k = f^{-1}(x_{k+1})$  nėra vienintelė (apie tai daugiau 2.2 skyriuje).

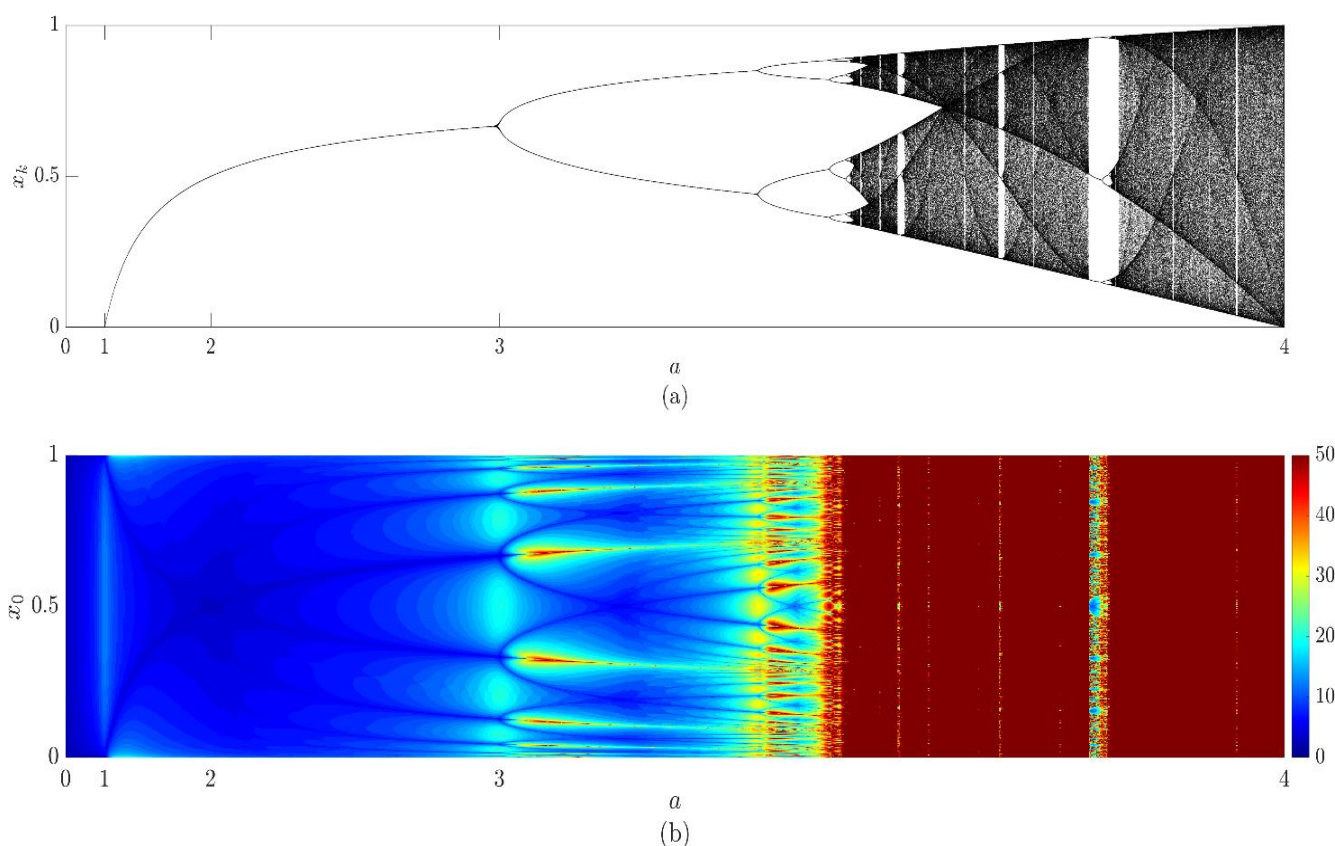


**3 pav.** Neapverčiamos sistemos vizualizavimo schema. Pilnai apverčiama sistema neleidžia neasimptotiniam konvergavimui egzistuoti sistemoje [41]

Pilnai apverčiamoje sistemoje negali egzistuoti neasimptotinis konvergavimas, o neapverčiamoje sistemoje (žr. 3 pav.) neasimptotinis konvergavimas gali egzistuoti [41]. Tačiau įprastame neapverčiame diskrečiame žemėlapyje (pavyzdžiui, klasikiniame logistiniame žemėlapyje) neasimptotinis konvergavimas egzistuoja, nes sistema yra neapverčiama (žemėlapijo nusakančios funkcijos atvirkštinė funkcija nėra vienareikšmė), kadangi bet kuris fiksuotas taškas  $x^*$  tenkina  $x^* = f(x^*)$ , tai tada atvirkštinei funkcijai irgi galios  $f^{-1}(x^*) = x^*$ . Jeigu ta funkcija bijektyvi, tai negalima suskaičiuoti bent dar vienos papildomos reikšmės, kad galėtume tiksliai pasiekti fiksuotą tašką. 3 paveiksle pavaizduotoje neapverčiamos sistemos schemeje galima pastebėti, kad sistemoje vienareikšmiškumo nėra sprendžiant pagal perėjimus nuo c būsenos, kadangi iš c būsenos galima pereiti į b ir c, o ne į vieną būseną, kas yra būdinga pilnai apverčiamai sistemai, todėl šiuo sistemos atveju w „atšakos“ iš c būsenos ir į ją sudaromas nevienareikšmiškumas sistemą padaro neapverčiama.

### 1.7.2. Konvergavimas klasikiniame logistiniame žemėlapyje

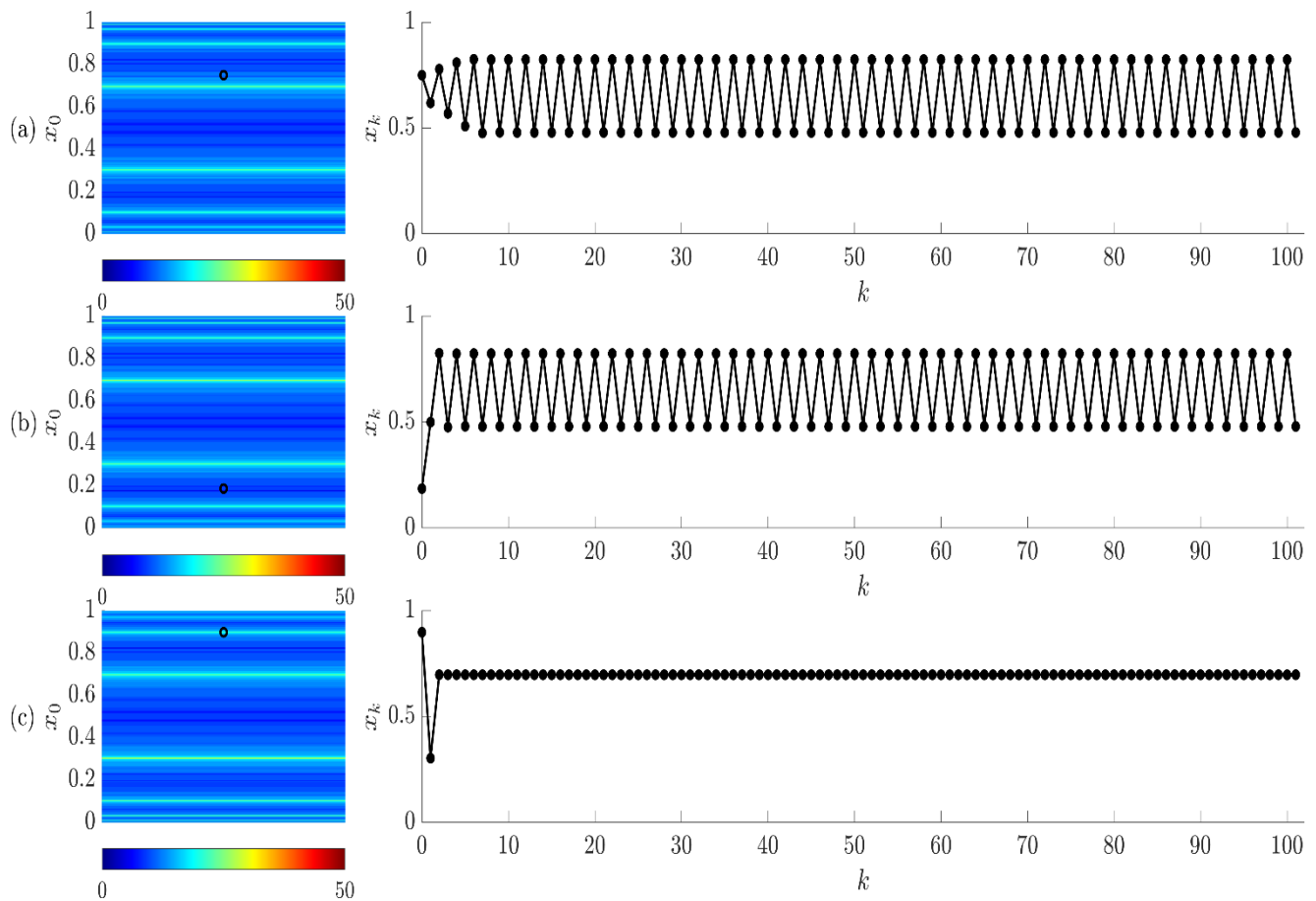
Logistinių žemėlapių konvergavimą galima stebėti pasitelkiant H-rangų grafiką bei bifurkacijos diagramą. Anot [1] šaltinio, bifurkacijos diagrama bei H-rangų vizualizacija klasikiniam logistiniam žemėlapiui atrodo taip:



**pav.** Klasikinio logistinio žemėlapio bifurkacijos diagrama (a) bei H-rangų grafikas (b), kai abscisių ašiai pritaikoma logaritminė transformacija vaizdumui pagerinti [1]

Abiejuose grafikuose  $x$  ašis yra pavaizduota logaritminėje skalėje. Klasikinio logistinio žemėlapio H-rangų grafike kiekvienas taškas atitinka pereinamąjį procesą, pradedant nuo pradinės sąlygos  $x_0$  ir sistemos valdymo parametro  $a$  reikšmės. Svarbu paminėti, kad H-rangų žemėlapiu aukščiausia reikšmė yra 50 ir skaičiuojant H-rangus (šiuo atveju jie skaičiuojami naudojant SVD [12]) nustatomas parametras lygus  $\epsilon = 10^{-10}$ . Tai reiškia, kad šiuo atveju visos H-rangų reikšmės didesnės negu 50 bus prilyginamos vertei, lygiai 50.

Panagrinėkime logistinio žemėlapiu pereinamuosius procesus parinkdami skirtingas pradines sąlygas  $x_0$ . 5 paveikslo (c) dalyje galima matyti, kad jeigu parenkama pradinės sąlygos  $x_0$  vertė, o  $a = 3,3$  reikšmė išlaikoma ta pati, stabilizavimo trukmė yra begalinė, o (a) ir (b) dalyse – stabilizavimo trukmė trumpalaikė. Tai yra todėl, kad 5 pav. (a), (b) ir (c) dalyse yra asimptotinis konvergavimas į fiksuotą stabilią orbitą, neasimptotinis konvergavimas į fiksuotą stabilią orbitą bei neasimptotinis konvergavimas į fiksuotą nestabilią orbitą atitinkamai. Esant fiksuotai  $a = 3,3$  reikšmei egzistuoja du atraktorių tipai: stabilus periodo-2 atraktorius bei nestabilus periodo-1 atraktorius. Žinant tai, galima pastebėti, kad H-rangų žemėlapiuose pradinės sąlygos parenkamos žemų H-rangų regionų centruose 5 pav. (a) ir (b) atvejais, o 5 pav. (c) atveju – aukštų H-rangų zonos viduryje, kur yra žemo algebrinio sudėtingumo taškas.



