KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR GAMTOS MOKSLŲ FAKULTETAS

Paulius Šeduikis

GARCH TIPO MODELIO NAUDOJIMAS AMERIKIETIŠKOJO OPCIONO ĮKAINOJIMUI

Baigiamasis magistro projektas

Vadovas

doc. dr. Audrius Kabašinskas

KAUNAS, 2016

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR GAMTOS MOKSLŲ FAKULTETAS

GARCH TIPO MODELIO NAUDOJIMAS AMERIKIETIŠKOJO OPCIONO ĮKAINOJIMUI

Baigiamasis magistro projektas
Taikomoji matematika (kodas 621G10003)

Vadovas
(parašas) doc. dr. Audrius Kabašinskas
(data)

Recenzentas
(parašas) dr. Tomas Ruzgas
(data)

Projektą atliko
(parašas) Paulius Šeduikis
(data)

KAUNAS, 2016

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS

Matematikos ir gamtos mokslų fakultetas

(Fakultetas)

Paulius Šeduikis

(Studento vardas, pavardė)

Taikomoji matematika, 621G100031

(Studijų programos pavadinimas, kodas)

„GARCH tipo modelio naudojimas amerikietiškojo opciono įkainojimui“

AKADEMINIO SĄŽININGUMO DEKLARACIJA

20 16 m. Gegužės 30 d.

Kaunas

Patvirtinu, kad mano, **Pauliaus Šeduikio**, baigiamasis projektas tema „GARCH tipo modelio naudojimas amerikietiškojo opciono įkainojimui“ yra parašytas visiškai savarankiškai ir visi pateikti duomenys ar tyrimų rezultatai yra teisingi ir gauti sąžiningai. Šiame darbe nei viena dalis nėra plagijuota nuo jokių spausdintinių ar internetinių šaltinių, visos kitų šaltinių tiesioginės ir netiesioginės citatos nurodytos literatūros nuorodose. Įstatymų nenumatytų piniginių sumų už šį darbą niekam nesu mokėjęs.

Aš suprantu, kad išaiškėjus nesąžiningumo faktui, man bus taikomos nuobaudos, remiantis Kauno technologijos universitete galiojančia tvarka.

(vardą ir pavardę įrašyti ranka) *(parašas)*

Šeduikis P. GARCH tipo modelio naudojimas amerikietiškojo opciono įkainojimui, Magistro baigiamasis projektas/ vadovas doc. dr. Audrius Kabašinskas Kauno technologijos universitetas, Matematikos ir gamtos ir mokslų fakultetas.
Mokslo kryptis ir sritis: Matematika, Fiziniai mokslai;
Reikšminiai žodžiai: *Garch, modelis, kintamumas, amerikietiškasis, sandoris, įkainojimas.*
Kaunas, 2016, 64 p.

SANTRAUKA

Įkainoti amerikietiškąjį pasirinkimo sandorį yra ypatingai didelė problema. Šis darbas pateikia kitokį Amerikietiškojo pasirinkimo sandorio įkainojimą naudojantis GARCH modeliu. Panaudojami amerikietiškojo pasirinkimo sandorio formulės bei apibrėžimai ir GARCH procesas. Svarbiausias darbo tikslas yra prognozuoti akcijų kainas ir naudojantis nerizikinga palūkanų norma paskaičiuoti amerikietiškojo pasirinkimo pirkti ir parduoti sandorių kainas. Darbas susideda iš sandorių įkainojimo naudojantis Black – Scholes formule, Binominiu modeliu, CBOE skaičiavimo algoritmu, GARCH tipo modeliais ir palyginimo su faktinėmis sandorių kainomis. Rezultatai rodo, jog visų prognozuotų modelių sandorių kainos yra didesnės už faktines ir tai sudaro vidutinė absoliutinę paklaidą lygią 30 procentų, kuri gali būti paaiškinama rinkos dalyvių nuotaikomis perkant ir parduodant aktyvus.

Šeduikis P. American Option Pricing Using GARCH Model: Master‘s thesis in applied mathematics / supervisor doc. dr. Audrius Kabašinskas; Department of Mathematical Modelling, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Kaunas University of Technology.
Research area and field: Mathematics, Physical science
Key words: *Garch, model, volatility, American, option, pricing.*
Kaunas, 2016. 64 p.

SUMMARY

To start with, it is said american option pricing is extremely tough problem. So, this thesis proposes a new approach pricing American options in a GARCH framework. GARCH framework is combined with the american option formulas, definition and GARCH processes. The main point is to forecast stock prices and using risk-free rate estimate american call or put options prices in a really simple way. The thesis consist of option pricing using Black – Scholes, Binomial and Chicago Board Options Exchange platform compare with GARCH type processes and actual prices. The results say that estimated prices with all of the models have higher prices than actual and in this case mean absolute percent error iš about 30 percent, which is caused by volatility and the mood of participants in the market.

TURINYS

PAVEIKSLĖLIŲ SĄRAŠAS

LENTELIŲ SĄRAŠAS

ĮVADAS

Apskaičiuoti amerikietiškojo pasirinkimo sandorio vertę yra sunki užduotis nesvarbu, koks modelis būtų parinktas. Francis A. Longstaff ir Eduardo S. Schvartz pasiūlė LSM modelį skaičiuoti amerikietiškąjį pasirinkimo sandorį, kurio esmė buvo simuliuoti scenarijus, kas būtų, jei sandorio turėtojas neįvykdytų sandorio esamą diena, o įvykdytų kitą dieną. Taip pat, Jin – Chuan Duan pasiūlė vertę skaičiuoti naudojant Markovo grandines. Tai ne vienintelis jo darbas įvertinti sandorius. Jis taip pat aprašė GARCH modelio amerikietiškojo pasirinkimo sandorio kainos įvertinimą pasitelkus apskaičiuotas istorinių duomenų grąžas. Tuo tarpu mano darbas buvo sudarytas akcijų kainų ir jų prognozavimo pagrindu.

Darbas buvo sudarytas iš teorinės dalies, kurioje supažindinama su GARCH modeliu tiek teoriniu, tiek praktiniu požiūriais, jo parametrų įvertinimo metodas, amerikietiškuoju pasirinkimo sandorio. Taip pat, pakartotos Black – Scholes formulės ir Binominis modelis, bei aprašyti vertinimo kriterijai, pagal kuriuos atrinkti tiksliausi modeliai. Tiriamojoje dalyje pateikta informacija apie duomenis, kurie bus naudojami sandorio įkainojimui, šie duomenys pritaikomi modeliams, bei parenkti tiksliausi. Išrinkti modeliai detaliau aprašomi ir su jais prognozuojamos akcijų kainos. Suprognozavus akcijų kainas, bei pasinaudojus teorinėje dalyje aprašytomis amerikietiškojo pasirinkimo sandorio formulėmis įvertinamos sandorių kainos. Palyginami modeliai tarpusavyje ir su faktiniais rezultatais. Sekantis skyrelis seka išvados, taip pat literatūros sąrašas.

Darbo tikslas – įvertinti amerikietiškojo pasirinkimo sandorį naudojant GARCH modelį

Darbo uždaviniai:

- Pasirinkti nagrinėjamų modelių tipus ir parametrus;
- Apskaičiuoti vertinimo kriterijus: Akaike, Svartz – Bajeso kriterijus, MAPE;
- Analizuoti gautus vertinimo kriterijų rezultatus;
- Pasirinkti tiksliausius modelius;
- Apskaičiuoti pasirinktų modelių parametrus;
- Sudaryti modelių lygtis;
- Patikrinti heteroskedastiškumą;
- Įvertinti paaiškinamų duomenų procentą;
- Apskaičiuoti amerikietiškojo pasirinkimo sandorio vertes naudojantis CBOE, Black – Scholes formule, Binominiu ir GARCH modeliais;
- Palyginti apskaičiuotų duomenų rezultatus;
- Įvertinti sandorio vertės tikslumą;

2 TEORINĖ DALIS

Teorinė dalis susidaro iš literatūros apžvalgos, t.y. supažindinama su buvusiais aprašytais projektais, toliau, supažindinama su nagrinėjama finansine priemone, jos įkainojimo bei parametrų skaičiavimo metodais. Galiausiai, užrašomos formulės, pagal kurias apskaičiuojamas modelių tikslumas.

2.1 LITERATŪROS APŽVALGA

Modeliuoti finansinių duomenų laiko eilutes yra opi problema. Tai netik sąlygota, tuo jog yra daug finansinių priemonių, tokių kaip akcijų kainos, valiutų kursai, palūkanų normos ir t.t., kurių stebėjimų dažnumas gali būti parinktas sekundėmis, minutėmis, valandomis, ir t. t., bet ir daugiausiai dėl statistinių dėsningumų egzistavimo, kurios egzistuoja dideliose finansinėse eilutėse.

Vienas iš finansinių eilučių kintamumo aiškinimosi būdų yra apibendrintas autoregresijos sąlyginio heteroskadiškumo modelis (**GARCH**). Pradininkas šio modelio (anksčiau vadintas tiesiog autoregresijos sąlyginio heteroskadiškumo metodas (**ARCH**) buvo Engle (1982 metais), o iki apibendrinto autoregresijos sąlyginio heteroskedastiškumo modelio išpletė Bollerslev (1986 metais). Šiame modelyje pagrindinį vaidmenį vaidina sąlyginė dispersija, t.y. praėjusių laikotarpių sąlyginė dispersija.

Bollerslev aprašė tik klasikinį modelį (jo teorija bus pateikta sekančiame skyriuje). Šis klasikinis modelis gali būti išskirtas į labai daug versijų. Tam tikri modeliai gali būti labiau tinkami vieniems duomenims, kiti modeliai – kitiems.

Pirmiausia, aprašomas modelis bus pats paprasčiausias, t.y. Engle $ARCH(Q)$ modelis. Engle pristatė šį modelį aprašinėdamas Jungtinės Karalystės infliacijos neapibrėžtumą [1]. Duomenys buvo parinkti nuo 1958 metų iki 1977 metų. Užrašant regresijos lygtį, buvo daroma prielaida, jog infliacija buvo paveikta padidėjusių atlyginimų. Sudarius modelį ir apskaičiavus mažiausių kvadratų ir didžiausio tikėtinumo metodais koeficientus ilgajam ir trumpajam laikotarpiams, padaroma išvada, jog septintasis dešimtmetis buvo nuspėjamas, priešingai – aštuntasis chaotiškas.

Sekantis modelis, tai Engle modelio plėtinys į $GARCH(P,Q)$, kurį 1986 metais aprašė Bolerslevas [2]. Šis modelis turi daug lankstesnę perėjimų struktūrą. Todėl šis modelis gali duoti geresnius rezultatus nei Engle $ARCH(Q)$ modelis. Bolerslevas taip pat nagrinėjo infliaciją. Buvo lyginami keli modeliai $ARCH(Q)$ ir $GARCH(P,Q)$ su tam tikrai koeficientais. Duomenys buvo parinkti Jungtinių Amerikos Valstijų Bendrojo Nacionalinio Produkto kainų indeksas (BNP defliatorius). Stebėjimai buvo parinkti ketvirčiais nuo 1948 antrojo ketvirčio iki 1983 ketvirto ketvirčio. Pagal rezultatus buvo galima pastebėti, jog $GARCH(1,1)$ šiek tiek geriau tikdavo duomenims, nei likusieji parinkti modeliai. Panaudojus šį modelį buvo prieita išvados, jog šeštasis dešimtmetis ir septintojo pradžia gali būti prognozuojama, kadangi kintamumas yra daug mažesnis, nei sekančiuose laikotarpiuose. Pradedant 1974 metais kintamumas pradeda didėti dėl naftos krizės [2].

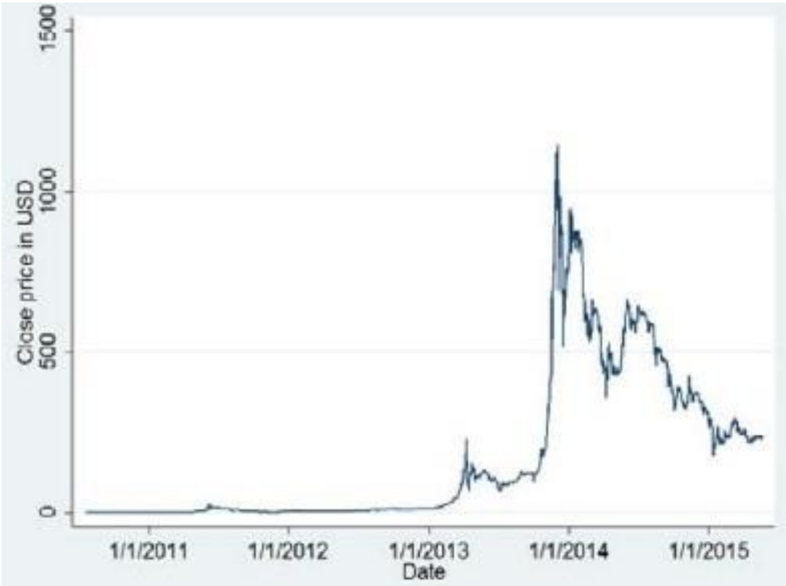
Fig. 4. 95% confidence intervals for GARCH(1,1).

2.1 pav. $GARCH(1,1)$ infliacija ir jos pasikliautinieji intervalai Bollerslev Tim, *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, 15 puslapis

Anne Haubo Dyhrberg iš Dublino universiteto [3] analizavo bitkoinų panašumus į aukso ir dolerio biržas. Bitkoinai – tai naujoji virtuali valiuta, kurią sugalvojo nežinomas programuotojas ar programuotojų grupė, pasivadinusi „Satoshi Nakamoto“. Bitkoinai išplito maždaug 2009 metais. Ši valiuta nėra padengta jokia kita valiuta, brangiaisiais metalais ar kitomis vertybėmis, o jos kursą nustato paklausa ir pasiūla. Bitkoinų galima tiesiog įsigyti (tam reikia įdiegti specialią piniginę ar naudotis internetine pinigine, arba jų užsidirbti („išsikasti“) naudojantis vadinamąja lygiarangių (**angl. peer-to-peer; P2P**) technologija. Kitaip tariant, surinkti šios valiutos vienetų galima dalyvaujant specialiame tinkle, kuriame dalinamasi kompiuterio ištekliais ir skaičiuojami sudėtingi matematiniai uždaviniai. Atsiskaityti bitkoinais galima už visas įprastas prekes ar paslaugas, jei tik pardavėjas sutinka priimti šią valiutą. Pervedimai įvykdomi labai greitai bei mokesčiai atsiskaitant šia valiuta yra labai nedideli arba jų iš viso nėra. Atsiskaitymas jais priimamas tūkstančiuose vietų pasaulyje.

Duomenys apie bitkoinų kainas buvo paimti iš „Coindesk Price Index“ laikotarpio nuo 2010 metų liepos 19 dienos iki 2015 metų gegužės 22 dienos. Likusieji duomenys buvo paimti iš New York‘o Federalinio Rezervų banko.

Moksliniame darbe [3] buvo išsiaiškinta, jog bitkoinai, kaip ir kitos finansinės priemonės yra jautrios tam tikriems sukrėtimams, turi teigiamą trendą ir jo stebėjimai aiškiai nėra stacionarūs.



2.2 pav. Bitkoinų kainų doleriais kitimas einant metams *Dyhberg Haubo Anne Bitcoin, gold and the dollar – A Garch volatility analysis, 4 puslapis*

Pasirinkus atitinkamus $GARCH$ modelius, ir pagal juos gavus rezultatus, autorius [3] priėjo išvados, jog bitkoinai turi daug panašumų su abejomis finansinėmis priemonėmis: auksu ir doleriais. Jie taip pat jautriai reaguoja į finansinius rezultatus, į pasaulinius įvykius, todėl galima nuspręsti taip, jog bitkoinai yra tarpinis variantas tarp nuosavybės ir valiutos.

Sekantis modelis, kuris buvo naudojamas kintamumui analizuoti – Asimetrinis DCC $GARCH(P,Q)$ modelis. Jį naudojo Li Steven ir Hou Yang [4] tyrimui apie pašalinius poveikius tarp grąžų ir kintamumo Jungtinių Amerikos Valstijų ir Kinijos akcijų biržose. Duomenys yra naudojami iš S&P500 ir CSI 300. Ši informacija sudaro imtį, kuri tęsiasi nuo 2010 metų gegužės 16 iki 2013 metų liepos 31.

Atlikę tyrimą Yang Hou ir Steven Li [4] priėjo išvados, jog Jungtinių Amerikos Valstijų naujienos stipriai veikia Kinijos kasdieninės prekybos kintamumą. Taip pat, Asimetrinis DCC $GARCH(P,Q)$ modelis rodo, jog koreliacija tarp Jungtiniu Amerikos Valstijų ir Kinijos rinkų yra sąlygota praeities informacijos, bei rodo, jog būtent JAV rinka yra efektyvesnė lyginant su Kinijos.

Esmaiel Abounoori, Zahra Elmi ir Younes Nademi [5] nagrinėjo Teherano biržą naudojantis Markovo ir $GARCH(P,Q)$ deriniu. Pasirinkę keletą modelių tikrino galimybę prognozuoti Teherano biržą. Buvo naudojami modeliai tokie kaip: $GARCH(P,Q)$ modelio atšakos $AR/GARCH(P,Q)$, $ARMA/GARCH(P,Q)$, $AR/MRSGARCH(P,Q)$ ir $ARMA/MRSGARCH(P,Q)$ su skirtingais liekanų pasiskirstymais (normaliojo, Stjudento, GED). Nagrinėjama jų galimybė aprašyti ir prognozuoti kintamumą nuo 1 iki 22 dienų.

Pasirinkus vienos dienos prognozavimą, niekas negali prilygti $\mathrm{AR(2)-MRSGARCH(P,Q)-GED}$ modeliui, o pasirinkus 5 dienų – $\mathrm{AR(2)/MRSGARCH(P,Q)-t}$. 10 dienų prognozavimui tinka $\mathrm{AR(2)/MRSGARCH(P,Q)}$ modelis su aprašytais trimis liekanų pasiskirstymais. O pasirinkus 22 dienas, $\mathrm{MRSGARCH(P,Q)}$ modelių tikslumas niekuo nesiskiria nuo įprastų $GARCH(P,Q)$ modelių tikslumo.

Muyi Li, Wai Keung Li, Guodong Li [6] pristatė naują būdą modeliuoti kintamumą. Tai hiperbolinis $GARCH(P,Q)$ modelis ($HGARCH(P,Q)$). Šis modelis yra supaprastinimas variantas tarp dviejų kitų hiperbolinių modelių $FIGARCH(P,Q)$ ir $HYGARCH(P,Q)$.

$FIGARCH(P,Q)$ modelis visada turi begalinę dispersiją, o $HYGARCH(P,Q)$ modelis turi labai komplikuota formą. Naujai pasiūlytas modelis $HGARCH(P,Q)$ išsprendžia šias problemas.

Autoriai [6] pasitelkė pavyzdį, kuriame parodė, jog jų pasiūlytas $HGARCH(P,Q)$ niekuo nenusileidžia $HYGARCH(P,Q)$ ir $FIGARCH(P,Q)$. Pasirinktos Heng Seng indekso logaritminės grąžos, pradedant nuo 1986 metų gruodžio 31 dienos, iki 2010 metų vasario 7 dienos.

