



MANTAS LANDAUSKAS

H-RANGŲ TAIKYMAI NETIESINIŲ SISTEMŲ IR CHAOSO TYRIMUOSE

DAKTARO DISERTACIJOS
SANTRAUKA

FIZINIAI MOKSLAI,
INFORMATIKA (09P)

Kaunas
2016

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
VYTAUTO DIDŽIOJO UNIVERSITETAS

MANTAS LANDAUSKAS

***H*-RANGŲ TAIKYMAI NETIESINIŲ SISTEMŲ IR CHAOSO
TYRIMUOSE**

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, informatika (09P)

2016, Kaunas

Disertacija rengta 2011–2015 metais Kauno technologijos universiteto Matematikos ir gamtos mokslų fakulteto Matematinio modeliavimo katedroje. Mokslinius tyrimus rėmė Lietuvos mokslo taryba.

Mokslinis vadovas:

Prof. habil. dr. Minvydas Kazys RAGULSKIS (Kauno technologijos universitetas, fiziniai mokslai, informatika – 09P).

Informatikos mokslo krypties disertacijos gynimo taryba:

Prof. habil. dr. Rimantas BARAUSKAS (Kauno technologijos universitetas, fiziniai mokslai, informatika – 09P) – **pirmininkas**;

Prof. dr. Miguel A. F. SANJUAN (Rey Juan Carlos universitetas, Ispanija, fiziniai mokslai, informatika – 09P);

Prof. dr. Romas BARONAS (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, informatika – 09P);

Prof. habil. dr. Vytautas KAMINSKAS (Vytauto Didžiojo universitetas, fiziniai mokslai, informatika – 09P);

Prof. dr. Gintaras PALUBECKIS (Kauno technologijos universitetas, fiziniai mokslai, informatika – 09P);

Prof. dr. Jonas RIMAS (Kauno technologijos universitetas, fiziniai mokslai, informatika – 09P).

Lietuvių kalbos redaktorius:

Violeta Meiliūnaitė

Leidykla „Technologija“

Anglų kalbos redaktorius:

Armandas Rumšas

Leidykla „Technologija“

Disertacija bus ginama viešame informatikos mokslo krypties disertacijos gynimo tarybos posėdyje 2016 m. kovo 18 d. 11 val. Kauno technologijos universiteto Centrinųjų rūmų rektorato salėje.

Adresas: K. Donelaičio g. 73-402, 44249 Kaunas, Lietuva.

Tel. (370) 37 300 042; faks. (370) 37 324 144; el. paštas doktorantura@ktu.lt.

Disertacijos santrauka išsiųsta 2016 m. vasario 18 d.

Disertaciją galima peržiūrėti internete (<http://ktu.edu>), Vytauto Didžiojo universiteto (K. Donelaičio g. 52, Kaunas) ir Kauno technologijos universiteto (K. Donelaičio g. 20, Kaunas) bibliotekose.

ĮVADAS

Temos aktualumas

Nors netiesinės dinaminės sistemos yra klasikinė tyrimų sritis, ji nuolat tobulėja. Beveik kiekvienas realaus pasaulio reiškinyms aprašomas netiesine sistema. Todėl netiesinių dinaminė sistemų teorija yra plačiai taikoma praktiškai. Inžinerijoje sistemos tampa vis sudėtingesnės, tai lemia jų valdymo metodų kūrimo poreikį, siekiant stebėti pageidaujama dinamiką. Tai taip pat skatina ir netiesinių sistemų svarbos augimą. Netiesinių dinaminė sistemų taikymai tapo tarpdisciplininiai ir apima tyrimų sritis nuo fizikos iki inžinerijos, nuo ekonomikos iki psichologijos ar nuo medicinos iki biologijos.

Didelis mokslinis dėmesys skiriamas dirbtinių žemės palydovų pramonei. Keleto palydovų sinchronizuoto skriejimo uždaviniai (siekiant minimizuoti misijos kaštus) yra dažna naujausių publikacijų tema. Tokių sistemų dinamika pasižymi stipriu netiesiškumu ir yra jautri išoriniams poveikiams. Tokių palydovų orbitos netiesinėje dinamikoje yra modeliuojamos ribiniais ciklais.

Dinamika, susidedančia iš daugelio procesų ir aukšto netiesiškumo, nusakomos kompleksinės sistemos dažnai tiriamos biologijoje ir medicinoje. Minėtini tokie tyrimai: vėžio plitimas, vaistų naudojimo atsakas, molekuliniai reiškiniai, hipoksija. Kai kurios sistemos yra sudėtingai susietos ir dažnai daugumą jų sunku tirti eksperimentiniais metodais. Netiesiniai dinaminiai modeliai ir pažangios kompiuterinės simuliacijos leidžia stebėti tokias sistemas ir jų dinamiką.

Populiacijų dinamika, epidemijų, ligų plitimo modeliavimas visada buvo aktuali tyrimų sritis. Netiesiniai iteraciniai vaizdavimai, diferencialinių lygčių modeliai apibūdina realaus pasaulio sistemų evoliuciją. Atitinkami modeliavimo sprendimai leidžia taikyti sistemų valdymo ar analizavimo strategijas. Pavyzdžiui, gali būti siekiama išsaugoti nykstančias rūšis, suvaldyti ligos plitimą ar riboti natūralių išteklių vartojimą. Be netiesinių efektų tyrimo dinaminėse sistemose tokias problemas spręsti būtų paprasčiausiai neįmanoma.

Chaotines netiesines sistemas H. Puankarė tyrė daugiau nei prieš šimtmetį. Plačiai žinomas „drugelio efektas“ pirmą kartą pastebėtas E. Lorenz 1772 metais. Tačiau intensyviausi netiesinių sistemų dinamikos tyrinėjimai vyko praėjo amžiaus paskutiniame dešimtmetyje. Chaoso teorija buvo taikoma plačiai. Tobulesni kompiuteriai įnešė didelį įnašą kuriant naujus netiesinės dinamikos metodus. Šiuolaikiniai kompiuteriai jau leidžia modeliuoti šiluminį denatūravimą DNR molekulėje ar valdyti biologinius neuroninius tinklus. Sujungus tai su naujais netiesinės dinamikos metodais galima padidinti mūsų supratimą apie gamtą.

Nuolat kuriami nauji algoritmai, kurie leidžia analizuoti netiesines sistemas ir atrasti naujų jų savybių. Specialios formos matricos (čia aktualios Hankelio matricos) šiuo metu taikomos sprendžiant laiko eilučių prognozavimo,

sistemų identifikavimo ar algebrinės analizės uždavinius. Hankelio matricos išlaiko skaičių sekos vidinius algebrinius ryšius ir leidžia jas naudoti specialiuose netiesinės dinamikos metoduose.

Reikia pabrėžti, kad ši disertacija yra daugiau apie H -rangais paremtų metodų taikymą ir naudojimą netiesinių sistemų savybėms identifikuoti negu apie naujų metodų konstravimą. Šiuo požiūriu H -rangai yra kaip turtingas skaitinis įrankis netiesinių sistemų tyrimuose. H -rangais paremti algoritmai leidžia atskleisti ir išspręsti aibę naujų sistemų identifikavimo, prognozavimo ir valdymo uždavinių. H -rangų teorijos plėtra yra pagrindinė šio darbo vertė.

Tyrimo objektas

H -rangų plokštumos ir jų taikymai sistemų identifikavimo, laiko eilučių prognozavimo ir netiesinių sistemų valdymo problemose.

Darbo tikslas

Pritaikyti ir plėtoti H -rangu paremtus metodus analizuojant netiesines sistemas ir realaus pasaulio laiko eilutes.

Tyrimo uždaviniai

1. Plėtoti H -rango parametrų bei fazinių plokštumų skaičiavimo algoritmus diskrečioms ir tolydžioms dinaminėms sistemoms. Įvertinti šių plokštumų kokybę slankaus kablelio aritmetikos atžvilgiu.
2. Remiantis vien H -rango sąvoka, išskirti netiesinės sistemos stabiliausias, nestabiliausias ir neasimptotinio konvergavimo daugdaras.
3. Sukurti ir realizuoti H -rango principais paremtus algoritmus diskrečiosioms ir tolydžiosioms netiesinėms sistemoms valdyti.
4. Pasiūlyti algebrinę metodiką, paremtą sekos rangu, kuri leistų analizuoti sistemos evoliucionavimą iš stacionarių į chaotinius režimus.
5. Sukurti ir realizuoti trumpų laiko eilučių prognozavimo algoritmą, paremtą skeletinės skaičių sekos savybėmis.
6. Pritaikyti darbe nagrinėjamus algebrinės analizės metodus realaus pasaulio magnetometro signalo analizei.

Tyrimų metodai ir programinė įranga

Darbe plačiai taikomi matematinės ir statistinės analizės metodai. Tačiau plėtojant H -rango teoriją algebrinė analizė užima svarbiausią vietą. Kuriant praktinius taikymus, naudoti netiesinės dinamikos metodai ir modeliai.

Darbe taikomi skaitmeninių vaizdų apdorojimo metodai. Aptariami kai kurie slankaus kablelio aritmetikos aspektai.

Matlab programinis paketas ir jo standartinės bibliotekos (*Image processing toolbox*, *Parallel Computing Toolbox*, *Statistics toolbox*, *Signal*

Processing Toolbox, *Symbolic Math Toolbox*), taip pat C++ programavimo terpė ir LAPACK bibliotekos naudoti vykdant tyrimus.

Darbo mokslinis naujumas ir praktinė svarba

Netiesiniams vaizdavimams negalima surasti konvergavimo daugdarų tiesiogiai. Yra programinių priemonių (pvz., Dynamics arba XPP), kurios leidžia šią problemą spręsti, tačiau jos specializuotos ir skiriasi rezultatų tikslumu.

Šiame darbe sprendžiamas netiesinių sistemų konvergavimo daugdarų identifikavimo uždavinys, naudojant H -rangu paremtus metodus. Tam yra naudojamos H -rangu parametų plokštumos. Tiriamos diskrečiosios bei tolydžiosios dinaminės sistemos.

Realaus pasaulio eilutėms prognozuoti pasiūlomas ir realizuojamas naujas algoritmas.

Darbo rezultatai praktiškai panaudoti vieno jungtinio KTU ir LSMU mokslininkų grupių projekto veikloje bei vieno LMT mokslininkų grupių projekto veikloje tiriant realaus pasaulio magnetometro duomenis.

Disertacijos gynimui pateikiama

1. H -rango parametų bei fazinių plokštumų skaičiavimo algoritmai.
2. Skaitinė neasimptotinio konvergavimo daugdarų identifikavimo strategija.
3. Skaitinė nestabilių orbitų diskrečiose ir tolydžiose dinaminėse sistemose valdymo strategija.
4. Patobulinta laiko eilučių prognozavimo metodika, paremta H -rango algebrinėmis savybėmis.

Darbo rezultatų aprobavimas

Disertacijos rezultatai išspausdinti 7 publikacijose. Iš jų 3 straipsniai tarptautiniuose žurnaluose su citavimo indeksais, referuojamuose Mokslinės informacijos instituto (ISI) pagrindiniame sąrašė, 2 straipsniai ISI referuojamuose *American Institute of Physics (AIP) proceedings*. Tyrimai disertacijos tema pristatyti 4 tarptautinėse ir 2 nacionalinėse konferencijose.

Paskutiniame skyriuje pateikti eksperimentai atlikti naudojant analogų Europoje neturinčio realaus pasaulio magnetometro duomenis. Rezultatai panaudoti projekte „Research on the relations between Earth's magnetic field, human's and animal's cardiovascular systems (GEOMAG)“, finansuotame KTU R&D departamento. Projekto laikotarpis: 2014 kovas – 2014 gruodis.

Disertacijos struktūra ir apimtis

Disertaciją sudaro įvadas, 4 pagrindiniai skyriai, išvados, literatūros ir autoriaus publikacijų sąrašai. Disertacijos teksto apimtis – 124 puslapiai. Tekste yra 65 iliustracijos, 10 lentelių, 162 cituojamų šaltinių sąrašas.

1. LITERATŪROS APŽVALGA

Netiesinių sistemų valdymas

Klasikiniu požiūriu, netiesinės sistemos valdomos mažinant jų chaotiškumą. Efektyvus chaoso eliminavimo metodas, kaip sistemos valdymo įrankis, pasiūlytas Ott, Grebogi ir Yorke (Ott, Grebogi ir Yorke, 1990), vadinamas OGY metodu. Vienas iš sistemos parametrų yra perturbuojamas grįžtamojo ryšio prasme. Čia perturbacija yra priklausoma nuo laiko. Kitas chaotinių sistemų valdymo metodas, vadinamas Pyrago metodu, pasiūlytas po 2 metų (Pyragas, 1992). Kaip ir OGY metode, čia nestabilių periodinių orbitų stabilizavimas taip pat yra metodo esmė. Skirtumas tas, kad Pyrago metode perturbacija yra tolydaus laiko ir įvedamas tam tikras išorinis osciliatorius ar grįžtamasis ryšys su vėlinimu.

Abiejų minėtų metodų taikymas nereikalauja išankstinės informacijos apie sistemos dinamiką. H -rangais paremti metodai yra jau kitokie, nes jie nėra paremti grįžtamoju ryšiu ir reikalauja *a priori* žinoti sistemos dinamiką nusakančius ryšius arba turėti istorinius sistemos evoliucijos duomenis. Tokiu būdu grįžtamoju ryšiu paremtų metodų taikymo sritis, visų pirma, yra eksperimentinės problemos, o H -rangai labiau taikomi analitikoje.

Trumpų laiko eilučių prognozavimas

Plačiai taikomos slenkančio vidurkio (MA) technikos prognozuojant laiko eilutes (Holt, 2004). Tačiau prognozę taip pat galima sukonstruoti ir rekonstruojant skeletinę seką. Šiame darbe tai atliekama naudojant H -rangu paremtą metodiką. Prognozuojama tik viena reikšmė į ateitį, todėl metodas pakliūva į labai trumpų eilučių prognozavimo kategoriją. Ankstesni tyrimai parodė, kad prognozavimui sėkmingai gali būti taikomi algebriniai modeliai (Ragulskis, Lukoseviciute, Navickas ir Palivonaite, 2011).

H -rango vaidmuo netiesinių sistemų tyrimuose

Skaitinė technika, paremta H -rangu, vertinanti konvergavimą chaotiniuose vaizdavimuose, pasiūlyta (Ragulskis ir Navickas, 2011). H -rangų vaizdavimas sistemos parametrų ir pradinių sąlygų plokštumoje leidžia pažvelgti į vidinį netiesinės sistemos algebrinį sudėtingumą. Tai taip pat leidžia išskirti sistemos stabiliją, nestabilią ir neasimptotinio konvergavimo daugdaras. H -rango koncepcija gali būti efektyviai panaudota sistemos perėjimo į chaotinį režimą tyrimui ar įvertinti sistemos jautrumą pradinėms sąlygoms (Ragulskis ir Navickas, 2011).

Netiesinių sistemų perėjimo į chaotinius režimus fizikoje, matematikoje ar inžinerijoje nagrinėjimas yra klasikinė tyrimų sritis. Chaoso atsiradimas tiriamas skirtingose netiesinėse sistemose: diferencialinėse lygtyse su vėlavimu (Hale ir Sternberg, 1988), molekulių branduolinėse būsenose (Tennyson ir Farantos, 1985; Von Brentano ir Zamfir, 1992).