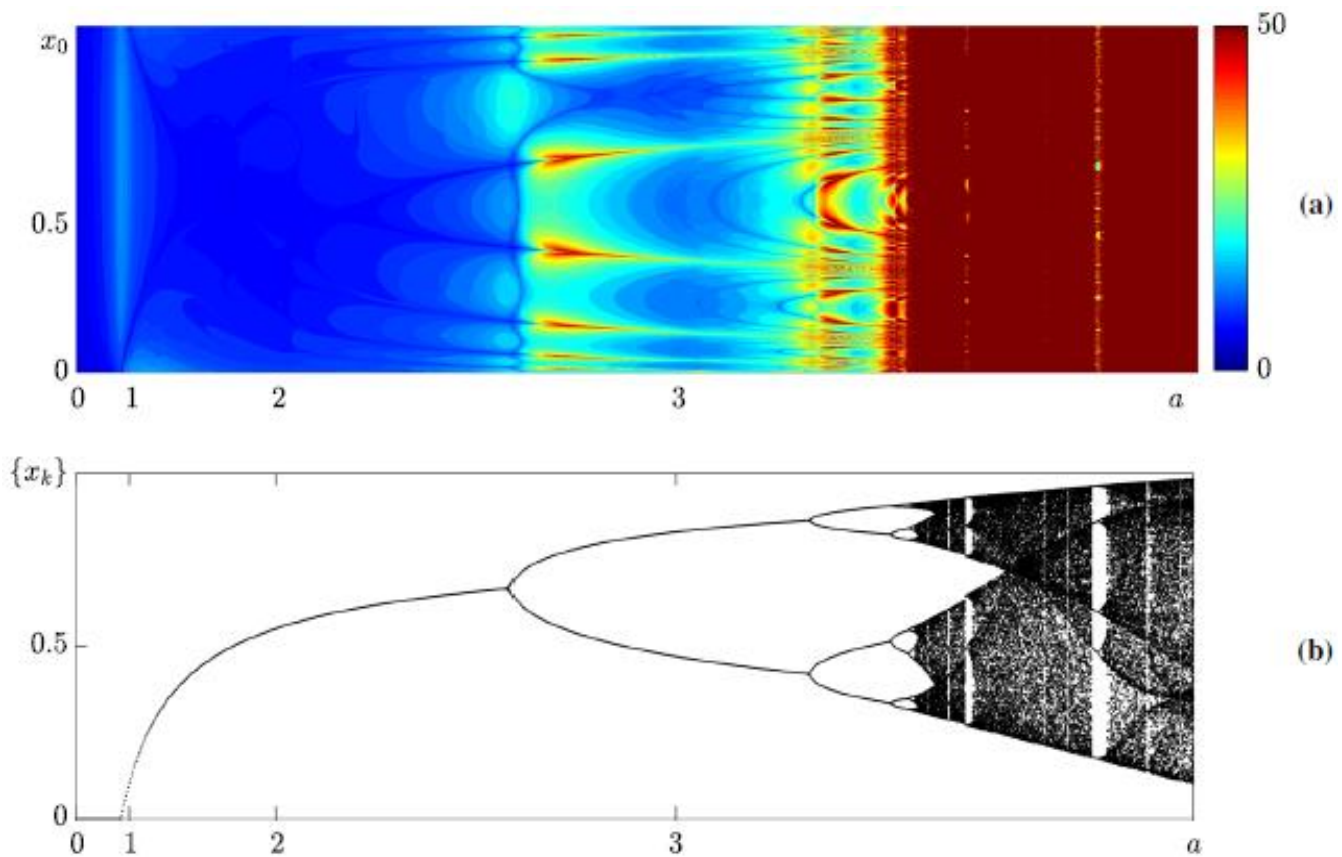
**4 pav.** Klasikinio logistinio žemėlapio H-rangų (kairėje) ir pereinamųjų procesų grafikai (dešinėje), kai  $a = 3.3$ , o  $x_0 \in [0,1]$ . Juodai pažymėti apskritimai yra pereinamųjų procesų taškų pozicija H-rangų spalvinėje vizualizacijoje pagal kintamąjį  $x_0$  [1]

Kitaip sakant 5 pav. (a) ir 5 pav. (b) grafikai nusako trajektoriją, kai  $x_0$  parinkta ne aukštų H-rangų reikšmių zonos centre (a yra asimptotinis konvergavimas į stabilią periodo-2 orbitą, b – neasimptotinis konvergavimas į stabilią periodo-2 orbitą), o grafiko (c) dalyje naudojama tiksli  $x_0$  reikšmė aukštų H-rangų reikšmių zonos centre bei vaizduojamas neapibrėžto laiko stabilizavimas (neasimptotinis konvergavimas į nestabilią periodo-1 orbitą). Taip pat svarbu žinoti, kad 5 paveikslo (b) ir (c) dalyse stabilizavimui reikalingas pradines sąlygas galima išsiskaičiuoti iš klasikinio logistinio žemėlapiu atvirkštinės funkcijos išraiškos. Ši savybė nėra pritaikoma išplėstiniame apverčiamajame logistiniame žemėlapyje ar trupmeniniame logistiniame žemėlapyje.

### 1.7.3. Konvergavimas išplėstiniame apverčiamajame logistiniame žemėlapyje

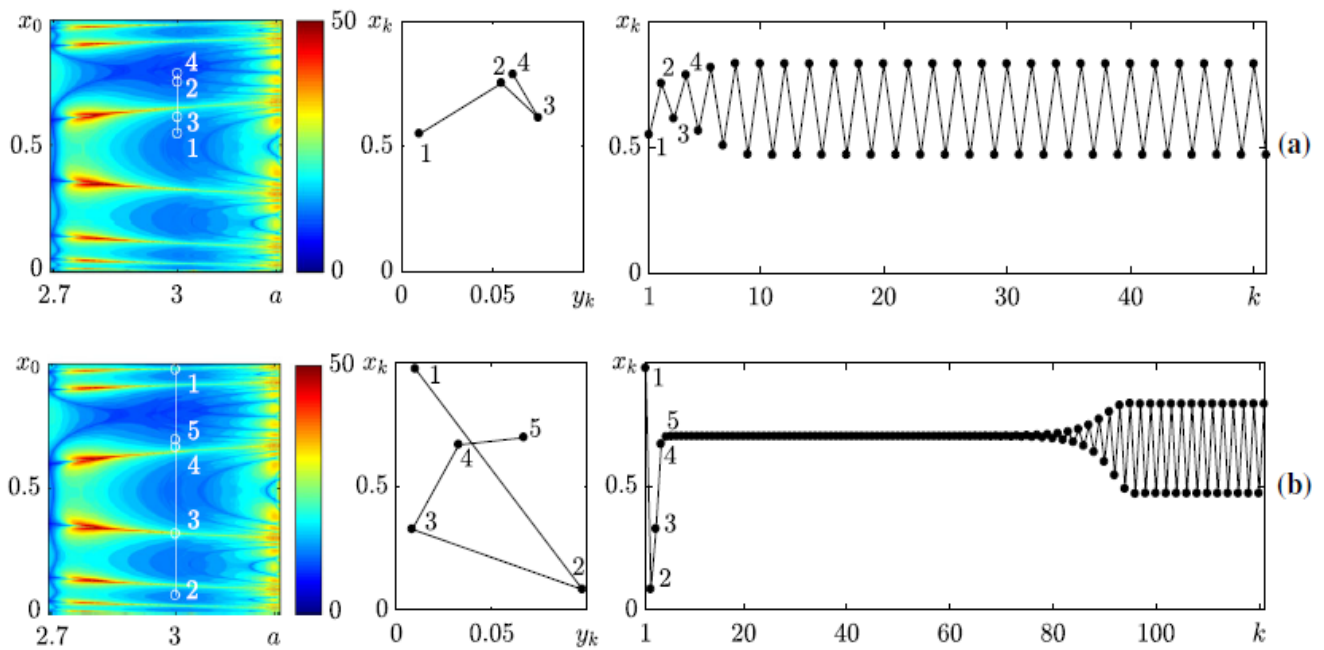
Pilnai apverčiamo logistinio žemėlapiu konvergavimas [1] tiriamas, kai parametras  $b$  yra nustatomas lygus 0,1, o pradine sąlyga  $y_0 = 0,01$ .





**5 pav.** H-rangų (a) ir bifurkacijos diagrama (b) išplėstinio apverčiamojo logistinio žemėlapiui [1]

Matyti, kad skirtumai tarp klasikinio ir apverčiamojo logistinių žemėlapių bifurkacijų ir H-rangų grafikų yra neženklūs, tačiau vis tiek galima matyti bifurkacijos diagramoje fiksuotas taškas lygus nuliui iki maždaug  $a = 1$ , o ne lygiai iki  $a = 1$  reikšmės ( $x_k$  reikšmė tampa nenuline tik prieš pat  $a = 1$  reikšmę). Dabar bus nagrinėjama H-rangų bei pereinamųjų procesų grafikai apverčiamajam logistiniam žemėlapiui [1]:



**6 pav.** Išplėstinio apverčiamojo logistinio žemėlapio H-rangų (kairėje) ir pereinamųjų procesų grafikai (dešinėje), kai  $a = 3$ , o  $x_0 \in [0,1]$  [1]. Balti apskritimai su skaičiais H-rangų grafikuose, esančiuose kairėje, nusako tarpinių procesų reikšmes

Kai  $a = 3$  bei  $b = 0,1$  stabili periodo-2 orbita ir nestabili periodo-1 orbita abi egzistuoja išplėstiniam apverčiamajame logistiniame žemėlapyje [1, 5].

Asimptotinį konvergavimą į stabilią periodo-2 orbitą galima matyti 7 paveikslo (a) dalyje. H-rangų spalvinėje vizualizacijoje galima matyti priklausomai nuo spalvos yra nusakomi H-rangų dydžiai. Raudona spalva nusako aukštus H-rangus, o mėlyna – žemus (primenama, kad H-rangai kinta tarp 0 ir 50). Tačiau svarbu atsiminti, kad palyginus su klasikiniu logistiniu žemėlapyje konvergavimas į stabiliąją periodo-2 orbitą negali būti neasimptotinis [1]. Išplėstiniam apverčiamajame logistiniame žemėlapyje asimptotinio konvergavimas į stabiliąją periodo-2 orbitą negali egzistuoti, kadangi minėtasis logistinis žemėlapis yra apverčiamas (atvirkštinė funkcija yra vienareikšmė).

Pradinė sąlyga  $x_0$  yra parenkama tiksliai aukštų H-rangų regiono viduryje. Tariamai sistema tarsi bando konverguoti neasimptotiškai į nestabilią periodo-1 orbitą (7 pav. (b) dalyje), tačiau kadangi neasimptotinis konvergavimas negali egzistuoti išplėstiniam apverčiamajame logistiniame žemėlapyje, 7 paveikslo (b) dalyje galima matyti, kad pereinamieji procesai konverguoja asimptotiškai į stabilią periodo-2 orbitą, o ne neasimptotiškai į nestabilią periodo-1 orbitą. Toks reiškinys vadinamas nestabilių orbitų apverčiamuosiuose žemėlapuose laikinu stabilizavimu [1, 14].