Trys modeliai buvo naudojami prognozuoti 1, 5, 10 ir 22 dienas į priekį ir buvo apskaičiuotos atitinkamos rizikos vertės. Padaryta išvada, jog naujai pasiūlytas modelis negali prilygti $HYGARCH(P,Q)$ modeliui duomenų pritaikymui ir prognozavimui, bet $HGARCH(P,Q)$ geresnis parametrų nustatymo atžvilgiu. Taip pat $HGARCH(P,Q)$ yra daug greitesnis už $FIGARCH(P,Q)$ [6].

Shuairu Tian, Shigeyuki Hamori [7] pasiūlė $RGARCH(P,Q)$ (Realized GARCH) skaičiuoti palūkanų normos kintamumą trumpuoju laikotarpiu valiutų kurso euro/jenos atveju. Šis darbas buvo paskatintas to, jog $GARCH(P,Q)$ tipo modeliai nepajėgė tinkamai elgtis su staigiu palūkanų normų kintamumu. Buvo parinkti didelio dažnumo 3 mėnesių duomenys – euro/jenos sandoriai TFX (Tokyo Financial Exchange). Imtį sudarė 980 stebėjimų. Empiriniai duomenys įrodė, jog $RGARCH(P,Q)$ modelis yra efektyvus įrankis modeliuoti ir prognozuoti palūkanų normų kintamumą.

Taip pat, buvo pasirinktas $ARMA/RGARCH(P,Q)$ modelis, kuris fiksavo kintamumo grupavimą ir vidurkio grįžimo efektus. Šis modelis labiau tinka duomenims, tačiau nepateikia geresnių kintamumo rezultatų už $RGARCH(P,Q)$.

R.R.A. Mendes, A.P. Paiva, R.S. Peruchi, P.P. Balestrassi, R.C. Leme ir M.B. Silva [8] pateikė darbą apie portfelių optimizavimą naudojantis $ARMA/GARCH(P,Q)$ modelį. Šis portfelių optimizavimas yra pateikiamas, kaip kompiuterinis metodas spręsti portfelių optimizavimą. Kaip praktinį pritaikymą, jie pasirinko savaitines naftos kainas doleriais už barelį OPEC (naftą eksportuojančių šalių organizacijos) ir joje nesančių, t.y. Azijos Dubai Fateh, Kinijos Daqing, Indonezijos Minas ir Venesuelos Tia Juana laikotarpio nuo 1998 metų sausio 2 dienos iki 2011 metų spalio 15 dienos.

Pirmiausia, duomenys buvo pritaikyti $ARMA - GARCH(P,Q)$ siekiant gauti laukiamą portfelio riziką ir grąžą. Antra, šis sujungtas modelis buvo pritaikytas ištirti ir modeliuoti riziką, grąžą ir entropiją atsižvelgiant į finansinį turtą. O trečia, šis modelis buvo optimizuotas naudojantis „pageidaujamomis" funkcijomis. Pagaliau, paviršiaus dizainas buvo pritaikytas modeliuoti „pageidaujamą" funkciją ir pasirinkti optimalius parametrus portfelio pasirinkimui.

Metodas yra pajėgus sumažinti subjektyvumą ir klaidas, kurias gali padaryti sprendimų priemėjas. Taip pat, apsidraudžiama nuo rizikos, bei padidinama portfelių įvairovė. Taip pat, svarbu pabrėžti, jog sąveika tarp „pageidaujamų" parametrų pagerina algoritmo įvykdymą [8].

Liu Heping, Shi Jing [9] darbas buvo skirtas prognozuoti vidurkį ir kintamumą elektros kainų, kas turėtų būti ypatingai svarbu apskaičiuojant elektros vertę, taip pat, suvaldyti riziką. Autoriai pasirinkimo daugelį modelių sudarančių $ARMA/GARCH(P,Q)$ modelius, bei jų modifikacijas, tokias kaip $ARMA/GARCH(P,Q) - M$ prognozuoti elektros kainas valandomis į priekį. Iš viso buvo pasirinkta dešimt modelių norint statistiškai įvertinti, kuris modelis yra tiksliausias.

Table 8
Modeling sufficiency evaluation of ARMA-GARCH models.

	RMSE	MAE	MAPE	TIC
ARMA-SGARCH	7.5462	0.1251	14.6838	0.1172
ARMA-QGARCH	7.4579	0.1230	14.7201	0.1180
ARMA-GJRGARCH	7.4238	0.1225	14.6868	0.1177
ARMA-EGARCH	7.4677	0.1237	14.7260	0.1178
ARMA-NGARCH	7.4710	0.1232	14.7612	0.1182
ARMA-SGARCH-M	7.4388	0.1220	14.4774	0.1165
ARMA-QGARCH-M	7.5655	0.1274	14.3942	0.1150
ARMA-GJRGARCH-M	7.5258	0.1265	14.3506	0.1148
ARMA-EGARCH-M	7.6427	0.1298	14.5258	0.1154
ARMA-NGARCH-M	7.5546	0.1271	14.4015	0.1151

2.3 pav. Modelių tikslumas *Liu Heping, Shi Jing Applying ARMA – GARCH approaches to forecasting short – term electricity prices, 11 puslapis*

Pagal rezultatus, buvo prieita prie išvados, jog modeliai duoda labai panašius rezultatus. Išskirti $ARMA/SGARCH(P,Q) - M$, kuris yra lengvai apskaičiuojamas, taip pat $ARMA/GJRGARCH(P,Q) - M$, kuris gali būti tobulinamas ir vietos šio modelio tobulinimui.

Liu Yanxin, Li Siu – Hang Johnny, Ng Cheuk – Yin Andrew [9] darė prielaida, jog $GARCH(P,Q)$ modelyje (**žr. 2.2 formulę**) e_t turėtų būti pasiskirstęs pagal Hanseno $e_t \sim T_n$ su n laisvės laipnių (**žr. A.1 formulę**).

Šis modelis su pateiktu pasiskirstymu buvo pritaikytas S&P 500 indeksui. Palyginimui su $GARCH(P,Q)$ modeliu buvo pasirinktas Black – Scholes formulė.Apskaičiavus pasirinkimo sandorių kainas ir įvertinus paklaidas prieitą prie išvados, jog pasirinkti $GARCH(P,Q)$ modeliai skaičiuoja tiksliau nei Black – Scholes formulė.

Rachev T. Svetlozar, Menn Christian [10] plėtojo modelį, kurio turto grąžos procesas turėtų α −stabilų pasiskirstymą su e_t pasiskirstymo pašalintomis sunkiomis uodegomis. Šis būdas naudoja martingalą kaip įkainojimo matą, kuris duoda galimybę pritaikyti modelį rinkų kainoms. $GARCH(P,Q)$ su $\alpha -$ stabiliu pasiskirstymu leidžia suprasti visiems žinomas empirinių duomenų anomalijas, kaip kintamumo grupavimas arba grąžų pasiskirstymo sunkias uodegas. Nors teoriškai šis modelis turėtų padėti aiškintis empirinių duomenų problemoms, tačiau buvo prieita prie išvados, jog tiek sunkios grąžų pasiskirstymo uodegos, tiek kintamumo grupavimas lieka problema norint tiksliai išsiaiškinti procesą [10].

Amerikietiškąjį pasirinkimo sandorį naudojantis $GARCH(P,Q)$ su Markovo grandinių aproksimavimu atliko Duan Jin – Chuan, Simonato Jean – Guy Simonato [11]. Autoriai pasiūlė skaitinį metodą apskaičiuojant Amerikietiškojo pasirinkimo sandorio vertę, kurio pagrindas yra aproksimuoti nagrinėjamo turto kainų procesą su baigtinėmis būsėnomis ir nepriklausančiomis nuo laiko Markovo grandinėmis. Autoriai pateikė šį būdą kaip papildomą Amerikietiškojo pasirinkimo sandorio įkainojimą $GARCH$ ir Black – Scholes formule , bei įrodė Markovo grandinių metodo konvergavimą.

Taip pat, tie patys autoriai [12] pasiūlė dar vieną metodą, kuris remiasi Rubinsteino Edgeworth medžio idėja [13], kuri yra kombinuojama su analitinėmis formulėmis. Jos yra skirtos skaičiuoti momentams aprašytiems Duan Jin – Chuan [14] darbe**.** Su pasiūlytu metodu, apskaičiuojami skaitiniai pavyzdžiai ir įvertinamas metodo greitis bei tikslumas.

Pagal autorių darytas išvadas toks metodas veikia greitai, tačiau yra būdingos aproksimavimo paklaidos, kurios gali būti daromos dėl stochastinių kintamųjų parinkimo.

Tolimesnis darbas yra Jia Quiyi projektinis darbas apie Amerikietiškojo pasirinkimo sandorio įkainojimą naudojantis Mažiausių Kvadratų Monte Karlo metodu. Detalus teorinis aprašas yra duotas Longstaff ir Schwartz [16] savo darbe. Tuo tarpu Jia Quiyi šį metodą pritaikė realiems pavyzdžiams. Taip pat, aiškinamasi, kaip elgiasi Mažiausių Kvadratų Monte Karlo metodas reaguoja padidinus stochastinius faktorius.

Ilkonen Samuli, Jari Toivanen [17] naudojo ir palygino penkis skaitinius metodus norint įvertinti amerikietiškąjį pasirinkimo parduoti su Hestono stochastiniu kintamumu. Naudojami metodai: SOR („Successive Overrelaxation”), MG („Multigrid Method“), OSM („Operator Splitting Method), baudų metodas („Penalty Method“) ir „Component – Wise Splitting Method“, kuris vienintelis yra tiesiogiai skaičiuojamas, o likusieji yra iteraciniai. MG metodu yra apskaičiuojamos tiesinės lygčių sistemos metodų OSM ir baudų metodų, o „Component – Wise Splitting Method“ su tiesiškai užrašytais skirtumų operatoriais, kurie sprendžiami naudojant Brenano ir Švartzo algoritmą.

Skaitiniai pavyzdžiai leidžia palygint tikslumą ir greitį pasirinktų modelių. Pagal rezultatus visų modelių tikslumas yra panašiame lygyje, tačiau atlikimo greitis yra skirtingas. Greičiausias iš nagrinėjamų modelių yra „Component – Wise Splitting Method“.

2.2 AMERIKIETIŠKASIS PASIRINKIMO SANDORIS

Norint suprasti, kas yra pasirinkimo sandoris, reikia jį apsibrėžti. Tai įrankis su kuriuo galima sumažinti investavimo, aktyvo kainos rizikas ir panašiai. Pasirinkimo sandoris akivaizdžiai leidžia suprasti, kad tai yra galimybė, bet ne būtinybė pirkti arba parduoti aktyvą su tam tikra nustatyta kaina. Kadangi egzistuoja galimybė pasirinkti: atlikti sandorį, ar ne, reikia sumokėti mokestį, nustatytą sandorio pardavėjo, kurį reikia sumokėti iš karto perkant tokį sandorį. [19]

Šiame darbe bus nagrinėjamas amerikietiškasis pasirinkimo sandoris. Tai sandoris, kuris gali būti atliktas bet kuriuo momentu nuo jo nupirkimo datos. Amerikietiškasis pasirinkimo sandoris leidžia sandorio turėtojui atlikti šį sandorį nepasiekiant termino pabaigos. Dėl šios priežasties, lyginant su europietiškaisiais pasirinkimo sandoriais, kurie atliekami tik termino pabaigoje, santykinė sandorio vertė yra didesnė. Tačiau, optimalaus amerikietiškojo pasirinkimo sandorio įvykdymo laikas taip pat šį sandorį daro sudėtingu finansuose.

Pažymėjus kintamuosius, kur S yra bazinio aktyvo (kurį pirks arba parduos ateityje) kaina ir investuotojas nupirko amerikietiškąjį pirkimo pasirinkimo sandorį, su įvykdymo kaina E. Jei S yra didesnė už E, tai investuotojas pirks aktyvą už kainą E ir tuoj pat jį pardavęs rinkoje gaus už kainą dydžio $S - E$ pajamas. Jei S mažesnė už E, tai investuotojas neįvykdys kontrakto ir pajamos bus lygios nuliui, ir patirs nuostolį lygų sandorio vertei. Amerikietiškojo pasirinkimo pirkti sandorio išmoka [20]:

$$X = \max\{S - E, 0\} \tag{2.1}$$

Tuo tarpu amerikietiškojo pardavimo pasirinkimo sandorio išmoka:

$$X = \max\{E - S, 0\} \tag{2.2}$$

Turint šiuos duomenis bus galima pritaikyti aprašytą žemiau esančiame skyrelyje modelį amerikietiškojo pasirinkimo sandorio vertei rasti.

2.3 GARCH$(\mathbf{P},\mathbf{Q})$ MODELIS

Skyrius apibūdins sąlyginio heteroskedastiškumo modelį. Skyrelis susidės iš bendrosios modelio struktūros ir modelio versijų.

GARCH MODELIS

GARCH – apibendrintasis autoregresijos sąlyginio heteroskedastiškumo procesas. Tai vienas iš būdų skirtas skaičiuoti kintamumą įvairiose finansų rinkose. Šį modelį naudoja finansų makleriai prekyboje, investavime norint numatyti nagrinėjamų finansinių priemonių kainas.

GARCH$(\mathbf{P},\mathbf{Q})$ MODELIO STRUKTŪRA

Tegu ε_t aprašo stochastinį procesą diskrečiaisiais laiko momentais, o ψ_t bus informacijos aibė ($\sigma - aib$ė) per laiką t. Tuomet $GARCH(P,Q)$ procesas aprašomas [2]:

$$\varepsilon_t|\psi_{t-1}\sim N(0,h_t) \tag{2.3}$$

$$h_t=\alpha_0+\sum_{i=1}^{q}\alpha_i{\varepsilon_{t-i}}^2+\sum_{i=1}^{p}\beta_i{h_{t-i}}^2=\alpha_0+\alpha(L){\varepsilon_t}^2+\beta(L)h_t \tag{2.4}$$

kur

$$\varepsilon_t=\sqrt{h_t}e_t \text{ ir } e_t\sim N(0,1)$$

$$p\geq 0, q>0$$

$$\alpha_0>0,\alpha_i\geq 0, i=1,\dots,q$$

$$\beta_i>0, i=1,\dots,p$$

$\alpha(L)\ ir\ \beta(L)$ yra perėjimų polinomai, kurie lygūs: $\alpha(L)=\alpha_1L+\alpha_2L^2+\cdots+\alpha_qL^q$ ir $\beta(L)=\beta_1L+\beta_2L^2+\cdots+\beta_pL^p$.

Išplaukia tokios modelio savybės [2]:

- Jei $P = 0$, modelis tampa $ARCH(Q)$;
- Jei $P = 0$ ir $Q = 0$, tuomet ε_t tiesiog yra baltasis triukšmas.

$GARCH(P, Q)$ modelis susidaro iš P sąlyginės dispersijos perėjimų ir Q paklaidų kvadratų perėjimų.

ε_t išreiškiamas tiesine regresija [1]:

2.5

$$\varepsilon_t = y_t - x_t{}'b$$

Kur $\mathrm{y_t}$ yra priklausomas kintamasis, $\mathrm{x_t}$ vektorius aprašantis kintamuosius ir b yra nežinomų parametrų vektorius.

Pagal Milhoj (1984) teoriją, $ARCH(Q)$ su baigtiniu Q, $D(1) < 1$ arba kitaip sakant $A(1) + \mathrm{B}(1) < 1$, tenkina stacionarumą plačiąja prasme [2].

2.4 DIDŽIAUSIO TIKĖTINUMO METODAS

Šiame skyrelyje bus pristatytas didžiausio tikėtinumo metodas įvertinti aprašytą **2.3** ir **2.4** formulėmis $GARCH(P, Q)$ modelio parametrus.

Tegu $z'_t = (1, \varepsilon_{t-1}^2, \dots, \varepsilon_{t-q}^2, h_{t-1}, \dots, h_{t-p})$, $\omega' = \left(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_p\right)$ ir $\theta \in \Theta$, kur $\theta = (b', w')$, Θ −yra Euklido aibės poaibis. Pažymimas parametras θ_0, kur $\theta_0 \in \Theta$. Perrašomas modelis [2]:

2.6

$$\begin{gathered}\varepsilon_t = y_t - x_t{}'b \\ \varepsilon_t | \gamma_{t-1} \sim N(0, h_t) \\ h_t = z'_t \omega\end{gathered}$$

Tuomet logaritminė tikėtinumo funkcija T stebimų dydžių [1][2]:

2.7

$$L_T(\theta) = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} l_t(\theta)$$

Randamas natūrinis logaritmas:

2.8

$$l_t(\theta) = -\frac{1}{2}log(h_t) - \frac{1}{2}\varepsilon_t^2 h_t^{-1}$$

Diferencijuojant pagal nežinomus parametrus

2.9

$$\frac{\partial l_t}{\partial \theta} = \frac{\partial(-\frac{1}{2}log(h_t) - \frac{1}{2}\varepsilon_t^2 h_t^{-1})}{\partial \theta}$$

Prisilyginama nuliui, išsprendžiami lygčių sistemą gaunami parametrų įverčiai.

2.5 GARCH MODELIO VERSIJOS

Aukščiau aprašyta teorija yra bendrasis atvejis. Kadangi GARCH modelis turi daug versijų, bus apžvelgiami ir kiti modeliai, bei užrašomos jų kintamumo lygtys. Vienas pirmųjų pristatytų modelių yra ARCH modelis. Jo lygtis yra **2.4 formulės** pavidalo, kur $P = 0$ [1]:

2.10

$$h_t = \alpha_0 + \alpha {\varepsilon_{t-i}}^2$$

Tolesnis modelis yra $GARCH(1,1)$ modelis. Šis modelis yra dažniausiai naudojamas GARCH [27] tipo modelis, su parametrais $P = 1\ ir\ Q = 1$. Tuomet **2.4** formulė yra užrašoma [2]:

2.11

$$h_t = \alpha_0 + \alpha {\varepsilon_{t-1}}^2 + \beta {h_{t-1}}^2$$

Kur $\alpha_0 > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$

Toliau, integruotas GARCH modelis (žymimas IGARCH) [21]. Šio modelio lygtis yra tokia pati, kaip ir GARCH(p,q), skiriasi, tik sąlyga: $\mathrm{A}(1) + \mathrm{B}(1) = 1$.

Kitokia modelio lygtis yra EGARCH modelio [22]:

2.12

$$\ln(h_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i g(z_{t-i}) + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \ln(h_{t-i})$$

Kur $g(z_{t-i}) = \theta z_t + \beta[|z_t| - E|z_t|]$ ir $z_t = \frac{\varepsilon}{\sqrt{h_t}}$.

Tuo tarpu kvadratinis GARCH modelis (QGARCH) [22]:

2.13

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i(\varepsilon_{t-i} - \psi_i)^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i {h_{t-i}}^2 = \alpha_0 + \alpha(L){\varepsilon_t}^2 + \beta(L)h_t$$

Aukščiau aprašytų modelių lygtys aprašinėja kintamumo lygtis, o sekantis modelis panaudodamas aprašys vidurkio lygtį naudojant kintamumo komponentę. Šis modelis vadinamas GARCH „in mean". Toks modelis turi kelis pasirinkimus norint aprašyti vidurkio lygtį [22]:

- Vidurkio tiesinė lygtis yra:

2.14

$$y_t = {x_t}'b + \delta\sqrt{h_t} + \varepsilon_t$$

- Su logaritmine komponentę:

2.15

$$y_t = {x_t}'b + \delta \ln h_t + \varepsilon_t$$

- Ir su šaknies:

2.16

$$y_t = {x_t}'b + \delta\sqrt{h_t} + \varepsilon_t$$

Kur $\varepsilon_t = \sqrt{h_t}e_t$.