1.1. Tiesinės rekurentinės sekos

Eilės n tiesinės rekurentinės sekos su pastoviais koeficientais kiekvienas narys yra nusakomas tokios formos lygtimi:

$$x_j = \alpha_{n-1}x_{j-1} + \alpha_{n-2}x_{j-2} + \dots + \alpha_0x_{j-n}, \quad (1)$$

kur koeficientai α_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$, yra pastovūs. Pirmieji elementai x_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$, vienareikšmiškai nusako sekos evoliuciją (Park ir Elden, 2003).

1.2. Hankelio matricos ir jų rangai

Hankelio matrica yra vadinama tokia matrica, kurios elementas a_{ij} priklauso tik nuo sumos $i + j$. Kitais žodžiais tariant – tai kvadratinė matrica su vienodais elementais įstrižainėse. Hankelio matricos rango sąvoka nusako algebrinius ryšius tarp tam tikros sekos elementų.

Tegul S yra realiųjų skaičių seka:

$$S := (x_0, x_1, x_2, \dots). \quad (2)$$

Sekos S Hankelio transformacija yra determinantų seka:

$$d_n := \det(x_{i+j-2})_{1 \leq i, j \leq n+1}; n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Sekos S H -rangas yra $m \in \mathbb{N}$, jeigu $d_{m+k-1} = 0$ su visais $k \in \mathbb{N}$, bet $d_{m-1} \neq 0$; žymima $HrS = m$ (Ragulskis ir Navickas, 2011).

Tarkime, kad $HrS = m$. Tada S yra determinuota algebrinė seka, o jos elementai išreiškiami tokia forma (Ragulskis ir Navickas, 2011):

$$x_n = \sum_{k=1}^r \sum_{l=0}^{n_k-1} \mu_{kl} \binom{n}{l} \rho_k^{n-l}; n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

kur sekos $\rho_k \in \mathbb{C}$; $k = 1, 2, \dots, r$; H -tikrinės reikšmės gali būti surastos iš Hankelio charakteristinės lygties

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_m \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{m+1} \\ & & \cdots & \\ x_{m-1} & x_m & \cdots & x_{2m-1} \\ 1 & \rho & \cdots & \rho^m \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

Šaknų kartotinumai n_k ($n_k \in \mathbb{N}$) tenkina lygybę $n_1 + n_2 + \dots + n_r = m$, o koeficientai $\mu_{kl} \in \mathbb{C}$; $k = 1, 2, \dots, r$; $l = 0, 1, \dots, n_k - 1$; gali būti nustatyti iš tiesinių algebrinių lygčių sistemos, sudarytos iš (4) lygybių. Egzistuoja vienintelis šios lygčių sistemos sprendinys.

Kai visos šaknys yra skirtingos, lygtis (4) gali būti supaprastinta į:

$$x_n = \sum_{k=1}^m \mu_{k0} \rho_k^n; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Galima pastebėti, kad chaotinės sekos neturi rango. Priešingu atveju jos būtų algebrinės progresijos ir galėtų būti išreikštos algebrine forma pagal (4).

1.3. Tiesinės algebras paketai BLAS ir LAPACK

Atliekant didelės apimties skaičiavimus kompiuteriu yra svarbu efektyviai išnaudoti jo resursus. Tiesinės algebras paketai BLAS (*Basic Linear Algebra Subprograms*) ir LAPACK (*Linear Algebra PACKage*) skirti vektorių ir matricų operacijoms atlikti ir traktuojami kaip šios srities programinių priemonių standartas. Operacijos šiuose paketuose skirstomos į 3 lygių grupes: vektorių ir vektorių operacijos vadinamos pirmo lygio funkcijomis, matricų ir vektorių – antro lygio, matricų ir matricų – trečio lygio funkcijomis. Siekiant efektyvesnių skaičiavimų, aukštesnio lygio operacijos yra prioritetas (Gustavson, Waśniewski, Dongarra, Herrero ir Langou, 2013). LAPACK naudoja trečio lygio operacijas, kad išnaudotų modernių kompiuterių teikiamas galimybes.

Šiame darbe LAPACK naudotas atliekant didelės apimties determinantų skaičiavimus. Standartinė funkcija DGETRF imta iš dinaminės C++ bibliotekos (dll). Algoritmai, skaičiuojantys H -rangus, turi daug *for* ciklą. Dėl to naudota C++ kalba, kuri šiuo aspektu pranašesnė už *Matlab*. Programinis kodas kompiliuotas ir vykdytas *Linux* terpėje, nes joje dinaminės bibliotekos paprastai veikia greičiau nei *Windows*.

2. H-RANGŲ IR JŲ PLOKŠTUMŲ SKAIČIAVIMAS

2.1. Skaitiniai H -rangų skaičiavimo algoritmai ir jų analizė

2.1.1. H -rango skaičiavimo algoritmas

Sekos H -rangas yra efektyvus skaitinis įrankis, kuriuo galima tirti konvergavimą į atraktorių netiesinėse dinaminėse sistemose. H -rangai sistemos parametrų ir pradinių sąlygų plokštumose gali atskleisti svarbią fizikinę informaciją apie sistemos elgseną (Landauskas ir Ragulskis, 2012).

Sekos $(p_j; j = 0, 1, \dots)$; $p_j \in \mathbb{R}$; H -rango skaičiavimo koncepcija pristatyta (Ragulskis ir Navickas, 2011).

Tegul $S := \{x_r\}_{r=0}^{+\infty}$ yra begalinė realiųjų arba kompleksinių skaičių seka. Baigtinis posekis $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2k-3}, x_{2k-2})$ iš $2k-1$ elementų gali būti pertvarkytas į Hankelio matricą $H^{(k)}$:

$$H^{(k)} := [x_{r+s-2}]_{1 \leq r, s \leq k} = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{k-1} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_k \\ & & \cdots & \\ x_{k-1} & x_k & \cdots & x_{2k-2} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

čia k yra Hankelio matricos eilė. Matricų $\{H^{(k)}\}_{k=2}^{+\infty}$ sekos Hankelio transformacijos rezultatas yra determinantų seka: $\{\det(H^{(k)})\}_{k=2}^{+\infty} = \{d^{(k)}\}_{k=2}^{+\infty}$.

Diskrečios sekos rango koncepcija pristatyta (Ragulskis ir Navickas, 2011). Tai toks natūralusis skaičius m , kuris egzistuojant rangui tenkina tokią sąlygą: $d^{(m+n)} = 0$ su visais $n \in \mathbb{N}$, jei tik $d^{(m)} \neq 0$. Šiame darbe naudojamas žymėjimas:

$$HrS = m. \quad (8)$$

Jei toks skaičius m neegzistuoja, priimta, kas seka S rango neturi: $HrS := +\infty$. Tačiau, jei diskrečios sekos rangas egzistuoja, gali būti išvestas determinuotas matematinis modelis, nusakantis sekos evoliuciją. Yra priimta, kad $Hr(0, 0, 0, \dots) = 0$. Reikia pastebėti, kad $Hr(p_0, \dots, p_m, 0, 0, 0, \dots) = m+1$, jei tik $p_m \neq 0$ su $m = 0, 1, 2, \dots$.

Galima pastebėti, kad chaotinė seka neturi rango. Priešingu atveju šios sekos dinamika būtų determinuota, nes galėtų būti išvestas algebrinis modelis, nusakantis pačią seką. Tai prieštarautų chaotinės sekos sampratai.

2.1.2. Slankaus kablelio aritmetikos aspektai skaičiuojant H -rangus

Kompiuterio atmintyje visi realieji skaičiai saugomi kaip artimiausias dvejetainis skaičius (Kahan, 1996):

$$x = (-1)^s \cdot (1 + Fraction) \cdot 2^{Exp - Bias}. \quad (9)$$

Slankaus kablelio dvigubo žodžio ilgio skaičius 32 bitų sistemoje susideda iš ženklo bito, 11 bitų eksponentinės dalies ir 52 bitų trupmeninės dalies (mantisės). *Bias* yra lygus 1023, todėl didžiausias 2 laipsnis yra $\sum_{i=0}^{10} 2^i - 1023 = 1024$, o mažiausias $0 - 1023 = -1023$. Mantisė yra dvejetainis

skaičius, todėl mažiausiai reikšmingas bitas yra $2^{-52} \approx 2.22 \cdot 10^{-16}$. Ji paprastai vadinamas mašininis epsilon. Tokiu atveju 16 mantisės skaitmuo bendruoju atveju yra apytikslis.

Nagrinėkime du slankaus kablelio skaičius, kurie skiriasi mažiau nei mašininis epsilon (pvz., 2^{-21} ir 2^{-20}). Reikia atidumo atliekant aritmetines operacijas, kai tiriamas konvergavimas ar pan. Jei tam tikros sekos nusistovėjimas fiksuojamas, kai du skaičiai nesiskiria labiau nei mašininis epsilon, praktiniu požiūriu jie yra lygūs, tačiau kompiuterio atmintyje gali būti ir skirtingi. Tai gali turėti įtakos skaičiavimams, kuriuose naudojami du artimi vienas kitam skaičiai.

Turima skaičių seka: 2,5; -1; 0,25; -0,06; -0,25; 0,1; 0,25; 0,1. Tegul tai bus tam tikro vaizdavimo orbita. Naudojant *Matlab* sekos Hankelio transformacijai rasti, gauta: $d^{(1)} = 2,5$, $d^{(2)} = -0,375$, $d^{(3)} = 0,099125$, $d^{(4)} = 0,07683046$. Paprastai šie rezultatai yra pakankamo tikslumo, nes skaičiavimams naudojama dvigubo žodžio ilgio slankaus kablelio aritmetika, o gauti rezultatai mantisėje turi mažiau nei 16 skaitmenų.

Darbe slankaus kablelio aritmetika buvo simuliuota parašant C++ kodą, imituojantį operacijas „+“, „-“, ir „*“. Tai panaudota determinantams skaičiuoti, skleidžiant juos pirmos eilutės adjunktais, siekiant nustatyti, kur prarandamas skaičiavimų tikslumas ir, dar svarbiau, ar tai koreliuoja su netiesinio vaizdavimo savybėmis.

Pasirinktas tam tikras slankaus kablelio skaičiaus sandaros tipas siekiant iliustruoti minėtus teiginius. 1 bitas skirtas ženklui, 5 bitai – eksponentinei daliai ir 6 bitai – mantisei. 5 bitų mantisė leidžia naudoti maksimalų daugiklį $2^{(31-1)/2} = 2^{15} = 32768$ (nes $2^0 + 2^1 + \dots + 2^4 = 31$). Analogiškai galima nustatyti mantisės nusakomą intervalą.

Grįžtant prie sekos, kai kuriose eksperimento operacijose gaunami duomenys, pavaizduoti 1 lentelėje.

1 lentelė. Daugyba slankaus kablelio aritmetikoje

$0,06_{10} \times$	1, 1 1 1 0 0 0	$\cdot 2^{-5}$
$0,06_{10}$	1, 1 1 1 0 0 0	$\cdot 2^{-5}$
$0,0035095_{10}$	1, 1 1 0 0 1 0 1	$\cdot 2^{-9}$

Šiuo atveju daugybos rezultatas turi daugiau nei 6 skaičius mantisėje. Papildomas bitas $2^{-7} \cdot 2^{-9} = 2^{-16}$ nebus saugomas rezultate. Priklausomai nuo aparatūrinės įrangos, naudojamos skaičiavimams, šis papildomas bitas greičiausiai bus prarastas. Toks tikslumo praradimas yra per trumpas mantisės kaina.

Nesunku pastebėti, kad du sudedami skaičiai gali skirtis daugiau nei per normalizuotą mantisę. Tokiu atveju po mantisių normalizavimo vieno iš operandų mantisė tampa lygi 0. Šis operandas nedalyvauja operacijoje ir

rezultatas prilyginamas kitam operandui. Todėl bendroju atveju operacijos persikelia į laipsnio rodiklius. Bet taip yra prarandamas rezultatų tikslumas.

2.1.3. Pseudorangų skaičiavimas

Norint nustatyti sekos rangą, reikia rasti tokią matricos dimensiją $\overline{m}+1$, kad Hankelio matricos determinantas būtų lygus nuliui. Praktikoje pakanka nagrinėti determinantus iki tam tikro dydžio ε , pvz., mašininio epsilon. Kvadratinės realiosios matricos determinanto skaičiavimas reikalauja nemažų kompiuterio resursų, kai matricos matmenys yra dideli.

H -rangų plokštumų braižymas reikalauja masinių Hankelio matricų determinantų skaičiavimo. Siekiant minimizuoti skaičiavimo laiko sąnaudas, vietoje standartinės MATLAB funkcijos $det()$ naudotas C++ su LAPACK paketu.

Nors LAPACK yra standartas tiesinės algebros srityje, jis neturi standartinės funkcijos determinantams skaičiuoti. Todėl panaudota matricų PLU dekompozicija (funkcija $dgetrf()$). Ji faktorizuoja matricą į apatinę trikampę matricą L , turinčią vienetus pagrindinėje įstrižainėje, viršutinę trikampę matricą U ir keitinių matricą P . Funkcija $dgetrf()$ sugeneruoja tris matricas:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ l_{m1} & l_{m2} & \dots & 1 \end{bmatrix}; U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1m} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2m} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{mm} \end{bmatrix}; P_{piv} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Dėl trikampės struktūros L ir U atmintyje saugomos kaip viena matrica. P_{piv} elementai parodo eilutės numerį p_i , kuri turi būti sukeista su eilute i . Tokiu būdu P_{piv} gali būti transformuota į keitinių matricą P , turinčią tik po vieną vienetą kiekvienoje eilutėje. Tokiu būdu, pradinė matrica H faktorizuojama kaip $H = LUP$.

$$\left|d^{(m)}\right| = |LUP| = |L| \cdot |U| \cdot |P| = 1 \cdot |U| \cdot 1 = \prod_{i=1}^m u_{ii}. \quad (11)$$

Pradinės matricos determinanto modulis lygus U pagrindinės įstrižainės elementų sandaugai (11). Keitinių kiekis nusako determinanto ženklą. Bet čia svarbi tik determinanto modulio reikšmė. Determinantų skaičiavimas tęsiamas tol, kol U pagrindinės įstrižainės elementų sandauga didesnė už ε . Taip randamas sekos pseudorangas. ε parinkimas yra atskiras uždavinys, aptariamas tolesniuose skyriuose.

Reikia paminėti, kad atliekant skaičiavimus su LAPACK reikia transponuoti matricas. Taip daroma todėl, kad LAPACK traktuoja stulpelio indeksą kaip pirmąjį elemento indeksą.

C++ greičio atliekant ciklus (skirtingai nei *Matlab*) ir LAPACK matematinio tikslumo derinys leido žymiai sparčiau konstruoti H -rangų parametrų ir fazines plokštumas. Galutinė vizualizacija atlikta su *Matlab* grafiniu paketu, nes tai yra jo stiprioji pusė.

2.2. H -rangų plokštumų skaitinis rekonstravimas

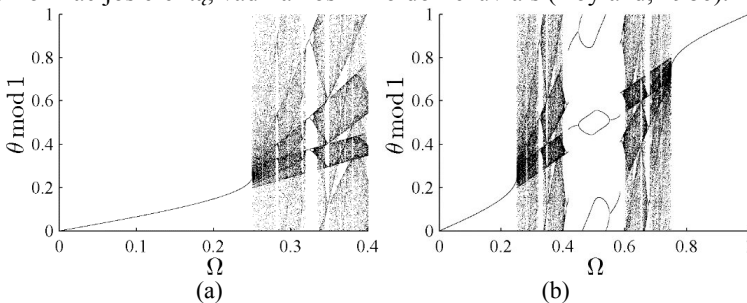
2.2.1. Konvergavimo greičio į Arnoldo liežuvius apskritiminiame vaizdavime tyrimas

Pagrindinis šio skyriaus tikslas yra parodyti, kad H -rango koncepcija gali būti efektyviai panaudota konvergavimo savybėms apskritiminiame vaizdavime tirti. Sistemos parametrų ir pradinių sąlygų erdvėje suskaičiuoti ir vizualizuoti H -rangai atskleidžia vidinį dinaminės sistemos algebrinį sudėtingumą.