Pagal 7 pav. (b) iliustraciją galima matyti, kad pagrindinis skirtumas tarp klasikinio ir išplėstinio apverčiamojo logistinių žemėlapių ir yra tai, kad apverčiamojo logistinio žemėlapio sistemoje negali egzistuoti neasimptotinis konvergavimas anot [14]. Dalinai stabili H-rangų juostų struktūra 7 (a) paveikslo dalyje nusako pradinių sąlygų daugdarą, kurią galima naudoti laikinai stabilizuoti išplėstinio apverčiamojo logistinio žemėlapio trajektoriją [1, 14].



Taip pat svarbu žinoti, kad analiziniai metodai negali būti naudojami ieškant aukštų H-rangų zonų centrų išplėstiniame apverčiamame logistiniame žemėlapyje. Tai yra vienas iš pagrindinių skirtumų tarp klasikinio logistinio žemėlapių bei išplėstinio apverčiamojo logistinio žemėlapių, kadangi dėl išplėstinio apverčiamojo logistinio žemėlapių apverčiamumo negali būti neasimptotinio konvergavimo į tikslią reikšmę per tam tikrą ribotą iteracijų skaičių. Būtent dėl šio skirtumo vietoj analizinių priemonių reikia naudoti skaitines, nes ne taip kaip klasikiniame logistiniame žemėlapyje, kur pasitelkiant atgalinį iteracinį skaičiavimą ir randant tikslias aukštų H-rangų zonų centrų reikšmes [39], to atlikti negalima išplėstiniame apverčiamajame logistiniame žemėlapyje.

## 2. Tyrimo objektas ir metodai

### 2.1. Naudotos priemonės

Darbo rezultatų sudarymui buvo naudota „Matlab“ programinė įranga versijos pavadinimu „2022b“.

### 2.2. Trupmeninis logistinis žemėlapis

Šiame rašto darbe tyrinėjamas trupmeninio skirtumo logistinis žemėlapis buvo pristatytas [6] šaltinyje ir gali būti gaunamas kaip šios trupmeninio skirtumo lygties integralas:

$${}^c\Delta_0^\nu u(t) = au(t + \nu - 1)(1 - u(t + \nu - 1)) - u(t + \nu - 1)$$
$$t \in \mathbb{N}_{d+1-\nu}, \nu \in (0, 1], a \in (0, 4), u(d) = u_0 \quad (2.2.a)$$

čia  $\mathbb{N}_d = \{d, d + 1, d + 2, \dots\}$ , kai  $d \in \mathbb{R}$

${}^c\Delta_d^\nu$  – kairinis Kaputo  $\delta$  skirtumas [7];

Kai  $\nu > 0$ ,  $m - 1 < \nu < m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $t \in \mathbb{N}_{d+m-\nu}$  galime aprašyti išraišką formule:

$${}^c\Delta_0^\nu u(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\nu)} \sum_{s=d}^{t-(m-\nu)} (t-s-1)^{(m-\nu-1)} \Delta^m u(s). \quad (2.2.b)$$

Kai  $s \in \mathbb{N}_d$ , krintantis faktorialas (angl. *falling factorial*) yra:

$$t^{(\nu)} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\nu)} \quad (2.2.c)$$

ir  $m$ -tosios eilės skirtumo operatoriaus išraiška:

$$\Delta^m u(s) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^{m-k} u(s+k). \quad (2.2.d)$$

Jei  $\nu = m \in \mathbb{N}$ , tada [7, 8]:

$${}^c\Delta_d^\nu u(t) = \Delta^m u(t). \quad (2.2.e)$$

Kai  $m = 1$ , tai:

$$\Delta^m u(t) = \Delta u(t) = u(t+1) - u(t). \quad (2.2.f)$$

Tada pagal [9, 10 ir 11] šaltinius, pagal [1] šaltinio aprašytą eigą, galutinę išraišką, kuri yra naudojama šiame tyrime, aprašoma šiomis formulėmis [1]:

$$x_k = x_0 + \sum_{j=1}^k G_{j-1} (ax_{k-j}(1 - x_{k-j}) - x_{k-j}), \quad (2.2.g)$$

kai

$$G_0 = 1, G_j = \left(1 - \frac{(1-\nu)}{j}\right) G_{j-1}, \quad (2.2.h)$$

čia  $x_k$  – trupmeninio logistinio žemėlapio  $k$ -tasis sekos narys, kai  $k = 0, 1, 2 \dots$ ;

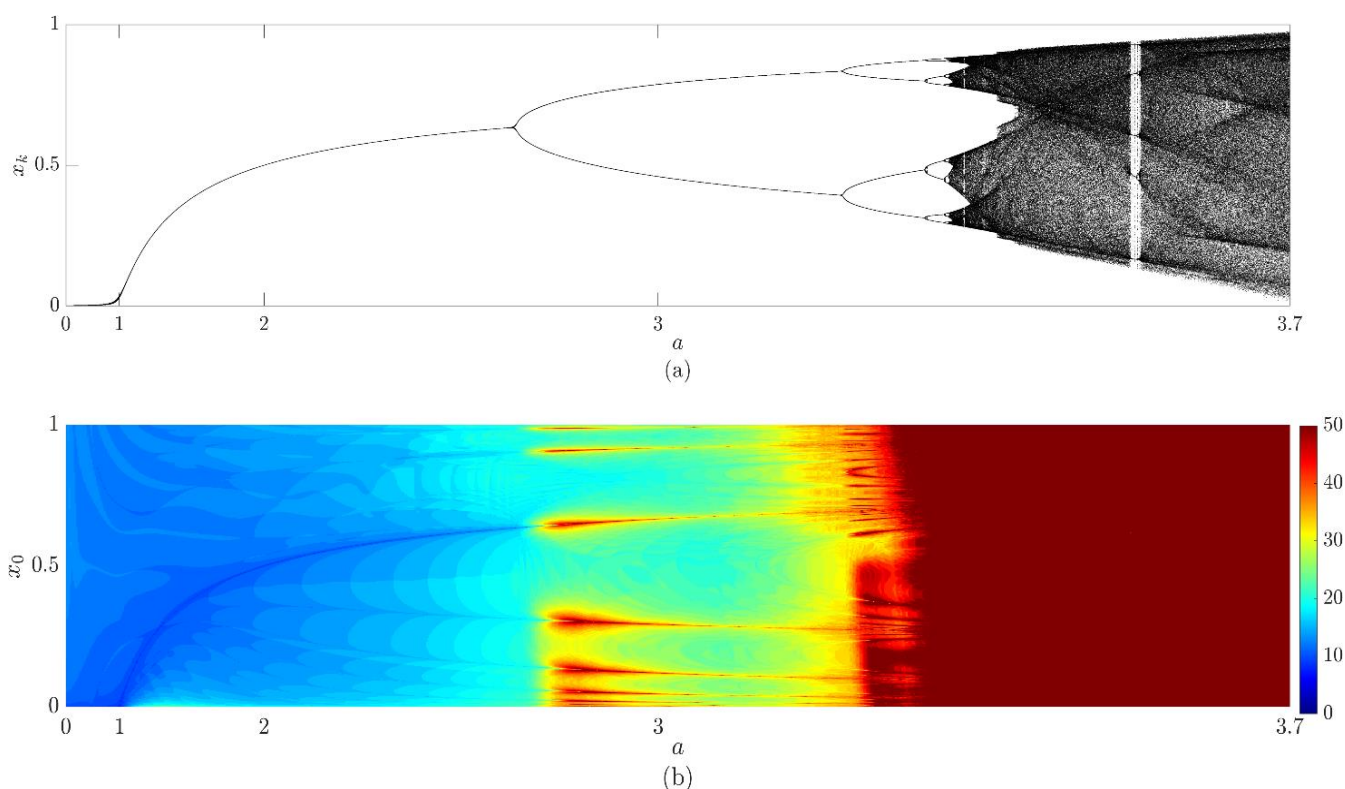
$\nu$  – trupmeninės eilės parametras, kurį prilyginus 1, (2.2.g) formulėje būtų gautas klasikinis logistinis žemėlapis.

Iš (2.2.g) formulės galima matyti, kad visos trupmeninio logistinio žemėlapio trajektorijos reikšmės yra naudojamos būsimos reikšmės radime. Kitaip sakant, palyginus su klasikiniu bei apverčiamuoju logistiniais žemėlapiais, kurių atminties horizontas yra lygus vienam (nes ieškant kito nario, pažymėtu indeksu  $k + 1$ , skaičiavimuose naudojama tik dabartinė reikšmė su indeksu  $k$ ), trupmeninio logistinio žemėlapio atveju skaičiavimuose visos reikšmės nuo pradinės sąlygos  $x_0$  iki dabartinės reikšmės  $x_k$  yra naudojamos ieškant  $x_{k+1}$  reikšmę [1].

### 2.2.1. Konvergavimas trupmeninės eilės logistiniame žemėlapyje

Palyginus trupmeninį logistinį žemėlapi su klasikiniu ar išplėstiniu apverčiamuoju logistiniais žemėlapiais, vienas svarbus skirtumas tarp jų yra ilgesnis trupmeninio logistinio žemėlapio atminties horizonto ilgis. Dėl šių savybių trupmeninis logistinis žemėlapis negali būti apverčiamas sprendžiant pagal (2.2.g) formulę. Kai parametrai  $a = 3$ ,  $\nu = 0,8$  bet kuri nefiksuoto taško trajektorija artėja asimptotiškai link stabilios periodo-2 orbitos.

Trupmeninio logistinio žemėlapio fiksuoti taškai su visomis  $\nu$  reikšmėmis yra tie patys, kaip ir klasikinio logistinio žemėlapio. Pavyzdžiui, tie patys abiejuose žemėlapiuose yra fiksuoti taškai  $x = 0$  ir  $x = \frac{a-1}{a}$  [1]. Žemiau (žr. 8 pav.) galime matyti bifurkacijų grafiką bei H-rangų grafiką, priklausantį nuo parametro  $a$  ir  $x_0$  reikšmių.



**7 pav.** H-rangų (a) ir bifurkacijos diagrama (b) trupmeninės eilės išplėstinio logistinio žemėlapio [1], kai  $\nu = 0,8$  [1]

Pirmoji periodo dvigubėjimo bifurkacija yra apytiksliai ties  $a \approx 2,71$  reikšme, antra – ties  $a \approx 3,3$ , o tolimesnės  $a$  reikšmės ves pereinamąsias trajektorijas link chaotinių orbitų [1]. Taip pat kaip ir

išplėstiniame apverčiamajame logistiniame žemėlapyje, stabilizavimo trukmė nėra begalinė. Trupmeninės eilės logistinio žemėlapio stabilizavimo trumpalaikiškumas priklauso nuo atminties efekto savybės ir dalį įtakos reikšmių neatitikimams sudaro paklaidų kaupimasis, kadangi kiekvienos iteracijos metu besikaupiančios paklaidos sekos taškus pastumia nenuspėjamai [1]. Tačiau galima taip pat išvelgti, ypač iki  $a \approx 2,71$  vertės H-rangų grafiko reikšmės ir bifurkacijos pereinamosios reikšmės tame intervale yra vizualiai panašios. Kitaip tariant, H-rangų vizualizacijose (8 pav. (b)) galima išvelgti trajektorinių panašumų lyginant su bifurkacijos diagramos trajektorija (8 pav. (a)).