Turint vidurkio lygtimi prognozuotas reikšmes, būtų gerai šią prognozę palyginti su kitais dažnai naudojamais modeliais tokiais kaip Black – Scholes formulė ar Binominis.modelis, kurie skirti įvertinti europietiškąjį pasirinkimo sandorį.

2.6 BLACK – SCHOLES FORMULĖ ir BINOMINIS MODELIS

Vieni dažniausiai naudojamų įkainojimų yra Black – Scholes formulė ir Binominis modelis. Black – Scholes formulė yra viena svarbiausių koncepcijų šiuolaikinėje finansų teorijoje. Tai standartinis modelis įkainoti europietiškąjį pasirinkimo sandorį. Kadangi ši formulė bus skirta tik modelių tikslumo palyginimui, bus aprašoma tik formulė, su kuria skaičiuojama sandorio vertė, Pasirinkimo sandorio kaina seka Brauno judėjimą su nekintamais kintamumu ir palūkanų norma.

Pasirinkimo sandorio įkainojimo formulė [23]:

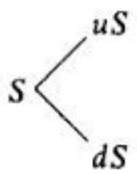
2.17

$$C = SN(d_1) - Ke^{(-rt)}N(d_2)$$

Kur

$$C - sandorio\ teorinė\ kaina$$
$$S - dabartinė\ akcijos\ kaina$$
$$t - laikas, po\ kurio\ nebegalios\ sandoris$$
$$K - sandorio\ vykdymo\ kaina$$
$$r - nerizikinga\ palūkanų\ norma$$
$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r + s^2)t}{s\sqrt{t}}$$
$$d_2 = d_1 - s\sqrt{t}$$
$$s - standartinis\ nuokrypis$$

Kitas sandorio įvertinimo būdas yra Binominis modelis. Tariama, kad akcijos kaina laikosi didinamojo binominio proceso per diskrečiuosius periodus [23]. Akcijos grąžos norma kiekviename periode gali įgyti dvi reikšmes: $u - 1$ su tikimybe q arba $d - 1$ su tikimybe $1 - q$. Taigi, jei akcijos kaina yra lygi S, akcijos kaina periodo pabaigoje galės įgyti reikšmes arba uS arba dS. Galima tai atvaizduoti **2.4 pav.**



2.4 pav.

Taip pat tariama, kad grąžos norma yra konstanta, nėra mokesčių, perėjimo kaštų ar maržos reikalavimų. Pažymima r kaip nerizikinga palūkanų norma per vieną periodą, nustatoma $u > r > d$. Jei ši nelygybė nebus tenkinama, tuomet atsiras arbitražo galimybė, t.y. gauti pelną be jokios rizikos.

Aptariamas paprasčiausias atvejis, kai pasirinkimo pirkti sandoris galioja vieną periodą. Tegu C yra esamoji pasirinkimo pirkti sandorio vertė, C_u vertė bus lygi periodo pabaigoje, jei akcijos kaina bus uS, ir C_d, jei dS. Kol yra vienas periodas, galima lengvai apskaičiuoti vertes:

$$C_u = \max[0, uS - K] \tag{2.18}$$

Ir

$$C_d = \max[0, dS - K] \tag{2.19}$$

Naudojantis pasirinktais žymėjimais, užrašomos formulės skaičiuoti pasirinkimo pirkti ir parduoti sandorių vertes atitinkamai **2.20** ir **2.21** formulėmis:

$$C_0 = e^{-rT}(pC_u + (1-p)C_d) \tag{2.20}$$

$$P_0 = e^{-rT}(pP_u + (1-p)P_d) \tag{2.21}$$

Kur $p = \frac{e^{rT}-d}{u-d}$. Tam, kad nebūtų arbitražo galimybės, turi būti išpildytos sąlygos: $d < e^{rT} < u$.

2.7 VERTINIMO KRITERIJAI

Kadangi tyrimas bus paremtas modelių parinkimu, kuris geriausiai atitiktų duotą laiko eilutę, parenkami trys kriterijai. Vienas jų yra Akaike (AIC) kriterijus. Šis kriterijus remiasi didžiausio tikėtinumo analize. Tegu $X = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ skirstinio tankis yra $p(x, \theta)$, kur θ yra $k -$ matis nežinomas parametras, t.y. $k = \dim \theta$. Kriterijus [24]:

$$AIC(k) = -2 \ln p(x, \hat{\theta}) + 2k \tag{2.22}$$

Kur $\hat{\theta}$ didžiausio tikėtinumo įvertis. Modelis rekomenduojamas tas, kurio Akaike kriterijaus reikšmė yra mažiausia.

Sekantis kriterijus yra Svartzo – Bajeso (SBC) [25]:

$$SBC(k) = -2\ln p\big(x, \hat{\theta}\big) + k2\ln n \tag{2.23}$$

Ir galiausiai, vidutinė absoliutinė procentinė paklaida:

$$\frac{\sum |(y_t - \widehat{y_t}/y_t\,|}{n} * 100 \tag{2.24}$$

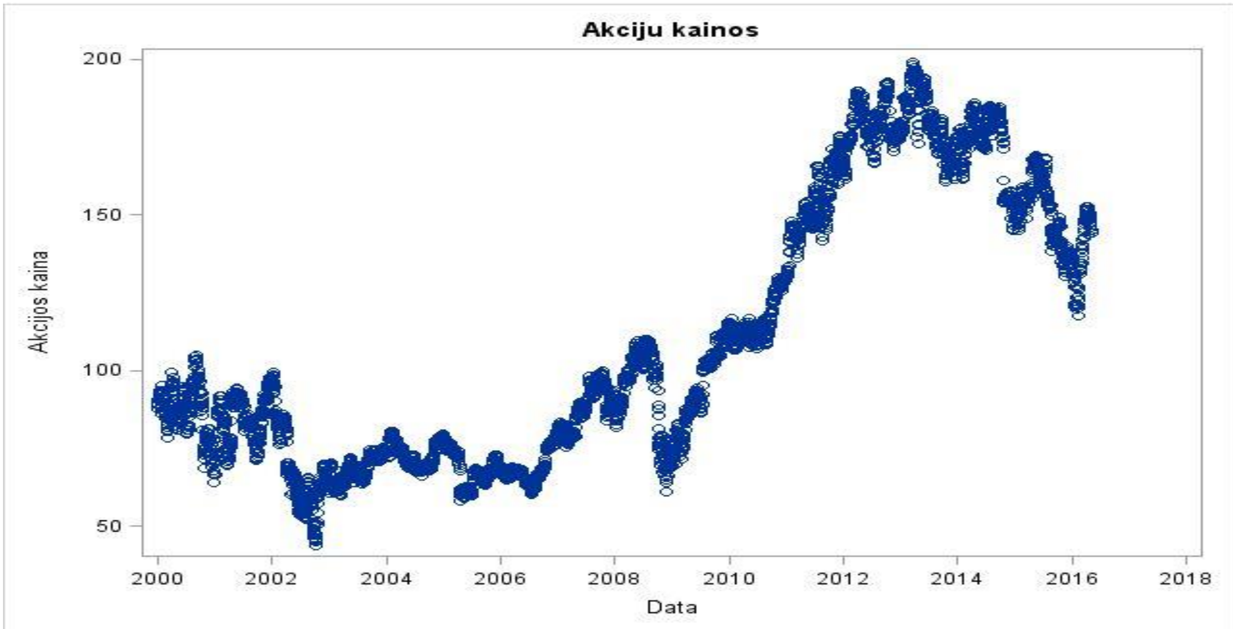
Kur $y_t -$ faktinės reikšmės, o $\widehat{y_t} -$ apskaičiuotos reikšmės.

3 TIRIAMOJI DALIS IR REZULTATAI

Skyrius susideda iš pasirinktų duomenų, tiksliausių modelių parinkimo, Black – Scholes ir Binominio modelių skaičiavimo ir lyginimo su pasirinktų GARCH modelių apskaičiuotais rezultatais. Paskutinis skyrelis skirtas skaičiuotų duomenų palyginimui su faktinėmis amerikietiškojo pasirinkimo sandorio kainomis.

3.1 DUOMENYS

Duomenys naudojami šiame darbe susidaro iš kasdienių stebėjimų akcijų kainų. Kaip pavyzdys, buvo pasirinkta IBM (International Business Machines Corporation) pataisytos dieninės akcijų kainos laikotarpiui nuo 2000 metų sausio 3 dienos iki 2016 metų gegužės 5 dienos [29] (**3.1. pav**) bei „Daily Treasure Bills“ duotų palūkanų normų [28].

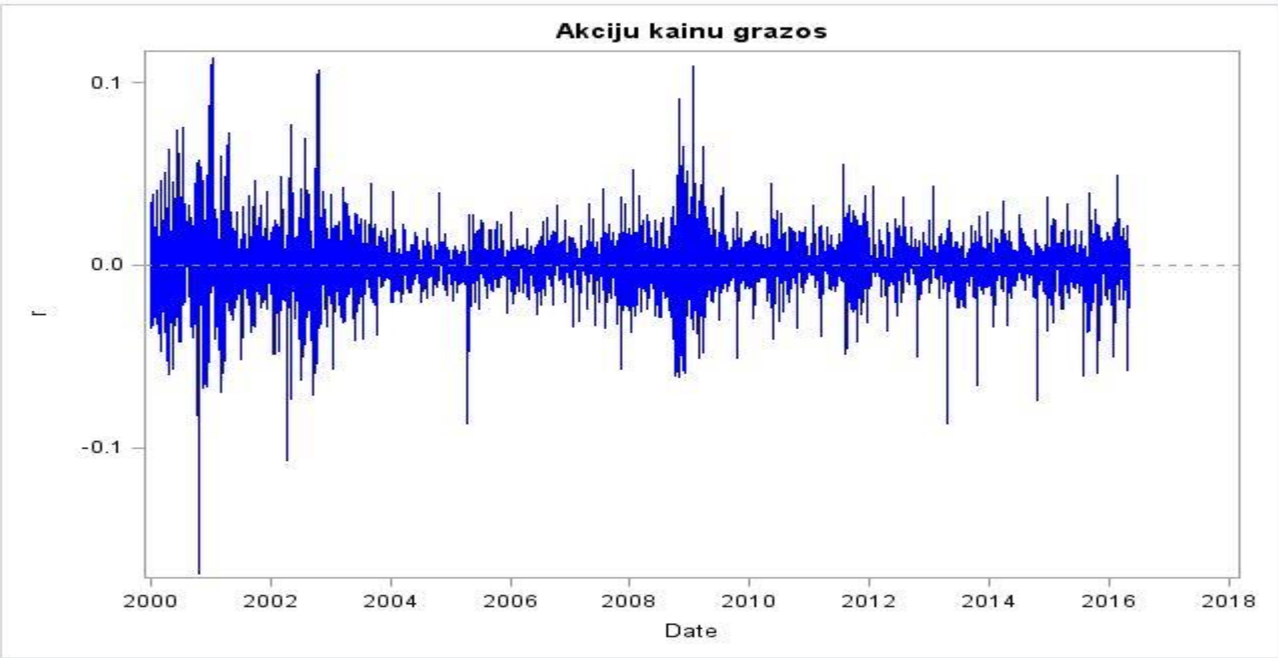


3.1 pav. IBM akcijų kainos nagrinėjamame laikotarpyje

Apskaičiuojamos akcijų kainų logaritminės grąžos naudojantis formule:

$$Grąža = log(kaina_{i+1}) - log(kaina_i)\,, i = 1, \dots, n \quad \textbf{3.1}$$

ir nubraižomas grafikas (**3.2 pav**.):



3.2 pav. IBM akcijų kainų logaritminės grąžos nagrinėjamame laikotarpyje

3.1 Pagrindinės imties charakteristikos

Momentai			
N	4109	**Dispersija**	0.00028262
Vidurkis	-0.0001124	**Ekscesas**	7.68293807
Stand. nuokrypis	0.01681132	**Asimetrija**	0.12859733

3.2 MODELIO PARINKIMAS

Šiame skyriuje bus parenkamas atitinkamas modelis pagal pasirinktus duomenis. Parinkimo kriterijai AIC (Akaike kriterijus), SBC (Schwarz Bajeso kiterijus) ir MAPE yra aprašyti teorinėje dalyje formulėmis **2.22**, **2.23**, **2.24**.

Pasirenkami GARCH modeliai su įvairiomis P ir Q reikšmėmis, taip pat parenkami įvairios versijos, kurios keičia GARCH modelio kintamumo užrašymo specifiką. Taip pat pridedami autoregresijos komponentės.

Kadangi, reikalingas ne tik kintamumas, bet ir prognozuojamos reikšmės, todėl nagrinėjami modeliai bus aprašomi vidurkio lygtimis, bendru atveju aprašytomis **2.24**, **2.25** ir **2.26** formulėmis.

Turint pasirinktus nagrinėjimui modelius, pagal pasirinktus vertinimo kriterijus įvertinami tiksliausi. Pasirinkus didžiausio tikėtinumo metodą ir apskaičiavus lygties **2.4** parametrus, Akaike, Svartz – Bajeso kriterijus, bei įvertinus vidutinę absoliutinė procentinė paklaidą gaunami kiekvieno pasirinkto modelio tikslumas **3.2 Lentelėje**.

3.2 Lentelė. Vidurkio lygties su logaritmu AIC, SBC ir MAPE reikšmės

Nr.	Modelis	SBC	AIC	MAPE
1	ARCH M(1)-Stjudento	36643.612	36618.328	21.1991
2	ARCH M(1)-Normalusis	36635.291	36616.328	21.1991
3	ARCH M(2)- Stjudento	35766.782	35735.176	20.7268
4	ARCH M(2)- Normalusis	35777.123	35751.839	20.6414
5	ARCH M(3)- Stjudento	35960.295	35922.368	20.4219
6	ARCH M(3)-Normalusis	35788.817	35757.211	20.6744
7	GARCH M(1,1)- Stjudento	35717.669	35686.063	20.2557
8	GARCH M(1,1)- Normalusis	35717.669	35686.063	20.2557
9	GARCH M(1,2)- Stjudento	47257.101	47225.495	37.4972
10	GARCH M(1,2)- Normalusis	47302.275	47276.99	37.172
11	GARCH M(2,1)- Stjudento	50675.596	50656.633	99.6611
12	GARCH M(2,1)- Normalusis	50670.359	50657.717	99.6864
13	GARCH M(2,2)- Stjudento	50647.074	50628.11	99.731
14	GARCH M(2,2)- Normalusis	50809.502	50796.86	99.9688
15	IGARCH M(1,1)- Stjudento	41936.377	41911.092	28.2614
16	IGARCH M(1,1)- Normalusis	35965.628	35946.664	20.7746
17	IGARCH M(1,2)- Stjudento	35945.716	35914.11	20.7852
18	IGARCH M(1,2)- Normalusis	35811.871	35786.586	22.2201
19	IGARCH M(2,1)- Stjudento	41600.413	41568.808	27.4177
20	IGARCH M(2,1)- Normalusis	35795.885	35770.6	20.2222
21	IGARCH M(2,2)- Stjudento	35954.037	35916.11	20.7852
22	IGARCH M(2,2)- Normalusis	35750.699	35719.093	20.1225
23	EGARCH M(1,1)- Normalusis	38361.695	38355.374	21.8009
24	EGARCH(1,2)- Normalusis	37725.995	37694.389	26.0972
25	NOGARCH M(1,1)- Stjudento	43297.088	43278.125	36.1267
26	NOGARCH M(1,1)- Normalusis	42364.59	42339.305	39.8928
27	**NONGARCH M(1,1)-Stjudento**	**33015.557**	**32983.951**	**14.2885**
28	NONGARCH M(1,1)- Normalusis	35779.295	35754.011	20.6828
29	**PGARCH M(1,1)-Stjudento**	**28691.957**	**28685.635**	**9.81838**
30	QGARCH M(1,1)- Stjudento	32908.34	32895.697	15.1818
31	**QGARCH M(1,1)-Normalusis**	**29868.616**	**29837.01**	**11.4346**
32	STGARCH M(1,1)- Stjudento	35840.191	35808.585	22.0224
33	STGARCH M(1,1)-Normalusis	35772.275	35746.99	20.6733

Matoma iš lentelės (**3.2 Lentelė**), tiksliausimodeliai yra: $PGARCH - M(1,1)$ su Stjudento pasiskirstymu, $QGARCH - M(1,1)$ su normaliuoju pasiskirstymu, bei $NONGARCH - M(1,1)$ su Stjudento pasiskirstymu, kurių $AIC, SBC,$ ir $MAPE$ reikšmės yra 28685.635, $28691.957 \; ir \; 9.81838\%$ modelio $PGARCH - M(1,1)$ su Stjudento pasiskirstymu, 29837.01, $29868.616 \; ir \; 11.4346\%$ modelio $QGARCH - M(1,1)$ su normaliuoju pasiskirstymu, 32983.951, $33015.557 \; ir \; 14.2885\%$ modelio $NONGARCH - M(1,1)$ su Stjudento pasiskirstymu.

Toliau, tikrinama, ar modelių tikslumas pagerėja vidurkio lygtyje esantį logaritminį kintamumą pakeitus į šaknies, t.y. **2.15** formulėje, vietoje logaritmo keičiama šaknimi (**2.16 formulė**). Rezultatai pateikti **B.1 Lentelėje**. Išskiriami tiksliausi modeliai: $EGARCH-M(1,1)$ su normaliuoju skirstiniu $AIC,\ SBC,$ ir $MAPE$ su reikšmėmis $24303.953,\ 24335.559$ ir 3.26663%, $STGARCH-M(1,1)$ su Stjudento skirstiniu $AIC,\ SBC$ ir $MAPE$ su $29093.232,\ 29124.837$ ir 7.88988%, bei $STGARCH-M(1,1)$ su normaliuoju skirstiniu, kurio $AIC,\ SBC\ ir\ MAPE$ yra $29132.439, 29157.723\ ir\ 7.97488\%$.

Galiausiai, su tiesine vidurkio lygtimi (**2.14 formulė**) rezultatai yra pateikti **B.1 Lentelėje**. Iš šios lentelės tiksliausias modelis yra $QGARCH-M(1,1)$ su Stjudento pasiskirstymu, kurio AIC, $SBC\ \ ir\ \ MAPE$ su reikšmėmis atitinkamai $19915.9384, 19953.8654\ ir\ 3.61785\%$.

Kadangi, $GARCH$ modelis gali būti jungiamas su autoregresijos komponentėmis, todėl, norint įsitikinti, ar junginys gali duoti geresnius rezultatus, nei įprasti GARCH modeliai prijungiama autoregresijos komponentė.

Rezultatai pateikti **3.3 Lentelėje**. Tiksliausi modeliai yra $AR(1)/ARCH-M(1)$ su $AIC = 15879.655, SBC = 15904.939\ ir\ MAPE = 1.13996\%$, taip pat $AR(1)/ARCH-M(3)$ su $AIC = 17051.087, SBC = 17089.014\ ir\ MAPE = 1.16439\%$ su normaliaisiais pasiskirstymais, taip pat $AR(1)/GARCH-M(1,1)$ su $AIC = 15879.655, SBC = 15904.939\ ir\ MAPE = 1.13996\%$, $AR(1)/EGARCH-M(1,1)$ su $AIC = 17443.0726, SBC = 17480.9997\ ir\ MAPE = 1.16429\%$, $AR(1)/QGARCH-M(1,1)$ su $AIC = 15883.5036, SBC = 15921.4307\ ir\ MAPE = 1.13992\%$ su normaliaisiais pasiskirstymais.