Žmogaus širdies ritmo sutrikimai ir sinusinio mazgo ląstelių dinamika modeliuojama vadinamoju apskritiminiu vaizdavimu (Glass ir Shrier, 2014). Tai vienmatis iteracinis vaizdavimas:

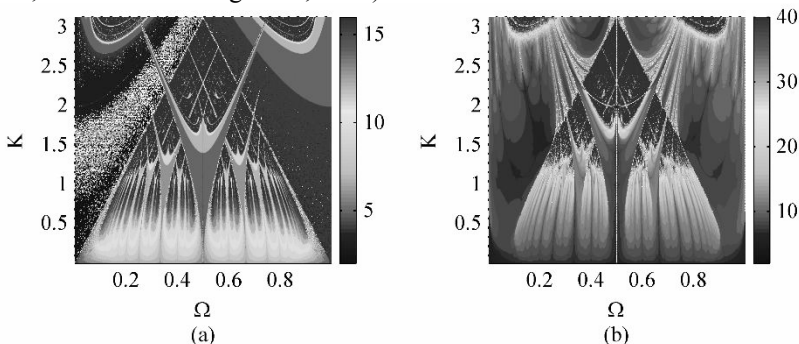
$$\theta_{n+1} = f(\theta_n) = \theta_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \cdot \sin(2\pi\theta_n); \quad (12)$$

čia θ yra kampas ($\theta \in [0;1)$), K – sąsajos stiprumas su išoriniu žadinimu, Ω – vedantis dažnis, o $n = 0, 1, \dots$. Esant tam tikroms K reikšmėms ($0 < K < 1$) ir atitinkamoms Ω vėrtėms, apskritiminis vaizdavimas patiria sinchronizacijos (tarp vidinio ir išorinio dažnių) efektą. Sinchronizacijos metu θ_n kinta kaip racionalus n daugiklis. Parametrų plokštumos Ω - K sritys, atitinkančios sinchronizacijos efektą, vadinamos Arnoldo liežuviais (Boyland, 1986).



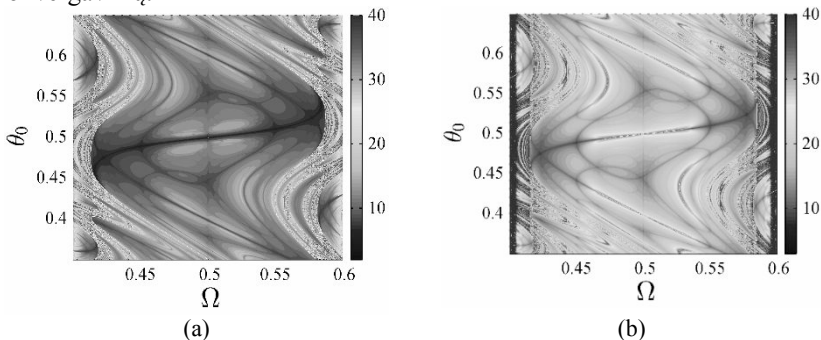
1 pav. Apskritiminio vaizdavimo bifurkacijų diagramos, kai $K = \pi/2$

Tyrimė naudotas diskretus apskritiminis vaizdavimas $\theta_{n+1} = f(\theta_n)$, aprašomas lygtimi (12), siekiant iliustruoti pereinamųjų procesų konvertavimą į stacionarius režimus. Vaizdavimas leidžia H -rangų plokštumoje sukonstruoti vizualiai įdomius raštus, kurie turi svarbią informaciją apie periodinių orbitų stabilumą sistemoje. Ši informacija yra naudinga tiriant ar valdant kvaziperiodines netiesines sistemas (Landauskas, Ragulskienė ir Ragulskis, 2012; Landauskas ir Ragulskis, 2013).



2 pav. Apskritiminio vaizdavimo pseudorangai. (a) dalis konstruota praleidžiant pereinamuosius procesus, o pradinė sąlyga $\theta_0 = 0,5$; (b) dalyje vertinti ir pereinamieji procesai

Apskritiminio vaizdavimo bifurkacijų diagrama pateikta 1 pav. Dėl bifurkacijų diagramos simetriškumo galima analizuoti tik dalį Ω apibrėžimo srities. Tačiau tai negalioja nagrinėjant pereinamuosius procesus ar tiriant konvergavimą.



3 pav. Apskritiminio vaizdavimo pseudorangai plačiausio Arnoldo liežuvio aplinkoje ($0,4 \leq \Omega \leq 0,6$, $0,35 \leq \theta_0 \leq 0,65$ ir $K = 0,5\pi$). Dalyje (a): $\varepsilon = 2,22 \cdot 10^{-16}$; dalyje (b): $\varepsilon = 10^{-50}$; $\bar{m} = 40$

H -rangas darbe panaudotas kaip Arnoldo liežuvių rekonstravimo skaitinis įrankis. Pirmiausia H -rangas skaičiuotas parametru srityje $0 \leq \Omega \leq 1$ ir $0 \leq K \leq \pi$. Kiekvienai Ω ir K , kaip pradinių sąlygų, porai konstruojama seka $\{\theta_j\}$, $j = 0, 1, \dots$, pradinė sąlyga: $\theta_0 = 0,5$. Sukonstruoti sekai surandamas H -rangas. Dėl chaotinės sekos rango neegzistavimo reikia apibrėžti viršutinę H -rango reikšmę, pvz., $\bar{m} = 40$, ir jei Hankelio transformacijos determinantai neviršta nuliais iki \bar{m} , priimama, kad $Hr\{\theta_j\} = \bar{m}$. Gauti H -rangai grafiškai pavaizduoti 2(b) pav. Kuo daugiau sekos $(\theta_j; j = 0, 1, \dots)$ elementų įtraukiama į skaičiavimus, tuo gauta iliustracija panašesnė į Arnoldo liežuvių struktūrą apskritiminiame vaizdavime (Schilder ir Peckham, 2007).

Prieš tai aptartos slankaus kabelio aritmetikos subtilybės iliustruotos skaitiniu eksperimentu, kurio rezultatai pateikti 3(a) ir (b) pav. Eksperimentu pademonstruota, kad skaičiavimai sėkmingai atliekami skaičių laipsnio rodikliuose. Mažinant ε reikšmę, kai kurios H -rangų reikšmės sumažėja, vadinasi, buvo nagrinėjami aukštesnės eilės determinantai. H -rangų reikšmės, esančios tarp gautų naudojant mašininį epsilon, kaip 0 atitikmenį (3(a) pav.), ir \bar{m} , leidžia skaičiavimuose naudoti ε , mažesnę už mašininį epsilon.

2.2.2. Optimalios ε reikšmės H -rangų plokštumoms parinkimas

Atliktas skaitinis eksperimentas, apskritiminio vaizdavimo parametru plokštumoje: $0 \leq \Omega \leq 1$, $0 \leq K \leq \pi$ su pradine sąlyga $\theta_0 = 0,5$, nuosekliai keičiant ε reikšmę. Rezultatai pateikti 4 pav. Maksimali pseudorango reikšmė parinkta automatiškai.

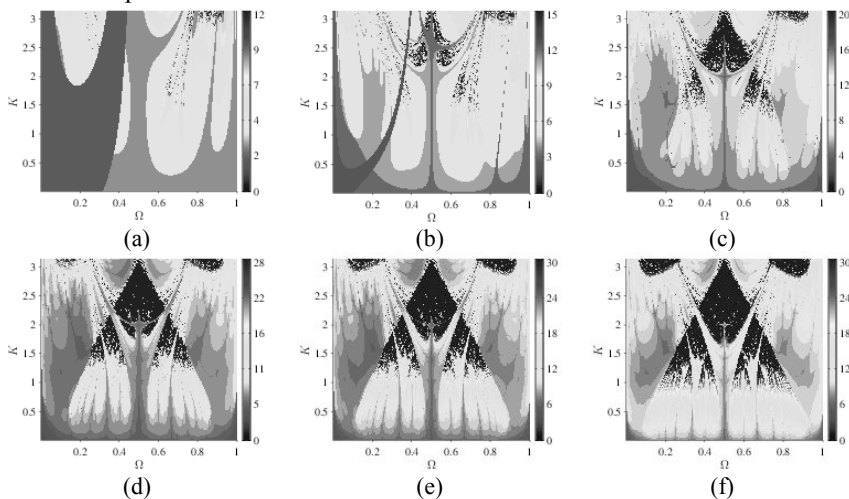
Tarp 4(e) ir (f) pav. nėra esminio vizualaus skirtumo. Čia galima fiksuoti ε reikšmę ir toliau ją naudoti pseudorangų plokštumoms. Tačiau toks ε parinkimas turi būti pagrįstas. Todėl buvo sukonstruotas dviejų gretimų pseudorangų plokštumų, kaip skaitmeninių vaizdų, skirtumų vidutinių kvadratinių paklaidų E grafikas.

Tegul $Hr_1(i, j)$ bus pseudorango reikšmė i -ojoje eilutėje ir j -tajame stulpelyje, suskaičiuoto su ε_1 . Analogiškai apibrėžiamas $Hr_2(i, j)$ prie ε_2 . Tada minėtas skirtumas bus nusakomas lygtimi (13):

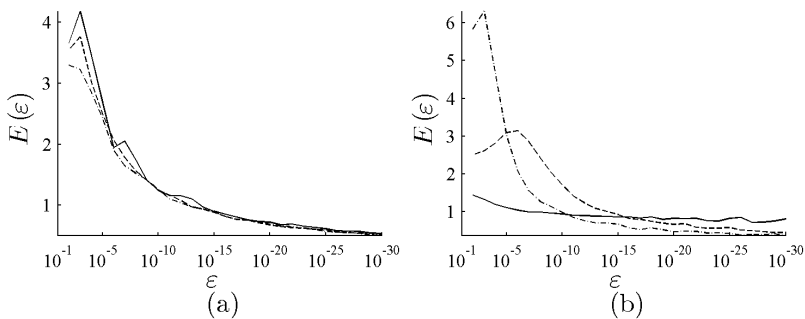
$$E(\varepsilon_2) = \sqrt{\frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (Hr_1(i, j) - Hr_2(i, j))^2}; \quad (13)$$

kur m ir n yra atitinkamų eilučių ir stulpelių skaitmeniniame pseudorangų vaizde skaičiai. $E(\varepsilon)$ grafikas pateiktas 5 pav., kuriame matyti, kad

pseudorangų plokštumos kinta nežymiai, kai $\varepsilon = 10^{-25}$. Ši vertė kiek toliau, nei mašininis epsilon.



4 pav. Pseudorangų plokštumos apskritiminio vaizdavimo parametų plokštumose ($0 \leq \Omega \leq 1$, $0 \leq K \leq \pi$ ir $\theta_0 = 0,5$): (a): $\varepsilon = 10^{-1}$; (b): $\varepsilon = 10^{-2}$; (c): $\varepsilon = 10^{-4}$; (d): $\varepsilon = 10^{-8}$; (e): $\varepsilon = 10^{-12}$; (f): $\varepsilon = 10^{-20}$



5 pav. Ryšys tarp dviejų gretimų pseudorangų plokštumų, kaip skaitmeninių vaizdų, skirtumų vidutinių kvadratinų paklaidų E ir ε , kai $m = 30$. Skaičiavimams naudota parametų plokštuma Ω - K su dimensijomis $[0;1] \times [0;\pi]$: (a) ištisinė linija nusako E kitimą, kai $\theta_0 = 0,25$; brūkšninė linija – kai $\theta_0 = 0,5$; brūkšninė ir taškinė linija – kai $\theta_0 = 0,75$ ir Ω - θ_0 su dimensijomis $[0;1] \times [0;1]$ (b) ištisinė linija nusako E kitimą prie $K = 0,25\pi$; brūkšninė linija – kai $K = 0,5\pi$; brūkšninė ir taškinė linija – kai $K = 0,75\pi$)

2.3. Skyriaus išvados

H -rangu paremta metodika, susidedanti iš 2 žingsnių, sėkmingai gali būti panaudota vizualizuojant Arnoldo liežuvius. Pirmiausia sistema iteruojama nustatytą iteracijų kartų nuo tam tikrų pradinių sąlygų. Gautai sekai, be pereinamųjų procesų, randamas H -rangas, kuris sistemos parametru plokštumoje išryškina Arnoldo liežuvius. Ir čia nereikia tikrinti, ar sinchronizacijos efektas pasireiškė. Siekiant gautą H -rangų plokštumą naudoti tiriant netiesines dinamines sistemas, reikia atkreipti dėmesį į jų kokybę.

3. KONVERGAVIMO DAUGDAROS IR JŲ TAIKYMAS VALDANT NETIESINES SISTEMAS

3.1. Stabilios, nestabilios ir neasimptotinio konvergavimo daugdaros

Neasimptotinio konvergavimo daugdara diskrečiame vaizdavime apibrėžiama kaip pradinių sąlygų rinkinys, vedantis sistemą į periodinį režimą per baigtinį iteracijų skaičių.

Šiame skyriuje kalbama apie konvergavimą į stabilų ribinį ciklą periodiškai žadinamoje netiesinėje matematinėje švytuoklėje. Sekos H -rango sąvoka panaudota pereinamųjų procesų tyrimui. Sekos Hankelio rangas (H -rangas) leidžia įvertinti sekos dinamikos algebrinį sudėtingumą.

Neasimptotinio konvergavimo į fiksuotą tašką daugdaros struktūros iliustravimui panaudotas apskritiminis vaizdavimas. Naudojant H -rangų plokštumas, pademonstruota, kad netiesinės matematinės švytuoklės pereinamųjų procesų stroboskopinėje reprezentacijoje taip pat egzistuoja neasimptotinio konvergavimo į stabilų ribinį ciklą daugdara. Daugdara panaudota valdyti pereinamuosius procesus, sumažinant pereinamųjų procesų trukmę, pasiūlytas metodas, paremtas išorine perturbacija į sistemą.

3.2. Neasimptotinio konvergavimo daugdara ir H -rangas

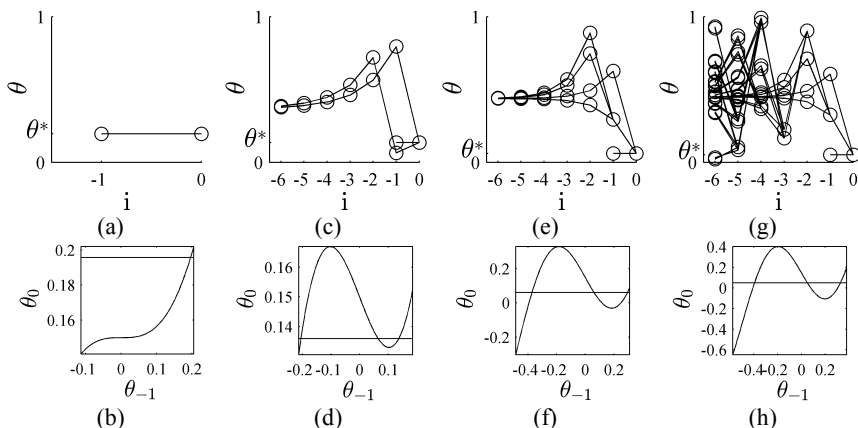
H -rangu paremta metodika iliustruojama naudojant apskritiminių vaizdavimą $\theta_{n+1} = f(\theta_n)$ (lygtis (12)). Vaizdavimas tirtas, kai $\Omega = 0,15$. Stabilus periodo-1 režimo atveju: $\theta^* = f(\theta^*)$. Čia θ^* yra stabilus periodo-1 taškas, kai $\Omega = 0,15$ ir $K = 1$ (to pakanka, kad egzistuotų stabilus periodo-1 taškas). Konvergavimas į šį tašką gali būti asimptotinis ($\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \theta^*$) arba neasimptotinis (baigtinis iteracijų skaičius perveda sistemą į stabilų periodo-1 režimą).