Apibendrinimui žemiau pateikiama nagrinėtų logistinių žemėlapių tipų lentelė, nusakanti tris aptartas tyrimui svarbiausias minėtų logistinių žemėlapių savybes: ar logistinis žemėlapis yra apverčiamas, koks jo atminties horizonto ilgis bei kiek laiko ilgiausiai gali stabilizuotis kiekvieno logistinio žemėlapio trajektorija. Kitame skyriuje bus nagrinėjamas tik trupmeninis logistinis žemėlapis ir jo konvergavimo tipai, stabilizavimo trukmė bei ypatybės. Todėl svarbu dar kartą aptarti trupmeninės eilės logistinio žemėlapio savybes palyginus jas su kitais dvejais nagrinėtais logistiniais žemėlapiais:

**1 lentelė.** Klasikinio, išplėstinio apverčiamojo bei trupmeninės eilės logistinių žemėlapių apverčiamumo, atminties horizonto ilgio ir stabilizavimo trukmės aptartų savybių lentelė

|   | Apverčiamas | Atminties horizonto ilgis | Stabilizavimo trukmė |
|---|-------------|---------------------------|----------------------|
| <b>Klasikinis logistinis žemėlapis</b>                | Ne          | 1                         | Neapibrėžtai ilga    |
| <b>Išplėstinis apverčiamasis logistinis žemėlapis</b> | Taip        | 1                         | Laikina              |
| <b>Trupmeninės eilės logistinis žemėlapis</b>         | Ne          | Iki pradinės sąlygos      | Laikina              |

Kitaip tariant, svarbu atminti, kad trupmeninio logistinio žemėlapio pagrindinės savybės yra jo neapverčiamumas, atminties horizontas, siekiantis pradinės sąlygas imtinai bei laikina stabilizavimo trukmė. Šiame žemėlapyje negalimas amžinas stabilizavimas, nes nors trupmeninis logistinis žemėlapis yra neapverčiamas, jo nelokalumas (atminties efektas) neleidžia neasimptotiniam konvergavimui egzistuoti, tačiau žemėlapio didelis atminties horizonto ilgis leidžia atsižvelgti į trajektorijos visus buvusius narius ir geba tiksliau atspindėti realaus gyvenimo reiškinius negu klasikinis ar apverčiamasis logistiniai žemėlapiai. Todėl yra vertinga sudaryti valdymo schemą, gebančią stabilizuoti (trajektoriją išlaikyti kuo arčiau nestabilios periodo-1 orbitos kiek įmanoma ilgiau) trupmeninį logistinį žemėlapi.

### 3. Rezultatai ir jų aptarimas

#### 3.1. Konvergavimo tipai trupmeniniame logistiniame žemėlapyje

##### 3.1.1. Analitinis tyrinėjimas

Šiame skyriuje yra aptariami analitiniai rezultatai apie trupmeninio logistinio žemėlapio konvergavimą. Šio skyriaus tikslas – parodyti, kad su bet kuriomis  $a$  ir  $v$  (žr. 2 lentelėje) reikšmėmis egzistuoja nestabili periodo-1 orbita, tačiau trupmeninio logistinio žemėlapio trajektorija į nestabilią periodo-1 orbitą negali konverguoti neasimptotiškai.

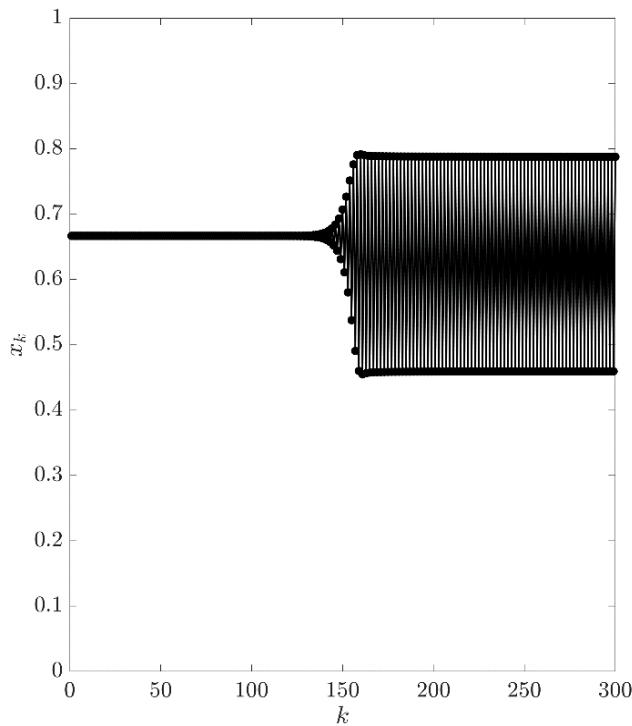
##### 3.1.1.1. Periodo-1 orbita trupmeniniame logistiniame žemėlapyje

(2.2.g) formulės pirmosios iteracijos išraiška yra ekvivalenti klasikinio logistinio žemėlapio išraiškai, todėl:

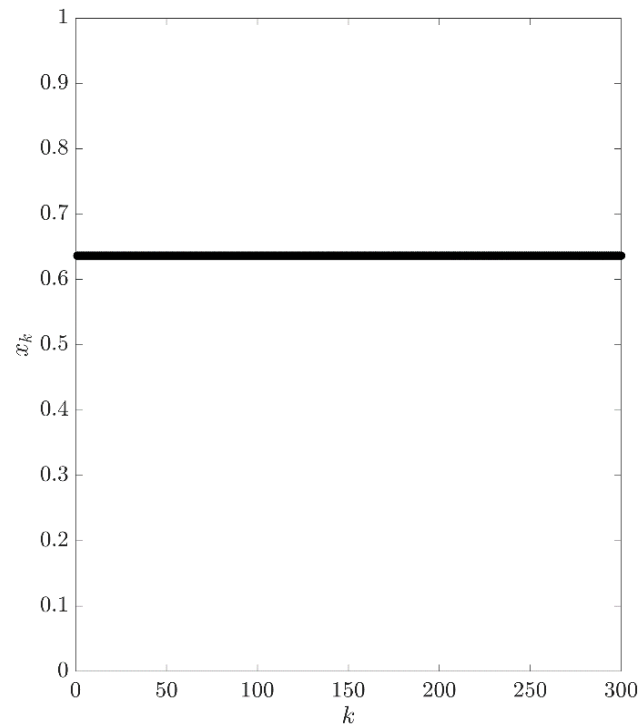
$$x_1 = ax_0(1 - x_0) \tag{3.1.a}$$

Čia formulės pažymėjimai atitinka (1) formulę. Netrivialusis fiksuotasis taškas klasikiniam logistiniam žemėlapiui yra  $x^* = 1 - \frac{1}{a}$  [2]. Pagal tai, jeigu nusakoma, kad  $x_0 = x^*$ , tai reiškia, kad  $x_1 = x^*$ . Pasitelkiant indukcinį metodą, pagal (3.1.a) formulę gauname, kad  $x_j = x^*, \forall j = 0, 1, 2 \dots$ . Todėl netrivialioji periodo-1 fiksuotoji orbita trupmeniniame logistiniame žemėlapyje sutampa su klasikinio logistinio žemėlapio.

Tačiau, šis rezultatas nėra akivaizdus sprendžiant pagal skaitinių metodų gautus rezultatus. Kadangi paklaidų kaupimasis vyksta kiekvienoje iteracijoje, pradinė sąlyga  $x_0 = x^*$  ne visada nulemia, kad trajektorija liks pastovi reikšmingą iteracijų skaičių. Tai priklauso nuo parametrų  $a$  ir  $v$ . Šį efektą galima matyti žemiau 9 pav.:



(a)



(b)

**8 pav.** Trupmeninio logistinio žemėlapio trajektorijos, kai pradinė sąlyga lygi  $x_0 = x^* = 1 - \frac{1}{a}$ , kai  $a = 3$ , o  $\nu = 0,8$  (a dalyje), o b dalyje – kai  $a = 2,75$ ,  $\nu = 0,8$

Pirmuoju atveju, kai dvilypė reprezentacija nėra tiksli, galima matyti, kad trajektorija išlieka  $x^*$  reikšmėje mažiau negu 200 iteracijų, o parenkant kitas pradines reikšmes galima pasiekti stabilizavimą neapibrėžtam laiko tarpui. Taip pat galima pastebėti, kad  $a = 3$  bei  $a = 2,75$  atvejais periodo-1 fiksuotas taškas yra nestabilus abejose  $a$  reikšmėse. Galima teigti, kad stabilizavimo trukmė smarkiai skiriasi priklausant nuo parametrų  $a$  ir  $\nu$  reikšmių ir jeigu pradinės sąlygos ir parametrai yra parenkami tiksliai, įmanoma gauti neapibrėžtam laikui stabilizuotas sekas.

### 3.1.1.2. Neasimptotinis konvergavimas trupmeniniame logistiniame žemėlapyje

Neasimptotinio konvergavimo į periodo-1 fiksuotą tašką  $x^*$  (2.2.g) formulėje reiškia, kad yra iteracinis numeris  $k \in \mathbb{N}$ , kuris tenkina šią išraišką:

$$x_k \neq x^*, \text{ tačiau } x_{k+j} = x^*, j = 1, 2, 3 \dots \quad (3.1.b)$$

Tariama, kad iteracijos numerio  $k$  reikšmė prilyginama nuliui. Atsižvelgiant į tai, kad  $x_1 = ax_0(1 - x_0)$  ir šią lygtį išsprendžiant nario  $x_0$  atžvilgiu gauname dvi reikšmes:  $x_0^{(1)} = x^*$  bei  $x_0^{(2)} = \frac{1}{a}$ . Pirmas sprendinys nusako, kad nėra neasimptotinio konvergavimo, kadangi (2.2.g) sąlyga yra netenkinama. Taip pat  $x_0 = \frac{1}{a} \rightarrow x_1 = x^*$ , tačiau sekantys sekos nariai nepasilieka  $x^*$  reikšmėje dėl minėto atminties efekto. Pavyzdžiui, skaičiuojant  $x_2$  narį gautume išraišką:

$$x_2 = x_0 + G_0^\nu(ax_1(1 - x_1) - x_1) + G_1^\nu(ax_0(1 - x_0) - x_0) = \frac{1}{a} + G_0^\nu \cdot 0 + G_1^\nu x^* = \frac{1}{a} + G_1^\nu \left(1 - \frac{1}{a}\right) \quad (3.1.c)$$

Kitais atveju,  $x_2 = x^*$  galioja tik kelioms specifinėms  $\alpha$  reikšmėms ir net jeigu tokia vertė būtų pasirinkta, negalima užtikrinti, kad galioja lygybė  $x_3 = x^*$ .

Remiantis šiuo atradimu, jei neasimptotinis konvergavimas negali egzistuoti, kai  $k = 0$ , jis negali egzistuoti ir kai  $k = 1, 2, 3 \dots$  kadangi paskutiniame žingsnyje mes vėl susidursime su minėta  $x_k = x^*$  situacija.

Tačiau remiantis šiais atradimais galima teigti, kad neįmanoma stabilizuoti trupmeninės eilės logistinio žemėlapio, kad jis išliktų periodo-1 orbitos atraktoriuje neapibrėžtą laiko tarpą, todėl galima pasitelkti impulsų įvedimu grįstas valdymo schemas.

