



**Kauno technologijos universitetas**

Elektros ir elektronikos fakultetas

**Porų prekybos algoritmų analizė ir tyrimai vertybinių  
popierių rinkose**

Baigiamasis magistro projektas

---

**Simas Gailevičius**

Projekto autorius

**Lekt. dr. Andrius Knyš**

Vadovas

---

**Kaunas, 2022**



**Kauno technologijos universitetas**

Elektros ir elektronikos fakultetas

# **Porų prekybos algoritmų analizė ir tyrimai vertybinių popierių rinkose**

Baigiamasis magistro projektas

Valdymo technologijos (6211EX014)

---

**Simas Gailevičius**

Projekto autorius

**Lekt. dr. Andrius Knyš**

Vadovas

**Lekt. dr. Vygandas Vaitkus**

Recenzentas

---

**Kaunas, 2022**



**Kauno technologijos universitetas**

Elektros ir elektronikos fakultetas

Simas Gailevičius

## **Porų prekybos algoritmų analizė ir tyrimai vertybinių popierių rinkose**

Akademinio sąžiningumo deklaracija

Patvirtinu, kad:

1. baigiamąjį projektą parengiau savarankiškai ir sąžiningai, nepažeisdama(s) kitų asmenų autoriaus ar kitų teisių, laikydamasi(s) Lietuvos Respublikos autorių teisių ir gretutinių teisių įstatymo nuostatų, Kauno technologijos universiteto (toliau – Universitetas) intelektinės nuosavybės valdymo ir perdavimo nuostatų bei Universiteto akademinės etikos kodekse nustatytų etikos reikalavimų;
2. baigiamajame projekte visi pateikti duomenys ir tyrimų rezultatai yra teisingi ir gauti teisėtai, nei viena šio projekto dalis nėra plagijuota nuo jokių spausdintinių ar elektroninių šaltinių, visos baigiamojo projekto tekste pateiktos citatos ir nuorodos yra nurodytos literatūros sąrašė;
3. įstatymų nenumatytų piniginių sumų už baigiamąjį projektą ar jo dalis niekam nesu mokėjęs (-usi);
4. suprantu, kad išaiškėjus nesąžiningumo ar kitų asmenų teisių pažeidimo faktui, man bus taikomos akademinės nuobaudos pagal Universitete galiojančią tvarką ir būsiu pašalinta(s) iš Universiteto, o baigiamasis projektas gali būti pateiktas Akademinės etikos ir procedūrų kontrolieriaus tarnybai nagrinėjant galimą akademinės etikos pažeidimą.

Simas Gailevičius

*Patvirtinta elektroniniu būdu*

Gailevičius, Simas. Porų prekybos algoritmų analizė ir tyrimai vertybinių popierių rinkose. Magistro baigiamasis projektas / vadovas lekt. dr. Andrius Knyš; Kauno technologijos universitetas, Elektros ir elektronikos fakultetas.

Studijų kryptis ir sritis (studijų krypčių grupė): elektronikos inžinerija (inžinerijos mokslai).

Reikšminiai žodžiai: porų prekyba, sustiprintas mokymasis, genetinis algoritmas, gilusis q-mokymasis, dvigubas gilusis q-mokymasis

Kaunas, 2022. 43 p.

### **Santrauka**

Porų prekyba yra seniai žinoma investavimo strategija vertybinių popierių rinkoje. Būdama neutrali rinkai, ji ypač patraukli esant dideliame rinkos kintamumui. Pastarąjį dešimtmetį daugelis tyrinėtojų savo darbuose taikė įvairius metodus optimizuoti porų prekybos strategijai, tiek parenkant susijusius tarpusavyje vertybinius popierius, tiek inicijuojant prekybos pozicijas. Darbe neanalizuojami porų parinkimo metodai, koncentruojamasi į prekybos signalų generavimą. Tradicinis metodas, taikomas kaip paprasta porų prekybos strategija, paremtas išankstinių ribų nustatymu poros kainų pasiskirstymui. Kainų pasiskirstymui pasiekiant vieną iš ribų, inicijuojama prekyba, o jam grįžus į pusiausvyros būseną – prekyba stabdoma tokiu būdu gaunant pelną. Šiame darbe lyginami keli metodai, paremti genetiniu algoritmu paprastos porų prekybos strategijos optimizavimui. Sustiprinto mokymosi algoritmai darbe naudojami ne išankstinių ribų nustatymo optimizavimui, o autonomiškam prekybos pozicijų formavimui. Tam naudotas Q-mokymosi tinklas su gilaus mokymosi neuroniniu tinklu bei dvigubu neuroniniu tinklu. Poros parenkamos iš S&P 500 indekso plačiai naudojamo kointegracijos metodo pagalba. Nepastovios vertybinių popierių rinkos laikotarpiu, strategija visais atvejais išlaikė aukštesnę grąžą už S&P 500 indeksą. Sustiprinto mokymosi algoritmai lenkė išankstinėmis ribomis grįstus algoritmus.

Gailevičius, Simas. Analysis and Investigation of Pairs Trading Algorithms in Stock Markets. Master's Final Degree Project / supervisor lect. dr. Andrius Knyš; Faculty of Electrical and Electronics engineering, Kaunas University of Technology.

Study field and area (study field group): electronics engineering (engineering science).

Keywords: pairs trading, reinforced learning, genetic algorithm, deep q-learning, double deep q-learning

Kaunas, 2022. 43 pages

### **Summary**

Pairs trading is an old strategy used in the stock market. Being market neutral, it is especially appealing during periods of high volatility. In the last decade, many researchers in their works explored various methods for optimisation of the simple pairs trading strategy both in selecting the assets fit for the strategy and for initiating trading positions. In this paper pairs selection methods are not analysed focusing on the generation of trading signals instead. The traditional method, in this work referred to as simple pairs trading strategy, is based on preconceived limits for the pairs spread. As the spread reaches one of the limits, trading is started and when the spread returns to its equilibrium – trading is stopped, thus turning a profit. Several methods based on genetic algorithm for optimisation of these limits are compared. Reinforced learning algorithms are used not for the optimisation of simple pairs trading strategy limits but as autonomous formation of trading signals. Q-learning with a deep learning neural network and a double deep learning neural network methods are used for this purpose. Pairs are selected from the S&P 500 index using a popular cointegration approach. During an uncertain period in the testing range, pairs trading strategy profits remained higher than that of the S&P 500 index. Algorithms of reinforced learning return the best profits.

## Turinys

<b>Lentelių sąrašas .....</b>	<b>7</b>
<b>Paveikslų sąrašas .....</b>	<b>8</b>
<b>Įvadas.....</b>	<b>9</b>
<b>1. Porų prekybos strategija.....</b>	<b>10</b>
1.1. Istorija bei taikymas .....	10
1.2. Literatūros darbų apžvalga .....	11
<b>2. Konverguojančių porų paieška .....</b>	<b>14</b>
2.1. Kointegracija .....	15
2.1.1. Engle-Granger testas .....	15
2.1.2. Stacionarumo nustatymo metodai .....	16
<b>3. Prekybos signalų formavimas .....</b>	<b>18</b>
3.1. Paprasta porų prekybos strategija .....	18
3.2. Genetiniai algoritmai .....	20
3.3. Gilaus mokymosi algoritmai .....	22
<b>4. Rezultatai.....</b>	<b>24</b>
4.1. Paprastas algoritmas .....	26
4.2. Genetinis algoritmas .....	29
4.3. Gilusis q-mokymasis .....	34
4.4. Dvigubas gilusis q-mokymasis.....	37
<b>Išvados .....</b>	<b>40</b>
<b>Literatūros sąrašas .....</b>	<b>41</b>
<b>Priedai.....</b>	<b>44</b>
1 priedas. Genetinio algoritmo mokymosi grafikai .....	44
2 priedas. Genetinio algoritmo su standartiniais įverčiais mokymosi imties rezultatai .....	45
3 priedas. DQN agento mokymosi grafikas, bendrinis.....	46
4 priedas. DDQN agento mokymosi grafikas, bendrinis.....	46

## Lentelių sąrašas

1 lentelė. Kointegracijos būdu atrinktų akcijų poros .....	25
2 lentelė. Paprastos porų prekybos strategijos taikymo rezultatai testiniame 5 mėn. periode .....	27
3 lentelė. Genetinio algoritmo strategijos taikymo rezultatai testiniame 5 mėn. periode .....	29
4 lentelė. Bollinger juotomis grįstos strategijos taikymo rezultatai testiniame 5 mėn. periode .....	32
5 lentelė. Gilaus Q-mokymosi taikymo rezultatai testiniame 5 mėn. periode.....	34
6 lentelė. Dvigubo gilaus Q-mokymosi taikymo rezultatai testiniame 5 mėn. periode.....	37
7 lentelė. Genetinio algoritmo kaupiamasis metinis pelnas mokymosi imtyje, po 500 kartų .....	45