Neasimptotinio konvergavimo daugdara analitiškai randama sprendžiant lygtį

$$\theta_n = f^{-1}(\theta_{n+1}); \quad (14)$$

priimant, kad $\theta_{n+1} = \theta^*$. Lygtis (14) yra transcendentinė lygtis, todėl ją spręsti reikia skaitiniais metodais. Iteracija atgal lemia θ_n reikšmę intervale:

$$\theta_n \in \left[\theta^* - \Omega - \frac{K}{2\pi}; \theta^* - \Omega + \frac{K}{2\pi} \right]. \quad (15)$$

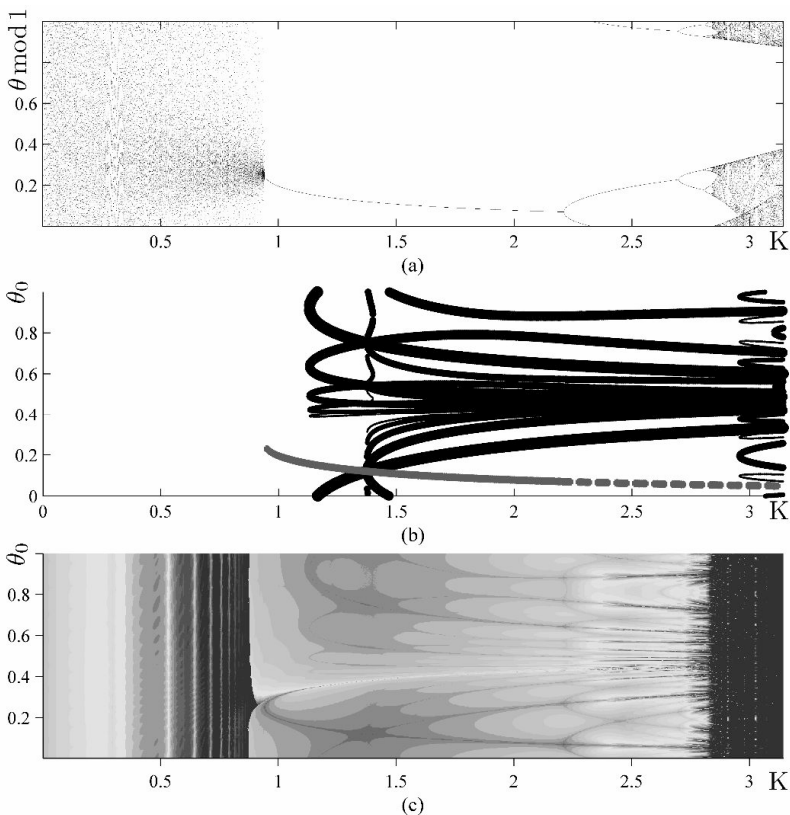


6 pav. Neasimptotinio konvergavimo daugdaros į stabilų periodo-1 režimą konstravimas. Yra tik 1 taškas, pats stabilusis taškas, kuris per baigtinį iteracijų skaičių veda į periodo-1 režimą, kai $\Omega = 0,15$ ir $K = 1$ ((a) dalis). Dalys (c), (e) ir (g) iliustruoja daugdaros ieškojimą, kai $\Omega = 0,15$; $K = 1,25$, $K = 2,5$ ir $K = 3$ atitinkamai. Dalys (d), (f) ir (h) iliustruoja šaknų radimo procesą, horizontalios linijos atitinka $\theta_0 = \theta^*$, kreivės vaizduoja

$$f(\theta_{-1})$$

Jeigu lygtis (14) turi vienintelį sprendinį $\theta_n = \theta^*$, tai neasimptotinio konvergavimo daugdaros nėra. Tokia situacija iliustruota 6(a) pav. Lygties (14) šaknų radimo procesas pavaizduotas 6(b) pav. Yra tik viena šaknis, kai $\Omega = 0,15$ ir $K = 1$.

Kai $\Omega = 0,15$ ir $K = 1,25$, situacija tampa sudėtingesnė (6(c) pav.). Šiuo atveju egzistuoja 3 šaknys lygčiai (14). Viena šaknis atitinka stabilų periodo-1 režimą. Likusios 2 šaknys atitinka tokias θ_{-1} reikšmes, su kuriomis per vieną iteraciją $\theta_0 = \theta^*$. Galima pastebėti, kad kiekviena iteracija atgal lemia po dvi naujas tokias šaknis. Tokiu būdu neasimptotinio konvergavimo daugdara yra begalinė suskaičiuojama pradinių sąlygų, per baigtinį iteracijų skaičių, vedančių į stabilų tašką, aibė.



7 pav. Apskritiminio vaizdavimo bifurkacijų diagrama vaizduojama dalyje (a). Neasimptotinio konvergavimo daugdara į periodo-1 režimą pateikta dalyje (b). Pseudorangų plokštuma pateikta dalyje (c). Visuose skaičiavimuose $\Omega = 0,15$

Nagrinėjamo apskritiminio vaizdavimo ($\Omega = 0,15$) bifurkacijų diagrama pateikta 7(a) pav. Neasimptotinio konvergavimo daugdara parodyta 7(b) pav. Stabilus periodo-1 režimas vaizduojamas stora ištisine raudona linija, nestabilus – punktyrine. Visos juodos linijos nusako neasimptotinio konvergavimo daugdarą į periodo-1 režimą (stabilų ir nestabilų). Storiausia juoda linija žymi aibę pradinų sąlygų, kurios veda sistemą į fiksuotą tašką tik per 1 iteraciją, plonesnė linija – aibę pradinų sąlygų, vedančių į fiksuotą tašką per 2 iteracijas ir t. t. Visos pradinės sąlygos intervale $\theta_0 \in [0;1]$ (esant fiksuotiems Ω ir K) gali būti suklasifikuotos į 2 aibes: begalinę nesuskaičiuojamą pradinų sąlygų, lemiančių asimptotinį konvergavimą į θ^* , aibę ir begalinę suskaičiuojamą,

pradinių sąlygų, vedančių sistemą į θ^* per baigtinį skaičių iteracijų, aibę. Tai galioja, jei periodo-1 režimas egzistuoja. Klasifikaciją iliustruoja 7(b) pav.

Naudojant apskritiminį vaizdavimą atliktas skaitinis eksperimentas, skaičiuoti H -rangai srityje $0 \leq \theta_0 \leq 1$ ir $0 \leq K \leq \pi$ su fiksuotu $\Omega = 0,15$. Kiekvienai θ_0 ir K porai sukonstruota seka $(\theta_j; j = 0, 1, \dots)$ ir rastas jos H -rangas. Rezultatai pateikti 7(c) pav., kur matoma neasimptotinio konvergavimo į periodo-1 režimą daugdara.

3.3. Pseudodaugdaros sistemos parametrų erdvėje

3.3.1. Pseudostabili struktūra visiškai apgręžiamoje Fermi dalelėje

Vienas svarbiausių darbo rezultatų yra pademonstravimas, kad visiškai apgręžiamoje šokinėjančio kamuoliuko problemoje egzistuoja pseudostabili neasimptotinio konvergavimo struktūra. Struktūrą pavaizduoti leidžia H -rangų plokštumos. Pastebėta, kad ši struktūra yra panaši į stabilią neasimptotinio konvergavimo į nestabilias periodines orbitas struktūrą. Tačiau šiuo atveju konvergavimas yra tik laikinas, nes neasimptotinis konvergavimas visiškai apgręžiamose sistemose neegzistuoja. Efektas panaudotas laikinam nestabilių orbitų stabilizavimui visiškai apgręžiamuose netiesiniuose vaizdavimuose. Tyrimams naudoti H -rangu paremti metodai (Landauskas ir Ragulskis, 2012).

Pastovaus gravitacinio lauko veikiamą ant judančios platformos krentanti elementarioji dalelė vadinama aukštos energijos Fermi dalele. Modelis pasiūlytas kaip alternatyvus Fermi-Ulam modelio, aprašančio kosminę radiaciją, supaprastinimas (Pustilnikov, 1983). Parodyta, kad modelis yra naudingas iliustruojant keletą netiesinės dinamikos efektų (Luo ir Guo, 2013).

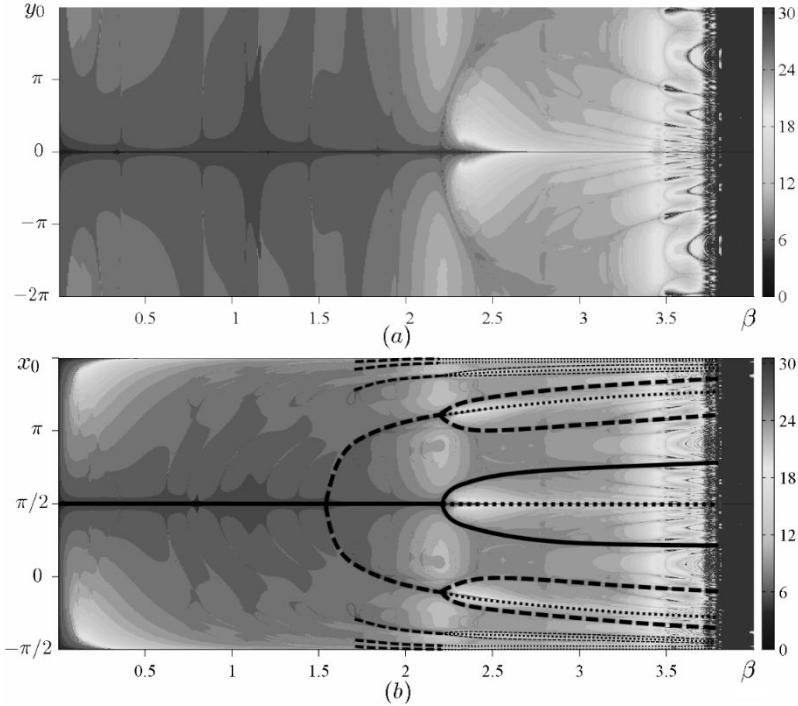
Fermi dalelės problema yra diskreti dinaminė sistema. Jei dalelės ir platformos smūgiai nėra tamprūs, dalelės greitis iš karto po smūgio momento gali būti nusakomas diskrečiuoju vaizdavimu, kuris dar vadinamas šokinėjančio kamuoliuko problema (Joseph, Ines ir Sanjuan, 2012):

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n; \\ y_{n+1} = \alpha y_n + \beta \cos(x_n + y_n), \end{cases} \quad (16)$$

čia x_n nusako laiko intervalą tarp $(n-1)$ -ojo ir n -ojo smūgių, o y_n – greitis iš karto po n -ojo smūgio momento. Parametras $\alpha \in (0, 1]$ yra elastingumo koeficientas, parametras β siejamas su platformos svyravimų dažniu.

Periodo-1 fiksuoti taškai šokinėjančio kamuoliuko problemoje randami lygtyse (16) naudojant keitinius $x_{n+1} = x_n$ ir $y_{n+1} = y_n$. Egzistuoja dvejopi fiksuoti taškai: $x^{(1)} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $y^{(1)} = 0$ ir $x^{(2)} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $y^{(2)} = 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

Fiksuotas $\alpha = 0,1$ ir tirtas lygčių (16) Jakobiano tikrinių reikšmių $\lambda_{1,2}(x^{(k)}, y^{(k)})$, $k = 1, 2$, kitimas β atžvilgiu. Parodyta, kad $(x^{(1)}, y^{(1)})$ yra stabilus intervale $0 < \beta < 2,200$ (abi tikrinės reikšmės moduliu neviršija 1), o stabilumas prarandamas, kai $\beta > 2,200$.

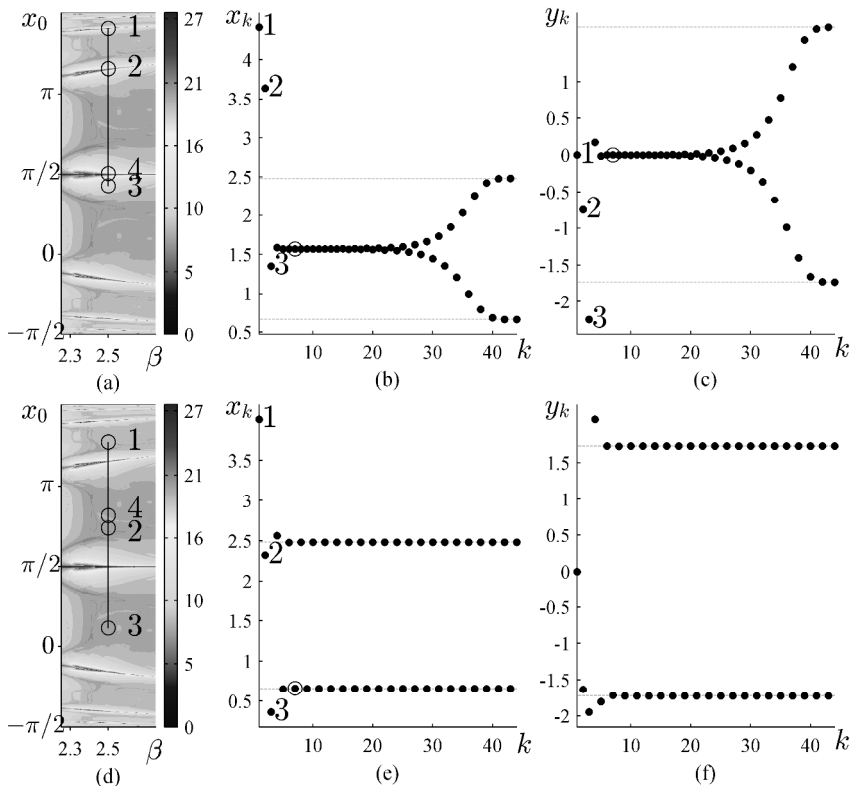


8 pav. H -rangų plokštumų kitimas β atžvilgiu, fiksuotus $x_0 = \pi/2$ (a) ir $y_0 = 0$ (b). Čia $\alpha = 0,1$. Scheminė diagrama, vaizduojanti skeletinę H -rangų plokštumos struktūrą, pateikta dalyje (b). Storos vientisos linijos atitinka stabilius periodo-1 ir periodo-2 režimus. Centrinė stora taškinė linija atitinka nestabilų periodo-1 režimą. Visos kitos linijos atitinka pseudostabilios konvergavimo daugdaros į nestabilų periodo-1 tašką struktūrą

H -rangų plokštumų kitimas, kai β tolygiai kinta intervale $[0; 4]$, vaizduojamas 8 pav. Parametrų plokštumose kiekvienas taškas $(\pi/2; y_0)$ ar $(x_0; 0)$ atitinka skirtingą pereinamąjį procesą su pradinėmis sąlygomis $(x_0; y_0)$.

Spalva atitinka H -rango vertę. Dvimatėje parametų plokštumoje H -rangai skaičiuojami tokiu būdu: $Hr(\sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \sqrt{x_2^2 + y_2^2}, \dots)$.