3.3 Lentelė. Vidurkio lygties su logaritmu ir AR(1), AIC, SBC ir MAPE reikšmės

Nr.	Modelis	SBC	AIC	MAPE
1	ARCH M(1)-Stjudento	14991.435	14959.829	59.4975
2	**ARCH M(1)-Normalusis**	**15904.939**	**15879.655**	**1.13996**
3	ARCH M(2)- Stjudento	14881.166	14843.239	59.5017
4	ARCH M(2)- Normalusis	17164.918	17133.312	59.4739
5	ARCH M(3)- Stjudento	14802.344	14758.096	59.4948
6	**ARCH M(3)-Normalusis**	**17089.014**	**17051.087**	**1.16439**
7	GARCH M(1,1)- Stjudento	14435.049	14397.122	59.8173
8	**GARCH M(1,1)- Normalusis**	**15904.939**	**15879.655**	**1.13996**
9	GARCH M(1,2)- Stjudento	47257.101	47225.495	37.4972
10	GARCH M(1,2)- Normalusis	47302.275	47276.99	37.172
11	GARCH M(2,1)- Stjudento	16136.967	16111.683	11.644
12	GARCH M(2,1)- Normalusis	50670.359	50657.717	99.6864
13	GARCH M(2,2)- Stjudento	16136.579	16111.295	11.644
14	GARCH M(2,2)- Normalusis	50809.502	50796.86	99.9688
15	IGARCH M(1,1)- Stjudento	14427.147	14395.541	59.8167
16	IGARCH M(1,1)- Normalusis	17565.32	17540.036	59.4728

17	IGARCH M(1,2)- Stjudento	14435.468	14397.541	59.8167
18	IGARCH M(1,2)- Normalusis	17490.766	17459.16	59.4914
19	IGARCH M(2,1)- Stjudento	14434.738	14396.811	59.7744
20	IGARCH M(2,1)- Normalusis	17573.642	17542.036	59.4728
21	IGARCH M(2,2)- Stjudento	14443.059	14398.811	59.7744
22	IGARCH M(2,2)- Normalusis	17499.087	17461.16	59.4914
23	**EGARCH M(1,1)- Normalusis**	**17481**	**17443.073**	**1.16429**
24	EGARCH(1,2)- Normalusis	16995.557	16951.309	11.379
25	NOGARCH M(1,1)- Stjudento	43297.088	43278.125	36.1267
26	NOGARCH M(1,1)- Normalusis	15722.183	15690.578	15.8245
27	NONGARCH M(1,1)-Stjudento	14435.157	14397.23	59.8187
28	NONGARCH M(1,1)- Normalusis	15913.11	15881.504	19.9322
29	PGARCH M(1,1)-Stjudento	9596.1435	9545.574	58.5816
30	QGARCH M(1,1)- Stjudento	9727.9118	9683.6635	58.3688
31	QGARCH M(1,1)-Normalusis	**15921.431**	**15883.504**	**1.13992**
32	STGARCH M(1,1)- Stjudento	14427.9	14389.973	59.7473
33	STGARCH M(1,1)-Normalusis	15904.939	15879.655	13.9962

Toliau, nagrinėjama, ar modeliai reaguoja ir pagerėja vertinimo kriterijai pakeitus vidurkio lygtyje esantį kintamumą į šaknies. Rezultatai pateikti **B.3 Lentelėje**. Paskutinis rinkinys modelių yra su tiesinę vidurkio lygtimi. Rezultatai pateikiami **B.4 Lentelėje** logaritminę komponentę..

3.3 MODELIŲ APRAŠYMAS

Pasirinktų modelių tikslumas pateiktas ankstesniame skyriuje. Šiame skyriuje bus apskaičiuoti šių modelių parametrai, patikrinamas jų tinkamas, įvertinamas tikslumas.

Pirmasis modelis būtų $AR(1)/ARCH-M(1)$. Apskaičiavus didžiausio tikėtinumo metodu modelio parametrus, gaunami rezultatai pateikti **3.4 lentelėje**:

3.4 Lentelė. AR(1)/ARCH-M(1) parametrai

Parametrų skaičiavimas					
Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > |t|
AR1	1	-0.9995	0.000556	-1797.80	<.0001
ARCH0	1	2.7839	0.0301	92.58000	<.0001
ARCH1	1	0	0	.	.
DELTA	1	32.6674	16.3023	2.00000	0.0451

Autoregresijos parametras yra lygus -0.9995, o α_0, α_1 atitinkamai lygūs 2.7839 ir 0, o vidurkio parametras yra lygus 88.8241. Šie parametrai pasiekiami per 25 iteracijas. Patikrinus parametrų reikšmingumo hipotezę:

$$H0: nereikšmingi;$$
$$HA: reikšmingi.$$

Pagrindinė hipotezė atmetama ir priimama alternatyvi. Tai reiškia, jog parametrai, išskyrus α_1, kuris lygus nuliui, yra statistiškai reikšmingi (**p value** > **0.05**). Užrašomos lygtys:

- Kintamumo lygtis yra: $h_t = 2.7839$;
- Autoregresijos lygtis: $\nu_t = \varepsilon_t + 0.9995\nu_{t-1}$;
- Vidurkio skaičiavimas: $\mu_t = 88.8241 \ln 2.7839$;

Užrašomas apskaičiuotas modelis, kuris skaičiuos akcijų kainas:

$$y_t = 88.8241 \ln 2.7839 + \varepsilon_t + 0.9995\nu_{t-1}$$

Modelio paaiškinamų duomenų procentas yra 99.98 t.y. $RSQUARE = 0.9998$, stacionarumo sąlyga yra tenkinama $(0 < 1)$, bei patikrinus hipotezę apie heteroskedastiškumą, ji yra priimama (**B.5 Lentelė**).

Sekantis modelis, $AR(1)/ARCH - M(3)$ su logaritmo komponente. Rezultatai gaunami panašūs kaip ir aukščiau aprašytu atveju:

3.5 Lentelė. AR(1)/ARCH-M(3) parametrai

Parametrų skaičiavimas					
Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > |t|
AR1	1	-0.9998	0.00011	-9051.20	<.0001
ARCH0	1	0.6103	0.0246	24.85000	<.0001
ARCH1	1	0.7265	0.036	20.17000	<.0001
ARCH2	1	1.2008	0.0428	28.04000	<.0001
ARCH3	1	0.3671	0.0331	11.09000	<.0001
DELTA	1	-0.0569	0.0176	-3.23000	0.0012

Autoregresijos parametras yra lygus -0.9998, o $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ atitinkamai lygūs $0.6103, 0.7265, 1.2008, 0.3671$, o vidurkio yra lygus -0.0569. . Šie parametrai pasiekiami per 43 iteracijas. Patikrinus parametrų reikšmingumo hipotezę:

$$H0: nereikšmingi;$$
$$HA: reikšmingi.$$

Pagrindinė hipotezė atmetama ir priimama alternatyvi. Tai reiškia, jog parametrai yra statistiškai reikšmingi.

- Kintamumo lygtis yra: $h_t = 0.6103 + 0.7265\varepsilon_{t-1}{}^2 + 1.2008\varepsilon_{t-2}{}^2 + 0.3671\varepsilon_{t-3}{}^2$;
- Autoregresijos lygtis: $\nu_t = \varepsilon_t + 0.9998\nu_{t-1}$;
- Vidurkio skaičiavimas: $\mu_t = -0.0569\ln(0.6103 + 0.7265\varepsilon_{t-1}{}^2 + 1.2008\varepsilon_{t-2}{}^2 + 0.3671\varepsilon_{t-3}{}^2)$;

Užrašoma modelio lygtis:

$$y_t = -0.0569\ln(0.6103 + 0.7265\varepsilon_{t-1}{}^2 + 1.2008\varepsilon_{t-2}{}^2 + 0.3671\varepsilon_{t-3}{}^2) + \varepsilon_t + 0.9998\nu_{t-1}$$

Paaiškinamų duomenų procentas yra 99.97 t.y. $RSQUARE = 0.9997$, stacionarumo sąlyga yra tenkinama ($0.7265 < 1$), bei patikrinus hipotezę apie heteroskedastiškumą, ji yra priimama (**B.6 Lentelė**).

Trečiasis nagrinėjamas modelis yra $AR(1)/GARCH - M(1,1)$, kurio autoregresijos komponentė apskaičiuota po 21 iteracijos yra -0.9995, o $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$ atitinkamai lygūs $2.5133, 0, 0.0972$. Vidurkio parametras yra lygus 88.8341. Apskaičiuoti parametrai taip pat visi yra reikšmingi.

3.6 Lentelė. AR(1)/GARCH-M(1,1) parametrai

Parametrų skaičiavimas					
Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > |t|
AR1	1	-0.9995	0.000556	-1797.50	<.0001
ARCH0	1	2.5133	0.003104	809.60000	<.0001
ARCH1	1	0	0.0000519	0.00000	1
GARCH1	0	0.0972	.	.	.
DELTA	1	88.8241	44.3328	2.00000	0.0451

- Kintamumo lygtis yra: $h_t = 2.5133 + 0.0972h_{t-1}$
- Autoregresijos lygtis: $\nu_t = \varepsilon_t + 0.9995\nu_{t-1}$
- Vidurkio skaičiavimas: $\mu_t = 88.8341\ln(2.5133 + 0.0972h_{t-1})$

Taigi modelis lygus:

$$y_t = 88.8341\ln(2.5133 + 0.0972h_{t-1}) + \varepsilon_t + 0.9995\nu_{t-1}$$

Paaiškinamų duomenų procentas yra 99.98 t.y. $RSQUARE = 0.9998$, stacionarumo sąlyga yra tenkinama $(0 + 0.0972 < 1)$, bei patikrinus hipotezę apie heteroskedastiškumą, ji yra priimama (**B.7 Lentelė**).

Eksponentinis GARCH modelis su autoregresijos komponente $(AR(1)/EGARCHM(1,1))$. Parametrų reikšmės pateiktos **3.7 Lentelėje.**

3.7 Lentelė. AR(1)/EGARCH-M(1,1) parametrai

		Parametrų skaičiavimas			
Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > |t|
AR1	1	-0.9999	0.000379	-2637.00	<.0001
EARCH0	1	3.2684	0.00627	521.29000	<.0001
EARCH1	1	-0.006116	0.003354	-1.82000	0.0682
EGARCH1	1	-0.9701	0.006264	-154.87000	<.0001
THETA	1	-1.0025	0.1305	-7.68000	<.0001
DELTA	1	-0.5192	0.0552	-9.41000	<.0001

- Kintamumo lygtis yra: $h_t = e^{3.2684 - 0.9701 h_{t-1} - 0.006116 g(z_{t-i})}$
- Autoregresijos lygtis: $v_t = \varepsilon_t + 0.9999 v_{t-1}$
- Vidurkio skaičiavimas: $\mu_t = -0.5192(3.2684 - 0.9701 h_{t-1} - 0.006116 g(z_{t-i}))$

Kur $g(z_{t-i}) = -1.0025 z_t - 0.9701[|z_t| - E|z_t|], z_t = \frac{\varepsilon}{\sqrt{h_t}}$.

Šio modelio lygtis su apskaičiuotais parametrais po 19 iteracijų:

$$y_t = -0{,}5192(3.2684 - 0.9701 h_{t-1} - 0.006116 g(z_{t-i})) + \varepsilon_t + 0.9999 v_{t-1}$$

$RSQUARE = 0.9996$, tenkinamos stacionarumo bei heteroskedastiškumo sąlygoss (**B.8 Lentelė**).

Likęs modelis yra $AR(1)/QGARCH - M(1,1)$. Šio modelio lygtis po 39 iteracijų:

$$y_t = 32.7989((\varepsilon_{t-1} - 0.2266)^2 + 0.345 {h_{t-1}}^2) + \varepsilon_t + 0.9995 v_{t-1}$$

3.8 Lentelė. AR(1)/QGARCH-M(1,1) parametrai

Variable	DF	Estimate	Standard Error	t Value	Approx Pr > |t|
		Parametrų skaičiavimas			
AR1	1	-0.9995	0.000547	-1827.70	<.0001
QARCHA0	1	1.8119	7.291	0.25000	0.8037
QARCHA1	1	0	0.0000552	0.00000	1
QARCHB1	1	0.1071	0	Infty	<.0001
QGARCH1	1	0.3447	2.6385	0.13000	0.8961
DELTA	1	89.1698	42.7634	2.09000	0.0371

Šio modelio $RSQUARE = 0.9998$, bei tenkinama heteroskedastiškumo sąlyga (**B.9 Lentelė**).

3.4 BLACK – SCHOLES IR BINOMINIAI MODELIAI

Šiame skyrelyje atliekami pradinių duomenų skaičiavimai norint naudotis Black – Scholes formule ir Binominiu modeliu. Šiems skaičiavimams yra reikalinga pradinė informacija. Vykdymo ir šios dienos akcijos kainos yra pasirinktos iš „Yahoo Finance“ [29], tuo tarpu nerizikinga palūkanų norma iš „Daily Treasure Bills“. Laiko momentą, po kurio turi būti nusprendžiama, ar įvykdomas sandoris yra viena ir dvi savaitės.

Norint apskaičiuoti kintamumą, reikalinga pirmiausia laiko eilutę tranformuoti į logaritmines grąžas:

$$grąža = \log(P_t - P_{t-1}) \tag{3.2}$$

kur P_t – yra esamo laikotarpio akcijos kaina ir P_{t-1} – praėjusio laikotarpio kaina. Toliau, apskaičiavus grąžas, skaičiuojamas kintamumas savaitei padauginus standartinį nuokrypi iš šaknies savaičių skaičiaus.

$$Kintamumas = 0.01681132 * \sqrt{52} = 0.12123$$

3.5 GARCH, BLACK – SCHOLES, BINOMINIŲ MODELIŲ PALYGINIMAS

Turint reikiamus parametrus, tokius kaip: kintamumas, laikotarpis, vykdymo akcijos kaina, esama akcijos kaina, nerizikinga palūkanų norma, bus įkainojamas pasirinkimo sandoris. Kadangi binominis modelis ir Black – Scholes formulė yra tinkama skaičiuoti europietiškąjį pasirinkimo sandorį, tuo pačiu bus galima įvertinti, ar amerikietiškasis pasirinkimo sandorys turi didesnę vertę už europietiškąjį.

Pasirinktų modelių skaičiavimų rezultatai bus lyginami su faktiniais duomenimis gautais iš „Yahoo Finance“ pasirinkimo sandorių istorinių duomenų. Buvo pasirinkti aktualiausi amerikietiškieji pasirinkimo sandoriai (pasirinkimo pirkti, pasirinkimo parduoti).

Pradedama nuo amerikietiškojo pasirinkimo pirkti sandorio, kuris gali būti įvykdomas savaitės bėgyje:

Naudojantis Black – Scholes formule ir binominiu modeliu, nusistatomi pradiniai duomenys ir skaičiuojama sandorio vertė:

Pasirinkimo pirkti sandoris:

3.9 Lentelė. Pradiniai duomenys

Tipas	Pirkti
Akcijos kaina	148.25
Realizavimo kaina	139
Nerizikinga palūkanų norma (Treasure Bills)	0.22
Kintamumas	0.12123
Laiko momentai (savaitės per metus)	1 savaitė

Naudojantis Black – Scholes formule, apskaičiuojama sandorio vertė, kuri yra lygi 9.83685 \$. Ši kaina yra už tai, jog pasirinkimo sandorio pirkėjas galėtų atlikti pasirinkimo sandorį lygiai po savaitės.

Naudojantis binominiu modeliu, pradiniai duomenys išlieka tokie patys, kaip ir **3.9 Lentelėje**, tik pridedama fiksuotas simuliacijų skaičius lygus 100. Šio sandorio vertė yra lygi 8.62419 \$.

Turint dvi pasirinkimo pirkti sandorio reikšmes, galima jas palyginti su $AR(1)/ARCH-M(1)$ modelio įkainuotu modeliu. Kadangi turint suprognozuotas kainas ateinančiam laikotarpiui, yra lengva apskaičiuoti sandorio vertę.

Pagal amerikietiškojo sandorio pirkti formulę **(2.1 formulė)**, apskaičiuojama, kokia kaina per ateinančią savaitę bus didžiausia:

3.10 Lentelė. Prognozuojamos kainos

Data	Kaina
4/7/2016	**149.99**
4/8/2016	148.22
4/11/2016	149.32
4/12/2016	149.22
4/13/2016	149.60

Akivaizdu, jog didžiausia kaina yra apskaičiuota balandžio 7 dieną. Todėl, norint įkainoti amerikietiškąjį pasirinkimo pirkti sandorį, tiesiog atimama iš gautos akcijos kainos vykdymo kainą. O norint įvertinti dar tiksliau, dauginama iš diskontuotos normos:

$$Vertė = \max(kaina - 139) * \exp\left(-0.22 * \frac{1}{52}\right) = (149.99 - 139) * 0.99578 = 10.9436$$

Norint įtraukti daugiau lyginamų sandorio kainų, galima surasti internete daug amerikietiškojo opciono skaičiuoklių. Viena jų bus panaudota ir šiame tyrime. Pasirinkus „CBOE Holdings" (Chicago Board Options/Futures/etc Exchanges) [30] ir pradinius duomenis, apskaičiuojama sandorio vertė, kuri lygi 9.2559.

Sekantis nagrinėjamas sandoris yra pardavimo. Taip pat, pasirinkimo sandoris įkainojamas naudojantis tuos pačius modelius, kaip ir pasirinkimo pirkti. Pradiniai duomenys pateikti **3.5 Lentelėje**.

3.11 Lentelė. Pradiniai duomenys

Tipas	Parduoti
Akcijos kaina	148.25
Realizavimo kaina	139
Nerizikinga palūkanų norma (Treasure Bills)	0.22
Kintamumas	0.12123
Laiko momentai (savaitės per metus)	1 savaitė

Naudojantis Black – Scholes formule, apskaičiuojama sandorio vertė, kuri yra lygi 0 $. Tai reiškia, jog neapsimoka atlikinėti sandorio.

Naudojantis binominiu modeliu, pradiniai duomenys išlieka tokie patys, kaip ir **3.11 Lentelėje**, tik pridedama fiksuotas simuliacijų skaičius lygus 100. Šio sandorio vertė taip pat yra lygi 0 $.

Turint dvi pasirinkimo pirkti sandorio reikšmes, galima jas palyginti su $AR(1)/ARCH - M(1)$ modelio įkainojimu..

Pagal amerikietiškojo sandorio parduoti formulę **(2.2 formulė)**, apskaičiuojama, kokia kaina per ateinančią savaitę bus mažiausia:

3.12 Lentelė. Savaitei prognozuojamos akcijų kainos

Data	Kaina
4/7/2016	149.99
4/8/2016	**148.22**
4/11/2016	149.32
4/12/2016	149.22
4/13/2016	149.60

Akivaizdu, jog mažiausia kaina yra suprognozuota balandžio 8 dieną. Tačiau, ši kaina yra didesnė nei vykdymo, todėl neapsimokėtų įvykdyti pasirinkimo parduoti sandorio. Pasirinkus "CBOE Holdings" ir pradinius duomenis, apskaičiuojama sandorio vertė, kuri lygi 0 $.