## Paveikslų sąrašas

1.1 pav. Konverguojančių akcijų kainų kreivė .....	10
3.1 pav. Porų prekybos algoritmo pagrindų taikymas [20] .....	18
3.2 pav. Paprastos porų prekybos signalų formavimas .....	19
3.3 pav. Genetinio algoritmo struktūra .....	20
3.4 pav. Bollinger juostos .....	20
3.5 pav. Chromosomos struktūra .....	21
3.6 pav. Modifikuotos strategijos chromosomos struktūra .....	21
3.7 pav. Agento veikiančio aplinkoje struktūra .....	22
3.8 pav. Gilaus q-mokymosi tinklo struktūra .....	22
4.1 pav. 20-ties akcijų S&P 500 indekse kainų pasiskirstymo p-įverčiai .....	24
4.2 pav. Geriausių ir blogiausių pelną generuojančių porų kaupiamojo pelno ir užimamų pozicijų grafikai .....	28
4.3 pav. Standartinio įverčio ribų nustatymas per plačiame diapazone .....	30
4.4 pav. Genetiniu algoritmu optimizuotos paprastos strategijos geriausia ir blogiausia akcijų pora .....	31
4.5 pav. Genetiniu algoritmu optimizuotos Bollinger juostų strategijos geriausia ir blogiausia akcijų pora .....	33
4.6 pav. Taikomo DQN agento ir prekybos aplinkos modelio struktūrinė schema .....	34
4.7 pav. Geriausios ir blogiausios poros metinis kaupiamasis pelnas ir pozicijos taikant DQN agentą .....	36
4.8 pav. Taikomo DDQN agento ir prekybos aplinkos modelio struktūrinė schema .....	37
4.9 pav. Geriausios ir blogiausios poros metinis kaupiamasis pelnas ir pozicijos taikant DDQN agentą .....	39



## Įvadas

Investuotojai visame pasaulyje siekia didžiausių kiekybinių rezultatų. Tačiau vertybinių popierių rinka yra labai plati, ji pastoviai kinta veikiamą daugelio realaus pasaulio kintamųjų ir surasti investavimui tinkamus vertybinius popierius yra sudėtinga. Dėl tos priežasties visada yra didelis poreikis metodams ir strategijoms, kurios generuotų stabilų ir prognozuojamą pelną. Porų prekybos strategija yra populiari ir gerai žinoma jau 40 metų, kai ji buvo pradėta taikyti ribotos rizikos fondų bei įvairių investuotojų. Šios strategijos principas yra paprastas: surandami du vertybiniai popieriai, kurių kainos istoriškai keitėsi labai panašiai tarpusavyje. Skirtumui tarp šių popierių anomaliskai padidėjus, perkama pigesnių ir parduodama trumpam brangesnių vertybinių popierių. Skirtumui tarp kainų grįžus į istoriškai normalią būseną, investuotojas gaus pelną. Toks strategijos principas leido rinkos dalyviams pasiekti nemažų rezultatų minimizuojant riziką, bet vėlesniais laikais, daugiau investuotojų atrandant šią strategiją, jos pelningumas sumažėjo. Tai pastebėjus, nemažai tyrėjų pastebėjo galimybę optimizuoti paprastą porų prekybos strategiją pritaikius modernius mašininio mokymosi algoritmus bei kitus intelektinius metodus.

Šio darbo tikslas: išanalizuoti įvairių algoritmų taikymo naudą porų prekybos strategijos optimizavimui.

Tikslui pasiekti keliami uždaviniai:

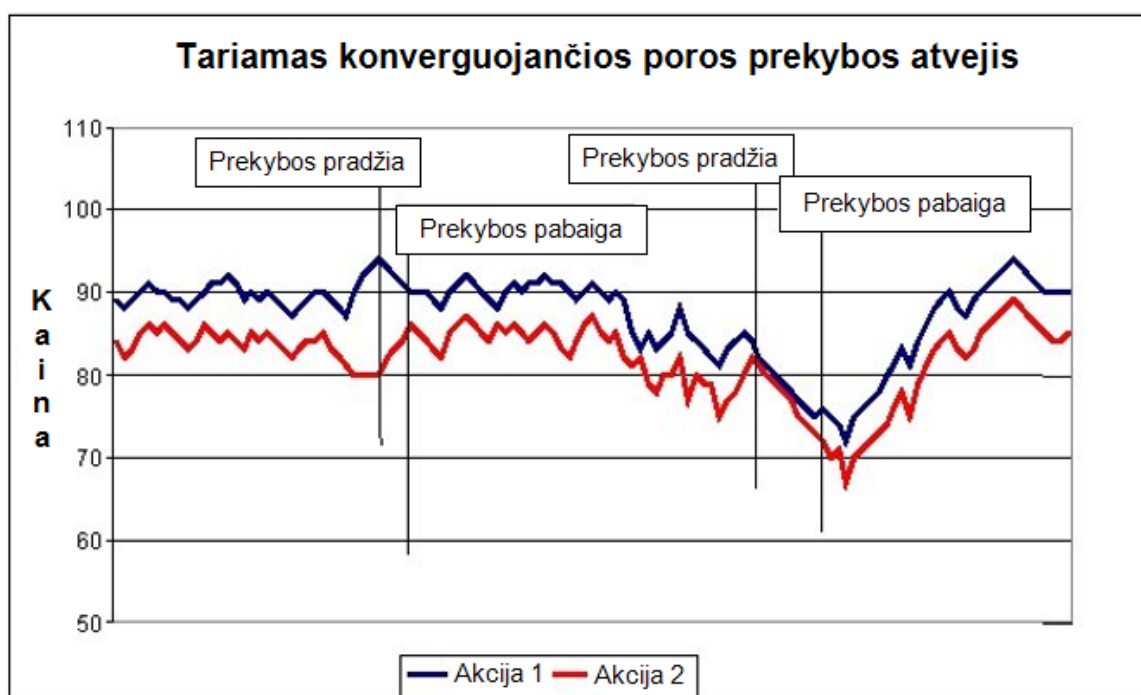
- Atlikti literatūros analizę apie intelektinių algoritmų taikymą porų prekybai bei tinkamų jai vertybinių popierių pasirinkimą.
- Išrinkti kelis efektyvius algoritmus, leidžiančius optimizuoti porų prekybos strategiją. Pasirinkti efektyviausią metodą vertybinių popierių atrinkai.
- Pritaikyti pasirinktą atrankos metodą ir pagal jį sudaryti vertybinių popierių poras.
- Programiškai realizuoti paprastą porų prekybos strategiją bei išrinktus algoritmus jai optimizuoti.
- Atlikti eksperimentinius tyrimus su visais pasirinktais algoritmais, jų generuojamą pelną bei koreguotą pagal riziką pelną palyginti tarpusavyje ir su indeksu S&P 500.

## 1. Porų prekybos strategija

### 1.1. Istorija bei taikymas

Porų prekybos strategija sukurta XX a. 9-tajame dešimtmetyje ir tebėra naudojama įvairių fondų bei institucijų [1]. Porų prekybos strategija yra neutrali rinkai, tai reiškia, kad strategija gali būti taikoma pelningai tiek kainoms kylant, tiek joms krentant. Šioje strategijoje ieškomi dveji vertybiniai popieriai, kurių kainų skirtumas yra konverguojantis. Jei šių vertybinių popierių kainų skirtumas pradeda skirtis, perkamos atsiliekančios kompanijos akcijos ir parduodamos trumpam kylančios kompanijos akcijos. Tokiu būdu sukuriama mažos rizikos pozicija su didele tikimybe šių vertybinių popierių kainų grįžimu į konverguojantį lygį, kai taip nutinka, pozicija uždaroma. Porų prekybos strategija remiasi statistiniais metodais, todėl nors rizika ir yra maža, ji nėra absoliuti [2].

1.1 pav. pateikiamas konverguojančių akcijų kainų pavyzdys. Atitinkamu laiko momentu, 1-osios kompanijos akcijų kainai pakilus, o 2-osios nepakitus, atsirado didesnis pasiskirstymas tarp akcijų kainų. Kadangi 2-osios kompanijos akcijų kaina mažesnė, šių akcijų yra perkama. Tuo tarpu 1-osios kompanijos akcijų yra parduodama trumpam. Jei akcijų pora išlieka konverguojanti, akcijų kainų pasiskirstymas sumažėja ir pozicija uždaroma (nusipirkti vertybiniai popieriai – parduodami, o parduoti trumpam - perkami).



1.1 pav. Konverguojančių akcijų kainų kreivė

Esant sunkiai prognozuojamai ir nepastoviai vertybinių popierių rinkai, efektyvių rinkai neutralių strategijų poreikis yra aukštas. Porų prekybos strategija taikoma jau ilgą laiką, jos potencialas yra didelis. Tačiau šiam potencialui realizuoti, turi būti išspręstos dvi problemos:

- Kaip aptikti konverguojančias vertybinių popierių poras?
- Kada reikia atidaryti ir uždaryti prekybos pozicijas?