### 3.1.2. Skaitinis tyrinėjimas

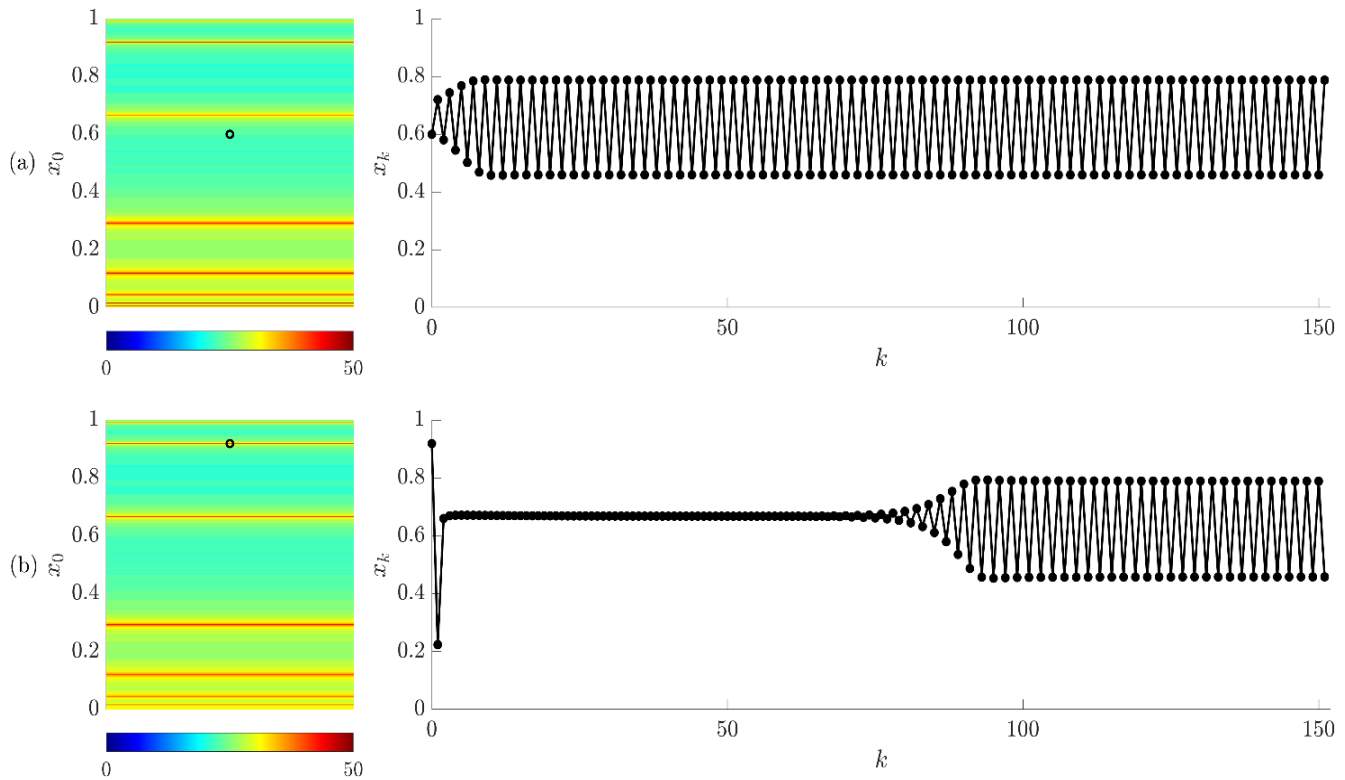
Skaitiniam tyrinėjimui atlikti pagal (2.2.g) formulę reikalingų parametru, skaitiniams eksperimentams naudotų reikšmės pateikiamos žemiau lentelėje:

**2 lentelė.** Skaitiniame tyrime naudotų parametru pavadinimai, reikšmės bei paaiškinimai

| Parametro numeris | Parametro pavadinimas | Parametro reikšmė | Parametro paaiškinimas                                  |
|-------------------|-----------------------|-------------------|---|
| 1.                | $\nu$                 | 0,8               | Trupmeninės eilės parametras [1]                        |
| 2.                | $a$                   | 3                 | Reprodukcinis numeris [38]                              |
| 3.                | $\epsilon$            | $10^{-10}$        | H-rangų reikšmės skaičiavimui naudojamas parametras [1] |
| 4.                | $N$                   | 50                | Didžiausia galima H-rangų reikšmė [1]                   |

Primenama, kad H-rangų maksimali reikšmė yra 50 pagal nustatytą Hankelio matricos dydį.

Galima pastebėti skirtingus konvergavimus 10 paveiksle. Naudojant minėtas parametru vertes, viena trupmeninio logistinio žemėlapio orbita gali asimptotiškai konverguoti į periodo-2 atraktorių (10 pav. (a)). Kaip minėta anksčiau, neasimptotiškas konvergavimas yra neįmanomas dėl atminties efekto, tačiau galima įgyvendinti laikiną žemėlapio trajektorijos stabilizavimą į nestabilų periodo-1 atraktorių (10 pav. (b) dalyje). Taip pat svarbu atkreipti dėmesį į H-rangų spalvinių vizualizacijų diagramas: H-rangų skaičiavimas yra būtinas šiam laikinam stabilizavimui įgyvendinti, nes pagal H-rangų spalvines vizualizacijas galima surasti tas pradines sąlygas, kurios atitinka aukštų H-rangų zonų centrus (10 pav. (b) dalis) ir taip stabilizuoti trajektoriją ilgiau negu pasirinkant pradinę sąlygą kitur (10 pav. (a) dalis).



**9 pav.** Trupmeninio logistinio žemėlapio konvergavimo tipų grafikas, kai  $a = 3$  ir  $\alpha = 0,8$ . (a) dalis nusako asimptotinį konvergavimą į periodo-2 stabilų atraktorių; (b) dalis nusako laikiną trajektorijos stabilizavimą į nestabilios periodo-1 orbitos atraktorių. Dešinėje esantys grafikai nusako trupmeninio logistinio žemėlapio trajektorijas atitinkamai (a) ir (b) H-rangų vizualizacijoms, kurios yra kairėje ir kinta priklausomai nuo pradinių sąlygų  $x_0 \in (0,1)$ ; Juodi apskritimai nusako pradines sąlygas, nuo kurių prasideda dešinėje esančios trajektorijos (taip pat galima pastebėti, kad (a) grafiko dalyje juodasis apskritimas nėra ant raudonosios arba kitaip tariant aukšto H-rangų zonos centre, o (b) atveju – yra ant siauros raudonų linijų zonos)

### 3.2. Naivusis valdymo metodas bei atminties efektas

#### 3.2.1. Naivioji valdymo schema klasikiniam logistiniam žemėlapiui

Tarkime turime klasikinį logistinį žemėlapi, kur  $a > \sqrt{6} + 1$ , kad egzistuoja stabilus periodo- $n$  atraktorių. Tada periodo-1 atraktorių yra nestabilus ir neasimptotinis konvergavimas taip pat egzistuoja klasikinio logistinio žemėlapi atveju.

Tarkime sudaroma valdymo schema, kur pasirenkama riba  $\delta$  ir turime trajektoriją  $x_0, x_1, x_2 \dots$  Logistinis žemėlapis yra skaičiuojamas tol, kol pasiekama iteracija, pažymima  $m$  raide, kurioje tenkinama sąlyga:

$$|x_{m-1} - x^*| < \delta, |x_m - x^*| \geq \delta, \quad (3.2.a)$$

čia  $m$  – iteracijos skaičius, kuriame negalioja sąlyga (3.2.a) formulėje;

$x^*$  – (2.2.g) formulėje aptarta reikšmė, nusakanti stabilizavimo impulsą bei ji yra lygi  $x^* = 1 - \frac{1}{a}$ ;

$\delta$  – trajektorijos svyravimo apribojimo parametras, pagal kurį nusakoma  $m$  reikšmė

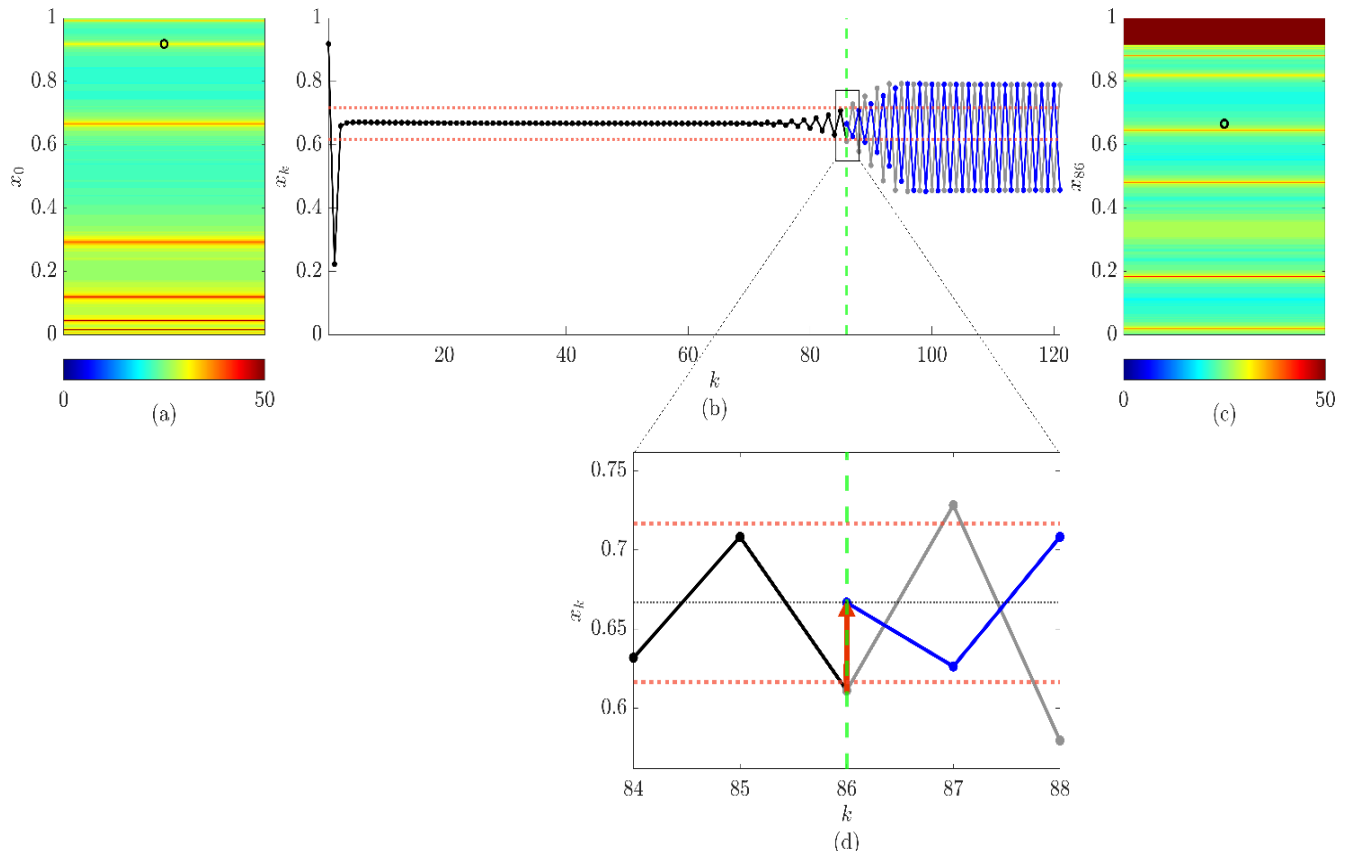


$x_m$  ir  $x_{m-1}$  – trajektorijos reikšmės  $m$  iteracijoje ir vienoje iteracijoje prieš  $m$  iteraciją

Valdymo schema (3.2.a) formulėje yra pritaikoma pagal lygybę  $x_{m+1} = x^*$  ir todėl yra aišku, kad klasikinis logistinis žemėlapis išliks stabilus neapibrėžtą laiko tarpą.

### 3.2.2. Naivioji valdymo schema trupmeniniam logistiniam žemėlapiui

Pasitelkiant klasikinio logistinio žemėlapio schemą, kuri apibrėžta praeitame skyriuje, dabar bus nagrinėjama ta pati schema, pritaikyta trupmeniniam logistiniam žemėlapiui.