8(b) pav. matyti, kad sistemoje įvyksta periodo dvigubėjimo bifurkacija esant $\beta = 2,200$. Fiksuotas taškas $(x_0 = \pi/2; y_0 = 0)$ tampa nestabilus, pastebima charakteringa šakutės tipo bifurkacijos forma. Reikia pastebėti, kad čia išorinė šakutės dalis neatitinka stabilaus periodo-2 taško, nes nors β kinta, bet y_0 yra fiksuotas.



9 pav. Pereinamųjų procesų, prasidedančių antros „tulpės formos“ srities H -rangų plokštumoje nusakomomis pradinėmis sąlygomis, kitimas. Pradinės sąlygos dalyse (a), (b) ir (c) žymimos „1“. Pradinės sąlygos iš „tulpės formos“ srities lemia laikiną orbitos stabilizavimą. Čia $\alpha = 0,1$ ir $\beta = 0,25$

Vertikali H -rangų juosta ties $\beta = 2,5$ pavaizduota 9(a) pav. Aukštesnių H -rangų sritis ties $x_0 = \pi/2$ tebūnie įvardinta kaip centrinė „tulpės formos“ sritis.

Kitos iš eilės einančios „tulpės formos“ sritys atitinkamai bus vadinamos pirmąją, antrąja ir t. t. Galima pastebėti, kad „tulpių“ centrus atitinkančios pradinės sąlygos veda sistemą į nestabilios periodo-1 orbitos aplinką, kuri vėliau palaipsniui pereina į stabilų periodo-2 režimą. 9(a) pav. pavaizduoto skaitinio eksperimento pradinės sąlygos yra $x_1 = 4,4082$ ir $y_1 = 0$. y_1 turi būti lygus 0, nes iš 8(b) paveikslo matyti, kad $(x_0 = \pi/2; y_0 = 0)$. 4 iteracijos pavaizduotos 9(a) pav., tačiau vaizduotos tik x koordinatės. Pavyzdžiui, antrojo taško koordinatės yra $x_2 = 3,6392$ ir $y_2 = -0,7489$. Tokiu būdu antrojo taško gana tiksliai atitiktis pirmajai „tulpei“ yra visiškai atsitiktinė.

x_k ir y_k evoliucija pateikta 9(b) ir (c) pav. Pereinamieji procesai priartėja prie nestabilaus periodo-1 taško $(x_0 = \pi/2; y_0 = 0)$ arčiausiai 6 iteracijoje, tačiau niekada jo nepasiekia. Atstumas iki fiksuoto taško įvertinamas, kaip:

$$\sqrt{(x_6 - \pi/2)^2 + y_6^2} = 6.8454 \cdot 10^{-8}. \quad (17)$$

Tokia pritraukimo sričių vizualizacija H -rangais buvo gana netikėta. 8(b) pav. pateikta scheminė diagrama, vaizduojanti aptartą daugdarą. Pradinės sąlygos, esančios H -rangų plokštumos sričių, atitinkančių „tulpių“ centrus, centruose (8(b) pav.) nelemia neasimptotinio konvergavimo į nestabilią periodo-1 orbitą. Sistema tik laikinai pritraukiama į šią sritį. Svarbu pastebėti, kad sistema pakliūva į šią sritį per baigtinį iteracijų skaičių. Todėl ši topologinė struktūra pavadinta pseudostabilia nestabilios orbitos struktūra.

3.4. Diskrečiųjų dinaminių sistemų valdymas

Šiame skyrelyje parodoma, kad H -rangas gali būti naudojamas kaip diskrečiųjų dinaminių sistemų valdymo įrankis. Pirmiausia pseudostabili daugdara Fermi dalelės problemoje panaudota laikinam nestabiliam periodo-1 atraktoriui stabilizuoti. Tada pateikiami H -rango taikymai apskritiminio vaizdavimo procesams valdyti.

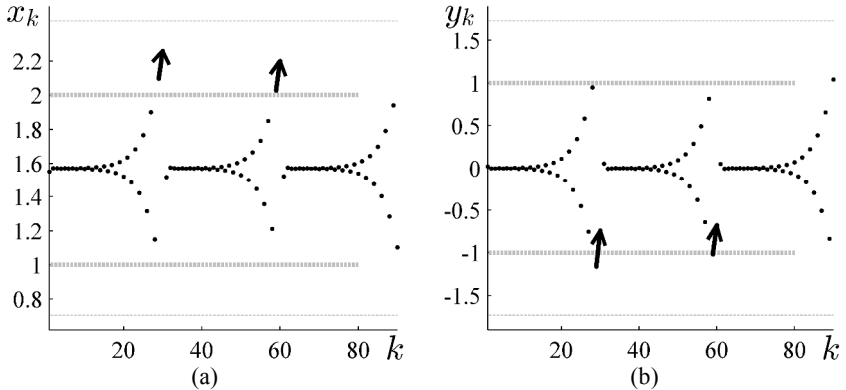
3.4.1. Laikinas nestabilios periodo-1 orbitos stabilizavimas

Remiantis ankstesnio skyriaus rezultatais, pasiūlyta nestabilių orbitų šokinėjančio kamuoliuko problemoje valdymo (laikino stabilizavimo) strategija. Strategija iliustruota 10 pav. Valdymo impulsas perkelia sistemą prie arčiausio pseudostabilios struktūros taško. Tada sistema neasimptotiškai konverguoja į nestabilų periodo-1 režimą ir išbūna ten tam tikrą skaičių iteracijų.

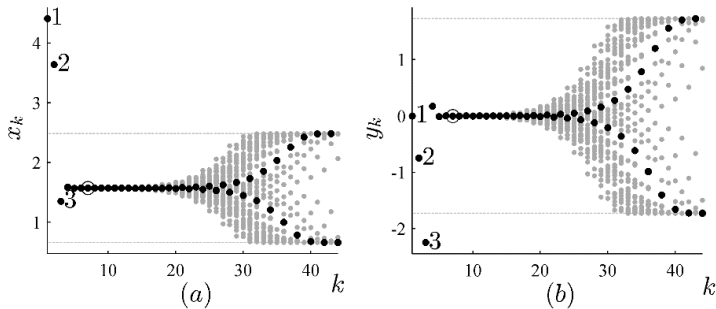
Pasiūlyta laikino nestabilių orbitų stabilizavimo strategija susideda iš tokių žingsnių:

- 1) suskaičiuoti H -rangų plokštumą visiškai apgręžiamam diskrečiam vaizdavimui;

- 2) H -rangų plokštumoje identifiukuoti pseudokonvergavimo į nestabilią orbitą neasimptotinio konvergavimo daugdarą;
- 3) išoriniu impulsu pervesti sistemą į artimiausią šios daugdaros šaką;
- 4) leisti sistemai neasimptotiškai konverguoti į sąlygiškai artimą nestabilios orbitos aplinką;
- 5) sistema kuri laiką išbus siauroje nestabilios orbitos aplinkoje ir pradės konverguoti į atitinkamą stabilią orbitą.



10 pav. Nestabilių orbitų šokinėjančio kamuoliuko problemoje valdymo strategija. Plonos punktyrinės linijos vaizduoja stabilų periodo-2 atraktorių, o storos – nustatytą priimtina sistemą dinamikos intervalą. Rodyklės žymi valdymo impulsą



11 pav. Pereinamųjų procesų, perturbutų Gauso triukšmu, evoliucija, kai $b = 0,0001$. 50 perturbutų pereinamųjų procesų pavaizduoti pilkais taškais, originalus pereinamasis procesas – juodais taškais

Taip pat analizuotas pateiktos strategijos atsparumas išoriniam triukšmui. Tyrimas prasmingas praktiniu požiūriu, nes realaus pasaulio sistemose neišvengiamai egzistuoja triukšmas. Disertacijoje nagrinėjama triukšmu perturbuta sistema nusakoma lygtimi (18).

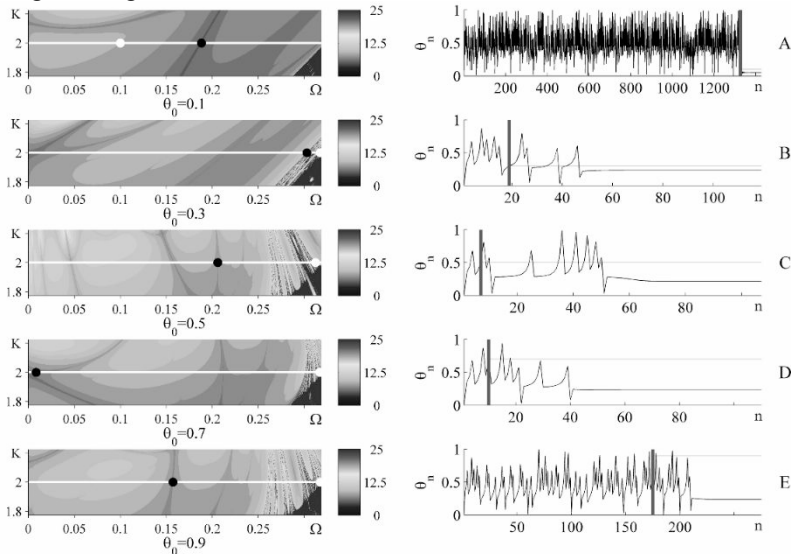
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n + b\xi_n; \\ y_{n+1} = \alpha y_n + \beta \cos(x_n + y_n); \end{cases} \quad (18)$$

čia ξ_n yra Gauso triukšmas su vidurkiu 0 ir standartu 1, o b yra triukšmo intensyvumas. Perturbuojamas x_n , o y_n tokiu būdu paveikiamas automatiškai.

Atliktas skaitinis eksperimentas su $b = 0,0001$ (11 pav.). Pradinės sąlygos parinktos tokios pačios, kaip ir 9(b) ir (c) pav. Pastebima, kad egzistuoja pereinamųjų procesų, kurie ilgiau išbūna nestabilios orbitos aplinkoje nei neperturbuotas procesas. Tokiu būdu, tinkamai taikant H -rangų plokštumas ir perturbaciją Gauso triukšmu, galima valdyti nestabilias orbitas (Landauskas ir Ragulskis, 2014).

3.4.2. H -pseudorangai kaip apskritiminio vaizdavimo valdymo įrankis

Nagrinėjamas apskritiminio vaizdavimo režimas, kai $\Omega = 0,35$, $K = 2$ ir $\theta_0 = 0,135$. Pereinamasis procesas konverguoja į tam tikrą stabilų tašką. Tarkime, galima keisti Ω reikšmę, siekiant pereinamuosius procesus padaryti kiek galima ilgesnius.



12 pav. Parametro Ω^* keitimas. Juodi taškai atitinka žemiausius rangus, kai $K = 2$, balti taškai rodo aukščiausius rangus, kai K tas pats

Iš $f(\theta_{n+1}) = f(\theta_n)$ seka, kad $\Omega = K \cdot \sin(2\pi\theta_n)/2\pi$. Tada fiksuotas taškas egzistuos, kai $\Omega^* \leq K/2\pi$. Keičiant parametro Ω reikšmę į $\Omega^* = K \cdot \sin(2\pi\theta_n)/2\pi$, sistema pervedama į stabilų režimą. Tačiau šiuo atveju nėra pereinamųjų procesų. Iš plokštumos Ω - K parinkus kitą reikšmę, atitinkančią aukščiausią rangą, galima maksimizuoti pereinamųjų procesų trukmę.

Atlikti skaitiniai eksperimentai su apskritiminiu vaizdavimu, valdytos jo orbitos. 12 pav. iliustruoja valdymo funkcijos $g(\theta_0)$ veikimą. Šios funkcijos reikšmė Ω^* yra parametro Ω reikšmė, kuri veda sistemą į stabilų režimą su ilgiausia pereinamųjų procesų trukme. n -toje iteracijoje valdymo funkcijos argumentas yra θ_n . Tokiu būdu θ_m tampa pastovus su $m > n + n_0$. Pereinamųjų procesų trukmė n_0 taip yra maksimizuojama.

3.5. Tolydžiųjų dinaminių sistemų valdymas

3.5.1. Pereinamųjų procesų valdymas

Netiesinė matematinė švytuoklė yra fundamentalus osciliatorių ir kitų fizikinių netiesinių dinaminių sistemų modelis (Bhattacharjee ir Kumar, 2014). Modelis leidžia imituoti sistemų sudėtingumą, jėgų jose veikimą, slopinimo reiškinius. Modelis užrašomas taip:

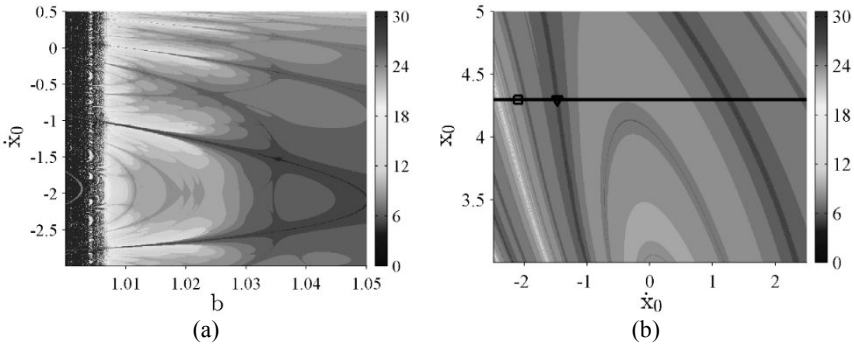
$$\frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + \sin x = f \cos(\omega t), \quad (19)$$

kur t yra laikas, x – kampo koordinatė, b – tiesinio slopinimo koeficientas ($b > 0$), f ir ω – harmoninio žadinimo amplitudė ir kampinis dažnis. Lygtis (19) iliustruoja turtingą chaotinę elgseną, kai $b = 1$, $f = 2,048$ ir $\omega = 2/3$ (Hilborn, 2000). Atliekant Puankarė pjūvius su kartotiniu ω dažniu gaunamos periodo dvigubėjimo bifurkacijos ties $1 \leq b \leq 1,05$.

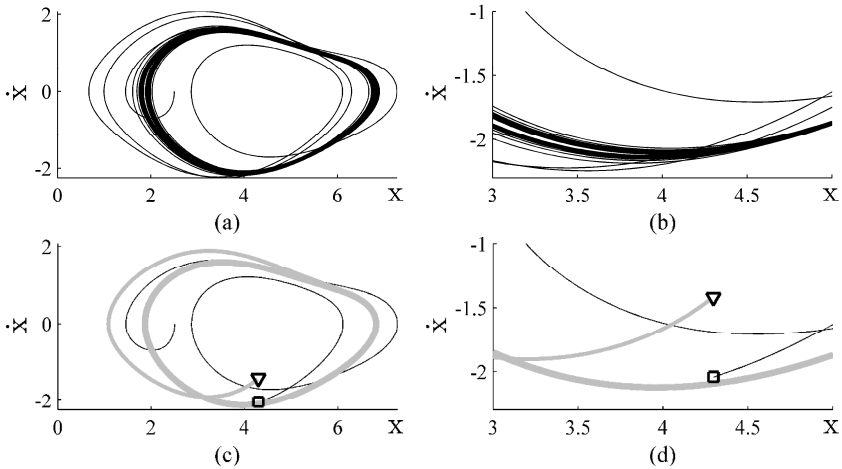
Periodiškai žadinama netiesinė matematinė švytuoklė naudota H -rangus taikant pereinamiesiems procesams į ribinį ciklą tirti. Lygčiai (19) fiksuoti parametrai $f = 2,048$ ir $\omega = 2/3$. Naudojant pastovaus žingsnio skaitinį integratorių, gaunamas diskretusis sprendinys:

$$x(t_0 + kh) = x_k; \quad \frac{dx}{dt}(t_0 + kh) = \dot{x}_k; \quad \frac{d^2x}{dt^2}(t_0 + kh) = \ddot{x}_k; \quad (20)$$

čia $k = 0, 1, 2, \dots$, o h yra integravimo žingsnis.