Literatūros apžvalga sekančiame skyriuje apžvelgia šaltinius, kuriuose sprendžiami šie klausimai.

## 1.2. Literatūros darbų apžvalga

Paprastai porų prekybos strategijai vienas labiausiai cituojamų darbų yra Gatev E, Goetzmann W, Rouwenhorst K. [1]. Šiame darbe porų prekybos strategija taikyta JAV vertybinių popierių rinkoje, pasirinkus 20 vertybinių popierių porų, 1962 - 2002 m. laikotarpiu dienos tikslumu. Vertybinių popierių poros parinktos taikant atstumo metodą. Autoriai taikė 12 mėnesių porų formavimo periodą bei 6 mėnesių periodą prekybai suformuotomis poromis. Pozicijos atidarymui/uždarymui taikyta paprasta taisyklė: pozicija atidaroma vertybinių popierių pasiskirstymo kreivei nukrypus daugiau nei 2 standartiniams nuokrypiams (pagal istorinius 12 mėn. formavimo duomenis). Pozicija uždaroma normalizuotoms vertybinių popierių kainoms susikertant. Taikytos strategijos metinis pelnas siekė 11%. Autoriai pastebi, kad vėlesniais laikotarpiais porų prekybos strategija grąžino mažesnius pelnus. B. Do ir R. Faff [3] studijoje atliktas tyrimas, remiantis Gatev et al. (2006) anksčiau atliktu, demonstravo panašius rezultatus. Darbe taip pat pastebėtas strategijos mažėjantis pelningumas vėlesniais laikotarpiais. Tyrimui apimant ir 2007-2009 m. krizės laikotarpį, parodomi stiprūs porų prekybos strategijos rezultatai nepastovios rinkos metu. Gatev et al. (2006) tyrimą taip pat atkartojė Müslümov, A., A. Yüksel, and A. Yüksel [4]. Pritaikius anksčiau suformuotą metodiką, Istambulo vertybinių popierių biržoje 20 atrinktų porų suteikė 5,4% metinę grąžą.

Vertybinių popierių porų atrinkimo metodus apžvelgia Krauss [5], suskirstydamas literatūrą apie porų strategiją į atstumo, kointegracijos, stochastinio pasiskirstymo bei kitus metodus, paremtus mašininio mokymusi. Huck N. ir Afawubo K. apžvelgė kitokius metodus tinkamoms poroms atrinkti, nei Gatev et al. (2006) ir kiti [6]. Su anksčiau Gatev et al. (2006), B. Do et al. (2010), Müslümov et al. (2009) bei kitų autorių taikytu atstumo metodu palyginti poros akcijų kainų santykio stacionarumo ir kointegracijos metodai. Tyrimas patvirtino prastėjančius pelningumo rodiklius porų prekybos strategijai taikant atstumo metodą bet parodė, kad kointegracijos metodas grąžina aukštesnius, stabilius ir pastovius pelno rezultatus. T. Bogomolov atliko bandymus su Australijos vertybinių popierių rinka [7]. Jo tyrime lyginami trys porų parinkimo metodai: atstumo, kointegracijos bei stochastinio pasiskirstymo metodai. Prekybos signalai buvo formuojami analogiškai Gatev et al. (2006). Visi trys metodai generavo nemažą grąžą bei patvirtino gerą strategijos neutralumą rinkai, tačiau pelningumas buvo smarkiai neigiamai paveiktas pritaikius komisinius mokesčius transakcijoms. Becker et al. [8] porų parinkimui taiko genetinį algoritmą. Autoriai padarė išvadą, kad genetinis programavimas stipriai pagerino parinkimo procesą atsižvelgiant į padidintą sąryšį lemiančių faktorių kiekį.

Keletas autorių porų prekybos strategiją modifikavo taip, kad ją analizuoti būtų galima remiantis stochastinio valdymo principais. De Moura et al. (2016) porų prekybos strategijai rėmėsi tiesiniu būsenų erdvės modeliu poros kainų pasiskirstymui realizuoti [9]. Sudarius tinkamą būsenų erdvės modelį, autoriai pritaikė Kalmano filtrą kainų pasiskirstymo grįžimui į pusiausvyros būseną prognozuoti. Pagrindinis strategijos principas išliko toks pats: kainų pasiskirstymo sąlyginėms tikimybėms ženkliai nukrypus nuo pusiausvyros būsenos, atidaroma pirkimo/pardavimo pozicija, priklausant nuo nuokrypio ženklo. Geriausiais bandymais, tyrėjams pavyko pasiekti daugiau nei 17% metinę grąžą. Tourin et al. (2013) porų prekybos strategijai pritaikė stochastinio valdymo metodą [10]. Modeliuojant ieškoma optimalaus dviejų kointegruotų akcijų portfelio nustatymų. Autoriams pavyko minimizuoti praradimų funkciją ir maksimizuoti kaupiamąjį pelną surandant optimalų sprendinį, išreikštą Hamilton-Jacobi-Bellman lygtimi. You Liang (2020) tyrime, porų prekybos strategija išplėsta: pereinama prie daugialypės prekybos, kai tarpusavio sąryšis egzistuoja tarp daugiau nei dviejų kointegruotų vertybinių popierių [11]. Autoriai čia taiko ir Kalmano bei kitokius

filtravimo algoritmus dinaminėje būsenų erdvėje taip pat aptaria parametrų nustatymo metodus prekybos signalų formavimui maksimizuojant Sharpe santykį.

Paprastos porų prekybos signalų formavimo optimizavimui, anksčiau nagrinėtame Gatev et al. (2006) darbe taikomų išankstinių nustatytų ribų įtaką kaupiamajam pelnui tiria Puspaningrum et al. (2009) [12]. Autoriai išplėtojo skaitinį algoritmą kaupiamojo pelno nustatytame laike maksimizavimui, pagrįstą kointegracijos metodu, kointegracijos koeficiento svertinėmis dedamosiomis ir vidurkio nuokrypio momento nustatinėjimu. Taikydami šį algoritmą, tyrėjai įvertina vidutinę prekybos strategijos trukmę, vidutinį intervalą tarp pozicijų bei vidutinį prekybos pozicijų skaičių, o pagal šiuos įverčius nustato optimalias išankstines ribas kaupiamajam pelnui optimizuoti. Bertram (2010) prekybos pozicijų ribų nustatymo optimizavimuoti analizavo vertybinių popierių poros kainų pasiskirstymą kaip Ornstein–Uhlenbeck procesą [13]. Autorius pastebėjo, kad optimalios ribos pozicijų formavimui tiek kaupiamojo pelno, tiek Sharpe santykio atžvilgiu išsidėsčiusios simetriškai apie vidurkį. Darbe išvedamos analitinės išraiškos, skirtos maksimizuoti kaupiamajam pelnui ir Sharpe santykiui. Ornstein–Uhlenbeck proceso modelį porų kainų pasiskirstymui taiko ir Zeng et al. (2014) [14]. Tyrėjai polinominės funkcijos pagalba įvertina pirmą pozicijos ribos kirtimą laiko atžvilgiu. Dėl to panašiai, kaip ir Bertram (2010) galima nustatyti optimalias ribas. Autoriai taip pat parodo, kad geriausi kaupiamojo pelno rezultatai gaunami su simetrinėmis kainų pasiskirstymo vidurkiui ribomis. Optimalių ribų pozicijoms užimti nustatymui mašininio mokymosi algoritmą taiko Kim et al. (2019) [15]. Autoriai apmoko gilaus Q-mokymosi algoritmą nustatyti optimalias ribas ir atskirus prekybos intervalus šioms riboms pagal kointegruotų vertybinių popierių porų kainų paisiskirstymą. Taikydami įvairius periodus ribų perskaičiavimui bei koreguodami kitus parametrus, tarp jų ir portfelius sudarančių porų kiekių koeficientus, autoriai gauna metines grąžas intervale nuo 0.8588 iki 4.8760. Kiti autoriai gilaus mokymosi algoritmus taiko ne optimalių ribų nustatymui, o kaip dinamiškus agentus, veikiančius aplinkoje ir formuojančius poziciją generuoti maksimaliam pelnui.

Gao et al. (2001) savo darbe pritaikė q-mokymosi algoritmą absoliutiniam pelnui ir Sharpe santykiui maksimizuoti [16]. Atlikus tokio algoritmo įvertinimą užsienio valiutų rinkoje naudojant 500 dieninių duomenų mokymui ir 100 įvertinimui, gauti rezultatai buvo geri ir aplenkė kitus palyginimui taikytus prognozavimo algoritmus. Lee (2007) savo darbe taiko kelių agentų q-mokymosi struktūrą pagerinti sustiprinto mokymosi sistemoms akcijų rinkoje [17]. Autorių sudarytoje struktūroje, keli q-mokymosi agentai efektyviai veikia vertybinių popierių rinkoje apibrėždami konkrečias roles tarpusavyje ir atlikdami prekybą vienu metu. Optimalioms investavimo gairėms surasti, Moody et al. (2001) taiko rekurentinį sustiprintą mokymąsi [18]. Taikydami Sharpe santykį ir neigiamus nuokrypius mokymosi algoritmo optimizavimo uždaviniui spręsti, autoriai pasiekė neblogų rezultatų užsienio valiutų rinkoje gaudami 15% metinio kaupiamojo pelno ir 2.3 Sharpe santykį. Autorių atlikti bandymai su užsienio valiutomis ir akcijų rinka parodė, kad rekurentinio sustiprinto mokymosi algoritmas aplenkia q-mokymosi algoritmą, taip pat abu jie lenkia atskirų vertybinių popierių augimą. Zhang et al. (2020) [19] pasiūlė patobulintą genetinio algoritmo modifikaciją užsienio valiutų prekybai, skirtą maksimizuoti plačiai naudojamam Sharpe santykiui maksimizuoti.