Norint tiksliau įvertinti modelius, keičiami pradiniai duomenys:

3.13 Lentelė. Pradiniai duomenys

Tipas	Parduoti
Akcijos kaina	148.25
Realizavimo kaina	150
Nerizikinga palūkanų norma (Treasure Bills)	0.22
Kintamumas	0.12123
Laiko momentai (savaitės per metus)	1 savaitė

Naudojantis Black – Scholes formule, apskaičiuojama sandorio vertė, kuri yra lygi 1.65420 $. Binominis modelis su tokiais pačiais pradiniais duomenimis paskaičiuoja sandorio vertė lygią 2.60646 $.

Turint dvi pasirinkimo pirkti sandorio reikšmes, galima jas palyginti su $AR(1)/ARCH-M(1)$ modelio įkainuotu modeliu.

Pagal amerikietiškojo sandorio parduoti formulę **(2.2 formulė)**, apskaičiuojama, kokia kaina per ateinančią savaitę bus mažiausia:

Akivaizdu, jog mažiausia kaina yra suprognozuota balandžio 8 dieną (**3.13 Lentelė**). Todėl, norint įkainoti amerikietiškąjį opcioną, tiesiog atimama iš vykdymo kainos akcijos kainą ir dauginama iš diskontuotos normos:

$$Vertė = \max(150 - kaina) * \exp\left(-0.22 * \frac{1}{52}\right) = (150 - 148.22) *0.99578 = 1.7725$$

"CBOE Holdings" su pradiniais duomenimis (**3.13 Lentelė**) , apskaičiuojama sandorio vertė, kuri lygi 1.75.

Tokiu pačiu principu yra apskaičiuojami pasirinkimo sandoriai su kitomis vykdymo kainomis. Rezultatai pateikti lentelėje, kai balandžio 7 dieną akcijos kaina buvo lygi 148.22 $.

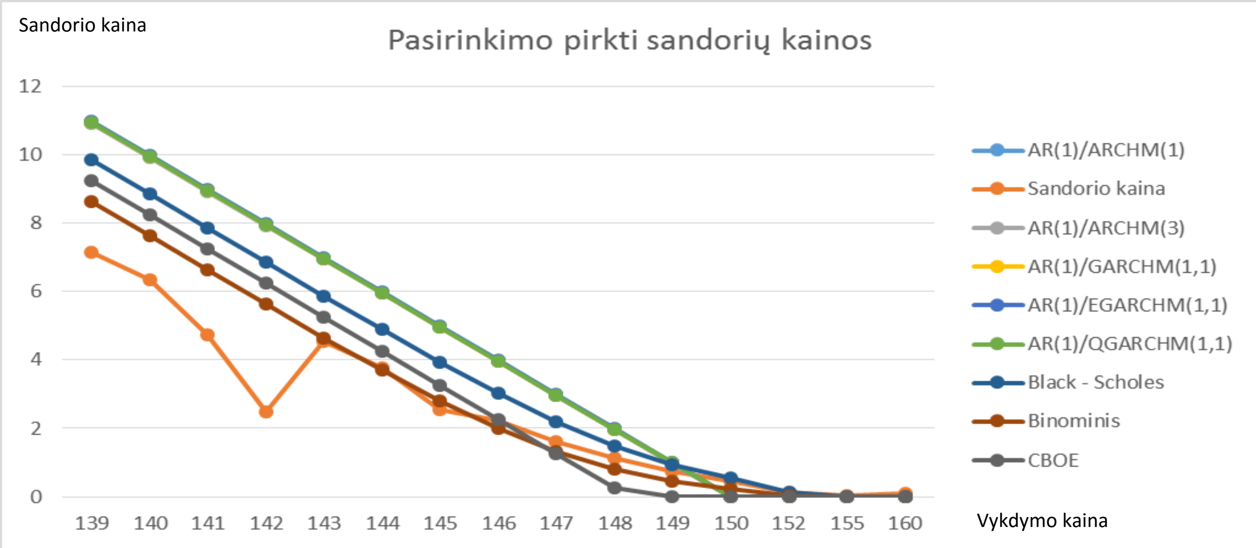
3.14 Lentelė. Pasirinkimo pirkti sandorio informacija pagal modelius savaitei

Pasirinkimo pirkti sandoris	Faktinė sandorio kaina	Vykdymo kaina	AR(1)/ARCHM(1)	AR(1)/ARCHM(3)	AR(1)/GARCHM(1,1)	AR(1)/EGARCHM(1,1)	AR(1)/QGARCH M(1,1)	Black - Scholes	Binominis	CBOE
	7.14	139	10.943602	10.923687	10.9436021	10.963518	10.9436	9.8369	8.62419	9.2559
	6.35	140	9.9478239	9.9279083	9.9478239	9.9677395	9.94782	8.8411	7.62458	8.256
	4.73	141	8.9520457	8.9321302	8.95204573	8.9719613	8.95205	7.8457	6.62574	7.256
	2.47	142	7.9562676	7.936352	7.95626756	7.9761831	7.95627	6.8513	5.63235	6.2561
	4.55	143	6.9604894	6.9405738	6.96048939	6.980405	6.96049	5.8604	4.65109	5.2561
	3.78	144	5.9647112	5.9447957	5.96471123	5.9846268	5.96471	4.8798	3.6992	4.2562
	2.55	145	4.9689331	4.9490175	4.96893306	4.9888486	4.96893	3.9235	2.80438	3.2562
	2.23	146	3.9731549	3.9532393	3.97315489	3.9930705	3.97315	3.0162	2.00348	2.2563
	1.62	147	2.9773767	2.9574612	2.97737672	2.9972923	2.97738	2.1925	1.33309	1.2564
	1.13	148	1.9815986	1.961683	1.98159855	2.0015141	1.9816	1.4896	0.81697	0.2565
	0.74	149	0.9858204	0.9659048	0.98582039	1.0057359	0.98582	0.9354	0.45649	0
	0.45	150	0	0	0	0.0099578	0	0.5375	0.23058	0
	0.13	152	0	0	0	0	0	0.1316	0.042209	0
	0.03	155	0	0	0	0	0	0.007	0.002	0
	0.09	160	0	0	0	0	0	0	0	0

Pasirinkimo pirkti sandorio informacija savaitei yra pateikta **3.14 Lentelėje**, kuri pateikia informaciją: faktinė sandorio kainą, šio sandorio vykdymo kainą ir nagrinėjamų modelių apskaičiuotas pasirinkimi pirkti sandorio kainas. Visi modeliai su kuriais skaičiuojamas įkainojimas skaičiuoja didesnes sandorio kainas, nei faktinės.

Turint vykdymo kainą 139$, IBM pasirinkimo sandoris buvo pardavinėjamas už 7.14$ esant kainai lygiai 148.25$ balandžio 7 dieną. Black – Scholes formulė skaičiavo 9.8369$, Binominis 8.62419$, $AR(1)/ARCH-M(1)$ su prognozuota kaina 149.99, gaunama vertė 10.944$, $AR(1)/ARCH-M(3)$ su prognozuota kaina 149.97, gaunama vertė 10.924$, $AR(1)/GARCH\ M(1,1)$ su prognozuota kaina 149.99, gaunama vertė 10.944$, $AR(1)/EGARCH-M(1,1)$ su prognozuota kaina 150.01, gaunama vertė 10.964$, $AR(1)/QGARCH-M(1,1)$ su prognozuota kaina 149.99, gaunama vertė 10.944$ ir galiausiai CBOE 9.256$.

Grafiškas atvaizdavimas pateiktas **3.3 pav**.



3.3 pav. Pasirinkimo pirkti sandorių kainos savaitei

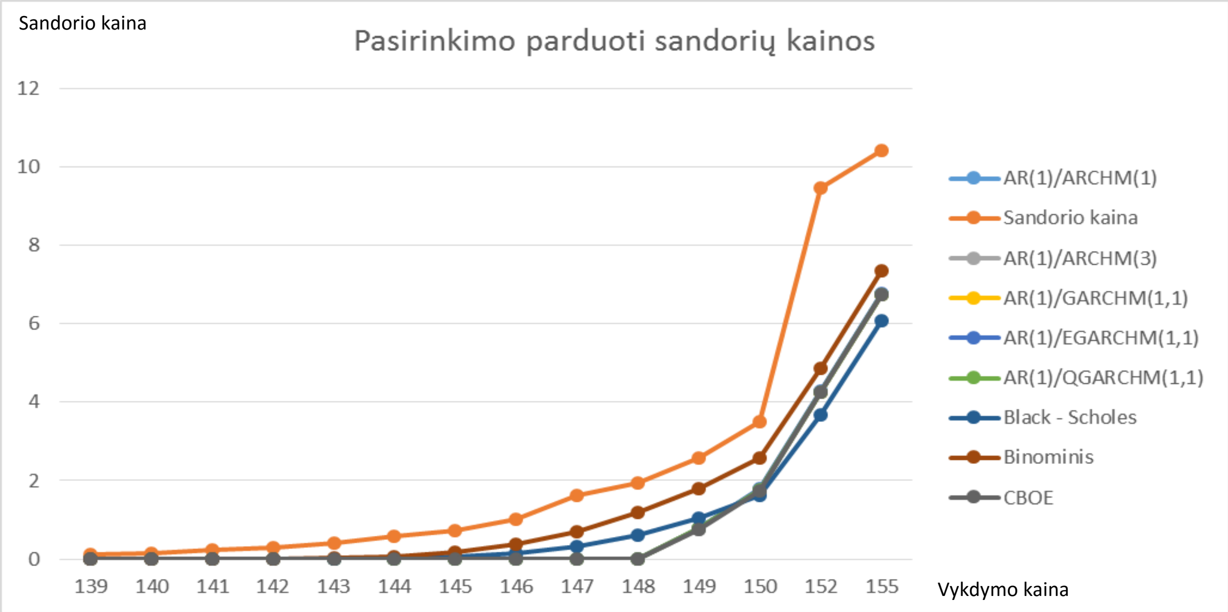
Pasirinkimo parduoti sandorio informacija savaitei yra pateikta **3.15 Lentelėje**, kuri pateikia informaciją: faktinė sandorio kainą, šio sandorio vykdymo kainą, nerizikingą palūkanų normą, kintamumą ir nagrinėjamų modelių apskaičiuotas pasirinkimi pirkti sandorio kainas.

Turint vykdymo kainą 155$, IBM pasirinkimo sandoris buvo pardavinėjamas už 10.4 $ esant kainai lygiai 148.25$ balandžio 7 dieną. Black – Scholes formulė skaičiavo 6.0729$, Binominis 7.34741$, $AR(1)/ARCH-M(1)$ su prognozuota kaina 148.22, gaunama vertė 6.7514$, $AR(1)/ARCH-M(3)$ su prognozuota kaina 148.24, gaunama vertė 6.7315$, $AR(1)/GARCH-M(1,1)$ su prognozuota kaina 148.22, gaunama vertė 6.7514$, $AR(1)/EGARCH\ M(1,1)$ su prognozuota kaina 148.2, gaunama vertė 6.7713$, $AR(1)/QGARCH-M(1,1)$ su prognozuota kaina 148.22, gaunama vertė 6.75138$ ir galiausiai CBOE 6.75$.

3.15 Lentelė. Pasirinkimo parduoti sandorio informacija pagal modelius savaitei

Pasirinkimo parduoti sandoris	Faktinė sandorio kaina	Vykdymo kaina	AR(1)/ARCHM(1)	AR(1)/ARCHM(3)	AR(1)/GARCHM(1,1)	AR(1)/EGARCHM(1,1)	AR(1)/QGARCH M(1,1)	Black - Scholes	Binominis	CBOE
	0.12	139	0	0	0	0	0	0	0	0
	0.15	140	0	0	0	0	0	0	0	0
	0.25	141	0	0	0	0	0	0	0	0
	0.28	142	0	0	0	0	0	0	0	0
	0.41	143	0	0	0	0	0	0.0065	0.020605	0
	0.59	144	0	0	0	0	0	0.0212	0.07288	0
	0.74	145	0	0	0	0	0	0.0596	0.17592	0
	1.02	146	0	0	0	0	0	0.1462	0.37173	0
	1.62	147	0	0	0	0	0	0.3152	0.6973	0
	1.95	148	0	0	0	0	0	0.604	1.17621	0
	2.59	149	0.776707	0.7567914	0.77670697	0.7966225	0.77671	1.049	1.81129	0.75
	3.5	150	1.7724851	1.7525696	1.77248514	1.7924007	1.77249	1.6342	2.58175	1.75
	9.45	152.5	4.2619306	4.242015	4.26193056	4.2818461	4.26193	3.6652	4.87243	4.25
	10.4	155	6.751376	6.7314604	6.75137598	6.7712915	6.75138	6.0729	7.34741	6.75

Grafiškas atvaizdavimas pateiktas **3.4 pav**.



3.4 pav. Pasirinkimo parduoti sandorių kainos savaitei

Norint išsiaiškinti, kaip modeliai reaguoja į ilgesnį laikotarpį esamo pasirinkimo sandorio, atliekamas sandorio įkainojimas dviems savaitėms.

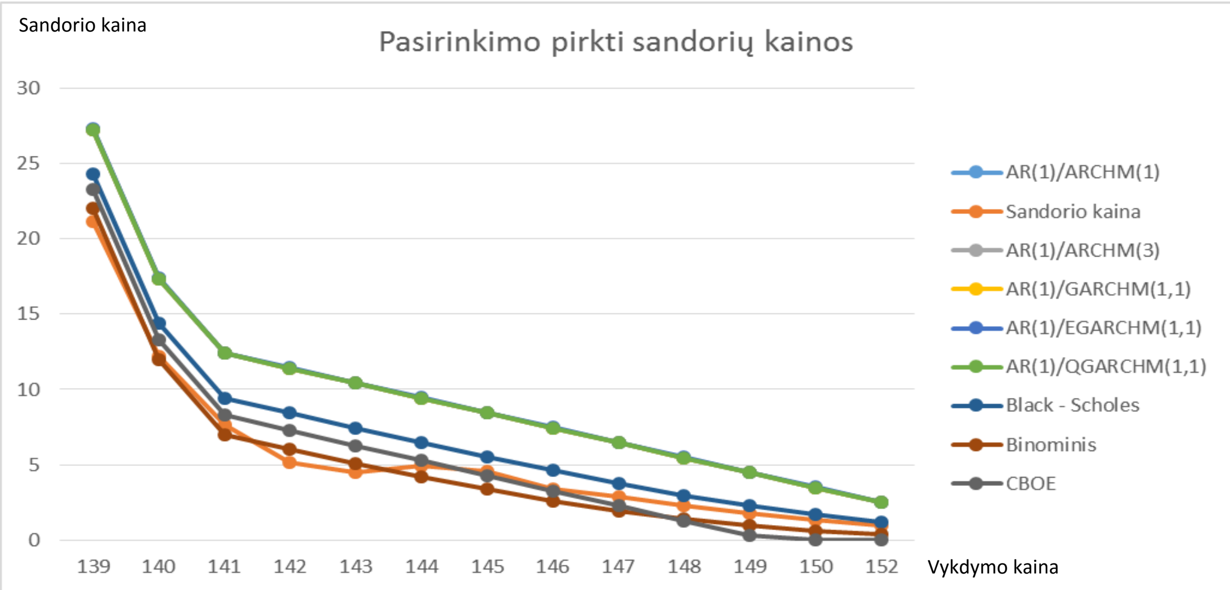
Pasirinkimo parduoti sandorio informacija dviem savaitėms yra pateikta **3.16 Lentelėje**,

Turint vykdymo kainą 125$, IBM pasirinkimo sandoris buvo pardavinėjamas už 21.9 $ esant kainai lygiai 148.25$ balandžio 7 dieną. Black – Scholes formulė skaičiavo 24.303$, Binominis 22.0009$, $AR(1)/ARCH-M(1)$ su prognozuota kaina 152.5, gaunama vertė 27.268$, $AR(1)/ARCH-M(3)$ su prognozuota kaina 152.51, gaunama vertė 27.278$, $AR(1)/GARCH-M(1,1)$ su prognozuota kaina 152.51, gaunama vertė 27.278$, $AR(1)/EGARCH-M(1,1)$ su prognozuota kaina 152.4, gaunama vertė 27.308$, $AR(1)/QGARCH-M(1,1)$ su prognozuota kaina 152.5, gaunama vertė 27.26$ ir galiausiai CBOE 23.26$.

3.16 Lentelė. Pasirinkimo pirkti sandorio informacija pagal modelius 2 savaitėms

Pasirinkimo pirkti sandoris	Faktinė sandorio kaina	Vykdymo kaina	AR(1)/ARCHM(1)	AR(1)/ARCHM(3)	AR(1)/GARCHM(1,1)	AR(1)/EGARCHM(1,1)	AR(1)/QGARCHM(1,1)	Black - Scholes	Binominis	CBOE
	21.19	125	27.268289	27.27821	27.27820513	27.307952	27.2683	24.3032	22.0009	23.2607
	12.21	135	17.352548	17.36246	17.36246353	17.392211	17.3525	14.3875	12.001	13.2728
	7.65	140	12.394677	12.40459	12.40459274	12.43434	12.3947	9.43254	7.02457	8.2737
	5.13	141	11.403103	11.41302	11.41301858	11.442766	11.4031	8.44569	6.055	7.2738
	4.5	142	10.411529	10.42144	10.42144442	10.451192	10.4115	7.46487	5.10945	6.274
	4.9	143	9.4199545	9.42987	9.429870258	9.4596175	9.41995	6.49582	4.2099	5.2742
	4.6	144	8.4283804	8.438296	8.438296098	8.4680433	8.42838	5.54772	3.36676	4.2743
	3.38	145	7.4368062	7.446722	7.446721939	7.4764692	7.43681	4.63377	2.6096	3.2745
	2.86	146	6.445232	6.455148	6.455147779	6.484895	6.44523	3.77082	1.94667	2.2747
	2.27	147	5.4536579	5.463574	5.463573619	5.4933208	5.45366	2.97783	1.39509	1.2748
	1.78	148	4.4620837	4.471999	4.47199946	4.5017467	4.46208	2.27308	0.9553	0.275
	1.33	149	3.4705096	3.480425	3.4804253	3.5101725	3.47051	1.67089	0.62289	0
	0.98	150	2.4789354	2.488851	2.488851141	2.5185984	2.47894	1.17868	0.39078	0

Grafiškas atvaizdavimas pateiktas **3.5 pav**.