13 pav. (a) dalyje pavaizduota sistemos $\ddot{x} + b\dot{x} + \sin x = 2,048 \cos(2t/3)$ H -rangų plokštuma, $x(0) = 0$. (b) dalyje – H -rangai fazinėje plokštumoje $x_0 - \dot{x}_0$. Stačiakampis žymeklis rodo sistemos būseną prieš pat valdymo impulsą, trikampis – po valdymo impulso



14 pav. Pereinamųjų procesų valdymas, paremtas išorine perturbacija. Sistemos $\ddot{x} + b\dot{x} + \sin x = 2,048 \cos(2t/3)$ evoliucija nuo $x_0 = 2,5$ ir $\dot{x}_0 = 0$ vaizduojama dalyse (a) ir (b). Stačiakampis žymeklis rodo sistemos būseną prieš pat valdymo impulsą, trikampis – po valdymo impulso; trajektorija po valdymo impulso vaizduojama pilkai

H -rangus sprendiniui galima skaičiuoti keliais būdais: $Hr(x_0, x_1, x_2, \dots)$, $Hr(\dot{x}_0, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots)$, $Hr(\ddot{x}_0, \ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \dots)$ arba

$$Hr\left(\sqrt{x_0^2 + \dot{x}_0^2 + \ddot{x}_0^2}, \sqrt{x_1^2 + \dot{x}_1^2 + \ddot{x}_1^2}, \sqrt{x_2^2 + \dot{x}_2^2 + \ddot{x}_2^2}, \dots\right). \quad (21)$$

Sukonstruotoje H -rangų plokštumoje galima išvelgti persipynusias konvergavimo daugdaras (palyginkite 13(a) ir 7(c) pav.). Tegul $b=1,04$ ir sistema asimptotiškai konverguoja nuo pradinių sąlygų $x_0 = 2,5$ ir $\dot{x}_0 = 0$ į stabilų periodo-1 ribinį ciklą (14(a) pav.). 14(b) pav. pavaizduotas asimptotinis konvergavimas į stabilų ribinį ciklą.

Sistemos valdymo strategija, keičiant tik \dot{x} , iliustruota 14(c) pav. Pradinis pereinamasis procesas (juoda ištininė linija 14(c) pav.) evoliucionuoja 2 pilnus ciklus. Tada sistema perturbuojama valdymo impulsu (renkant žemiausią H -rangą iš atitinkamos jų plokštumos), pakeičiant \dot{x} . Suvaldytos sistemos pereinamasis procesas į stabilų ribinį ciklą gautas trumpesnis. Tai matyti palyginus 14(b) ir 14(d) pav.

3.6. Skyriaus išvados

H -rangai sistemos parametrų plokštumoje atskleidžia neasimptotinio konvergavimo į nestabilius periodinius režimus daugdarą. Darbe taip pat pateikiamas skaitinis įrankis, leidžiantis identifikuoti pseudostabilią konvergavimo į nestabilų periodo-1 režimą šokinėjančio kamuoliuko problemoje daugdarą. Pademonstruota, kad ši struktūra gali būti panaudota laikinam nestabilių orbitų stabilizavimui.

Pasiūlytos valdymo strategijos atsparumas išoriniam Gauso triukšmui buvo iliustruotas skaitiniais eksperimentais. Pastebėta ir parodyta, kad tinkamai panaudojus Gauso triukšmą, galima šią strategiją padaryti efektyvesnę.

Darbe pademonstruota, kad periodiškai žadinamos matematinės švytuoklės pereinamųjų procesų stroboskopinėje realizacijoje egzistuoja neasimptotinio konvergavimo į stabilų ribinį ciklą daugdarą. Tirtas periodo-1 stabilusis ciklas, tačiau panašūs efektai gali būti stebimi ir aukštesnio periodiškumo ribiniuose cikluose.

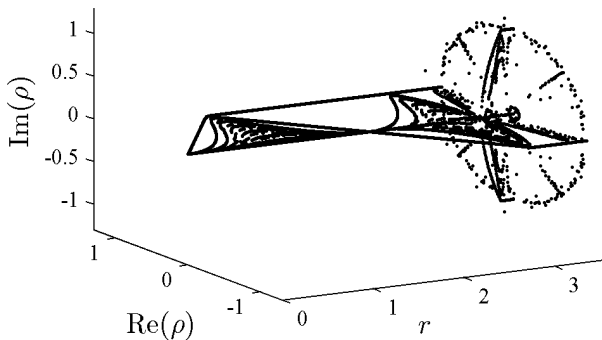
4. H -RANGAI LAIKO EILUČIŲ TYRIMUOSE

4.1. Perėjimai į chaotinius režimus dinaminėse sistemose

Disertacijoje pateikta H -rangų paremta metodika, skirta tirti diskrečiosios dinaminės sistemos pereinamuosius procesus.

Pavyzdžiuose naudotas logistinis vaizdavimas $x_{n+1} = r \cdot x_n (1 - x_n)$, $0 \leq r \leq 4$. Vienas iš tikslų buvo pasiūlyti adaptyvią ε parinkimo strategiją konkrečiai sekai S . Strategijos principas yra rasti tokį ε , kad jį naudojant surastas H -rangas lemtų kuo tikslesnę sekos ekstrapoliaciją. Ekstrapoliuotos

sekos atitiktis originaliai sekai vertinta skaičiuojant vidutinę kvadratinę paklaidą. Kiekvienoje sekoje tokia koncepcija lemia skirtingą ε reikšmę.



15 pav. Logistinio vaizdavimo charakteristinės lygties šaknų pasiskirstymas, $0 < r < 3,6$

Pagrindinis šio skyrelio tikslas yra pereinamųjų procesų į chaosą tyrimas. Buvo tirtas logistinis vaizdavimas, kai r kinta intervale $0 < r < 3,6$, ieškota optimalios ε reikšmės ir tada kompleksinėje plokštumoje braižytos atitinkamos eilės charakteristinės lygties šaknys. Eksperimentas apribotas ties $r = 3,6$, nes čia jau pastebima chaotinė sistemos elgsena ir algebrinės analizės rezultatai tampa sunkiau interpretuojami. Gauta trimatė šaknų interpretacija pateikta 15 pav.

4.2. Skeletinių sekų rekonstravimas, paremtas H -rangu

Realiosios matricos H singuliarių reikšmių dekompozicija (SVD) yra jos faktorizavimas $H = USV^T$. Čia U sudaryta iš ortonormuotų HH^T tikrinių vektorių, atitinkamai V – iš $H^T H$ ortonormuotų tikrinių vektorių, o S yra diagonalioji matrica iš surikiuotų $H^T H$ tikrinių reikšmių (singuliarių H reikšmių).

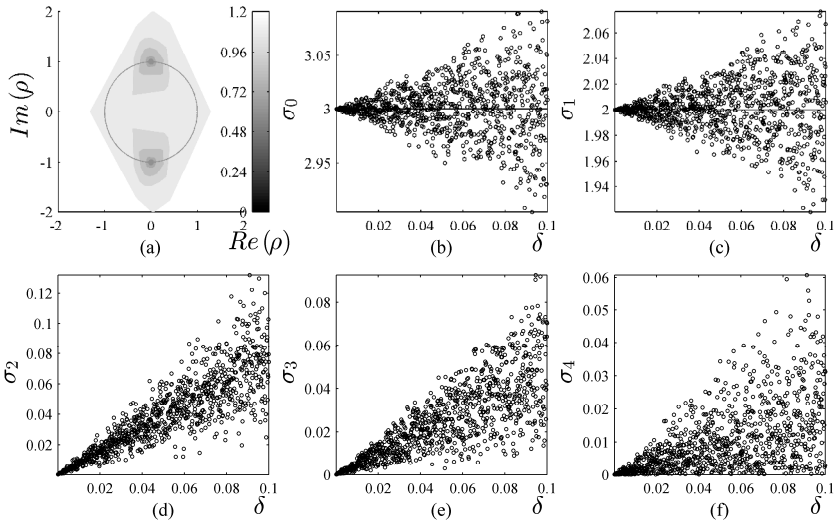
Tegul $\{x_j\}_{j=0}^{+\infty}$ yra tiesinė rekurentinė seka. Disertacijoje parodyta, kad jeigu sekos $\{x_j\}_{j=0}^{+\infty}$ rangas yra n , tai bet kurios eilės Hankelio matricos singuliarių reikšmių, nelygių 0, skaičius neviršija n . Todėl tokios sekos eilė gali būti nustatyta naudojant SVD.

Tačiau tai negalioja realaus pasaulio sekoms, nes jos neišvengiamai turi triukšmo. Jei prie sekos $\{x_j\}_{j=0}^{+\infty}$ būtų pridėtas diskretusis atsitiktinis dydis $\{\varepsilon_j\}_{j=0}^{+\infty}$, tai nauja seka $\{x_j + \varepsilon_j\}_{j=0}^{+\infty}$ nebūtų tiesinė rekurentinė seka. Seka

$\{x_j + \varepsilon_j\}_{j=0}^{+\infty}$ eilės apskritai neturi. Šiuo atveju galima naudoti matricos pseudospekto sąvoką.

Matricos A spektras $\Lambda(A)$ yra aibė tokių $z \in \mathbb{C}$, su kuriais neegzistuoja ar yra neapibrėžta rezolventė $(zI - A)^{-1}$. Čia I – vienetinė matrica. Matricos A ε -pseudospektras apibrėžiamas kaip:

$$\Lambda_\varepsilon(A) = \{z \in \mathbb{C} : z \in \Lambda(A + E), \|E\| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0\}. \quad (22)$$



16 pav. Sekos $\{1; 0; -1; 0; 1; \dots\}^{(1)} + \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots\}^{(2)}$ Hankelio matricos charakteristinės lygties šaknų pasiskirstymas vaizduojamas dalyje (a). (b–f) dalyse iliustruotas $H_4^{(1)+(2)}$ singuliarių reikšmių σ_k , $k = \overline{0, 4}$, tolygus konvergavimas į $H_4^{(1)}$ singuliaras reikšmes.

Analogiškai klasikiniam kvadratinės matricos spektro apibrėžimui, galima apibrėžti tiesinės rekurentinės sekos H -spektrą kaip:

$$P(x_0, x_1, \dots, x_{2n-1}) = \{\rho_k\}_{k=1}^n. \quad (23)$$

Tada kvadratinės Hankelio matricos ε - H -spektras bus apibrėžiamas kaip:

$$P_\varepsilon(x_0, x_1, \dots, x_{2n-1}) = P(x_0 + \varepsilon_0, x_1 + \varepsilon_1, \dots, x_{2n-1} + \varepsilon_{2n-1}), \quad (24)$$

kai kuriems $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n-1} \in \mathbb{R}$, tokiems, kad $\|\varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{2n-1}\|_2 \leq \varepsilon$. Toks ε - H -spekto apibrėžimas leidžia tyrinėti realaus pasaulio sekas kaip tiesines rekurentines sekas, paveiktas triukšmu.

Reikia pabrėžti, kad ε - H -spektras tolygiai konverguoja į H -spektrą, kai $\varepsilon \rightarrow 0$ (16(a) pav.). Tam pakanka, kad A būtų nesinguliari (taip bus, jei Hankelio matricos eilė sutaps su pačios sekos eile).

Panašiai galima samprotauti ir apie $H_4^T H_4$ tikrines reikšmes. Norint šiuos faktus perkelti į realaus pasaulio sekos eilės nustatymo problemą, reikia apibrėžti tam tikrą paklaidos lygį ir suskaičiuoti, kiek $H_4^T H_4$ singuliarių reikšmių yra už jį didesnės. Darbe tai panaudota realaus pasaulio sekų analizei.

4.2.1. Svorinis slenkantis vidurkis ir tiesinės rekurentinės sekos eilė

Svorinis slenkantis vidurkis (WMA) seką $\{x_j\}_{j=0}^{+\infty}$ transformuoja į seką:

$$\{y_j\}_{j=0}^{+\infty} = \left\{ \sum_{s=0}^{L-1} w_{L-s} x_{s+j} \right\}_{j=0}^{+\infty}, \quad (25)$$

čia L yra stebėjimo lango plotis. Klasikinis slenkantis vidurkis (MA) gaunamas, jei koeficientai w_s yra lygūs. Tegul $\{x_j\}_{j=0}^{+\infty}$ yra tiesinė rekurentinė seka.

WMA(L) šią seką transformuoja į tiesinę rekurentinę seką. Iš lygčių (4) ir (25) seka:

$$y_j = \sum_{l=0}^{L-1} w_{L-l} x_{l+j} = \sum_{k=1}^m \sum_{r=0}^{n_k-1} \tilde{\mu}_{kr} j^r \rho_k^j. \quad (26)$$

Bendruoju atveju sekos $\{y_j\}_{j=L-1}^{+\infty}$ eilė gali būti aukštesnė, nei sekos $\{x_j\}_{j=0}^{+\infty}$. Tačiau gali būti ir taip, kad tam tikras koeficientų w_k ir šaknų ρ_k rinkinys gali kai kuriuos reiškinius $\tilde{\mu}_{kr}$ (kurie priklauso nuo koeficientų w_s) paversti nuliais. Tokiu atveju transformuotos tiesinės rekurentinės sekos eilė gali būti mažesnė už originalios sekos eilę.

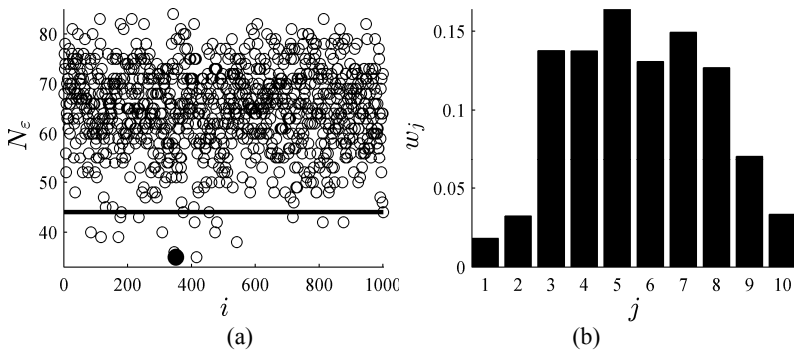
4.2.2. WMA ir realaus pasaulio sekos

Kaip parodyta anksčiau, realaus pasaulio sekos eilė yra begalinė. Tačiau taip pat parodyta, kad SVD gali būti naudojama adityviu triukšmu paveiktos tiesinės rekurentinės sekos eilei nustatyti.

Tarkime, duota seka $\{x_j\}_{j=0}^n$ (nebūtinai tiesinė rekurentinė seka). Tegul Hankelio matricos eilė bus m , o klaidos lygis $\varepsilon > 0$. Slenkantis vidurkis su lango pločiu L būtų nusakomas, kaip $\{y_j\}_{j=L-1}^n = \left\{ \frac{1}{L} \sum_{s=j-L+1}^j x_s \right\}_{j=L-1}^n$. Tada konstruojama Hankelio matrica $\{y_j\}_{j=L-1}^n$, atliekama jos SVD ir randamos singuliarios reikšmės: $\{\sigma_k^2\}_{k=1}^m$. Randamas skaičius singuliarių reikšmių, didesnių už ε : $N_\varepsilon = \sum_{k=1}^m \delta_k$, čia $\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{if } \sigma_k^2 \geq \varepsilon \\ 0 & \text{if } \sigma_k^2 < \varepsilon \end{cases}$. Slenkančio vidurkio koeficientai $\{1/L\}_{j=1}^L$ ir N_ε įsimenami kaip šios epochos geriausi rezultatai.