Brim (2019) [20] tyrime porų prekybos strategijai taikyti sustiprinto ir gilaus mokymosi algoritmai: Q-mokymasis ir gilusis Q-mokymasis (DQN). Gilaus Q-mokymosi neuroninis tinklas sudaromas iš kelių vidinių sluoksnių, išėjimo sluoksnis generuoja veiksmų vektorių (jokios pozicijos, pirkti arba parduoti trumpam) kiekvienai įėjimo būsenai. Tinklo įėjimo būseną sudaro esamo laiko momento poros kainų pasiskirstymas, dienišė pasiskirstymo grąža, pasiskirstymo vidurkiai įvairiais laiko

intervalais (5, 7, 10, 15 dienų) bei pasiskirstymo ir pasiskirstymo vidurkių anksčiau naudotiems laiko intervalams santykiai. Darbe autorius neuroniniam tinklui pritaikė neigiamą gražos daugiklį, tokiu būdu sustiprindamas neigiamą gražą turinčių veiksmų efektą mokymosi metu. To rezultatas: konservatyvesnis gilaus q-mokymosi agentas, dažniau pasirenkantis poziciją „jokios pozicijos“ su mažesne metine graža. Vėlesniame tyrime, Brim (2020) tai pačiai struktūrai naudojo dvigubą gilaus mokymosi algoritmą (DDQN), kuris pasiekė geresnių rezultatų [21]. Sermpinis et al. (2021) [22] savo darbe siekdamas optimizuoti paprastą porų prekybos strategiją taip pat taiko ir gilaus mokymosi algoritmą. Tyrime, būtent šis algoritmas gražino geriausius rezultatus, pasak autoriaus, aplenkdamas paprastą ir genetinį algoritmus. Autorius taikė apmokytą gilaus mokymosi agentą aplinkoje, jam formuojant tokius pačius signalus, kaip ir Brim (2018): laikyti poziciją, pirkti, parduoti trumpam. Kiek kitaip gilaus mokymosi algoritmą taiko Wang et al. (2021) kointegruotų porų prekybos strategijai pagerinti [23]. Susidūrus su perdėto suderinimo problema, jai spręsti autoriai naudoja modifikuotą atlygio formavimą įtraukdami bazines gaires, kurios sudaromos pagal paprastą pozicijų formavimo strategiją (standartinis nuokrypis). Tokiu būdu mokymosi proceso metu nuokrypiai nuo bazinių gairių generuoja atlygio mažėjimą ir agentas skatinamas imtis kitokių veiksmų tik esant dideliame potencialiam atlygiui. Vėlesniame tyrime, Kim et al. (2022) taikė du atskirus gilaus mokymosi algoritmus – vieną nustatyti nuostolių stabdymo riboms ir kitą – prekybos pozicijoms užimti, taip praplėsdama ankstesnę DQN struktūrą į dvigubo gilaus q-mokymosi (DDQN), taikomą optimalių ribų nustatymui [24].

## 2. Konverguojančių porų paieška

Pirmasis žingsnis algoritminėje vertybinių popierių prekyboje – vertybinių popierių atrinkimas. Iš vertybinių popierių aibės turi būti surastos glaudžiai susietos jų poros, kurių tarpusavio sąryšis yra grįžtantis į vidurkį (konverguojantis), tuo yra grįžta visa šiame darbe taikoma prekybos strategija [1]. Akcijų kainos nėra pastovios. Turint nepastovių ekonominių kintamųjų rinkinį su ilgalaikę pusiausvyros būseną, jo paklaida:

$$\beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \dots + \beta_n X_{nt} = \tilde{\beta}_t \tilde{x}_t = \tilde{\varepsilon}_t \quad (1)$$

Pusiausvyros būsenos paklaida  $\tilde{\varepsilon}_t$  yra nuokrypis nuo ilgalaikės pusiausvyros būsenos. Pastaroji turi prasmę tik kai eilė  $\tilde{\varepsilon}_t$  yra stacionari.

Laiko eilė yra stacionari, kai jos vidurkis, variacija ir autokoreliacija yra pastovios pakankamai ilgame laiko periode. Pagal Krauss [5], laiko eilių analizei porų prekybos strategijoje taikomi metodai skirstomi į: atstumo, kointegracijos, stochastinio pasiskirstymo bei intelektinius metodus.

Atstumo metodas, pasiūlytas Gatev [1] bei taikomas B. Do et al. (2010), Müslümov et al. (2009) darbuose, yra paprasčiausias ir vis dar taikomas porų paieškai [25]. Akcijų poros kainų judėjimas kartu matuojamas atstumu, kuris yra išreikštas abiejų akcijų normalizuotų kainų skirtumų kvadratų suma:

$$A = \sum_{t=1}^N (P_t^1 - P_t^2)^2 \quad (2)$$

Pagal (2) atstumą A pasirenkama N vertybinių popierių su mažiausiais atstumais. Pagrindiniai tokio metodo privalumai yra jo skaidrumas bei nepažeidžiamumas klaidingų įverčių ar modeliavimo klaidų prasme. Metodo paprastumas lemia ir jo duodamus rezultatus – neparametrinis metodas negali būti pritaikytas prognozavimui ir tikėtinam pasiskirstymo laikui formuoti. Kitas trūkumas: metodas suformuoja vertybinių popierių poras, kurių dispersija per maža taip stipriai apribojant galimybes pradėti/stabdyti porų prekybos poziciją [5].

Stochastinio pasiskirstymo metode vertybinių popierių kainų skirtumo pasiskirstymo grįžtamumas į vidurkį modeliuojamas tolydiniame laike. Pasiskirstymas aprašomas būsenos kintamuoju  $x$  ir išreiškiamas:

$$dx_t = k(\theta - x_t)dt + \sigma dB_t \quad (3)$$

Čia  $dB_t$  yra *Brown* judėjimas apibrėžtoje galimybių erdvėje. Būsenos kintamasis grįžta į vidurkį  $\theta$  greičiu  $k$ . Šis metodas turi tris pagrindinius privalumus [25]. Pirmiausia, būsenų lygtimi išreikštas kainų skirtumų kintamasis tiksliai parodo grįžimą jo grįžimą į vidurkį. Antra, kadangi stebėjimas vyksta tolydiniame laike, tai yra patogu prognozuojant pasiskirstymo svyravimus. Stebint būsenos kintamąjį, galima apskaičiuoti tikėtiną kainų skirtumo pasiskirstymo grįžimo į vidurkį laiką. Trečiasis privalumas yra modelio apčiuopiamumas. Būsenų lygties (3) parametrai gali būti nesunkiai įvertinami taikant Kalmano filtro būsenų erdvėje ar mažiausių kvadratų metodus. Stochastinio pasiskirstymo metodas turi ir keletą trūkumų. Pagrindinis trūkumas: pasirinkti vertybiniai popieriai turi turėti tokią pačią grąžą, bet kokiam nuokrypiui tikimasi korekcijų. Tai yra labai didelis apribojimas, kadangi realybėje beveik neįmanoma surasti dviejų skirtingų vertybinių popierių, kurie turėtų vienodą grąžą.

Daugelis autorių taiko kointegracijos metodą dėl jo aiškumo ir patikimumo bei pasiekia gerų rezultatų [6]. Šis darbas orientuotas į pozicijų optimizavimo tyrimą, todėl porų parinkimui ekstensyviai neapžvelgiant kitų metodų, taikomas paplitęs kointegracijos metodas, smulkiau aprašytas sekančiame skyriuje.

## 2.1. Kointegracija

Kointegracija yra testavimo metodas, pirmą kartą pristatytas Engle-Granger darbuose 1987 m. [26] Jis naudojamas įprastai nepastoviams ekonominiams kintamiesiems (palūkanų normoms, išlaidų, pajamų, tų pačių prekių įvairiose rinkose kainoms ir pan.) susieti tarpusavyje į stacionarius kintamuosius ar laiko eiles [27], [28]. Pagal šį metodą:

Vektorius  $\tilde{x}_t$  dedamosios yra kointegruotos eile  $d$ ,  $b$ , žymima  $\tilde{x}_t \sim CI(d,b)$ , jei:

1. Visos  $\tilde{x}_t$  dedamosios yra: integruojamos eile  $d$ .
2. Egzistuoja vektorius  $\beta$  toks, kad tiesinė lygtis (1) integruojama eile  $(d - b)$ , kur  $b > 0$  ir  $\tilde{x}_t$  yra kointegruojantis vektorius.