**10 pav.** Naivus trupmeninio logistinio žemėlapio trajektorijos stabilizavimas, kai parametrai  $a = 3$ ,  $\alpha = 0,8$ ,  $\delta = 0,05$ . (a) dalis yra trupmeninio logistinio žemėlapio trajektorijų H-rangus iš skirtingų pradinių reikšmių  $x_0$  reikšmių, pažymėtų juodais apskritimais. Juodi apskritimai parinkti būtent taip, kad būtų pasiekiamas laikinas trupmeninio logistinio žemėlapio trajektorijos stabilizavimas. (b) dalyje vaizduojamos trupmeninio logistinio žemėlapio trajektorijos. Šioje grafiko dalyje raudonos linijos nusako sąlygą  $x^* \pm \delta$ , žalios – iteraciją, kurioje vykdomas stabilizavimas įvedamu impulsu, juodos – dalis trajektorijos, tenkinanti sąlygą  $|x_n - x^*| < \delta$ , pilka nepunktyrinė linija – juodos trajektorijos tęsinys, jeigu stabilizavimas nebūtų vykęs, o mėlyna – trajektorija po stabilizavimo, kai  $x_{86} = x^*$ . (c) dalyje vaizduojami H-rangai, kurie buvo skaičiuojami pradedant nuo stabilizavimo momento; juodas apskritimas šioje grafiko dalyje nusako trajektorijos vietą po stabilizavimo impulso  $x^*$ . (d) dalis yra išdidintas (b) vaizdas ten, kur juodas stačiakampis apriboja grafiko dalį; šios dalies paskirtis – pavaizduoti stabilizavimo proceso detales: kai pradinė trajektorija susikirs su raudona taškine linija, valdymo impulsas trajektoriją pakeis į  $x^*$  trajektoriją (valdymo impulso perėjimas vaizduojamas raudona rodykle)

Pagal 11 paveikslo (b) dalį, kur juoda linija pavaizduoja trupmeninio logistinio žemėlapio trajektorija prieš stabilizavimą, pilka – trajektoriją, jeigu nėra vykdomas stabilizavimas, mėlyna – trajektorija po stabilizavimo, o žalia vertikali brūkšninė linija nusako stabilizavimo impulso įvedimo žingsnio vertę,

kuri nusakoma, kai pažeidžiama  $|x_n - x^*| < \delta$  sąlyga, pažymėta dvejomis horizontaliomis raudonomis taškinėmis linijomis. Akivaizdžiai galima matyti, kad ši valdymo schema nepasiekia nei neapibrėžto laiko stabilizavimo, nei laikinos trukmės stabilizavimo, todėl norimam stabilizavimo rezultatui pasiekti reikia naudoti kitą metodologiją.

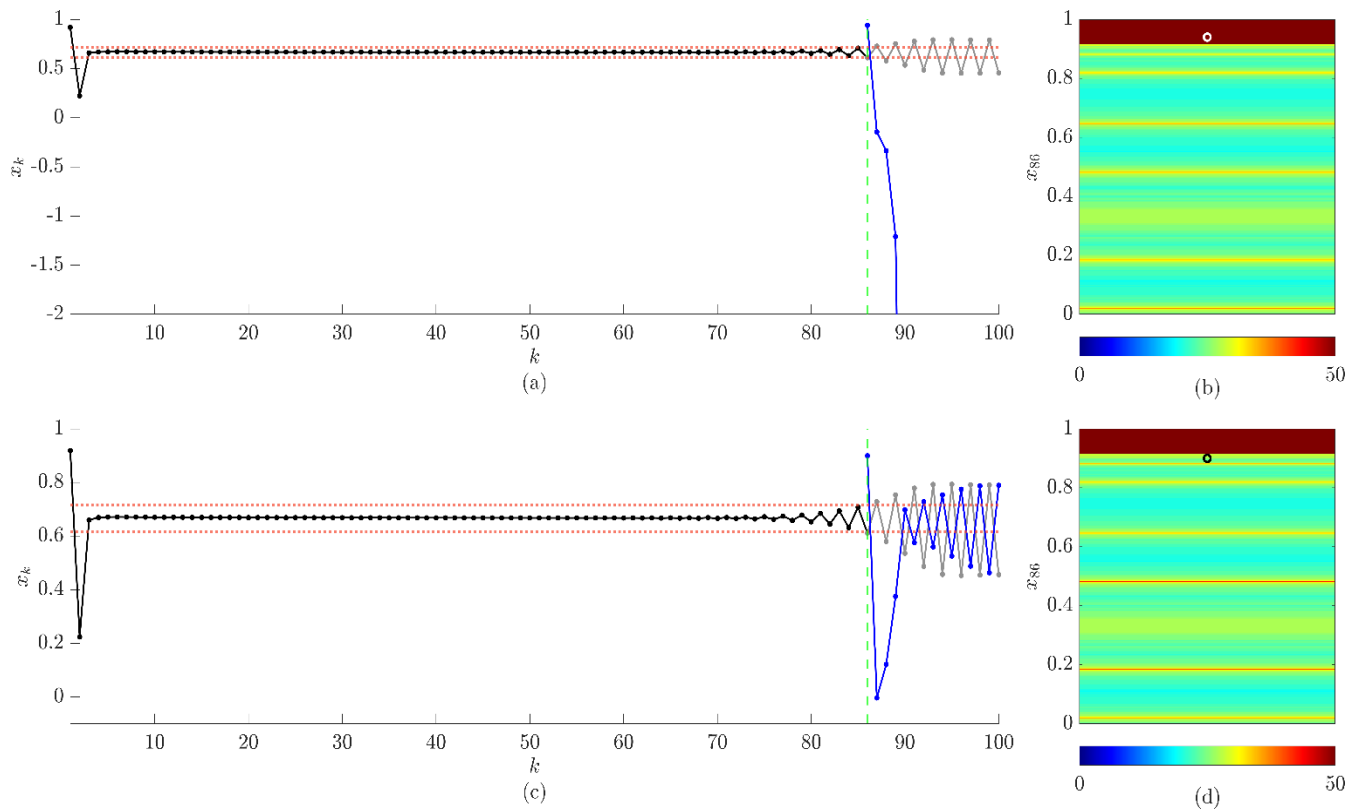
### 3.3. H-rangais grįsta valdymo schema

Kaip yra aptarta 3.1.2 skyriuje, egzistuoja pradinės sąlygos, su kuriomis trupmeninio logistinio žemėlapijo trajektorija išlieka laikinai stabili prie periodo-1 atraktoriaus orbitos. Būtent todėl vietoj naiviojo stabilizavimo metodo, taikomo trupmeninio logistinio žemėlapijo trajektorijai stabilizuoti, šiame skyriuje bus aprašoma H-rangais grįsta stabilizavimo metodologija. Naujosios valdymo schemos idėja yra tokia: tuo momentu, kai trajektorijos svyravimai peržengia priimtinas ribas, pritaikomas stabilizavimo impulsas, kad trajektorija eitų per tašką, kuris atitinka aukštų H-rangų zoną H-rangų spalvinėje vizualizacijoje. Atlikus tokius veiksmus, po trumpo didesnių svyravimų laikotarpio trupmeninio logistinio žemėlapijo trajektorija vėl kuriam laikui stabilizuojasi.

Šiam stabilizavimo procesui įgyvendinti naudojama tokia valdymo schema: nustatoma svyravimo dydžio riba  $\delta$  ir randama reikšmė  $m$ , kur (3.2.a) formulės sąlygos nepažeidžiamos, tada pritaikome valdymo impulsą  $x_m = \tilde{x}$ , kur  $\tilde{x}$  yra aukštų H-rangų zonos centras. Šį procesą galima atlikti ne vieną kartą, tačiau kiekvieną kartą pritaikius impulsinį valdymą H-rangų vizualizacijos skirsis dėl atminties efekto todėl būtina perskaičiuoti H-rangų reikšmes po kiekvieno stabilizavimo impulso įvedimo į trupmeninio logistinio žemėlapijo sistemą.

Todėl yra svarbu tinkamai parinkti  $\tilde{x}$  reikšmę. Žemiau 12 paveiksle (a) ir (b) dalyse galima matyti, kad jeigu  $\tilde{x}$  reikšmė yra parenkama platesnėje aukštų H-rangų dalyje, trupmeninio logistinio žemėlapijo trajektorija diverguoja. Šis pastebėjimas neprieštarauja (2.2.g) formulės apribojimams. Šis divergavimas gali nutikti tik po valdymo impulso ir kadangi valdymo impulsai pakeičia trupmeninio logistinio žemėlapijo atminties dalį (svarbu atminti, kad minėta atmintis sekantį sekos narį skaičiuoja su visomis buvusiomis reikšmėmis iki pat pradinės sąlygos imtinai), tokio tipo divergavimui sudaromos sąlygos egzistuoti.

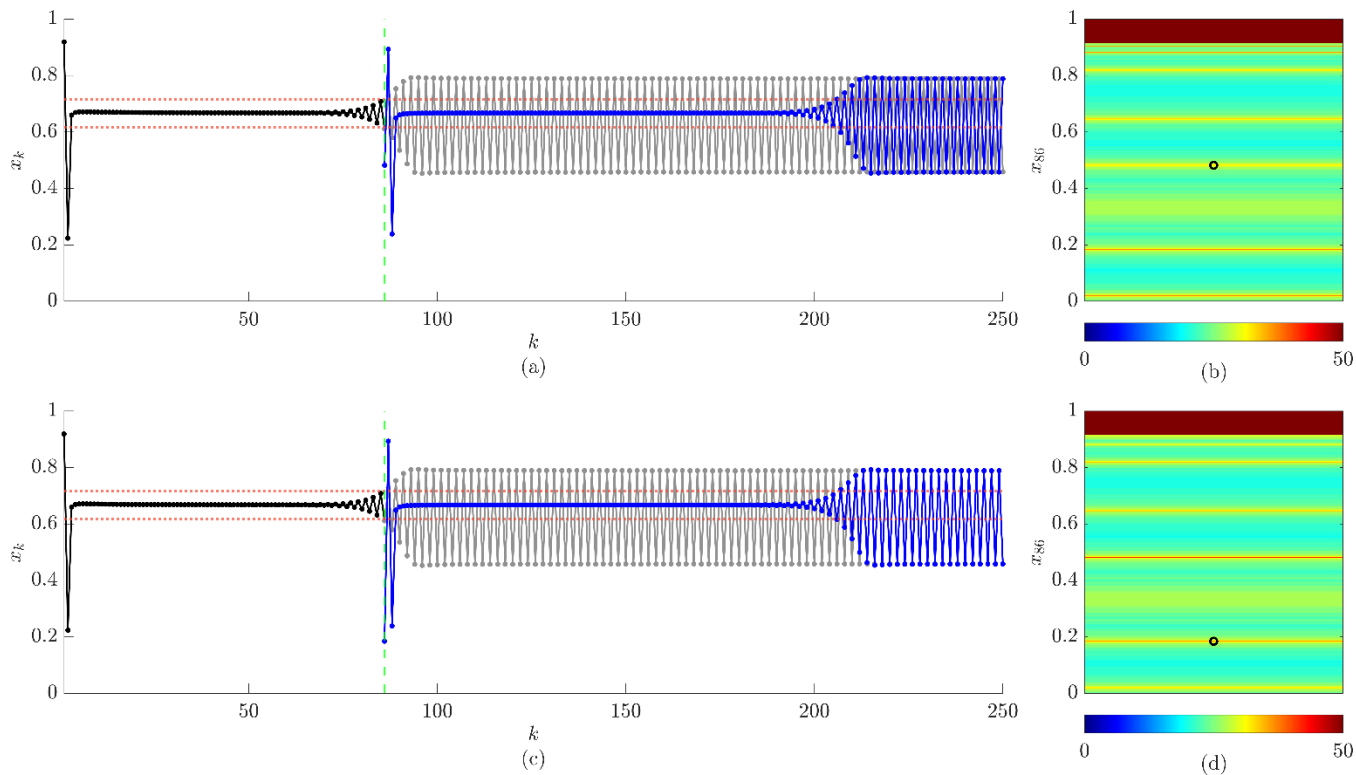
Ne tokį ryškų (2.2.g) formulės apribojimų pažeidimą galima matyti 12 paveikslo (c) ir (d) dalyse, kur  $\tilde{x}$  yra parenkamas arti aukštų H-rangų plačiosios zonos. Galima matyti, nors įprastai trupmeninio logistinio žemėlapijo trajektorijos  $x_k$  nariai yra tarp 0 ir 1 reikšmių, šį kartą vienoje trajektorijos reikšmėje reikšmė buvo nežymiai žemesnė negu 0. Tačiau šis reiškinys trunka trumpai ir nevyksta trajektorijos divergavimas, nes trajektorija „susiderina“ save ir jos reikšmės išlieka tarp 0 ir 1 reikšmių visose likusiose trajektorijos reikšmėse iki trajektorijos pabaigos.