Paskutiniame etape atliekama optimizavimo procedūra, siekiant rasti koeficientus $\{w_j\}_{j=1}^L$, kad WMA eilė būtų kiek įmanoma mažesnė: $\min_{\{w_1, \dots, w_L\}} N_\varepsilon$. Akivaizdu, kad egzistuoja trivialus sprendinys $w_1 = \dots = w_L = 0$, todėl svoriniams koeficientams įvedami apribojimai:

$$\sum_{j=1}^L w_j = 1; w_j > 0 \text{ visiems } j. \quad (27)$$



17 pav. Beveik optimali svorinių koeficientų aibė sintetinei skaičių sekai su triukšmu; stebėjimo lango ilgis yra 10. 1000 MC epochų pavaizduota dalyje (a); stora ištisinė linija atitinka klasikinio slenkančio vidurkio atvejį; juodas taškas simbolizuoja geriausią svorinių koeficientų rinkinį, surastą atsitiktinės paieškos. Dalis (b) iliustruoja geriausius svorinius koeficientus (atitinka juodą tašką dalyje (a))

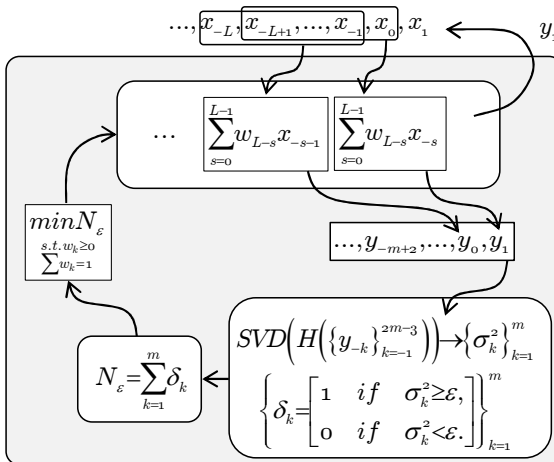
Optimizavimo procedūra atliekama generuojant atsitiktinį svorinių koeficientų vektorių $\{w_j\}_{j=1}^L$, tenkinantį apribojimus (27). Tada atliekamas

WMA: $\{y_j\}_{j=0}^{+\infty} = \left\{ \sum_{s=0}^{L-1} w_{L-s} x_{s+j} \right\}_{j=0}^{+\infty}$, randamas atitinkamos Hankelio matricos singuliarių reikšmių, didesnių už ε , skaičius N_ε . Jei N_ε reikšmė yra mažesnė nei įsimintas geriausias epochos rezultatas, vektorius $\{w_j\}_{j=1}^L$ ir N_ε tampa epochos geriausiais rezultatais. Pereinama prie kitos epochos.

Kaip pavyzdys čia pateikiamas skaitinis eksperimentas su seka, kurios elementai: $x_j = \sin(j/10) + 0,01 \cdot \text{rand}_j$, $j = 0, 1, \dots$, kur $\text{rand}_j \sim N(0, 1)$. Slenkantis vidurkis lemia $N_\varepsilon = 43$. Tačiau 1000 Monte Karlo epochų lemia tokius svorinius koeficientus, kad N_ε gaunamas mažesnis (17(a) pav.).

4.3. Laiko eilučių prognozavimas, paremtas algebriniu WMA

Pasiūlyta alternatyvi laiko eilučių prognozavimo strategija, paremta galimybe keičiant WMA koeficientus identifikuoti laiko eilutę nusakančius algebrinius dėsnius. Prognozavimo strategijos scheminė diagrama pateikta 18 pav.



18 pav. Algebrinio WMA (AWMA) prognozės schema

Pažymėkime x_0 originalios laiko eilutės vertę pradiniu momentu. Dabartinė ir praeities vertės naudojamos prognozuojant x_1 . Ankstesniame skyriuje aprašytas algoritmas naudojamas beveik optimaliam svorinių

koeficientų vektoriui $\{w_j\}_{j=1}^L$ rasti. Svorinis vidurkis $y_1 = \sum_{j=0}^{L-1} w_{L-j} x_{-j}$ priimamas kaip x_1 įvertis.

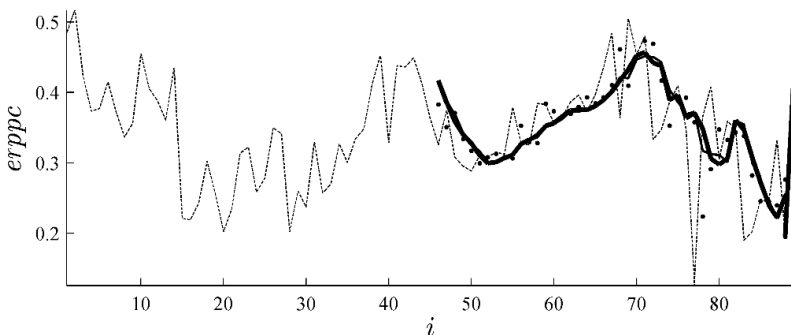
Vidurkinimo lango L parinkimo strategija yra tokia. Nustatomas optimalus MA vidurkinimo plotis ir priskiriamas L . Optimalumo kriterijus yra MA prognozės RMSE paklaida. Tada reikia surasti tokį vidurkinimo koeficientų vektorių, kurio ilgis L , kad N_ε būtų minimizuojamas.

Tyrimui parinkta Australijos gyventojų procentinis padidėjimas per ketvirtį nuo 1971 rugsėjo iki 1993 birželio (laiko eilutė žymima *erppc*).

2 lentelė. RMSE kaip MA prognozės su tam tikru vidurkinimo langu L funkcija

L	2	3	4	5	6	7	8	9
RMSE	0,0749	0,0707	0,0689	0,0697	0,0709	0,0727	0,0739	0,0752

2 lentelėje pateiktos MA prognozės paklaidos esant skirtingiems vidurkinimo lango pločiams L . Tiksliausia prognozė gauta, kai $L = 4$. Reikia pastebėti, kad egzistuoja keli svorinių koeficientų vektoriai $\{w_j\}_{j=1}^L$ tai pačiai tikslo funkcijos reikšmei N_ε su vidurkinimo pločiu L . Todėl reikia išrinkti tokį, su kuriuo prognozės paklaida mažiausia.



19 pav. AWMA ir standartinio slenkančio vidurkio su $L = 4$ ir $\varepsilon = 0,04$ taikymas *erppc* laiko eilutei. Originali seka pavaizduota taškine linija, MA(4) prognozė – plona ištisine linija, ARIMA(1, 1, 2) – taškais, o AWMA prognozė – stora ištisine linija

19 pav. pateikta AWMA prognozė *erppc* eilutei. Kiekvienai prognozei gauti simuliuoti 10000 svorinių koeficientų vektoriai ir tada minimizuotas skeletinės sekos algebrinis sudėtingumas. Prognozavimo MAPE paklaidos MA(4), ARIMA(1, 1, 2) ir AWMA prognozėms atitinkamai yra 0,1774, 0,1770 ir 0,1678.

4.4. *H*-rangų taikymai realaus pasaulio magnetometro duomenims

4.4.1. Magnetometro duomenų formatai

Tyrimams naudoti duomenys gauti iš LUHS Gyvulininkystės instituto teritorijoje Baisogaloje įrengto magnetometro. 3 lentelėje pateikta duomenų, kurie valandos intervalais rašomi į dvejetainius failus lentelės pavidalu, struktūra. Lokalaus magnetinio lauko intensyvumas registruojamas 130 Hz dažniu.

3 lentelė. Magnetometro duomenų failo struktūra

Nr.	Lauko intensyvumas				Laiko žymeklis	Temp., C
	Š/P kryptis	R/V kryptis	Vertikali kryptis	Palydovo duomenys		
1	-134430	-83725	-	-271	1337915034	20
2	-12863	38269	-	-278	1337915034	21
...

Didelio kiekio realaus pasaulio duomenims apdoroti iškilo būtinybė sukurti specialią programinę įrangą. *Matlab* ir jo grafinis vartotojo aplinkos kūrimo įrankis buvo plačiai taikomas šiam tikslui.

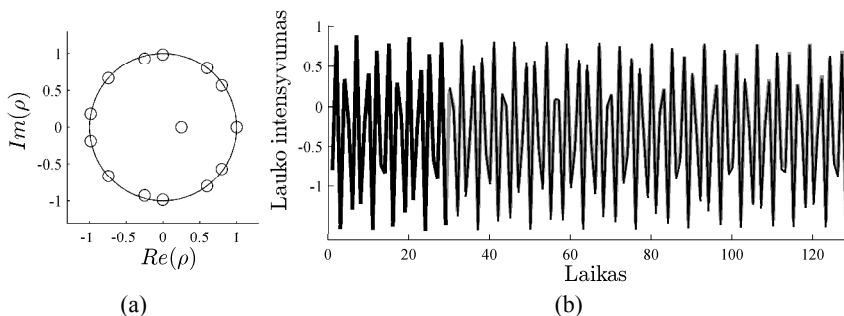
Projekto metu taip pat nupirktas domenas www.healthmath.lt. Sukurtas tinklalapis, kurio tikslas buvo tyrimų informacijos bei magnetometro duomenų apsiųdymo platforma tarp projekto dalyvių. Kiekvienas duomenų failas apima 1 valandos magnetinio lauko intensyvumo kitimą. Sukurta programinė įranga ne tik nuskaitytuosius duomenis, bet ir leidžia tyrinėti didelį jų kiekį vienu metu.

4.4.2. Magnetinio lauko intensyvumo algebrinė rekonstrukcija, paremta *H*-rangų

Tyrimams parinkti magnetinio lauko intensyvumo duomenys, atitinkantys 1 valandos laiko periodą, prasidedantį nuo 2016-01-01 12:00:02. Nustatytas optimalus *H*-rango buvo 15. Atitinkamas ε gautas 10^{-15} , o ekstrapoliuotos sekos RMSE paklaida originalios sekos atžvilgiu – 0,0585.

Su gauta optimalia *H*-rango verte buvo ekstrapoliuotas magnetinio lauko intensyvumas (20 pav.). Prieš tai atliekant reikia laiko eilutę normuoti ar normalizuoti, nes priešingu atveju rezultatai būtų neinterpretuojami dėl paklaidų kaupimosi.

Buvo pastebėta, kad magnetinio lauko intensyvumas ekstrapoliuojamas tiksliau (RMSE prasme) lyginant su diskrečiais netiesiniais vaizdavimais. Ekstrapoliuota seka vis dar seka originalios sekos formą net ir po 500 iteracijų. Reikia pastebėti, kad 130 iteracijų atitinka 1 sekundę.



20 pav. Magnetinio lauko intensyvumo algebrinė rekonstrukcija (ekstrapoliavimas). Charakteristinės lygties šaknų pasiskirstymas pateiktas (a); dalyje (b) vaizduojamas magnetinio lauko intensyvumas (storomis juodomis bei plonomis linijomis – originali seka, plona juoda linija – ekstrapoliuota seka)

4.5. Skyriaus išvados

Pasiūlyta H -rango koncepcija paremta algebrinė technika, leidžianti tirti pereinamuosius procesus į chaosą diskrečiose netiesinėse dinaminėse sistemose. Sistemos dinamikos sudėtingumą nusako charakteristinės lygties šaknų pasiskirstymas. Deterministinė algebrinė technika nėra tinkama chaotinei sekai nagrinėti. Tai parodo charakteristinių šaknų „sprogimo efektas“, kai jos atsitiktinai išsibarsto kompleksinėje plokštumoje.

Šiame skyriuje pasiūlyta efektyvi laiko eilučių prognozavimo technika, paremta algebriniu svoriniu vidurkinimu. Svoriniai koeficientai parenkami taip, kad suvidurkintos laiko eilutės algebrinis sudėtingumas būtų minimizuojamas. Optimizavimo problema sprendžiama Monte Karlo metodu. Algebrinio modelio eilė parenkama minimizuojant prognozavimo su klasikiniu MA paklaidas esant skirtingiems vidurkinimo lango ilgiams. Pasiūlyto trumpų laiko eilučių prognozavimo technikos funkcionalumas pademonstruotas skaitiniais eksperimentais su realaus pasaulio eilute.

Realaus pasaulio magnetometro duomenims pritaikyta algebrinė dekompozicija. Nepaisant fakto, kad magnetinio lauko intensyvumas yra realaus pasaulio seka, kuri rango neturi, pavyko gauti interpretuojamus rezultatus. Ekstrapoliuota seka vis dar seka originalų dėsningumą po 500 iteracijų. Praktinė rezultatų nauda gali būti algebrinių technikų taikymas rekonstruojant trumpo laiko signalų praradimus.

IŠVADOS

1. Pademonstruota, kad H -rangų skaičiavimai sėkmingai atliekami žemiau mašininio epsilon ribos. Išplėtotas efektyvus skaitinis H -rangų plokštumų netiesinėse dinaminėse sistemose konstravimo įrankis.

2. Parodyta, kad H -rangų plokštumos gali būti naudojamos neasimptotinio konvergavimo daugdarų identifikavimui netiesinėse dinaminėse sistemose.

3. Parodyta, kad H -rangų plokštumų teikiama informacija yra naudinga tiriant ar valdant netiesines dinamines sistemas. H -rangų plokštumos panaudotos pseudostabiliai struktūrai identifikuoti visiškai apgręžiamose dinaminėse sistemose. Daugdaros H -rangų plokštumose leido sukonstruoti naujus pereinamųjų procesų netiesinėse sistemose valdymo algoritmus.

4. Pereinamųjų procesų į chaosą tyrimui diskrečiose netiesinėse dinaminėse sistemose darbe pasiūlyta algebrinė technika, paremta Hankelio matricomis. Modifikuotos charakteristinės lygties šaknų pasiskirstymas nusako sekos sudėtingumo matą ir, tuo pačiu, apibūdina sistemos dinamiką.

5. Pasiūlyta trumpų laiko eilučių prognozavimo technika, kuri MAPE prasme yra geresnė už klasikinio slenkančio vidurkio prognozavimą. Pasiūlyta technika paremta prognozuojamos laiko eilutės pseudorango koncepcija.

6. H -rangai panaudoti algebrinei realaus pasaulio magnetometro duomenų analizei ir trumpalaikiams signalo praradimams rekonstruoti.