Kointegracija plačiai naudojama laiko eilių analizėje ir yra tinkama nustatyti ilgalaikę koreliaciją tarp laiko eilių, taip pat tokia metodika patogi prognozavimui pagal jungtinę stacionarią laiko eilę. Testavimo metu, analizuojami scenarijai, kur dvi ar daugiau nestacionarios laiko eilės yra kartu susietos taip, kad jos nenukrypsta nuo pusiausvyros būsenos ilguoju laikotarpiu [28]. Nors egzistuoja keli būdai kointegracijai tarp laiko eilių įrodyti, šiame darbe taikomas populiariausias metodas kointegracijai įrodyti: Engle-Granger testas.

### 2.1.1. Engle-Granger testas

Aurių [26] siūlomas metodas leidžia tiesiogiai nustatyti, ar laiko eilės  $y_t$  ir  $z_t$  yra kointegruotos eile  $CI(1,1)$ . Tai pasiekti reikia dviem žingsniais:

Pirmame žingsnyje nustatoma integracijos eilė kiekvienai laiko eilei atskirai taip įsitikinant, kad atskira laiko eilė yra nestacionari. Nustatyti laiko eilės stacionarumui taikomi metodai, aprašyti 2.1.2 skyriuje. Jei individualios laiko eilės integruotos skirtingomis eilėmis, galima užtikrintai teigti, kad laiko eilės nėra kointegruotos. Kointegracija tarp laiko eilių įmanoma tik tarp kintamųjų, integruotų ta pačia eile.

Antrajame žingsnyje nustatomas ilgalaikė pusiausvyros būseną tarp laiko eilių. Jei laiko eilės  $y_t$  ir  $z_t$  yra abi  $I(1)$  procesai, tai ilgalaikis jų ryšys aprašomas (4)

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 z_t + e_t \quad (4)$$

Jei kintamieji kointegruoti tarpusavyje, tada paprastasis mažiausių kvadratų metodas grąžins tikslūs kointegracijos įverčių parametrus  $\beta_0$  ir  $\beta_1$ , t.y. kointegracijos vektorių. Jei nuokryptai nuo ilgalaikės pusiausvyros būsenos  $e_t$  yra stacionarūs  $I(0)$ , tada laiko eilės  $y_t$  ir  $z_t$  kointegruotos eile (1,1). Šiame žingsnyje vertinama testo statistinė vertė, išreikšta:

$$F_{\hat{e}_t} = \frac{\hat{a}_1}{SN(\hat{a}_1)} \quad (5)$$

Čia  $SN$  yra įverčio  $\hat{a}_1$  standartinis nuokrypis.

Vidyamurphy [29] pritaikė Engle-Granger testą naudojant vertybinių popierių kainų logaritmus kaip dedamąsias kointegracijos regresinei išraiškai:

$$\log(p_t^A) - \gamma \log(p_t^B) = \mu + e_t = y_t \quad (6)$$

$\gamma$  čia atitinka kointegracijos koeficientą, o  $y_t$  išreikšta kaip grąža nuo strategijos pozicijos, kai perkamas 1 vienetas vertybinio popieriaus A ir parduodami  $\gamma$  vertybiniai popieriai B. Vidurkis  $\mu$  su nuokrypiais  $e_t$  aprašo laiko eilę panašia forma į (6).

Dviejų žingsnių kointegracijos testas turi trūkumų, kadangi rezultatai gali būti paveikti kintamųjų eiliškumo, pirmame žingsnyje atsiradusios įverčių paklaidos perkeliama į antrąjį žingnį, kur paklaida dar labiau didinama, taip pat jungtinei laiko eilei esant nekointegruotai, kointegracijos regresinė išraiška  $y_t$  gali grąžinti netikrus įverčius. Sekančiame skyriuje aprašyti du darbe taikomi metodai individualios laiko eilės stacionarumui nustatyti.

## 2.1.2. Stacionarumo nustatymo metodai

### 2.1.2.1. Išplėstinis Dickey-Fuller metodas

Atliekant laiko eilių analizę, šis metodas yra svarbus nustatant laiko eilės stacionarumą. Jis pagrįstas vienetinių šaknų paieška laiko eilėje. Vienetinė šaknis egzistuoja laiko eilėje su  $\alpha = 1$  lygtyje (7).

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \beta X_t + \varepsilon \quad (7)$$

Jei tokioje laiko eilėje egzistuoja vienetinė šaknis, laiko eilė yra nestacionari laike. Vienetinių šaknų skaičius eilėje nurodo, kokios eilės integracija reikalinga, kad laiko eilė būtų stacionari.

Dickey-Fuller metodu testuojama nulinė hipotezė, kad  $\alpha = 1$  lygtyje (6).

$$y_t = c + \beta t + \alpha y_{t-1} + \Phi \Delta y_{t-1} + e_t \quad (8)$$

Čia  $y_{t-1}$  yra 1 eilės vėlinimas, o  $\Delta y_{t-1}$  yra pirmasis eilės skirtumas laiko momentu (t-1). Jei ši lygtis egzistuoja ir  $\alpha \neq 0$ , laiko eilė yra nestacionari. Išplėstiniame Dickey-Fuller metode naudojama išplėstinė lygtis nulinei hipotezei tikrinti. Ši lygtis (9) apima ir aukštesnės eilės regresinį procesą laiko eilėje.

$$y_t = c + \beta t + \alpha y_{t-1} + \Phi_1 \Delta y_{t-1} + \Phi_2 \Delta y_{t-2} \dots + \Phi_p \Delta y_{t-p} + e_t \quad (9)$$

Nulinė hipotezė ir rezultatų interpretavimas išlieka toks pats, tačiau pagal šią lygtį atliekama nuodugnesnė laiko eilės analizė.

$$DF_t = \frac{\hat{\alpha}}{SN(\hat{\alpha})} \quad (10)$$

Testo statistinė p vertė gaunama lygtimi (10). Gauta p reikšmė turėtų būti mažesnė už reikšmingą lygį (tolesnėje eigoje – 0.05), kad nulinė hipotezė būtų atmesta. P reikšmei esant arti reikšmingo lygio, hipotezės patvirtinimą ar atmetimą dera formuoti pagal metodo grąžinamą statistinę vertę vienetinei



šakniai lyginant ją su kritinėmis vertėmis. Jei statistinė vertė mažesnė už kritines vertes, nulinė hipotezė atmetama, t.y. laiko eilė yra stacionari.

### 2.1.2.2. Phillips-Perron metodas

Finansinių laiko eilučių analizėje gana populiarus metodas yra 1988 m. Phillips ir Perron pristatytas metodas, pavadintas autorių vardu. Metodas, kaip ir išplėstinis Dickey-Fuller metodas, skirtas nustatyti vienetinių šaknų egzistavimui laiko eilėje.

Vietoje išplėstinio Dickey-Fuller metodo, aprašyto 2.1.2.1 skyrelyje, taikomos parametrinės autoregresijos aproksimuoti laiko eilės struktūrai, Phillips-Perron testas ignoruoja bet kokią autokoreliaciją testo regresijos lygtyje taip pat yra tikslesnis plačiame diapazone pasiskirsčiusių paklaidų atžvilgiu. Regresijos išraiška pateikiama (11):

$$\Delta y_t = \beta' D_t + \pi y_{t-1} + u_t \quad (11)$$

Čia  $u_t$  yra  $I(0)$  ir gali būti pasiskirsčiusi plačiame diapazone. Phillips-Perron testas tiesiogiai koreguoja testo statistinius įverčius  $t_{\pi=0}$  ir  $T\hat{\pi}$  (toliau žymimi atitinkamai  $Z_t$  ir  $Z_\pi$ ) pagal autokoreliaciją ir paklaidų  $u_t$  pasiskirstymą.

$$Z_t = \left( \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\lambda}^2} \right)^{1/2} \times t_{\pi=0} - \frac{1}{2} \left( \frac{\hat{\lambda}^2 - \hat{\sigma}^2}{\hat{\lambda}^2} \right) \times \left( \frac{T \times SN(\hat{\pi})}{\hat{\sigma}^2} \right) \quad (12)$$

$$Z_\pi = T\hat{\pi} - \frac{1}{2} \frac{T^2 \times SN(\hat{\pi})}{\hat{\sigma}^2} (\hat{\lambda}^2 - \hat{\sigma}^2) \quad (13)$$

Išraiškos  $\hat{\lambda}^2$  ir  $\hat{\sigma}^2$  yra dispersijos parametrų įverčiai.

$$\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \sum_{t=1}^T E[u_t^2] \quad (14)$$

$$\lambda^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T E[T^{-1} S_T^2] \quad (15)$$

$$S_T = \sum_{t=1}^T u_t \quad (16)$$

Pagal nulinę hipotezę,  $\pi = 0$ , laiko eilėje egzistuoja vienetinė šaknis, t.y. laiko eilė – nestacionari.  $Z_t$  ir  $Z_\pi$  statistiniai dydžiai turi tokias pačias savybes, kaip ir išplėstinio Dickey-Fuller metodo statistiniai įverčiai.