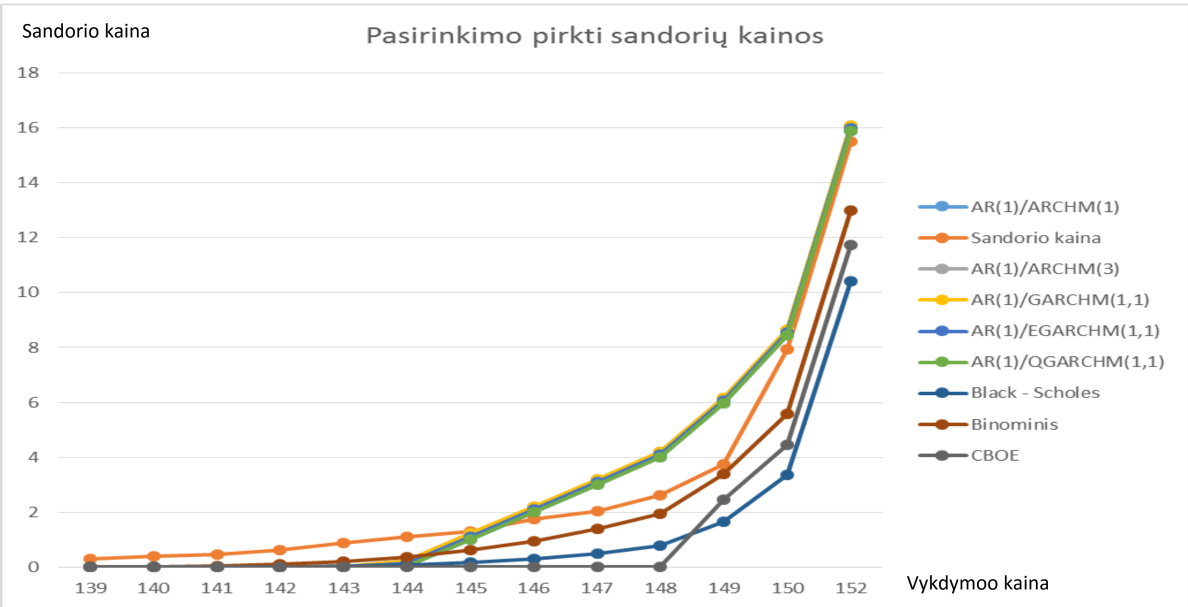
3.5 pav. Pasirinkimo pirkti sandorių kainos 2 savaitėms

Pasirinkimo parduoti sandorio informacija savaitei yra pateikta **3.17 Lentelėje**. Turint vykdymo kainą 160$, IBM pasirinkimo sandoris buvo pardavinėjamas už 15.5 $ esant kainai lygiai 148.25$ balandžio 7 dieną. Black – Scholes formulė skaičiavo 10.404$, Binominis 12.9993$, $AR(1)/ARCH-M(1)$ su prognozuota kaina 143.97, gaunama vertė 15.895$, $AR(1)/ARCH-M(3)$ su prognozuota kaina 143.77, gaunama vertė 16.093$, $AR(1)/GARCH-M(1,1)$ su prognozuota kaina 143.77, gaunama vertė 16.093$, $AR(1)/EGARCH-M(1,1)$ su prognozuota kaina 143.87, gaunama vertė 15.994$, $AR(1)/QGARCH-M(1,1)$ su prognozuota kaina 143.97, gaunama vertė 15.8949$ ir galiausiai CBOE 11.75$.

3.17 Lentelė. Pasirinkimo parduoti sandorio informacija pagal modelius 2 savaitėms

Pasirinkimo pirkti sandoris	Sandorio kaina	Vykdymo kaina	AR(1)/ARCHM(1)	AR(1)/ARCHM(3)	AR(1)/GARCHM(1,1)	AR(1)/EGARCHM(1,1)	AR(1)/QGARCHM(1,1)	Black - Scholes	Binominis	CBOE
	0.31	139	0	0	0	0	0	0.001	0.01	0
	0.38	140	0	0	0	0	0	0.003	0.0237	0
	0.46	141	0	0	0	0	0	0.00765	0.054126	0
	0.63	142	0	0	0	0	0	0.0184	0.10858	0
	0.89	143	0	0	0	0	0	0.040921	0.20903	0
	1.1	144	0.0297472	0.228062	0.228062057	0.1289046	0.02975	0.084398	0.36589	0
	1.29	145	1.0213214	1.219636	1.219636216	1.1204788	1.02132	0.16202	0.60873	0
	1.74	146	2.0128955	2.21121	2.211210376	2.112053	2.0129	0.29065	0.9458	0
	2.03	147	3.0044697	3.202785	3.202784535	3.1036271	3.00447	0.48923	1.39422	0
	2.62	148	3.9960439	4.194359	4.194358695	4.0952013	3.99604	0.77606	1.9573	0
	3.76	150	5.9791922	6.177507	6.177507014	6.0783496	5.97919	1.6648	3.38991	2.4488
	7.95	152.5	8.4581276	8.656442	8.656442413	8.557285	8.45813	3.36867	5.59235	4.4447
	15.5	160	15.894934	16.09325	16.09324861	15.994091	15.8949	10.4042	12.9993	11.75

Grafiškas atvaizdavimas pateiktas **3.6 pav**.



3.6 pav. Pasirinkimo pirkti sandorių kainos 2 savaitėms

Įvertinus visų modelių sandorių kainas, galima apskaičiuoti visų modelių vidutinę absoliutinę procentinę paklaidą, kuri kiekvienam modeliui pavaizduota **3.18 Lentelėje**

3.18 Lentelė. Modelių vidutinis tikslumas

Modelis	MAPE
AR(1)/ARCHM(1) Normaliuoju	30,9
AR(1)/ARCHM(3) Normaliuoju	30,7
AR(1)/GARCHM(1,1) Normaliuoju	30,9
AR(1)/EGARCHM(1,1) Normaliuoju	30,9
AR(1)/QGARCHM(1,1) Normaliuoju	30,9
Black - Scholes	23,5
Binominis	38.0
CBOE	37.0

PROGRAMINĖ REALIZACIJA IR INSTRUKCIJA VARTOTOJUI

Visas tiriamasis darbas buvo atliktas su programine įranga SAS 9.4. Buvo naudojamas aprašytos procedūros, tokios kaip: PROC AUTOREG, PROC FCMP, PROC SUMMARY, PROC SGPLOT bei .xlsx failo nuskaitymas naudojantis PROC IMPORT.

PROC IMPORT procedūra buvo naudojama pradinių duomenų nuskaitymui, iš ekselinio failo. Duomenų faile atvaizduota IBM akcijų kainų informacija. PROC SGPLOT atvaizdavo grafiškai duotus duomenis. Tyrimui atlikti svarbiausios procedūros PROC AUTOREG PROC FCMP ir PROC SUMMARY.

Pirmoji, PROC AUTOREG, buvo naudojama skaičiuoti GARCH modelio parametrus ir prognozuojamas reikšmes. Modelis yra formuojamas iš IBM akcijų kainų aprašant kintamąjį “Model” dalyje. Taip pat toje pačioje dalyje yra aprašomas GARCH modelis, P ir Q reikšmės, bei vidurkio lygtis. Taip pat, gali būti aprašoma autoregresijos komponentė pasirinkus tam tikrą “nlag” skaičių, kuris naudojant “backstep” funkciją pašalina nereikšmingas autoregresijos komponentes. Norint patikrinti heteroskedastiškumo hipotezę, “Model” dalyje prirašomas pasirinkimas “archtest”. Visus pasirinktus duomenis SAS atspausdina pagrindiniame lange.

Tuo tarpu PROC FCMP yra funkcijų generavimo procedūra, kuri gražina skaičiuojamą reikšmę. Aprašomos funkcijos skaičiuoti Binominį modelį ir Black – Scholes formulę. Rankiniu būdu yra įvedamos reikalingos reikšmės skaičiuoti pasirinkimo sandorio kainą.

Procedūra PROC SUMMARY išspausdintų procedūra PROC AUTOREG rezultatus sugrupuoja ir apskaičiuoja MAPE reikšmes.

DISKUSIJA

Kadangi nėra vieno sprendimo būdo, kuriuo būtų galima pasirinkti iškart gerą modelį, todėl parenkamas didelis kiekis modelių su normaliuoju bei Stjudento skirstiniais ir skaičiuojami jų vertinimo kriterijai. Pasirenkami tokie, kurie duoda mažiausias paklaidas IBM akcijų prognozei.

Galima nesunkiai pamatyti, kad ε_t pasiskirstęs pagal normalųjį skirstinį duoda daug geresnius rezultatus už Stjudento skirstinį. Taip pat, pridėjus autoregresijos komponentę prie GARCH modelio lygties gaunami tikslesnį rezultatai nei iprasti GARCH. Pasirinkus kitą vidurkio užrašymo formą, bei palyginus tarpusavyje naudojantis tais pačiais vertinimo kriterijaus, skirtumas tarp šių pasirinktų modelių neturi didelės statistinės reikšmės. Todėl geriausiai būtų parinkti tą vidurkio lygtį, kuriai tektų skaičiuoti mažiausiai iteracijų.

Pagal aukščiau aprašytus kriterijus pasirenkami penki modeliai, kuriie įvertinti, bei patikrintas jų tinkamumas, pavyzdžiui, ar tenkinamos stacionarumo ir heteroskedastiškumo sąlygos su Portmanteau Q arba Lagranžo daugiklio testais.

Su pasirinktais ir patikrintais modeliais įvertinamos amerikietiškojo pasirinkimo sandorio vertės. Pastebima, jog amerikietiškojo pirkti/parduoti pasirinkimo sandorių kainos savaitei iš „Yahoo Finance", yra mažesnės nei įkainotos modeliais GARCH, Black – Scholes, Binominis CBOE. Ta pati situacija yra ir su dviejų savaičių sandorio kaina.

Tokie dėsningumai gali būti sąlygoti rinkos dalyvių, kurie reaguoja į galima riziką. Kadangi IBM akcijų kainos pastaraisiais metais yra panašiame lygyje, faktinės kainos ir yra mažesnės už skaičiuotų modelių.

IŠVADOS

- Modelių parinkimo etape, Akaike, Svartz – Bajeso ir MAPE akcijų kainų prognozavimo rezultatai teigia, jog įprasti GARCH modeliai yra prastesnį tikslumo atžvilgiu už AR/GARCH junginį, kurio apskaičiuota vidutinė absoliutinė procentinė paklaida apytiksliai lygi 1,14 %, palyginimui įprastų modelių paklaidos svyruoja nuo 3 % iki 60 %.
- Trijų skirtingų vidurkio lygčių rezultatai statistiškai nėra reikšmingi;
- Patikrinus hipotezę apie heteroskedastiškumo egzistavimą galima teigti, jog IBM akcijų kainų duomenys gali būti analizuojami GARCH modelio.
- Dėl didesnio modelių prognozuojamo kintamumo skaičiuojant pasirinkimo pirkti sandorių kainas, jų skaičiuojamos kainos yra didesnės nei faktinės.
- Dėl didesnio modelių prognozuojamo kintamumo skaičiuojant pasirinkimo parduoti sandorių kainas, jų skaičiuojamos kainos yra didesnės nei faktinės.
- Grafiškai atvaizduoti rezultatai rodo, jog skaičiuotos amerikietiškojo pasirinkimo pirkti/parduoti sandorių vertės neįvertina faktinių duomenų nuokrypio nuo gestančios/kylančios eksponentės;
- GARCH modelių nuokrypis nuo tikslumo yra apie 30 %.

REKOMENDACIJOS

Dauguma darbų yra aprašyti tik tam tikriems stebėjimams, neišimtis ir šis projektas. GARCH modelis yra toks modelis, kuris gali būti tobulinamas iki begalybės. Kadangi aprašomos lygtys gali turėti įvairias išraiškas, o ε_t būti pasiskirstęs pagal naujai sudarytą skirstinį.

Projektas gali būti papildomas įvairiuose aspektuose, tokiuose kaip: naujo GARCH modelio sukurimo, dviejų, ar daugiau modelių sujungimo arba kitų modelių bei jų parametrų apskaičiavimo pasirinkimo. Taip pat, kiti ε_t skirstiniai galėjo būti pasirinkti pažiūrėti, ar modelis taptų tikslesnis.Norint sumažinti skaičiuojamas paklaidas, reiktų įvertinti ir rinkos dalyvių elgsenas.

Į šiuos aukščiau aprašytus pastebėjimus galima būtų atsižvelgti ir atlikti tikslesnę, lengvesnę, bei greitesnę amerikietiškojo pasirinkimo sandorio vertės įvertinimą.

PADĖKOS

Didžiausia padėka magistrinio darbo vadovui doc. dr. Audriui Kabašinskui už pateiktą informaciją, naudingus patarimus, bei pastebėtus netikslumus darbe.

ŠALTINIAI IR LITERATŪRA

[1] Engle F. Robert *Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom Inflation*, Econometrica, Vol. 50 No. 4, Liepos mėnuo, 1982.

[2] Bollerslev *Tim Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity*, University of California, San Diego, USA ir Institute of Economics, University of Aarhus, Denmark, Vasario mėnuo, 1986.

[3] Dyhberg Haubo Anne *Bitcoin, gold and the dollar – A Garch volatility analysis*, Finance Research Letters, University College Dublin, 2015.

[4] Li Steven, Hou Yang *Information transmission between U.S. and China index futures markets: An asymmetric DCC GARCH approach*, Department of Finance, University of Waikato, New Zealand ir Graduate School of Business and Law, RMIT University, Australia, Economic Modelling, 2016.

[5] Abounoori Esmaiel, Elmi Zahra ir Nademi Younes *Forecasting Tehran stock exchange volatility; Markov switching GARCH approach*, Department of Economics, Universities of Semnan, Iran, Mazandaran, Iran, Boroujerdi, Iran, 2016.

[6] Li Muyi, Li Wai Keung, Li Guodong *A new hyperbolic GARCH model*, School of Economics and Wang Yanan Institute for Studies in Economics, Xiamen University, China, Department of Statistics and Actuarial Science, University of Hong Kong, China, 2015.

[7] Tian Shuairu, Hamori Shigeyuki *Modelling interest rate volatility: A Realized GARCH approach*, Graduate School of Economics, Faculty of Economics, Kobe University, Japan, 2015.

[8] R.R.A. Mendes, A.P. Paiva, R.S. Peruchi, P.P. Balestrassi, R.C. Leme ir M.B. Silva *Multiobjective portfolio optimization of ARMA – GARCH time series based on experimental designs*, Federal Institute of Education, Federal University of Itajuba, Sao Paulo University, Brazil, 2016.

[9] Liu Yanxin, Li Siu – Hang Johnny, Ng Cheuk – Yin Andrew *Option pricing under GARCH model with Hansen‘s skewed – t distributed innovations*, Department of Statistics and Actuarial Science, University of Waterloo, Canada, Department of Finance, The Chinese University of Hong Kong, Hong Kong, 2015.

[10] Rachev T. Svetlozar, Menn Christian *A GARCH option pricing model with $\alpha -$ stable innovations*, Chair of Econometrics and Statistics, University of Karlsruhe, Germany, Department of Statistics and Applied Probability, University of California, Santa Barbara, USA, 2005.

[11] Duan Jin – Chuan, Simonato Jean – Guy Simonato *American option pricing under GARCH by a Markov chain approximation*, Joseph L. Rotman School of Management, University of Toronto, Toronto, Canada, Department of Finance, Hong Kong University of Science and Technology, Clear Water Bay, Kowloon, Hong Kong, 2001.

[12] Duan Jin – Chuan, Simonato Jean – Guy Simonato, Sasseville Caroline, Gauthier Genevieve *Approximating American Option Prices in the GARCH Framework*, Joseph L. Rotman School of

Management, University of Toronto, Toronto, Canada, Department of Finance, Hong Kong University of Science and Technology, Clear Water Bay, Kowloon, Hong Kong, 2003.

[13] Rubinstein Mark *Edgeworth Binomial Trees*, Paul Stephens Professor of Applied Investment Analysis University of California, Berkeley, USA, 1998.

[14] Duan Jin – Chuan *The Garch Option Pricing Model*, Faculty of Management, McGill University, Montreal, Canada, 1995.

[15] Jia Quiyi *Pricing American Option using Monte Carlo methods*, Department of Mathematics, Uppsala Universitet, Sweden, 2009.

[16] Longstaff Francis A., Schwartz Eduardo S. *Valuing American Option by Simulation: A Simple Least-Square Approach*, School ar UCLA, Los Angeles, USA.

[17] Ilkonen Samuli, Jari Toivanen *Efficient Numerical Methods for Pricing American Options Under Stochastic Volatility*, Department of Mathematical Information Technology, University of Jyvaskyla, Finland, 2005.

[18] Fouque Jean-Pierre, Han Chuan-Hsiang *Asymetric Variance Reduction for Pricing American Option*, Department of Statistics and Applied Probability, University of California, USA, Department of Quantitive Finance, National Tsing-Hua University, Hsinchu, Taiwan.

[19] Kolb W. Robert, Overdahl A. James *Financial Derivatives Pricing and Risk Management*, John Wiley&Sons, Inc, New Jersey, USA, 2010.

[20] Detemple Jerome *American-Style Derivatives Valuation and Computation*, Chapman & Hall/CRC, New York, USA.

[21] Dickey A. David *Case Studies in Time Series*, Statistics and Data Analysis, North Carolina State University, North Carolina, USA.

[22] Bollerslev Tim *Glossary to ARCH*, School of Economics and Management, University of Aarhus, Denmark, 2008.

[23] Marroni Leonardo, Perdomo Irene *Pricing and Hedging Financial Derivatives*, John Wiley & Sons, Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex, United Kingdom, 2014.

[24] Hu Shuhua *Akaike Information Criterion*, Center for Research in Scientific Computation, North Caroline State University, USA, 2007.

[25] Cavanaugh Joseph E. *The Bayesian Information Criterion*, Department of Biostatistics, Department of Statistics and Actuarial Science, The University of Iowa, USA, 2012.

[26] Milhoj A *The Moment Structure of ARCH processe*. Research report 94, Institute of Statistics, University of Copenhagen, Copenhagen, 1984.

[27] Pittis Nikitas, Pantelidis Theologos *Forecasting Volatility with a GARCH(1,1) MODEL: Some New Analytical and Monte Carlo Results*, University of Piraeus, Greece, National University of Ireland, Maynooth. Ireland.

[28] https://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/Pages/TextView.aspx?data=billrates

[29] http://finance.yahoo.com/q?s=IBM

[30]http://www.cboe.com/framed/IVolframed.aspx?content=http%3a%2f%2fcboe.ivolatility.com%2fcalc%2findex.j%3fcontract%3d4C1A9923-DD1D-48A9-A136-B2CAC41B2886&sectionName=SEC_TRADING_TOOLS&title=CBOE%20-%20IVolatility%20Services

[31]http://support.sas.com/documentation/cdl/en/etsug/60372/HTML/default/viewer.htm#etsug_autoreg_sect025.htm#etsug.autoreg.hetnnortsts

A. PRIEDAS. PAPILDOMI PASISKIRSTYMAI

A.1

$$f(z;\upsilon,\xi)=\begin{cases} bc\left(1+\dfrac{1}{\upsilon-2}\left(\dfrac{bz+a}{1-\xi}\right)^2\right)^{-\left(\frac{\upsilon+1}{2}\right)}, & z<-\dfrac{a}{b} \\ bc\left(1+\dfrac{1}{\upsilon-2}\left(\dfrac{bz+a}{1+\xi}\right)^2\right)^{-\left(\frac{\upsilon+1}{2}\right)}, & z\geq-\dfrac{a}{b} \end{cases}$$

Kur $a=4\xi c(\frac{\upsilon-2}{\upsilon-1})$ ir $b^2=1+3\xi^2-a^2, c=[\Gamma(\frac{\upsilon+1}{2}]/[\sqrt{\pi(\upsilon-2)}\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}\right)]$, o υ ir ξ figūros parametrai t.y. ξ yra asimetrija o υ yra parametras nurodantis “sunkias uodegas”.