LITERATŪRA

1. BHATTACHARJEE, S. ir K. KUMAR. Parametric instability in the Watt governor with periodic loading. *European Journal of Physics*, 2014, 35(3), 035006. ISSN 0143-0807.
2. BOYLAND, P. L. Bifurcations of circle maps: Arnol'd tongues, bistability and rotation intervals. *Communications in Mathematical Physics*, 1986, 106(3), 353-381.
3. GLASS, L. ir A. SHRIER. Functional Characterization of Oscillatory and Excitable Media. *Bulletin of mathematical biology*, 2014, 1-14. ISSN 0092-8240.
4. GUSTAVSON, F. G., J. WAŚNIEWSKI, J. J. DONGARRA, J. E. R. HERRERO, et al. Level-3 Cholesky factorization routines improve performance of many Cholesky algorithms. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 2013, 39(2), 9.
5. HALE, J. K. ir N. STERNBERG. Onset of chaos in differential delay equations. *Journal of Computational Physics*, 1988, 77(1), 221-239.
6. HILBORN, R. C. *Chaos and non-linear dynamics*. King's Lynn, Norfolk: Oxford University Press, 2000.
7. HOLT, C. C. Forecasting seasonals and trends by exponentially weighted moving averages. *International Journal of Forecasting*, 2004, 20(1), 5-10.
8. JOSEPH, S. K., P. M. INES ir M. A. F. SANJUAN. Effect of the phase on the dynamics of a perturbed bouncing ball system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, August, 2012, 17(8), 3279-3286.
9. KAHAN, W. IEEE standard 754 for binary floating-point arithmetic. *Lecture Notes on the Status of IEEE*, 1996, 754(94720-1776), 11.
10. LANDAUSKAS, M., J. RAGULSKIENĖ ir M. RAGULSKIS. H-rank as a control tool for discrete dynamical systems. In *AIP Conference Proceedings*. 2012, vol. 1479, p. 2098.
11. LANDAUSKAS, M. ir M. RAGULSKIS. Clocking convergence to a stable limit cycle of a periodically driven nonlinear pendulum. *Chaos*, 2012, 22(3), 1054-1500.
12. LANDAUSKAS, M. ir M. RAGULSKIS. Clocking convergence to Arnold tongues - the H-rank approach. In *AIP Conference Proceedings*. 2013, vol. 1558, p. 2457-2460.

13. LANDAUSKAS, M. ir M. RAGULSKIS. A pseudo-stable structure in a completely invertible bouncer system. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 78(3), 1629-1643.
14. LUO, A. C. J. ir Y. GUO. *Vibro-impact Dynamics*. Wiley, 2013.
15. OTT, E., C. GREBOGI ir J. A. YORKE. Controlling chaos. *Physical review letters*, 1990, 64(11), 1196.
16. PARK, H. ir L. ELDEN. *Matrix Rank Reduction for Data Analysis and Feature Extraction*. 2003.
17. PYRAGAS, K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Physics Letters A*, 1992, 170(6), 421-428.
18. PUSTILNIKOV, L. D. On Ulam's problem. *Theoretical and Mathematical Physics*, 1983, 57, 1035.
19. RAGULSKIS, M., K. LUKOSEVICIUTE, Z. NAVICKAS ir R. PALIVONAITE. Short-term time series forecasting based on the identification of skeleton algebraic sequences. *Neurocomputing*, 2011, 74(10), 1735-1747.
20. RAGULSKIS, M. ir Z. NAVICKAS. The rank of a sequence as an indicator of chaos in discrete nonlinear dynamical systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, 16(7), 2894-2906.
21. SCHILDER, F. ir B. B. PECKHAM. Computing Arnold tongue scenarios. *Journal of Computational Physics*, 2007, 220(2), 932-951.
22. TENNYSON, J. ir S. C. FARANTOS. Routes to vibrational chaos in triatomic molecules. *Chemical physics*, 1985, 93(2), 237-244.
23. VON BRENTANO, P. ir N. ZAMFIR. On a measure of the complexity of nuclear states and the onset of chaos. *Physics Letters B*, 1992, 297(3), 219-222.

MOKSLINIŲ PUBLIKACIJŲ SĄRAŠAS

*Straipsniai Mokslinės informacijos instituto (ISI) duomenų bazėse
referuojamuose leidiniuose (pagrindinių ISI žurnalų sąrašas)*

1. Landauskas, Mantas; Ragulskis, Minvydas. A pseudo-stable structure in a completely invertible bouncer system // Nonlinear dynamics. Dordrecht : Springer. ISSN 0924-090X. 2014, vol. 78, iss. 3, p. 1629-1643. DOI: 10.1007/s11071-014-1546-3. [Science Citation Index Expanded (Web of Science); Compendex; SpringerLINK]. [IF: 2,419, AIF: 1,656 (E, 2013)]. [M.kr. 09P].
2. Ragulskis, Minvydas Kazys; Navickas, Zenonas; Palivonaitė, Rita; Landauskas, Mantas. Algebraic approach for the exploration of the onset of chaos in discrete nonlinear dynamical systems // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. Amsterdam : Elsevier Science. ISSN 1007-5704. 2012, Vol. 17, iss. 11, p. 4304-4315. [Science Citation Index Expanded (Web of Science)]. [IF: 2,773, AIF: 1,559 (E, 2012)]. [M.kr. 09P].
3. Landauskas, Mantas; Ragulskis, Minvydas Kazys. Clocking convergence to a stable limit cycle of a periodically driven nonlinear pendulum // Chaos. Melville, NY : American Institute of Physics. ISSN 1054-1500. 2012, Vol. 22, iss. 3, p. [1-7]. DOI: 10.1063/1.4748856. [Science Citation Index Expanded (Web of Science)]. [IF: 2,188, AIF: 1,386 (E, 2012)]. [M.kr. 09P].

*Straipsniai Mokslinės informacijos instituto (ISI) duomenų bazėse
referuojamuose konferencijų Proceedings leidiniuose (ISI Proceedings)*

4. Landauskas, Mantas; Ragulskienė, Jūratė; Ragulskis, Minvydas. H-rank as a control tool for discrete dynamical systems // International conference of numerical analysis and applied mathematics (ICNAAM), Kos, Greece, September 19-25, 2012. Melville, NY : American Institute of Physics, 2012. (AIP Conference Proceedings, Vol. 1479, ISSN 0094-243X), ISBN 9780735410916. p. 2098-2101. DOI: 10.1063/1.4756604.
5. Landauskas, Mantas; Ragulskis, Minvydas. Clocking convergence to Arnold tongues - the H-rank approach // ICNAAM 2013 : 11th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics 2013, 21-27 September 2013, Rhodes, Greece : AIP proceedings. Melville, NY : American Institute of Physics, 2013. (AIP Conference Proceedings, Vol. 1558. pt. 1, ISSN 0094-243X), ISBN 9780735411845. p. 2457-2460. DOI: 10.1063/1.4826038.

Straipsniai Lietuvos mokslo tarybos patvirtinto sąrašo tarptautinėse duomenų bazėse referuojamuose leidiniuose

6. Navickas, Zenonas; Landauskas, Mantas; Šmidkaitė, Rasa; Ragulskis, Minvydas. The Ho-kalman model as a transformer of linear recurring sequences // Global journal of pure and applied mathematics. Delhi : Research India Publications. ISSN 0973-1768. 2015, vol. 11, no. 1, p. 99-119.

Straipsniai kituose recenzuojamuose mokslo leidiniuose

7. Landauskas, Mantas; Ragulskis, Minvydas. Clocking convergence to Arnold tongues – the circle map revisited // Lietuvos matematikos rinkinys : Lietuvos matematikų draugijos darbai. Serija B / Lietuvos matematikų draugija, Vilniaus universitetas. Vilnius : Vilniaus universitetas. ISSN 0132-2818. 2012, t. 53, p. 54-59.

TRUMPA INFORMACIJA APIE DISERTACIJOS AUTORIŲ

Gimė 1986 m. rugsėjo 14 d. Kaune.

Išsilavinimas

2005–2009 m. – Kauno technologijos universiteto Fundamentaliųjų mokslų fakultetas, matematikos bakalauro laipsnis.

2009–2011 m. – Kauno technologijos universiteto Fundamentaliųjų mokslų fakultetas, matematikos magistro laipsnis.

2011–2015 m. – Kauno technologijos universiteto Fundamentaliųjų mokslų fakultetas, informatikos (09P) doktorantūros studijos.

Pedagoginis darbas

2010–2015 m. – Kauno technologijos universiteto Fundamentaliųjų mokslų fakulteto Matematinės sistemos tyros katedra, laborantas, dėstytojas valandininkas, vėliau – asistentas.

2015 m. iki dabar – Kauno technologijos universiteto Matematikos ir gamtos mokslų fakulteto Matematinio modeliavimo katedra, lektorius.

Mokslinių interesų sritys

Netiesinių dinaminių sistemų tyrimai, Hankelio matricos taikymai, laiko eilučių analizė ir prognozavimas.

El. paštas

mantas.landauskas@ktu.lt

APPLICATIONS OF H -RANKS IN NONLINEAR SYSTEMS AND CHAOS ANALYSIS

Although nonlinear dynamical systems represent a classical research area, this field is being constantly developed. Almost every real world phenomenon is described as a nonlinear system. Hence the theory of nonlinear dynamical systems possesses a broad range of practical application. Engineering systems are becoming increasingly complex in nature. Thus the demand for control methods to obtain the desired system dynamics is highlighted. This also implies the rise of dynamical systems. Application of nonlinear dynamical systems has become interdisciplinary, and it spans research areas from physics to engineering, from economics to psychology and from medicine to biology.

Extensive academic interest has been recently dedicated to the satellite industry. Problems concerning Satellite formation flying (SFF) (i.e. when several satellites work together to save the cost of a single space mission) or Tethered Satellite System (special satellites for the exploration of space) are an increasingly common topic in the latest scientific papers. The dynamics of these systems is described as highly nonlinear and sensitive to the environment. The orbits of the satellites are modelled by limit cycles in nonlinear dynamics.

Complex systems described by large numbers of processes and highly nonlinear dynamics are often investigated in biology and medicine. Their examples include cancer progression, response to the treatment of a disease, molecular phenomena and hypoxia to name just a few. Some systems are intricately coupled and, evidently, are difficult to approach by restricting the research within only experimental methods. Nonlinear dynamical models and advanced computer simulations provide crucial insight into such systems and their dynamics.

Population dynamics, epidemic modeling or the study of disease spreading have always been in the center of attention. Nonlinear iterative maps, ordinary or partial differential equation models as well as difference equation models describe the evolution of real world systems. Corresponding modelling approaches are capable of providing applicable control or analytical strategies. The ultimate aim may be to conserve endangered species, to control the outbreak of a disease or to limit the consumption of natural resources. Without the analysis of nonlinear effects in dynamical systems it would hardly be possible to investigate the above mentioned problems.

Chaotic nonlinear systems were first considered by Henri Poincaré more than a century ago, and the famous term ‘butterfly effect’ was coined by Edward Lorenz in 1972. But the peak in the research of the dynamics of nonlinear systems occurred during the last decade of the 20th century. This resulted in extensive application of the *Chaos theory* in practice taking place. The improvement of key properties of computers has also made an important contribution towards the implementation of new methods of nonlinear dynamics

in a wide variety of fields. For example, the performance of a modern computer enables to model the thermal denaturation of DNA molecules and to control biological neural networks. Combined with the innovative methods of nonlinear dynamics, this may lead to advanced understanding of our nature.

New algorithms for the analysis of nonlinear systems and previously unknown properties are being created and discovered. What concerns matrices of special form (*Hankel* matrices in this case), their extensive recent applications in time series forecasting, system identification or algebraic analysis have yielded major benefits. The Hankel matrix preserves the algebraic structure of the sequence, which makes it possible to use this type of matrix for the development of special methods for nonlinear systems.

It must be emphasized that this work mostly focuses on the application and the use of H -ranks in the identification of the properties of nonlinear systems rather than on constructing new algorithms. In this respect, H -ranks act as a rich computational tool in nonlinear systems analysis. H -rank based algorithms enable researchers to reveal and solve a set of new system identification, forecasting and control problems. The development of the theory of H -ranks is the main value of this work.

The object of the research:

Patterns of H -ranks and their application for the identification, forecasting and control of nonlinear dynamical systems.

The aim of the research:

To use and develop H -rank based techniques for the analysis of nonlinear systems and real world time series.

The aim is achieved by solving the following problems:

1. To develop the strategy for constructing patterns of H -ranks for discrete and continuous nonlinear dynamical systems. To consider the quality of these patterns regarding numerical aspects of floating point arithmetic.
2. To employ patterns of H -ranks for the identification of manifolds of convergence in nonlinear systems.
3. To construct and implement the control algorithm based on the patterns of H -ranks for discrete and continuous nonlinear dynamical systems.
4. To propose an algebraic approach based on the rank of the sequence for the analysis of the onset of chaos in discrete nonlinear dynamical systems.
5. To construct and implement a short-term time series forecasting technique based on the properties of skeleton sequence of a time series.
6. To perform algebraic analysis of the data from the real world magnetometer representing the intensity of the local magnetic field.

The methods and software for the research:

1. Techniques of mathematical and statistical analysis were used for the research. Algebraic analysis took an important role in this work in developing the theory of H -ranks. Practical application tools were developed. Methods originating from the dynamical systems theory were employed for nonlinear models used in the research.
2. Throughout the entire thesis, principles of digital image processing were applied. Some aspects of floating point arithmetic were considered.
3. Matlab and its standard toolboxes (Image processing toolbox, Parallel Computing Toolbox, Statistics Toolbox, Signal Processing Toolbox, Symbolic Math Toolbox), C++ programming language and LAPACK libraries (mainly on Linux platform for better performance) served as the programming tools used for the research.
4. A set of programming tools and applications was also created by the author of the thesis.

Scientific novelty and practical significance of the research:

Manifolds of convergence cannot be found directly for nonlinear maps. Previously existing computational tools (e.g. *Dynamics* or *XPP* software) comprising numerical algorithms largely differ in application areas and/or performance. Identification methodology of manifolds of convergence by using H -rank based techniques for both discrete and continuous dynamical systems is developed in this work. Considerations of using *LAPACK* package (which is a standard for high performance computations) enabled to implement the algorithms presented in this work efficiently in comparison with the Matlab package.

Development of novel control techniques based on H -ranks is presented in this work. Patterns of H -ranks were used for this purpose. Examples with two discrete nonlinear systems and one continuous nonlinear system are considered.

New forecasting techniques for short time series are proposed and applied to real world time series.

Practical significance of the research was accomplished by applying the algebraic analysis discussed in this work to the real world magnetometer data.

Information provided for the defense:

1. Computation strategy for the construction of patterns of H -ranks.
2. Computation strategy for the identification of manifolds of non-asymptotic convergence.
3. Computation strategy for the control of unstable orbits in discrete and continuous dynamical systems.
4. Novel methodology for time series forecasting based on the algebraic properties of the H -rank.

Approval of the results:

The results of the dissertation were presented in 7 publications including 3 papers in international journals indexed in the Institute for Scientific information (ISI) as the main list of publications with citing indexes and 2 papers in ISI indexed American Institute of Physics (AIP) proceedings. The topics covered in the dissertation were presented in 4 international and 2 national conferences including “International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2012 (ICNAAM 2012)”, “International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2013 (ICNAAM 2013)”, “International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2014)” and “8th Chaotic Modeling and Simulation International Conference (CHAOS 2015)”.

The experiments presented in the final chapter were performed by using the data of a real world magnetometer which is the only one of the kind in Europe; it is located in central Lithuania. The results were also used while carrying out the project “Research on the relations between Earth’s magnetic field, human’s and animal’s cardiovascular systems (GEOMAG)” funded by R&D and Innovation Fund of Kaunas University of Technology. The time period of the project spanned from March 2014 to December 2014.

The structure and length of the paper:

This doctoral dissertation consists of an introduction, 4 major sections, conclusions, a list of references and a list of the author’s publications. The total length of the dissertation is 124 pages. The thesis features 65 figures, 10 tables and a list of 162 cited sources.

UDK – 530.182 + 517.938](043.3)

SL344. 2016-01-29, 2,75 leidyb. apsk. I. Tiražas 45 egz. Užsakymas 31.
Išleido Kauno technologijos universitetas, K. Donelaičio g. 73, 44249 Kaunas
Spausdino leidyklos „Technologija“ spaustuvė, Studentų g. 54, 51424 Kaunas