### 3. Prekybos signalų formavimas

#### 3.1. Paprasta porų prekybos strategija

Paprasčiausias porų prekybos algoritmas įgyvendinamas tokiu būdu: kai atrinktų vertybinių popierių poros kainų pasiskirstymas pasiekia nurodytą lygį, žengiama į atidarymo poziciją, kur didesnės kainos vertybinis popierius yra parduodamas trumpam, o pigesnis – perkamas [30]. Jei kainų pasiskirstymas sumažėja iki nurodyto lygio, atidaroma atvirkštinė pozicija: didesnės kainos vertybinis popierius yra perkamas, o pigesnis – parduodamas trumpam. Kainų pasiskirstymui grįžus į vidurkinę padėtį, viena iš pozicijų arba abi bus pelningos. 3.1 pav. pateikiamas bazinis algoritmas ir konverguojančių akcijų kainų kreivės aprašytam metodui realizuoti ir pademonstruoti su pasiskirstymo lygiu 0.05

```
VIRSUTINE_RIBA <- 1.05
APATINE_RIBA <- 0.95
if dabartinis_pasiskirstymas > vidutinis_pasiskirstymas*VIRSUTINE_RIBA then
  parduoti_trumpam brangesne_akcija = TRUE;
  pirkti pigesne_akcija = TRUE;
else if dabartinis_pasiskirstymas < vidutinis_pasiskirstymas*APATINE_RIBA
then
  parduoti_trumpam pigesne_akcija = TRUE;
  pirkti brangesne_akcija = TRUE;
else
  nera_pozicijos = TRUE;
```



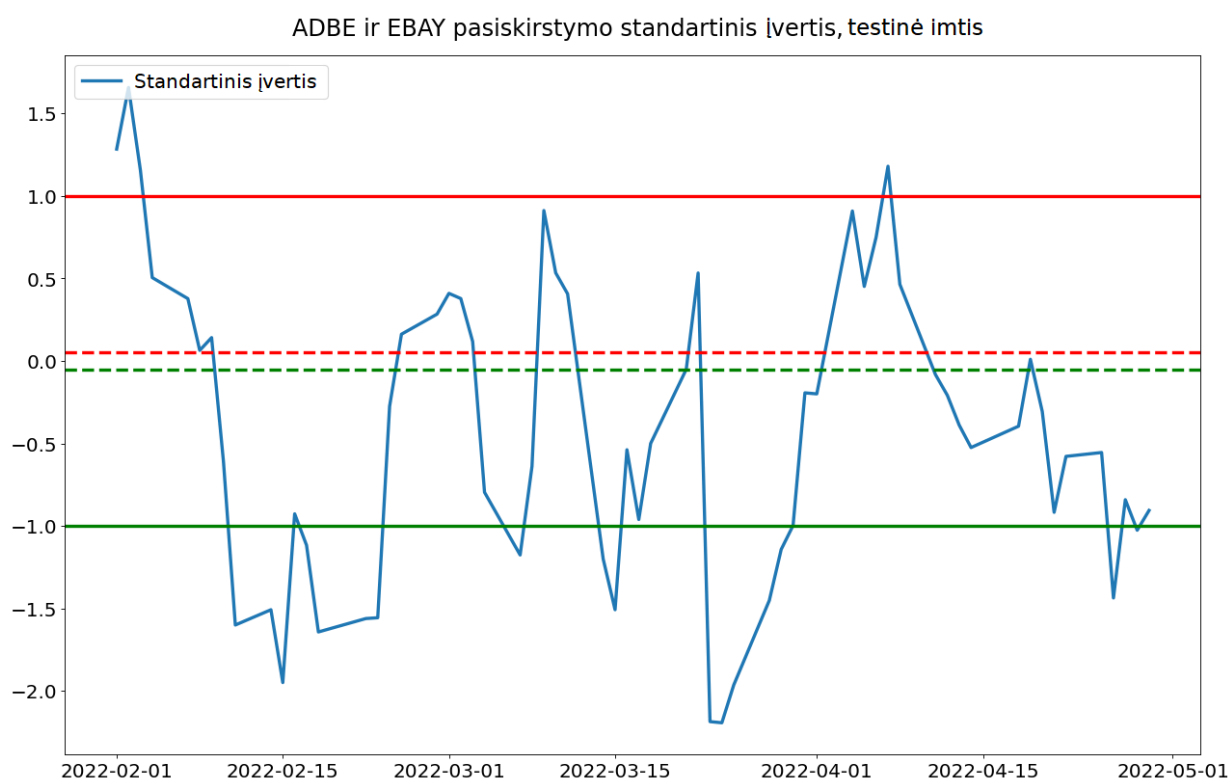
3.1 pav. Porų prekybos algoritmo pagrindų taikymas [20]

Ankstesniuose Gatev et al. (2006) iš jo išplaukiančiuose B. Do et al. (2010), Müslümov et al. (2009) darbuose pirkimo/pardavimo ribos nustatomos pagal atrinktų vertybinių popierių poros kainų pasiskirstymo standartinius įverčius (17), gautus kainų pasiskirstymo formavimo periode T (1 metai) [31].

$$z = \frac{y_t - \mu_T}{\sigma_T} \quad (17)$$

Toks paprastas pirkimo/pardavimo pozicijų formavimo atžvilgiu algoritmas plačiai taikomas naudojant konverguojančių vertybinių popierių pasiskirstymo standartinių įverčių [1][3][4][7]. Gatev et al. (2006) pozicijų atidarymui taiko 2 standartinių įverčių ribą. Kiti autoriai Huck et al. (2014) taiko 2-3 standartinių įverčių ribas pozicijų formavimui.

Praktinis strategijos taikymo pavyzdys pateiktas 3.2 pav. Pagal [1], atrinktos vertybinių popierių poros kainų pasiskirstymo standartiniam įverčiui kirtus apatinę žalią ribą atidaroma pozicija perkant pirmosios kompanijos (pavyzdyje - ADBE) ir parduodant trumpam antrosios kompanijos (pavyzdyje - EBAY) akcijų. Kainų pasiskirstymo standartiniam įverčiui grįžus į nulinę vertę, pozicija uždaroma atvirkštiniu veiksmu: parduodant pirmosios kompanijos ir atperkant antrosios kompanijos akcijas. Atvirkštinių pozicijų atidarymas kainų pasiskirstymo standartiniam įverčiui kirtus viršutinę raudoną ribą vyksta analogiškai, tik atvirkštiniu principu: perkama antrosios kompanijos akcijų, parduodama trumpam pirmosios kompanijos akcijų.