B. PRIEDAS. PAPILDOMI REZULTATAI

B.1 Lentelė. Vidurkio lygties su šaknimi AIC, SBC ir MAPE reikšmės

Nr.	Modelis	SBC	AIC	MAPE
1	ARCH M(1)-Stjudento	39727.291	39702.006	22.1449
2	ARCH M(1)-Normalusis	39718.97	39700.007	22.1449
3	ARCH M(2)- Stjudento	39150.204	39118.598	23.1746
4	ARCH M(2)- Normalusis	38987.836	38962.551	21.7793
5	ARCH M(3)- Stjudento	42154.587	42116.66	24.1532
6	ARCH M(3)-Normalusis	42462.85	42431.244	27.4516
7	GARCH M(1,1)- Stjudento	39054.834	39023.228	22.6777
8	GARCH M(1,1)- Normalusis	39054.834	39023.228	22.6777
9	GARCH M(1,2)- Stjudento	47174.221	47142.615	32.3568
10	GARCH M(1,2)- Normalusis	47303.049	47277.764	36.3231
11	GARCH M(2,1)- Stjudento	48450.246	48431.283	50.5901
12	GARCH M(2,1)- Normalusis	48483.83	48471.188	52.0256
13	GARCH M(2,2)- Stjudento	48440.035	48421.071	49.7931
14	GARCH M(2,2)- Normalusis	50529.093	50516.45	95.2373
15	IGARCH M(1,1)- Stjudento	39593.415	39568.131	20.4883
16	IGARCH M(1,1)- Normalusis	40479.021	40460.057	26.5601
17	IGARCH M(1,2)- Stjudento	39601.737	39570.131	20.4883
18	IGARCH M(1,2)- Normalusis	40487.342	40462.057	26.5601
19	IGARCH M(2,1)- Stjudento	39600.431	39568.825	20.48
20	IGARCH M(2,1)- Normalusis	40487.298	40462.013	26.5584
21	IGARCH M(2,2)- Stjudento	39608.752	39570.825	20.48
22	IGARCH M(2,2)- Normalusis	40495.619	40464.013	26.5584
23	EGARCH M(1,1)- Normalusis	24335.559	24303.953	3.26663
24	EGARCH(1,2)- Normalusis	23130.557	23092.63	2.60798
25	NOGARCH M(1,1)- Stjudento	43243.981	43212.375	39.5264
26	NOGARCH M(1,1)- Normalusis	39145.388	39120.103	22.1178

27	NONGARCH M(1,1)-Stjudento	39153.709	39122.103	22.1178
28	NONGARCH M(1,1)-Normalusis	39145.388	39120.103	22.1178
29	PGARCH M(1,1)-Stjudento	28970.919	28932.992	11.7209
30	QGARCH M(1,1)- Stjudento	29293.419	29255.491	12.2843
31	QGARCH M(1,1)-Normalusis	33992.518	33960.913	12.2575
32	STGARCH M(1,1)- Stjudento	29124.837	29093.232	7.88988
33	STGARCH M(1,1)-Normalusis	29157.723	29132.439	7.97488

B.2 Lentelė. Tiesinės vidurkio lygties AIC, SBC ir MAPE reikšmės

Nr.	Modelis	SBC	AIC	MAPE
1	ARCH M(1)-Stjudento	40803.625	40778.34	20.7623
2	ARCH M(1)-Normalusis	40681.418	40662.454	23.9208
3	ARCH M(2)- Stjudento	40801.525	40769.919	20.8529
4	ARCH M(2)- Normalusis	42317.413	42292.129	24.3734
5	ARCH M(3)- Stjudento	40809.039	40771.112	20.8912
6	ARCH M(3)-Normalusis	44645.976	44614.37	39.164
7	GARCH M(1,1)- Stjudento	40811.736	40780.13	20.7653
8	GARCH M(1,1)- Normalusis	40811.736	40780.13	20.7653
9	GARCH M(1,2)- Stjudento	41090.009	41052.082	21.9707
10	GARCH M(1,2)- Normalusis	47302.276	47276.992	37.1722
11	GARCH M(2,1)- Stjudento	47862.353	47843.39	33.3287
12	GARCH M(2,1)- Normalusis	47923.313	47910.671	34.4519
13	GARCH M(2,2)- Stjudento	47862.344	47843.38	33.3286
14	GARCH M(2,2)- Normalusis	47923.304	47910.661	34.4518
15	IGARCH M(1,1)- Stjudento	40786.079	40760.794	20.8311
16	IGARCH M(1,1)- Normalusis	45896.144	45877.181	35.8669
17	IGARCH M(1,2)- Stjudento	40794.4	40762.794	20.8311
18	IGARCH M(1,2)- Normalusis	45551.862	45526.577	43.3214
19	IGARCH M(2,1)- Stjudento	40411.273	40379.668	20.3868
20	IGARCH M(2,1)- Normalusis	43787.389	43762.105	37.52
21	IGARCH M(2,2)- Stjudento	40380.714	40342.787	20.0409
22	IGARCH M(2,2)- Normalusis	43795.71	43764.105	37.52
23	EGARCH M(1,1)- Normalusis	36906.565	36874.959	10.891
24	EGARCH(1,2)- Normalusis	42038.51	42032.189	28.5066
25	NOGARCH M(1,1)- Stjudento	32957.691	32926.085	9.96367
26	NOGARCH M(1,1)-Normalusis	40617.694	40592.41	23.2995
27	NONGARCH M(1,1)-Stjudento	32954.763	32923.157	10.034
28	NONGARCH M(1,1)-Normalusis	40617.694	40592.41	23.2995
29	PGARCH M(1,1)-Stjudento	32486.981	32449.054	14.8283
30	QGARCH M(1,1)- Stjudento	19953.865	19915.938	3.61785
31	QGARCH M(1,1)-Normalusis	36024.29	35992.684	15.5071
32	STGARCH M(1,1)- Stjudento	36531.319	36518.677	16.3114
33	STGARCH M(1,1)-Normalusis	34780.129	34773.808	13.8249

B.3 Lentelė. Vidurkio lygties su šaknimi ir AR(1) AIC, SBC ir MAPE reikšmės

Nr.	Modelis	SBC	AIC	MAPE
1	ARCH M(1)-Stjudento	14988.867	14957.262	59.4955
2	ARCH M(1)-Normalusis	15904.939	15879.655	1.13996
3	ARCH M(2)- Stjudento	14881.169	14843.242	59.5018
4	ARCH M(2)- Normalusis	17164.846	17133.241	59.4728
5	ARCH M(3)- Stjudento	14803.801	14759.552	59.4979
6	ARCH M(3)-Normalusis	17090.916	17052.989	1.16603
7	GARCH M(1,1)- Stjudento	14435.911	14397.984	59.6929
8	GARCH M(1,1)- Normalusis	15904.939	15879.655	1.13996
9	GARCH M(1,2)- Stjudento	41090.009	41052.082	21.9707
10	GARCH M(1,2)- Normalusis	47302.276	47276.992	37.1722
11	GARCH M(2,1)- Stjudento	16136.967	16111.683	16.4489
12	GARCH M(2,1)- Normalusis	47923.313	47910.671	34.4519
13	GARCH M(2,2)- Stjudento	16136.579	16111.294	16.4499
14	GARCH M(2,2)- Normalusis	47923.304	47910.661	34.4518
15	IGARCH M(1,1)- Stjudento	14428.019	14396.413	59.6958
16	IGARCH M(1,1)- Normalusis	17563.891	17538.606	59.4683
17	IGARCH M(1,2)- Stjudento	14436.34	14398.413	59.6958
18	IGARCH M(1,2)- Normalusis	17486.825	17455.219	59.5023
19	IGARCH M(2,1)- Stjudento	14435.254	14397.327	59.6784
20	IGARCH M(2,1)- Normalusis	17572.212	17540.606	59.4683
21	IGARCH M(2,2)- Stjudento	14442.727	14398.479	59.5046
22	IGARCH M(2,2)- Normalusis	17495.146	17457.219	59.5023
23	EGARCH M(1,1)- Normalusis	15916.315	15878.388	1.13967
24	EGARCH(1,2)- Normalusis	16996.404	16952.156	13.766
25	NOGARCH M(1,1)- Stjudento	15096.611	15083.968	59.4906
26	NOGARCH M(1,1)- Normalusis	15907.922	15876.316	14.068
27	NONGARCH M(1,1)-Stjudento	14436.023	14398.096	59.693
28	NONGARCH M(1,1)- Normalusis	15913.207	15881.601	19.9458
29	PGARCH M(1,1)-Stjudento	9596.3262	9545.7567	57.9971
30	QGARCH M(1,1)- Stjudento	9728.0042	9683.7559	57.7278
31	QGARCH M(1,1)-Normalusis	15921.528	15883.601	1.13994
32	STGARCH M(1,1)- Stjudento	14429.308	14391.38	59.6151
33	STGARCH M(1,1)-Normalusis	15904.939	15879.655	13.9962

B.4 Lentelė. Tiesinės vidurkio lygties su AR(1) AIC, SBC ir MAPE reikšmės

Nr.	Modelis	SBC	AIC	MAPE
1	ARCH M(1)-Stjudento	15002.231	14970.625	59.4687
2	ARCH M(1)-Normalusis	15904.939	15879.655	1.13996
3	ARCH M(2)- Stjudento	14881.282	14843.355	59.5053
4	ARCH M(2)- Normalusis	17163.343	17131.737	59.4754
5	ARCH M(3)- Stjudento	14803.983	14759.735	59.4995
6	ARCH M(3)-Normalusis	17090.844	17052.917	1.16478
7	GARCH M(1,1)- Stjudento	14437.263	14399.336	59.4959
8	GARCH M(1,1)- Normalusis	15904.939	15879.655	1.13996
9	GARCH M(1,2)- Stjudento	41090.009	41052.082	21.9707
10	GARCH M(1,2)- Normalusis	47302.276	47276.992	37.1722
11	GARCH M(2,1)- Stjudento	16136.967	16111.683	16.449
12	GARCH M(2,1)- Normalusis	47923.313	47910.671	34.4519
13	GARCH M(2,2)- Stjudento	16136.579	16111.294	16.449
14	GARCH M(2,2)- Normalusis	47923.304	47910.661	34.4518
15	IGARCH M(1,1)- Stjudento	14429.447	14397.841	59.4959
16	IGARCH M(1,1)- Normalusis	17562.053	17536.768	59.4714
17	IGARCH M(1,2)- Stjudento	14437.768	14399.841	59.4959
18	IGARCH M(1,2)- Normalusis	17493.478	17461.872	59.4742
19	IGARCH M(2,1)- Stjudento	14436.881	14398.954	59.4955
20	IGARCH M(2,1)- Normalusis	17569.814	17538.208	59.4723
21	IGARCH M(2,2)- Stjudento	14445.202	14400.954	59.4955
22	IGARCH M(2,2)- Normalusis	17501.799	17463.872	59.4742
23	EGARCH M(1,1)- Normalusis	15791.233	15753.306	1.17786
24	EGARCH(1,2)- Normalusis	16996.405	16952.156	28.5066
25	NOGARCH M(1,1)- Stjudento	15094.589	15081.946	59.4881
26	NOGARCH M(1,1)- Normalusis	15906.193	15874.587	19.4253
27	NONGARCH M(1,1)- Stjudento	14437.372	14399.444	59.4959
28	NONGARCH M(1,1)- Normalusis	15913.105	15881.499	19.9222
29	PGARCH M(1,1)-Stjudento	9596.4715	9545.9021	56.9327
30	QGARCH M(1,1)- Stjudento	9728.6995	9684.4512	56.1449
31	QGARCH M(1,1)-Normalusis	15921.426	15883.499	1.13992
32	STGARCH M(1,1)- Stjudento	14429.894	14391.967	59.496
33	STGARCH M(1,1)- Normalusis	15904.939	15879.655	13.996

B.5 Lentelė. Heteroskedastiškumo testas 1

Tests for ARCH Disturbances Based on OLS Residuals				
Order	**Q**	**Pr > Q**	**LM**	**Pr > LM**
1	4105.2105	<.0001	4102.3234	<.0001
2	8203.5460	<.0001	4102.3234	<.0001
3	12295.1524	<.0001	4102.3235	<.0001
4	16380.2770	<.0001	4102.3272	<.0001
5	20459.0221	<.0001	4102.3280	<.0001
6	24531.6898	<.0001	4102.3303	<.0001
7	28598.5440	<.0001	4102.3313	<.0001
8	32659.9653	<.0001	4102.3355	<.0001
9	36716.5518	<.0001	4102.3492	<.0001
10	40768.0964	<.0001	4102.3506	<.0001
11	44814.1085	<.0001	4102.3573	<.0001
12	48854.7585	<.0001	4102.3573	<.0001

B.6 Lentelė. Heteroskedastiškumo testas 2

Tests for ARCH Disturbances Based on Residuals				
Order	**Q**	**Pr > Q**	**LM**	**Pr > LM**
1	31.5229	<.0001	31.4964	<.0001
2	47.8381	<.0001	44.1448	<.0001
3	61.3590	<.0001	53.3721	<.0001
4	84.8868	<.0001	70.1538	<.0001
5	96.0864	<.0001	75.3236	<.0001
6	133.4776	<.0001	101.0085	<.0001
7	144.2837	<.0001	104.0833	<.0001
8	160.1847	<.0001	110.6196	<.0001
9	177.1840	<.0001	117.4570	<.0001
10	192.1617	<.0001	121.9540	<.0001
11	207.6338	<.0001	127.1645	<.0001
12	222.4355	<.0001	130.9572	<.0001

B.7 Lentelė. Heteroskedastiškumo testas 3

Tests for ARCH Disturbances Based on Residuals				
Order	**Q**	**Pr > Q**	**LM**	**Pr > LM**
1	32.4865	<.0001	32.4824	<.0001
2	49.0993	<.0001	45.2905	<.0001
3	62.7789	<.0001	54.5645	<.0001
4	86.6213	<.0001	71.5069	<.0001
5	97.9948	<.0001	76.7123	<.0001
6	134.8415	<.0001	101.7889	<.0001
7	145.9928	<.0001	105.0072	<.0001
8	162.0788	<.0001	111.5802	<.0001
9	179.2724	<.0001	118.4607	<.0001
10	193.8540	<.0001	122.6768	<.0001
11	209.5639	<.0001	127.9859	<.0001
12	224.2744	<.0001	131.7006	<.0001

B.8 Lentelė. Heteroskedastiškumo testas 4

Tests for ARCH Disturbances Based on OLS Residuals				
Order	**Q**	**Pr > Q**	**LM**	**Pr > LM**
1	4105.2105	<.0001	4102.3234	<.0001
2	8203.5460	<.0001	4102.3234	<.0001
3	12295.1524	<.0001	4102.3235	<.0001
4	16380.2770	<.0001	4102.3272	<.0001
5	20459.0221	<.0001	4102.3280	<.0001
6	24531.6898	<.0001	4102.3303	<.0001
7	28598.5440	<.0001	4102.3313	<.0001
8	32659.9653	<.0001	4102.3355	<.0001
9	36716.5518	<.0001	4102.3492	<.0001
10	40768.0964	<.0001	4102.3506	<.0001
11	44814.1085	<.0001	4102.3573	<.0001
12	48854.7585	<.0001	4102.3573	<.0001

B.9 Lentelė. Heteroskedastiškumo testas 6

Tests for ARCH Disturbances Based on OLS Residuals				
Order	**Q**	**Pr > Q**	**LM**	**Pr > LM**
1	4105.2105	<.0001	4102.3234	<.0001
2	8203.5460	<.0001	4102.3234	<.0001
3	12295.1524	<.0001	4102.3235	<.0001
4	16380.2770	<.0001	4102.3272	<.0001
5	20459.0221	<.0001	4102.3280	<.0001
6	24531.6898	<.0001	4102.3303	<.0001
7	28598.5440	<.0001	4102.3313	<.0001
8	32659.9653	<.0001	4102.3355	<.0001
9	36716.5518	<.0001	4102.3492	<.0001
10	40768.0964	<.0001	4102.3506	<.0001
11	44814.1085	<.0001	4102.3573	<.0001
12	48854.7585	<.0001	4102.3573	<.0001