**11 pav.** Trupmeninio logistinio žemėlapijo apribojimų pažeidimas, kai parametrai  $a = 3$ ,  $\alpha = 0,8$  ir  $\delta = 0.05$  per skirtingus valdymo impulsus. (a) ir (c) dalyse raudonos taškinės linijos nusako lygtį  $x^* \pm \delta$ , juodos linijos – trupmeninio logistinio žemėlapijo trajektorijas prieš valdymo impulso įvedimą į sistemą, pilkos linijos – trajektoriją, kuria juodos linijos keliautų, jeigu nebūtų įvykdomas stabilizavimas, žalia brūkšninė linija – iteracijos skaičių, kuriame vykdomas stabilizavimas, mėlyna linija – trajektoriją po įvykdyto stabilizavimo. (b) ir (d) dalyse yra H-rangų spalvinės vizualizacijos, kurios prasideda nuo stabilizavimo momentų (a) ir (c) grafikų dalyse atitinkamai. Baltas apskritimas (b) dalyje nusako trajektoriją po stabilizavimo impulso įvedimo (a) dalyje, o juodas apskritimas (d) dalyje atitinkamai vaizduoja trajektoriją po stabilizavimo impulso įvedimo (b) dalyje. Galima pastebėti, kad (a) dalies trajektorija diverguoja, o (c) dalies mėlyna linija yra neigiama, tačiau trajektorija vis tiek asimptotiškai konverguoja į periodo-2 atraktorių

Dar vienas pastebimas rezultatas trupmeninio logistinio žemėlapijo stabilizavime yra tai, kad galima parinkti ne vieną tinkamą  $\tilde{x}$  reikšmę. 13 pav. galime matyti, kad abi  $\tilde{x}$  reikšmės sugeba laikinai stabilizuoti trupmeninį logistinį žemėlapijį ir pasižymi panašia stabilizavimo trukme, matuojama iteracijų skaičiumi. Žinoma, abi reikšmės yra ir šį kartą parenkamos aukštų H-rangų zonų centruose.

Tačiau galima pastebėti, kad šių trajektorijų pereinamieji procesai skiriasi. 13 paveikslo (a) dalyje mėlynoji trajektorija (trupmeninio logistinio žemėlapijo trajektorija po stabilizavimo impulso įvedimo) svyruoja kur kas silpniau negu (c) dalyje. Kitaip tariant, (a) dalies trajektorijos reakcija į perturbaciją yra ne tokia žymi kaip (c) dalies.

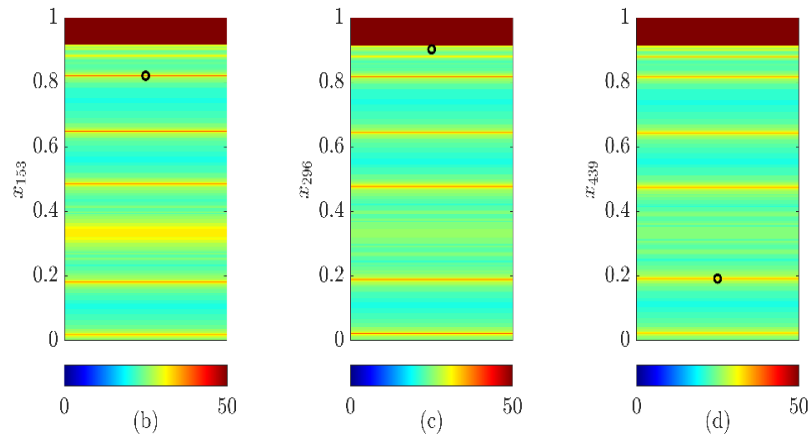
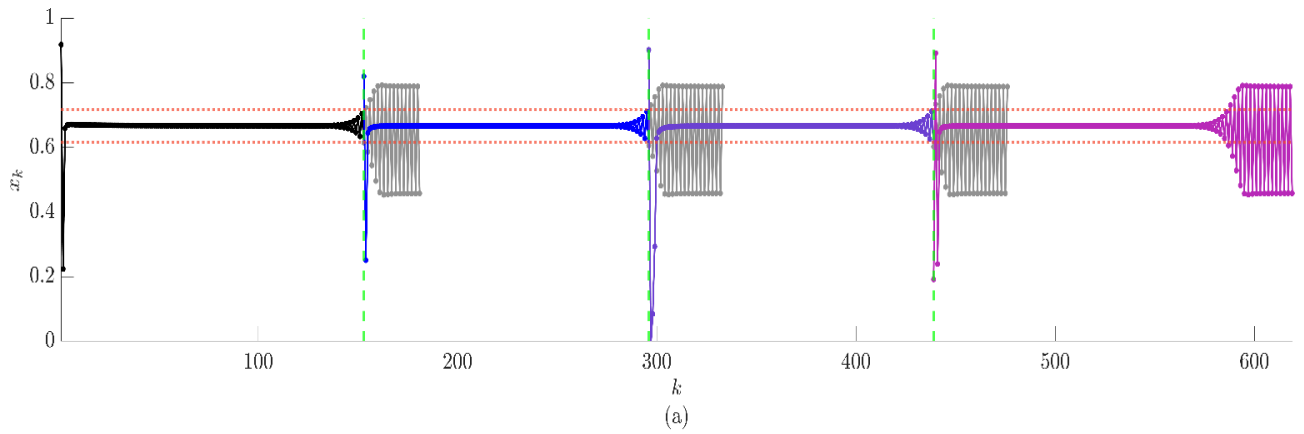


**12 pav.** Dviejų trupmeninio logistinio žemėlapio vieno stabilizavimo atvejų grafikas, kai parametrai  $a = 3$ ,  $\alpha = 0,8$  ir  $\delta = 0.05$ . (a) ir (c) dalyse raudonos taškinės linijos nusako lygtį  $x^* \pm \delta$ , juodos linijos – trupmeninio logistinio žemėlapio trajektorijas prieš valdymo impulso įvedimą į sistemą, pilkos linijos – trajektoriją, kuria juodos linijos keliautų, jeigu nebūtų įvykdomas stabilizavimas, žalia brūkšninė linija – iteracijos skaičių, kuriame vykdomas stabilizavimas, mėlyna linija – trajektoriją po įvykdyto stabilizavimo. (b) ir (d) dalyse yra H-rangų spalvinės vizualizacijos, kurios prasideda nuo stabilizavimo momentų (a) ir (c) grafikų dalyse atitinkamai. Juodi apskritimai (b) ir (d) vaizduoja trupmeninio logistinio žemėlapio trajektorijas po stabilizavimo impulso įvedimo. Abi trajektorijos stabilizuojasi, tačiau jų pereinamieji procesai, matomi pagal mėlynąsias linijas, skiriasi

### 3.4. Keli valdymo impulsai vienas po kito

Galiausiai, kadangi praeitame skyrelyje buvo pavaizduotas stabilizavimas su vienu valdymo impulsu, kai reikšmingam iteracijų skaičiui stabilizuojama trupmeninio logistinio žemėlapio trajektorija, ta pati metodologija gali būti naudojama kelis kartus iš eilės. Kitaip sakant, kada netenkinama (3.2.a) formulės sąlyga, tada galima taikyti impulsinį valdymą, o kada trajektorija vėl pažeis minėtosios formulės sąlygą, gali būti taikomas sekantis valdymo impulsas ir tai gali būti vykdoma kiek norima kartų. Minėtasis algoritmas leidžia trupmeninio logistinio žemėlapio neapibrėžto laiko stabilizavimo su trumpai truncančiais staigiais pereinamųjų reikšmių svyravimais, kol trajektorija galiausiai stabilizuojasi ir tenkina (3.2.a) formulės apribojimus, kaip rodoma 14 paveiksle.

Svarbu atminti, kad H-rangų grafikai skiriasi kiekvienam stabilizavimo žingsnyje (tai galima matyti 14 paveikslo (b), (c) ir (d) dalyse). Tai reiškia, kad neegzistuoja koks nors fiksuotas impulsas  $\tilde{x}$ , kuris gali būti naudojamas kiekviename stabilizavimo impulso į sistemą įvedime. Todėl H-rangų reikšmės visada turi būti perskaičiuojamos iš naujo stabilizavimo metu, o  $\tilde{x}$  reikšmė turi būti parenkama būtent ją atitinkančia iteracija. Šią sistemos savybę dalinai paaškina (2.2.g) formulės nelokalumas, kadangi žemėlapiu atmintis kiekviename stabilizavimo taške skiriasi, o tai daro įtaką H-rangų reikšmėms bei H-rangų spalvinių vizualizacijų reikšmėms.



**13 pav.** Trupmeninio logistinio žemėlapiu trijų nuoseklių stabilizavimų grafikas, kai parametrai  $a = 3$ ,  $\alpha = 0,8$  ir  $\delta = 0.05$ . (a) dalyje raudonos taškinės linijos nusako lygtį  $x^* \pm \delta$ , juodos linijos – trupmeninio logistinio žemėlapiu trajektorijas prieš valdymo impulso įvedimą į sistemą, pilkos linijos – trajektoriją, kuria juodos linijos eitų, jeigu nebūtų įvykdomas stabilizavimas, žalia brūkšninė linija – iteracijos skaičių, kuriame vykdomas stabilizavimas, mėlyna linija – trajektoriją po įvykdyto stabilizavimo. (b), (c), (d) dalyse yra H-rangų spalvinės vizualizacijos, kurios prasideda nuo stabilizavimo momentų pirmo, antro ir trečio stabilizavimo (pažymėtų mėlyna, violetine ir purpurine rožine spalvomis atitinkamai) akimirkose atitinkamai. Juodi apskritimai vaizduoja trupmeninio logistinio žemėlapiu trajektorijas po stabilizavimo impulso įvedimo.

## Išvados

Tyrimo metu padarytos tokios išvados:

1. Trupmeninis logistinis žemėlapis neturi neasimptotinio konvergavimo daugdarų, tačiau galima surasti pradines sąlygas, prie kurių laikinai stabilizuojama periodo-1 nestabili orbita.
2. Naivioji valdymo schema nesugeba stabilizuoti trupmeninio logistinio žemėlapio. Nepasiekiamas nei laikino laiko stabilizavimas, nei neapibrėžto laiko stabilizavimas.
3. Sukurta H-rangų grįsta impulsinė valdymo schema sugeba laikinai stabilizuoti trupmeninio logistinio žemėlapio trajektoriją. Stabilizuoti sistemą galima kiek norima kartų, tačiau kiekvieno stabilizavimo impulso įvedimu metu reikia naujai suskaičiuoti H-rangus.