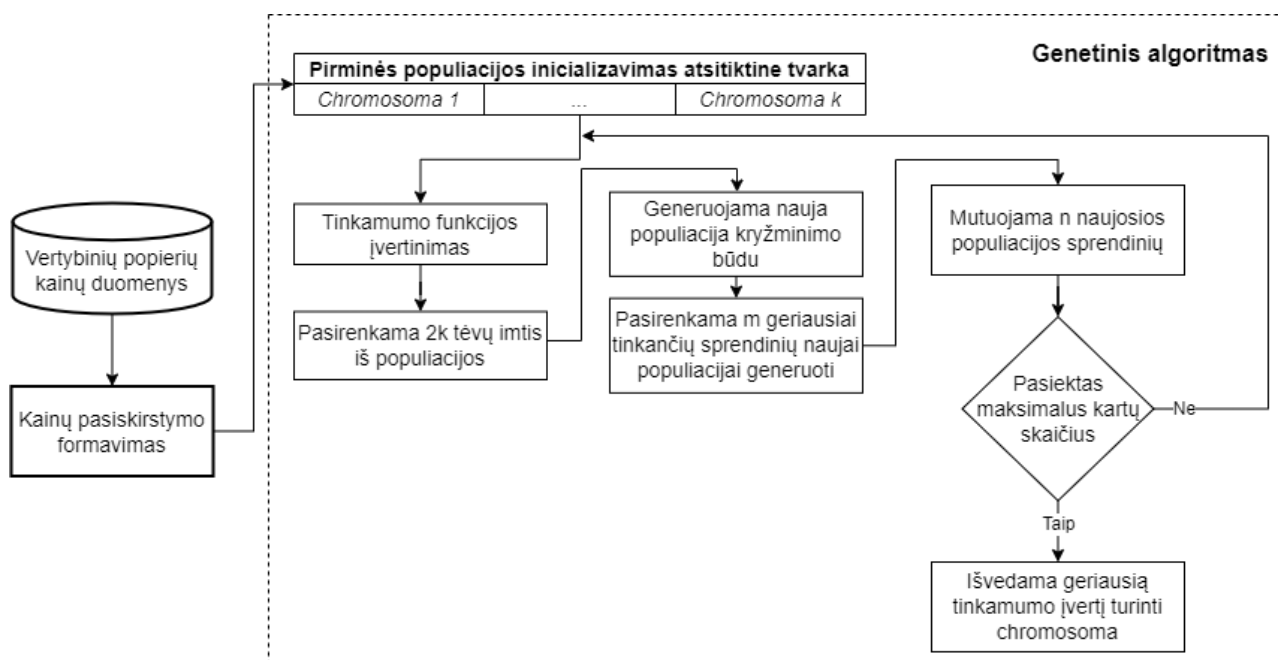


3.2 pav. Paprastos porų prekybos signalų formavimas

Tokia strategija buvo pelningai taikoma šio amžiaus pirmame dešimtmetyje ir anksčiau [1][3][4][7]. Vėlesniais laikotarpiais B. Do et al. (2010), Müslümov et al. (2009) bei Huck et al. (2014) parodo, kad tokios strategijos pelningumas mažėja vėlesniais laikotarpiais. Taip yra dėl kelių priežasčių [22]. Nustatant ribas pozicijų formavimui daroma prielaida, kad poros kainų pasiskirstymas yra normalusis skirstinys, o tai su realaus laiko duomenimis dažnai nėra tiesa. Toks metodas nėra tęstinis, taikant tokią strategiją su vis naujais duomenimis, jie nėra taikomi optimalių ribų perskaičiavimams. Taip pat metodui standartinio įverčio riba dažnai pasirenkama apytiksliai iš grafiko taip nepasiekiant optimalių rezultatų.

### 3.2. Genetiniai algoritmai

Genetiniai algoritmai yra evoliucinių algoritmų atšaka, kuria siekiama nustatyti įvairius optimizavimo ir duomenų paieškos parametrus. Algoritmų sprendiniai užkoduoti chromosomos struktūra grįstose duomenų grupėse. Optimizavimo uždavinys sprendžiamas chromosomas rekombinuojant tokiu būdu, kuriuo išsaugoma svarbiausia sprendinio informacija, ir gaunant naujus, tinkamesnius sprendinius (chromosomas) iš taikytų senesnių kiekvienos iteracijos metu [32]. Rekombinacijos metu, atliekama kryžminimo operacija tarp kelių chromosomų, daliai vieno sprendinio įterpiant į kitą. Iteravimo metu taip pat atliekamos papildomos operacijos, skirtos išvengti priešankstinio optimalaus sprendinio nustatymo: mutacija bei tėvų parinkimas. Genetinis algoritmas siekia maksimizuoti apibrėžtą tinkamumo funkciją.



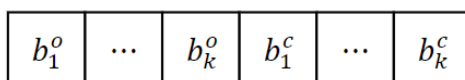
3.3 pav. Genetinio algoritmo struktūra



3.4 pav. Bollinger juostos

Genetiniai algoritmai taikomi vertybinių popierių rinkoje, jau 2006 m. Becker et al. [8] savo darbuose pritaikė genetinį algoritmą atrinkti prekybai JAV vertybiniais popieriais iš didelių indeksų. Šiame darbe genetinis algoritmas taikomas dviems porų prekybos strategijos modeliams: pozicijų formavimui pagal standartinį įvertį bei pagal Bollinger juostas (3.4 pav.)

Sermpinis et al. (2021) porų prekybos pozicijų nustatymui taiko genetinį algoritmą nustatyti geriausiems pirkimo ir pardavimo lygiams maksimizuojant Sharpe santykį [22]. Kaip ir Gatev et al. (2006), autoriai pozicijų formavimui taiko poros kainų pasiskirstymo standartinius įverčius. Genetinio algoritmo pagalba sprendžiamas uždavinys – optimalus atstumas standartinių įverčių riboms. Chromosomos struktūra pateikta 3.5 pav. Čia  $b_1^o$  iki  $b_k^o$  atitinka atidarymo ribą,  $b_1^c$  iki  $b_k^c$  – uždarymo.



3.5 pav. Chromosomos struktūra

Tokiu būdu yra optimizuojamas standartinio įverčio ribų nustatymas nebenustatinėjant jų grafiškai. Autoriui palyginus paprastą porų prekybos algoritmą su optimizuotu genetinio algoritmo pagalba, metinė grąža padidėjo 1.84%. Tačiau metodas vis vien neapima perskaičiavimo darbu su naujais duomenimis.

Šiek tiek modifikuotą strategiją genetiniam algoritmui taiko Huang et al. (2015) [33]. Vietoje kitų tyrėjų ([1], [3], [4], [7], [22]) taikomo standartinio įverčio pozicijų formavimo riboms nustatyti, autoriai taiko Bollinger juostas [34]. Šios juostos yra naudingos ir taikomos ne tik porų prekybos strategijoje (3.4 pav.).

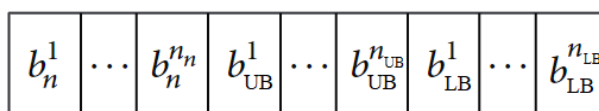
Juostos formuojamos pagal slenkantį vertybinių popierių kainos (porų prekybos atveju – kainų pasiskirstymo) vidurkį (18). Pagal jį, gaunama viršutinė ir apatinė Bollinger juostų dalys (19) ir (20).

$$MA_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y(t-i+1) \quad (18)$$

$$UB_n(t) = MA_n(t) + k \times \sigma_n(t) \quad (19)$$

$$LB_n(t) = MA_n(t) - k \times \sigma_n(t) \quad (20)$$

Kointegruotos poros kainų pasiskirstymo  $y$  vidurkis laiko momentu  $t$  per paskutinius  $n$  periodų apskaičiuojamas (18). Tada parametru  $k$ , kur  $k \in \mathbb{R}$ , nustatomas geriausias atstumas viršutinei ir apatinei riboms.  $\sigma_n$  čia yra kainų pasiskirstymo standartinis nuokrypis per tuos pačius paskutinius periodus  $n$ . Taigi tokioje strategijoje chromosomos struktūra yra papildoma dar vienu parametru – periodo dydžiu slenkančio vidurkio ir standartinio nuokrypio skaičiavimui (3.6 pav.)

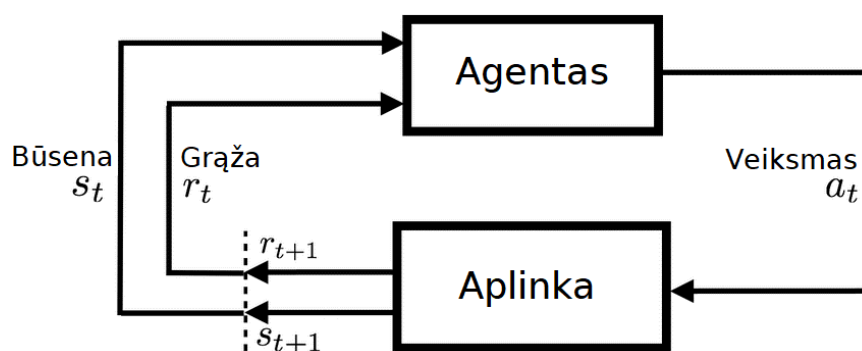


3.6 pav. Modifikuotos strategijos chromosomos struktūra

Porų prekybos pozicijos atidaromos analogišku paprastos porų prekybos strategijai (3.1 skyrius) būdu vietoje standartinio įverčio naudojant poros kainų pasiskirstymą o viršutinei ir apatinei riboms – Bollinger juostos ribas. Toks taikymas ne tik leidžia optimizuoti pozicijų formavimo ribas, bet ir yra geriau pritaikytas darbui su naujesniais duomenimis naudojant slenkantį vidurkį.

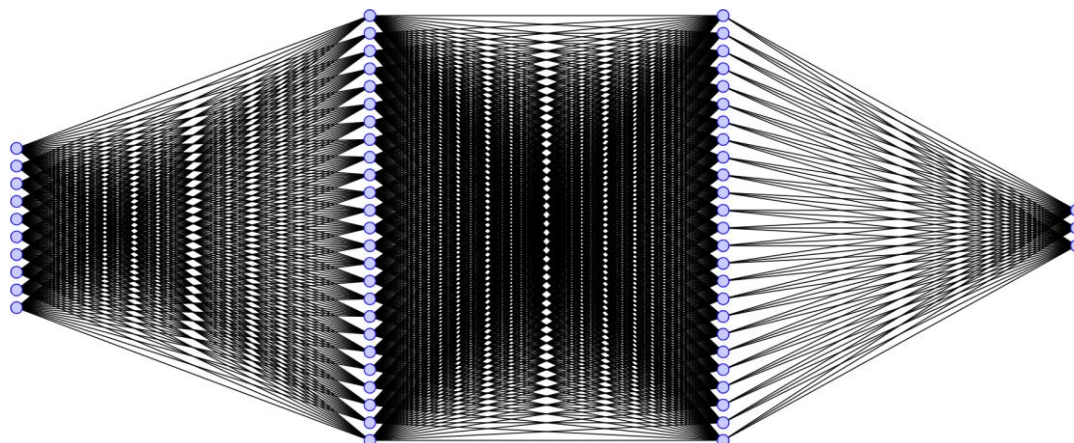
### 3.3. Gilaus mokymosi algoritmai

Sustiprinto mokymosi algoritmo pritaikymui porų prekybai naudojama bendrinė agento, veikiančio aplinkoje, struktūra (3.7 pav.) [22][15]. Taikant mašininio mokymosi algoritmus pabrėžiama, kad šioje dalyje siekiama ne optimizuoti paprastos porų prekybos strategijos nustatant optimalias išankstines ribas, o sukurti ir apmokyti agentą, gebantį autonomiškai formuoti pozicijas ir gauti pelną. Šiame darbe apžvelgiami du sustiprinto mokymosi algoritmai: DQN ir DDQN.