C. PRIEDAS. PROGRAMOS TEKSTAS

```
proc fcmp outlib = Sasuser.Finance.price;
    function Eurocall(E, t, F, r, sigma, N);
        deltaT=T/N;
        u=exp(sigma*sqrt(deltaT));
        d=1/u;
        p=(exp(r*deltaT)-d)/(u-d);
        array tree[1]/ nosymbols;
        call dynamic_array(tree, n+1, n+1);
        call zeromatrix(tree);

        do i=0 to N;
            tree[i+1,N+1]=max(0 , -E*(u**i)*(d**(N-i)) + F);
        end;
        do j=(N-1) to 0 by -1;
            do  i=0 to j by 1;
                tree[i+1,j+1] = exp(-r*deltaT)*
                        (p * tree[i+2,j+2] + (1-p) * tree[i+1,j+2]);
            end;
        end;
        price = tree[1,1];
        return(price);
    endsub;
run;


options cmplib = (Sasuser.Finance);
data test;
    BSprice=blkshclprc(139, 1/52, 148.25, 0.39610, 0.12123);
    do n=1 to 100;
        Treeprice=eurocall(139, 1/52, 148.25, 0.39610, 0.12123, n);
        output;
    end;
run;
proc print data=test;
                                        run;
proc fcmp outlib = Sasuser.Finance.price;
    function Europut(E, t, F, r, sigma, N);
        deltaT=T/N;
        u=exp(sigma*sqrt(deltaT));
        d=1/u;
        p=(exp(r*deltaT)-d)/(u-d);
        array tree[1]/ nosymbols;
        call dynamic_array(tree, n+1, n+1);
        call zeromatrix(tree);

        do i=0 to N;
            tree[i+1,N+1]=max(0 , E*(u**i)*(d**(N-i)) - F);
        end;
        do j=(N-1) to 0 by -1;
            do  i=0 to j by 1;
                tree[i+1,j+1] = exp(-r*deltaT)*
                        (p * tree[i+2,j+2] + (1-p) * tree[i+1,j+2]);
            end;
        end;
        price = tree[1,1];
        return(price);
    endsub;
run;
```

```
options cmplib = (Sasuser.Finance);
data test1;
    BSprice=blkshptprc(140, 1/52, 152.07, 0.24, 15);
    do n=1 to 100;
        Treeprice=europut(140, 1/52, 152.07, 0.24, 15, n);
        output;
    end;
run;
proc print data=test1;
                                                run;

PROC IMPORT OUT= table DATAFILE=
"C:\Users\Paulius\Desktop\Magistras\SAS\table.xlsx"
            DBMS=xlsx REPLACE;
     SHEET="table";
     GETNAMES=YES;
RUN;
data test1;
set table (drop= volume open high low close);
run;
data test2;
set test1  ;
run;
/*Braizom duomenis pradinius*/
proc sgplot data=test2;
series y=adj_close x=date/lineattrs=(color=blue);
refline 0/ axis=y Lineattrs=(pattern=Shortdash);
title '';
run;
/*Stacionarumas*/
/*proc autoreg data=test1;
   model close=  / stationarity=(adf) ;
run;*/
data Duomenys;
set test1 ;
r=adj_close;
run;
/*Stacionarumas*/
/*proc autoreg data=Duomenys;
   model r=  / stationarity=(adf) ;
run;*/
/*Braizom duomenis grazu*/
proc sgplot data=Duomenys;
series y=r x=date/lineattrs=(color=pink);
refline 0/ axis=y Lineattrs=(pattern=Shortdash);
title '';
run;


/*TYRIMAS*/


/*Paprasti*/
/*ARCH_M_1_T*/
ods output Autoreg.AR1ARCH_M_1_t.FinalModel.Results.FitSummary
           =SAR1ARCH_M_1_t;
proc autoreg data=Duomenys;
AR1ARCH_M_1_t:model r= / noint nlag=1 garch=(q=1, mean=log) DIST=t maxiter=50
method=ml;
output out=a p=name1;
run;
```

```
/*ARCH_M_1_t*/
ods output Autoreg.ARCH_M_1_t.FinalModel.Results.FitSummary
           =SARCH_M_1_t;
proc autoreg data=Duomenys;
ARCH_M_1_t:model r= /  noint garch=(q=1, mean=log) DIST=Normal method=ml
maxiter=50;
output out=b p=name2;
run;
/*ARCH_M_1_normal*/
ods output Autoreg.ARCH_M_1_normal.FinalModel.Results.FitSummary
           =SARCH_M_1_normal;
proc autoreg data=Duomenys;
ARCH_M_1_normal:model r= /  noint garch=(q=1, mean=log) DIST=Normal method=ml
maxiter=50;
output out=b p=name2;
run;

/*ARCH_M_2_t*/
ods output Autoreg.ARCH_M_2_t.FinalModel.Results.FitSummary
           =SARCH_M_2_t;
proc autoreg data=Duomenys;
ARCH_M_2_t:model r= /  noint garch=(q=2, mean=log) DIST=t method=ml maxiter=50;
output out=c p=name3;
run;

/*ARCH_M_2_normal*/
ods output Autoreg.ARCH_M_2_normal.FinalModel.Results.FitSummary
           =SARCH_M_2_normal;
proc autoreg data=Duomenys;
ARCH_M_2_normal:model r= /  noint garch=(q=2, mean=log) DIST=normal method=ml
maxiter=50;
output out=d p=name4;
run;


/*ARCH_M_3_t*/
ods output Autoreg.ARCH_M_3_t.FinalModel.Results.FitSummary
           =SARCH_M_3_t;
proc autoreg data=Duomenys;
ARCH_M_3_t:model r= /  noint garch=(q=3, mean=log) DIST=t method=ml maxiter=50;
output out=e p=name5;
run;
/*ARCH_M_3_normal*/
ods output Autoreg.ARCH_M_3_normal.FinalModel.Results.FitSummary
           =SARCH_M_3_normal;
proc autoreg data=Duomenys;
ARCH_M_3_normal:model r= /  noint garch=(q=3, mean=log) DIST=normal method=ml
maxiter=50;
output out=e p=name5;
run;
/*AR(1)/ARCH_M_3_t*/
ods output Autoreg.AR1ARCH_M_1_t.FinalModel.Results.FitSummary
           =SAR1ARCH_M_1_t;
proc autoreg data=Duomenys;
AR1ARCH_M_1_t:model r= /  noint nlag=1 garch=(q=3, mean=log) DIST=normal method=ml
maxiter=50;
output out=f p=name6;
run;

/*GARCH_M_1_1_t*/
ods output Autoreg.GARCH_M_1_1_t.FinalModel.Results.FitSummary
           =SGARCH_M_1_1_t;
```

```
proc autoreg data=Duomenys;
GARCH_M_1_1_t:model r= /  noint garch=(p=1, q=1, mean=log) DIST=t method=ml
maxiter=50;
output out=g p=name7;
run;
/*GARCH_M_1_1_t*/
ods output Autoreg.GARCH_M_1_1_t.FinalModel.Results.FitSummary
           =SGARCH_M_1_1_t;
proc autoreg data=Duomenys;
GARCH_M_1_1_t:model r= /  noint garch=(p=1, q=1, mean=log) DIST=t method=ml
maxiter=50;
output out=g p=name7;
run;
/*GARCH_M_1_1_normal*/
ods output Autoreg.GARCH_M_1_1_normal.FinalModel.Results.FitSummary
           =SGARCH_M_1_1_normal;
proc autoreg data=Duomenys;
GARCH_M_1_1_normal:model r= /  noint garch=(p=1, q=1, mean=log) DIST=normal
method=ml maxiter=1000;
output out=h p=name8;
run;

/*GARCH_M_1_2_t*/
ods output Autoreg.GARCH_M_1_2_t.FinalModel.Results.FitSummary
           =SGARCH_M_1_2_t;
proc autoreg data=Duomenys;
GARCH_M_1_2_t:model r= /  noint garch=(p=1, q=2, mean=log) DIST=t method=ml
maxiter=50;
output out=i p=name9;
run;


/*GARCH_M_1_2_normal*/
ods output Autoreg.GARCH_M_1_2_normal.FinalModel.Results.FitSummary
           =SGARCH_M_1_2_normal;
proc autoreg data=Duomenys;
GARCH_M_1_2_normal:model r= /  noint garch=(p=1, q=2, mean=log) DIST=normal
method=ml maxiter=50;
output out=j p=name10;
run;

/*GARCH_M_2_1_t*/
ods output Autoreg.GARCH_M_2_1_t.FinalModel.Results.FitSummary
           =SGARCH_M_2_1_t;
proc autoreg data=Duomenys;
GARCH_M_2_1_t:model r= /  noint garch=(p=2, q=1, mean=log) DIST=t method=ml
maxiter=50;
output out=k p=name11;
run;

/*GARCH_M_2_1_normal*/
ods output Autoreg.GARCH_M_2_1_normal.FinalModel.Results.FitSummary
           =SGARCH_M_2_1_normal;
proc autoreg data=Duomenys;
GARCH_M_2_1_normal:model r= /  noint garch=(p=2, q=1, mean=log) DIST=normal
method=ml maxiter=50;
output out=l p=name11;
run;

/*GARCH_M_2_2_t*/
ods output Autoreg.GARCH_M_2_2_t.FinalModel.Results.FitSummary
           =SGARCH_M_2_2_t;
proc autoreg data=Duomenys;
```

```
GARCH_M_2_2_t:model r= /  noint garch=(p=2, q=2, mean=log) DIST=t method=ml
maxiter=50;
output out=m p=name12;
run;

/*GARCH_M_2_2_normal*/
ods output Autoreg.GARCH_M_2_2_normal.FinalModel.Results.FitSummary
           =SGARCH_M_2_2_normal;
proc autoreg data=Duomenys;
GARCH_M_2_2_normal:model r= /  noint garch=(p=2, q=2, mean=log) DIST=normal
method=ml maxiter=50;
output out=n p=name13;
run;


/*Su AR*/
/*ARGARCH_M_1_1_t*/
ods output Autoreg.ARGARCH_M_1_1_t.FinalModel.Results.FitSummary
           =SARGARCH_M_1_1_t;
proc autoreg data=Duomenys;
ARGARCH_M_1_1_t:model r= /  noint nlag=24 backstep garch=(p=1, q=1, mean=log)
DIST=t method=ml maxiter=50;
output out=o p=name7;
run;
/*ARGARCH_M_1_1_t*/
ods output Autoreg.ARGARCH_M_1_1_t.FinalModel.Results.FitSummary
           =SARGARCH_M_1_1_t;

proc autoreg data=Duomenys;
ARGARCH_M_1_1_t:model r= /  noint nlag=24 backstep garch=(p=1, q=1, mean=log)
DIST=t method=ml maxiter=50;
output out=p p=name7;
run;
/*ARGARCH_M_1_1_normal*/
ods output Autoreg.ARGARCH_M_1_1_normal.FinalModel.Results.FitSummary
           =SARGARCH_M_1_1_normal;
proc autoreg data=Duomenys;
ARGARCH_M_1_1_normal:model r= /  noint  nlag=24 backstep garch=(p=1, q=1,
mean=log) DIST=normal method=ml maxiter=50;
output out=r p=name8;
run;

/*ARGARCH_M_1_2_t*/
ods output Autoreg.ARGARCH_M_1_2_t.FinalModel.Results.FitSummary
           =SARGARCH_M_1_2_t;
proc autoreg data=Duomenys;
ARGARCH_M_1_2_t:model r= /  noint nlag=24 backstep  garch=(p=1, q=2, mean=log)
DIST=t method=ml maxiter=50;
output out=s p=name9;
run;

/*ARGARCH_M_1_2_normal*/
ods output Autoreg.ARGARCH_M_1_2_normal.FinalModel.Results.FitSummary
           =SARGARCH_M_1_2_normal;
proc autoreg data=Duomenys;
ARGARCH_M_1_2_normal:model r= /  noint  nlag=24 backstep garch=(p=1, q=2,
mean=log) DIST=normal method=ml maxiter=50;
output out=t p=name10;
run;

/*ARGARCH_M_2_1_t*/
ods output Autoreg.ARGARCH_M_2_1_t.FinalModel.Results.FitSummary
           =SARGARCH_M_2_1_t;
```

```
proc autoreg data=Duomenys;
ARGARCH_M_2_1_t:model r= /  noint  nlag=24 backstep garch=(p=2, q=1, mean=log)
DIST=t method=ml maxiter=50;
output out=u p=name11;
run;

/*ARGARCH_M_2_1_normal*/
ods output Autoreg.ARGARCH_M_2_1_normal.FinalModel.Results.FitSummary
           =SARGARCH_M_2_1_normal;
proc autoreg data=Duomenys;
ARGARCH_M_2_1_normal:model r= /  noint  nlag=24 backstep garch=(p=2, q=1,
mean=log) DIST=normal method=ml maxiter=50;
output out=v p=name11;
run;

/*ARGARCH_M_2_2_t*/
ods output Autoreg.ARGARCH_M_2_2_t.FinalModel.Results.FitSummary
           =SARGARCH_M_2_2_t;
proc autoreg data=Duomenys;
ARGARCH_M_2_2_t:model r= /  noint  nlag=24 backstep garch=(p=2, q=2, mean=log)
DIST=t method=ml maxiter=50;
output out=w p=name12;
run;

/*ARGARCH_M_2_2_normal*/
ods output Autoreg.ARGARCH_M_2_2_normal.FinalModel.Results.FitSummary
           =SARGARCH_M_2_2_normal;
proc autoreg data=Duomenys;
ARGARCH_M_2_2_normal:model r= /  noint  nlag=24 backstep garch=(p=2, q=2,
mean=log) DIST=normal method=ml maxiter=50;
output out=z p=name13;
run;

/*IGARCH_M_1_1_t*/
ods output Autoreg.IGARCH_M_1_1_t.FinalModel.Results.FitSummary
           =SIGARCH_M_1_1_t;
proc autoreg data=Duomenys;
IGARCH_M_1_1_t:model r= /  noint   garch=(p=1, q=1, type=igarch, mean=log) DIST=t
method=ml maxiter=200;
output out=ab p=name13;
run;
/*IGARCH_M_1_1_normal*/
ods output Autoreg.IGARCH_M_1_1_normal.FinalModel.Results.FitSummary
           =SIGARCH_M_1_1_normal;
proc autoreg data=Duomenys;
IGARCH_M_1_1_normal:model r= /  noint   garch=(p=1, q=1, type=igarch, mean=log)
DIST=t method=ml maxiter=200;
output out=ac p=name13;
run;
/*EGARCH_M_1_1_normal*/
ods output Autoreg.EGARCH_M_1_1_normal.FinalModel.Results.FitSummary
           =SEGARCH_M_1_1_normal;
proc autoreg data=Duomenys;
EGARCH_M_1_1_normal:model r= /  noint   garch=(p=1, q=1, type=egarch, mean=log)
DIST=normal method=ml maxiter=200;
output out=ad p=name13;
run;
/*Nelson GARCH_M_1_1_normal*/
ods output Autoreg.NeGARCH_M_1_1_normal.FinalModel.Results.FitSummary
           =SNeGARCH_M_1_1_normal;
proc autoreg data=Duomenys;
NeGARCH_M_1_1_normal:model r= /  noint   garch=(p=1, q=1, type=nelson, mean=log)
DIST=normal method=ml maxiter=200;
```

```
output out=az p=name13;
run;
/*Nelson GARCH_M_1_1_t*/
ods output Autoreg.NeGARCH_M_1_1_t.FinalModel.Results.FitSummary
           =SNeGARCH_M_1_1_t;
proc autoreg data=Duomenys;
NeGARCH_M_1_1_t:model r= /  noint   garch=(p=1, q=1, type=nelson, mean=log) DIST=t
method=ml maxiter=200;
output out=ae p=name13;
run;
/*No constraint GARCH_M_1_1_t*/
ods output Autoreg.NOGARCH_M_1_1_t.FinalModel.Results.FitSummary
           =SNOGARCH_M_1_1_t;
proc autoreg data=Duomenys;
NoGARCH_M_1_1_t:model r= /  noint   garch=(p=1, q=1, type=noconstraint, mean=log)
DIST=t method=ml maxiter=200;
output out=af p=name13;
run;
/*No constraint GARCH_M_1_1_normal*/
ods output Autoreg.NOGARCH_M_1_1_normal.FinalModel.Results.FitSummary
           =SNOGARCH_M_1_1_normal;
proc autoreg data=Duomenys;
NoGARCH_M_1_1_normal:model r= /  noint   garch=(p=1, q=1, type=noconstraint,
mean=log) DIST=normal method=ml maxiter=200;
output out=ag p=name13;
run;
/*Non negative GARCH_M_1_1_t*/
ods output Autoreg.NONGARCH_M_1_1_t.FinalModel.Results.FitSummary
           =SNONGARCH_M_1_1_t;
proc autoreg data=Duomenys;
NONGARCH_M_1_1_t:model r= /  noint   garch=(p=1, q=1, type=nonneg, mean=log)
DIST=t method=ml maxiter=200;
output out=ah p=name13;
run;
/*Non negative GARCH_M_1_1_normal*/
ods output Autoreg.NONGARCH_M_1_1_normal.FinalModel.Results.FitSummary
           =SNONGARCH_M_1_1_normal;
proc autoreg data=Duomenys;
NONGARCH_M_1_1_normal:model r= /  noint   garch=(p=1, q=1, type=nonneg, mean=log)
DIST=normal method=ml maxiter=200;
output out=ai p=name13;
run;
/*PGARCH_M_1_1_t*/
ods output Autoreg.PGARCH_M_1_1_t.FinalModel.Results.FitSummary
           =SPGARCH_M_1_1_t;
proc autoreg data=Duomenys;
PGARCH_M_1_1_t:model r= /  noint   garch=(p=1, q=1, type=pgarch, mean=log) DIST=t
method=ml maxiter=200;
output out=ar p=name13;
run;
/*PGARCH_M_1_1_normal*/
ods output Autoreg.PGARCH_M_1_1_normal.FinalModel.Results.FitSummary
           =SPGARCH_M_1_1_normal;
proc autoreg data=Duomenys;
PGARCH_M_1_1_normal:model r= /  noint   garch=(p=1, q=1, type=pgarch, mean=log)
DIST=normal method=ml maxiter=200;
output out=as p=name13;
run;
/*QGARCH_M_1_1_t*/
ods output Autoreg.QGARCH_M_1_1_t.FinalModel.Results.FitSummary
           =SQGARCH_M_1_1_t;
proc autoreg data=Duomenys;
```

```
QGARCH_M_1_1_t:model r= /  noint   garch=(p=1, q=1, type=qgarch, mean=log) DIST=t
method=ml maxiter=200;
output out=aj p=name13;
run;
/*QGARCH_M_1_1_normal*/
ods output Autoreg.QGARCH_M_1_1_normal.FinalModel.Results.FitSummary
           =SQGARCH_M_1_1_normal;
proc autoreg data=Duomenys;
QGARCH_M_1_1_normal:model r= /  noint   garch=(p=1, q=1, type=qgarch, mean=log)
DIST=normal method=ml maxiter=200;
output out=ak p=name13;
run;
/*StationaryGARCH_M_1_1_t*/
ods output Autoreg.STGARCH_M_1_1_t.FinalModel.Results.FitSummary
           =SSTGARCH_M_1_1_t;
proc autoreg data=Duomenys;
STGARCH_M_1_1_t:model r= /  noint   garch=(p=1, q=1, type=stationary, mean=log)
DIST=t method=ml maxiter=200;
output out=al p=name13;
run;
/*StationaryGARCH_M_1_1_normal*/
ods output Autoreg.STGARCH_M_1_1_normal.FinalModel.Results.FitSummary
           =SSTGARCH_M_1_1_normal;
proc autoreg data=Duomenys;
STGARCH_M_1_1_normal:model r= /  noint   garch=(p=1, q=1, type=stationary,
mean=log) DIST=normal method=ml maxiter=200;
output out=am p=name13;
run;
/*TGARCH_M_1_1_t*/
ods output Autoreg.TGARCH_M_1_1_t.FinalModel.Results.FitSummary
           =STGARCH_M_1_1_t;
proc autoreg data=Duomenys;
TGARCH_M_1_1_t:model r= /  noint   garch=(p=1, q=1, type=tgarch, mean=log) DIST=t
method=ml maxiter=200;
output out=an p=name13;
run;
/*TGARCH_M_1_1_normal*/
ods output Autoreg.TGARCH_M_1_1_normal.FinalModel.Results.FitSummary
           =STGARCH_M_1_1_normal;
proc autoreg data=Duomenys;
TGARCH_M_1_1_normal:model r= /  noint   garch=(p=1, q=1, type=tgarch, mean=log)
DIST=normal method=ml maxiter=200;
output out=ao p=name13;
run;
/*
data all;
set a;
                  MAPE=abs((r-name1)/r)*100;
                  MSFE=((r-name1)*(r-name1));
run;
proc summary data=all;
var MAPE MSFE;
output out=rezai mean()=;
run;
proc print data=rezai;
run;
data all1;
set b;
                  MAPE=abs((r-name2)/r)*100;
                  MSFE=((r-name2)*(r-name2));
run;
proc summary data=all1;
var MAPE MSFE;
```

```
output out=rezai1 mean()=;
run;
proc print data=rezai1;
run;*/
data sbc_aic;
   set
SAR1ARCH_M_1_t
SARCH_M_1_t
SARCH_M_1_normal
SARCH_M_2_t
SARCH_M_2_normal
SARCH_M_3_t
SARCH_M_3_normal
SAR1ARCH_M_1_t
SGARCH_M_1_1_t
SGARCH_M_1_1_t
SGARCH_M_1_1_normal
SGARCH_M_1_2_t
SGARCH_M_1_2_normal
SGARCH_M_2_1_t
SGARCH_M_2_1_normal
SGARCH_M_2_2_t
SGARCH_M_2_2_normal
SARGARCH_M_1_1_t
SARGARCH_M_1_1_normal
SARGARCH_M_1_2_t
SARGARCH_M_1_2_normal
SARGARCH_M_2_1_t
SARGARCH_M_2_1_normal
SARGARCH_M_2_2_t
SARGARCH_M_2_2_normal
SIGARCH_M_1_1_t
SIGARCH_M_1_1_normal
SEGARCH_M_1_1_normal
SNeGARCH_M_1_1_normal
SNeGARCH_M_1_1_t
SNOGARCH_M_1_1_t
SNOGARCH_M_1_1_normal
SNONGARCH_M_1_1_t
SNONGARCH_M_1_1_normal
SPGARCH_M_1_1_t
SPGARCH_M_1_1_normal
SQGARCH_M_1_1_t
SQGARCH_M_1_1_normal
SSTGARCH_M_1_1_t
SSTGARCH_M_1_1_normal
STGARCH_M_1_1_t
STGARCH_M_1_1_normal
;
   keep Model SBC AIC;
   if Label1="SBC" then do; SBC=input(cValue1,BEST12.4); end;
   if Label2="SBC" then do; SBC=input(cValue2,BEST12.4); end;
   if Label1="AIC" then do; AIC=input(cValue1,BEST12.4); end;
   if Label2="AIC" then do; AIC=input(cValue2,BEST12.4); end;
   if not (SBC=.) then output;
run;
title "SBC ir AIC kriteriju reiksmes";
proc print data=sbc_aic;
   format _NUMERIC_ BEST12.4;
run;*/
```