## Literatūros sąrašas

1. PETKEVICIUTE-GERLACH, D., TIMOFEJEVA, I., RAGULSKIS, M. Clocking convergence of the fractional difference logistic map. *Nonlinear Dynamics* [interaktyvus]. 2020, **100**(4), 3925 – 3935 [žiūrėta 2023-04-20]. Prieiga per: ISSN 0924-090X, Springer-Nature. DOI: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11071-020-05703-6>
2. MAY, R. Simple mathematical models with very complicated dynamics [interaktyvus]. 1976, **261**, 459 – 467 [žiūrėta: 2023-04-20]. Doi: <https://doi.org/10.1038/261459a0>
3. *Vanderbilt.edu* [interaktyvus]. [žiūrėta: 2023-04-21]. Prieiga per: <https://www.vanderbilt.edu/AnS/psychology/cogsci/chaos/workshop/BD.html>
4. LO'PEZ-RUIZ, R., FOURNIER-PRUNARET, D., NISHIO, Y., GRA'CIO, C. Nonlinear Maps and Their Applications: Selected Contributions from the NOMA 2013 International Workshop. *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*. 2015, [žiūrėta: 2023-04-21]. Prieiga per: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-12328-8>
5. LU, G., LANDAUSKAS, RAGULSKIS, M. Control of divergence in an extended invertible logistic map. *Int. J. Bifurc. Chaos* [interaktyvus]. 2018, **28**(10) [žiūrėta: 2023-04-21]. Prieiga per: <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218127418501298>
6. EDELMAN, M. Fractional maps and fractional attractors. Part II: fractional difference Caputo a-families of maps. *Interdiscip. J. Discontin. Nonlinearity Complex* [interaktyvus]. 2015, 4, 391–402 [žiūrėta: 2023-04-21]. Prieiga per: <http://dx.doi.org/10.5890/DNC.2015.11.003>
7. ABDELJAWAD, T. On Riemann and Caputo fractional differences. *Comput. Math. Appl* [interaktyvus]. 2011, 62, 1602–1611 [žiūrėta: 2023-04-21]. Prieiga per: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.03.036>
8. MILLER, K.S., ROSS, B. Fractional difference calculus. In: Srivastava, H.M., Owa, S. (eds.) *Univalent Functions, Fractional Calculus, and Their Applications*. 1989, 139–151.
9. ANASTASSIOU, G.A. *Discrete fractional calculus and inequalities* [interaktyvus]. 2009, [žiūrėta: 2023-04-21]. Prieiga per: <https://arxiv.org/abs/0911.3370>
10. CHEN, F., LUO, X., ZHOU, Y. Existence results for nonlinear fractional difference equation. *Adv. Differ. Equ* [interaktyvus]. 2011, **1**, 1–12 [žiūrėta: 2023-04-21]. Prieiga per: <https://doi.org/10.1155/2011/713201>
11. HILFER, R.: *Applications of Fractional Calculus in Physics*. *World Scientific Publishing, Singapore* [interaktyvus]. 2020, [žiūrėta: 2023-04-21]. Prieiga per: chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/[https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/9789812817747\\_fmatter](https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/9789812817747_fmatter)
12. MARKOVIĆ, M., TOMLJANOVIĆ, Z. SVD decomposition: Collaborative filtering. *Math.e, Croatian mathematical electronic journal* [interaktyvus]. [Žiūrėta: 2023-04-22]. Prieiga per: <http://e.math.hr/category/klju-ne-rije-i/svd-dekompozicija>
13. NAVICKAS, Z.; RAGULSKIS, M.; KARALIENE, D.; TELKSNYS, T. Weak and strong orders of linear 299 recurring sequences. *Computational and Applied Mathematics* [interaktyvus]. 2018, 37, 3539–3561 [žiūrėta: 2023-05-02]. Prieiga per: <https://www.researchgate.net/publication/321043848> Weak and strong orders of linear recurring sequences

14. LANDAUSKAS, M.; RAGULSKIS, M. A pseudo-stable structure in a completely invertible bouncing system. *Nonlinear Dynamics* [interaktyvus]. 2014, 78, 1629–1643 [žiūrėta: 2023-05-02]. Prieiga per: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11071-014-1546-3>
15. KURAKIN, A.; KUZMIN, A.; NECHAVEV, A. Linear complexity of polinear sequences. *J.Math. Sci.* 303. 1995, **76**, 2793–2915
16. GALOR, O. Discrete dynamical systems. *Springer Science & Business Media*. 2007
17. SMITH, H.L.; THIEME, H.R. Dynamical systems and population persistence. *American Mathematical Soc.* 2011, **118**.
18. HASEGAWA, Y. Control problems of discrete-time dynamical systems. *Springer*. 2013, **447**.
19. YANG, X., DENG, W., YAO, J. Neural network based output feedback control for DC motors with asymptotic stability. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2022, **164**, 108288
20. VINOTH, S., SIVASAMY, R., SATHIYANATHAN, K., UNYONG, B., VADIVEL, R., GUNASEKARAN, N. A novel discrete-time Leslie–Gower model with the impact of Allee effect in predator population. *Complexity*. 2022.
21. ZHENG, Y.; YU, J. Stabilization of multi-rotation unstable periodic orbits through dynamic extended delayed feedback control. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2022, **161**, 112362.
22. RODRIGUEZ-NUNEZ, J.M., DE LEON, A., MOLINAR-TABARES, M.E., FLORES-ACOSTA, M.; CASTILLO, S. Computational chaos control based on small perturbations for complex spectra simulation. *Simulation*. 2022, **98**, 835–846.
23. HULKA, T., MATOUSEK, R., LOZI, R.P. Stabilization of Higher Periodic Orbits of Chaotic maps using Permutation-selective Objective Function. *In Proceedings of the 2022 IEEE Workshop on Complexity in Engineering (COMPENG)*. IEEE, 2022, 1–5.
24. WENG, Y., ZHANG, Q., CAO, J., YAN, H., QI, W., CHENG, J. Finite-time model-free adaptive control for discrete-time nonlinear systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*. 2023.
25. FRANKLIN, G.F., POWELL, J.D., EMAMI-NAEINI, A. Feedback control of dynamic systems; *Prentice Hall Upper Saddle River*. 2002, **4**.
26. CHEN, L.; YIN, H.; YUAN, L.; MACHADO, J.T.; WU, R.; ALAM, Z. Double color image encryption based on fractional order discrete improved Henon map and Rubik's cube transform. *Signal Processing: Image Communication*. 2021, **97**, 116363.
27. ZHU, L., JIANG, D., NI, J., WANG, X., RONG, X., AHMAD, M., CHEN, Y. A stable meaningful image encryption scheme using the newly-designed 2D discrete fractional-order chaotic map and Bayesian compressive sensing. *Signal Processing*. 2022, **195**, 108489.
28. CHU, Y.M., BEKIROU, S., ZAMBRANO-SERRANO, E., OROZCO-L'OPEZ, O., LAHMIRI, S., JAHANSHAHI, H., ALY, A.A. A chaotic discrete-time fractional-order laboratory model. *Artificial macro-economics. Chaos, Solitons & Fractals*. 2021, **145**, 110776.
29. PENG, Y., LIU, J., HE, S., SUN, K. Discrete fractmemristor-based chaotic map by Grunwald–Letnikov difference and its circuit implementation. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2023, **171**, 113429.
30. LIU, Z., XIA, T., WANG, T. Dynamic analysis of fractional-order six-order discrete chaotic mapping and its application in information security. *Optik*. 2023, **272**, 170356.



31. COLL, C., HERRERO, A., GINESTAR, D., S'ANCHEZ, E. The discrete fractional order difference applied to an epidemic model with indirect transmission. *Applied Mathematical Modelling*. 2022, **103**, 636–648.
32. ABBES, A., OUANNAS, A., SHAWAGFEH, N., GRASSI, G. The effect of the Caputo fractional difference operator on a new discrete COVID-19 model. *Results in Physics*. 2022, **39**, 105797.
33. ZAMBRANO-SERRANO, E., BEKIROS, S., PLATAS-GARZA, M.A., POSADAS-CASTILLO, C., AGARWAL, P., JAHAN-SHAHI, H., ALY, A.A. On chaos and projective synchronization of a fractional difference map with no equilibria using a fuzzy-based state feedback control. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2021, **578**, 126100.
34. LU, Q., ZHU, Y., LI, B. Necessary optimality conditions of fractional-order discrete uncertain optimal control problems. *European Journal of Control*. 2023, **69**, 100723.
35. YAO, Y., WU, L.B. Backstepping control for fractional discrete-time systems. *Applied Mathematics and Computation*. 2022, **434**, 127450.
36. AUSLANDER, D. M. Digital Controllers [interaktyvus]. *Encyclopedia of Physical Science and Technology (Third Edition)*. 2003, 441–460 [žiūrėta: 2023-05-10]. Prieiga per: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/B0122274105001757>
37. PIUNOVSKIY, A., PLAKHOV, A., TORRES, D.F., ZHANG, Y. Optimal impulse control of dynamical systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2019, **57**, 2720–2752.
38. BROCKMANN, D. The Logistic Map. *The mother of deterministic chaos* [interaktyvus]. 2018, [žiūrėta: 2023-05-13]. Prieiga per: <https://www.complexity-explorables.org/flongs/logistic/>
39. RAGULSKIS, M., NAVICKAS, Z. The rank of a sequence as an indicator of chaos in discrete nonlinear dynamical systems. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2011, **16**, 2894–2906
40. JONNALAGADDA, J.M. Periodic solutions of fractional nabla difference equations. *Commun. Appl. Anal.* 2016, **20**, 585–609
41. Moodle.ktu.edu [interaktyvus]. Netiesiniai dinaminiai modeliai, P130M100 modulis, 12 paskaita. 2022, [žiūrėta: 2023-05-17]. Prieiga per: [chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://2022r.moodle.ktu.edu/pluginfile.php/250044/mod\\_resource/content/1/Nonlinear%20Lecture%2012.pdf](chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://2022r.moodle.ktu.edu/pluginfile.php/250044/mod_resource/content/1/Nonlinear%20Lecture%2012.pdf)
42. SHAHAMATKHAH, E., TABATABAEI, M. Containment control of linear discrete-time fractional-order multi-agent systems with time-delays. *Neurocomputing*. 2020, **385**, 42–47.
43. BECERRA, V., M. Optimal Control. *Scholarpedia* [interaktyvus]. 2008, **3**(1) [žiūrėta: 2023-05-17]. Prieiga per: [http://www.scholarpedia.org/article/Optimal\\_control](http://www.scholarpedia.org/article/Optimal_control)
44. HILLBORN, R., C. Iterated Maps. *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*, 2nd edn [interaktyvus]. Oxford Academic. 2010 [žiūrėta: 2023-05-19]. Prieiga per: <https://academic.oup.com/book/11941/chapter-abstract/161156866?redirectedFrom=fulltext>
45. MURAKAMI, W., MURAKAMI, C., HIROSE, K., ICHIKAWA, Y., H. Integrable Duffing's maps and solutions of the Duffing equation. *Chaos, Solitons & Fractals* [interaktyvus]. 2003, **15** (3), 425–443, ISSN 0960-0779 [žiūrėta: 2023-05-19]. Prieiga per: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0960077902000899>

46. ROMEO, G. Mathematics for dynamic economic models. *Elements of Numerical Mathematical Economics with Excel* [interaktyvus]. 2020, [žiūrėta: 2023-06-01]. Prieiga per: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/B9780128176481000049>