3.7 pav. Agento veikiančio aplinkoje struktūra

DQN sutrumpintai vadinamas gilaus Q-mokymosi tinklas (*deep q-network*), kuriuo tobulinamas Q-mokymosi algoritmo veikimas. Q-mokymosi algoritmas yra vienas iš sustiprinto mokymosi algoritmų [35]. Jis paremtas geriausio veiksmo paieška, atsižvelgiant į esamą būseną. Kuriant Q-mokymosi algoritmą, sukuriama  $q$  įverčių (arba kokybės įverčių) matrica, kurioje esančios pradinės vertės kiekvienos iteracijos metu yra atnaujinamos optimalesnėmis. Įėjimą sudaro 10 dedamųjų, detaliau jos aprašomos 4.3 skruje, du paslėpti 50 neuronų sluoksniai ir 3 neuronų išėjimo sluoksnis 3.8 pav..



3.8 pav. Gilaus q-mokymosi tinklo struktūra

Paprasčiausia vieno žingsnio Q-mokymosi forma pateikiama (19). Čia  $S$  atitinka būsenų erdvę, o  $A$  – veiksmų, koeficientas  $\gamma$  naudojamas kaip nuolaidos faktorius, padedantis nustatyti dabartinę būseną ir būsimą atlygį. Taikant šią lygtį, veiksmo įverčio funkcija  $Q$  tiesiogiai aproksimuoja optimalaus veiksmo įverčio funkciją nepriklausomai nuo sustiprinto mokymosi algoritmui taikomų gairių [36]. Naudojamos gairės lemia eiliškumą ir dažnumą, kuriuo bus atnaujinamos  $q$  įverčių matricos vertės. Porų prekybos atveju, Q-mokymosi algoritmo pagalba optimizuojamos tikslo funkcijos vertės kiekvienai prekybos poromis būsenai.

$$Q(S_t, A_t) \leftarrow Q(S_t, A_t) + \alpha \left[ R_{t+1} + \gamma \max_{\alpha} Q(S_{t+1}, \alpha) - Q(S_t, A_t) \right] \quad (21)$$

Gilusis Q-mokymasis taikomas paprasto Q-mokymosi algoritmo įverčių aproksimavimui. Tam pasitelkiamas neuroninis tinklas su parametru  $\theta$ , kuris siekia minimizuoti praradimo funkciją (22), kuri išreiškiama kaip galutinio  $q$  įverčio ir numanomo  $q$  įverčio skirtumo kvadratas:

$$L(\theta) = \left( \left[ R + \gamma \max_{\alpha_{t+1}} Q(S_{t+1}, \alpha_{t+1}, \theta^{gal.}) \right] - Q(S_t, A_t, \theta^{num.}) \right)^2 \quad (22)$$

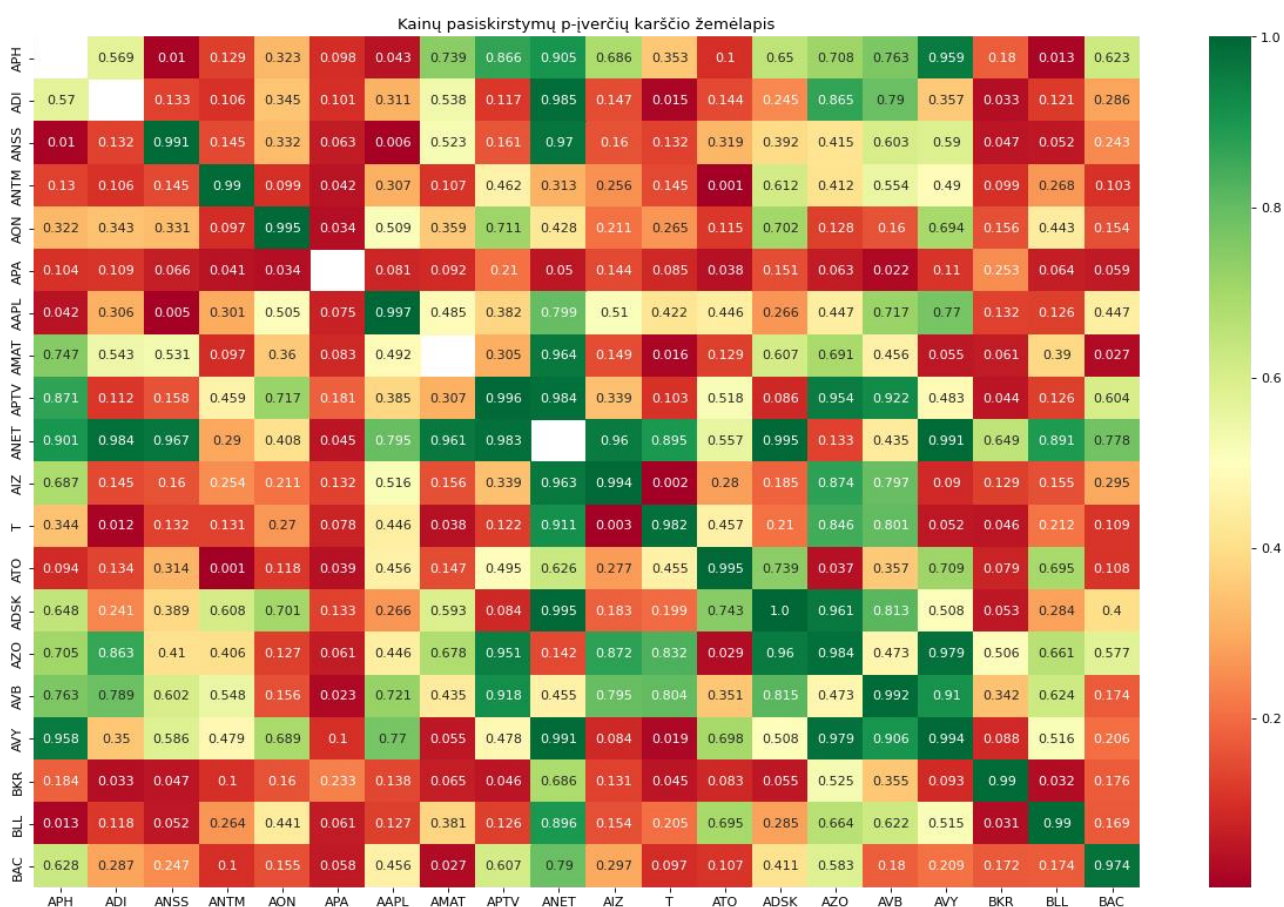
Kiekvienu mokymosi etapu, neuroninis tinklas praradimo funkcijos vertę mažėja taip artėjant prie galutinio optimalaus  $q$  įverčio. Pagrindinė priežastis, dėl kurios taikomas gilusis Q-mokymosi tinklas yra mokymosi proceso stabilizavimas  $\theta$  įverčiui tiesiogiai nedarant įtakos momentinės būsenos aproksimacijai  $Q(S_t, A_t)$  [23].

Dvigubas gilusis Q-mokymosi algoritmas (DDQN) pristatytas Google Deep Mind 2016 metais [37]. Tokio algoritmo pagrindinė mintis yra neuroninio tinklo atskyrimas į du atskirus: įvertinimo ir tikslinį. Įvertinimo tinklas taikomas išėjimo vektoriaus generavime, tuo tarpu tikslinis tinklas naudojamas apmokymams iš stebėjimų aibės. Tokiu būdu, nenaudojant papildomų neuroninių tinklų gaunama antra kokybės įverčio funkcija, taikoma tik vertinimui, o ne treniravimui. Tikslinio tinklo parametrai  $\theta$ , įvertinimo testinio tinklo pagalba metu, nekeičiami. Savo tyrime, Brim (2020) [21] taiko būtent dvigubą gilusis Q-mokymosi algoritmą porų prekybai pagal techninius indikatorius. Tokios struktūros agentas generavo labai aukštą kaupiamąjį metinį pelną, kuris 38 kointegruotoms poroms iš S&P 500 indekso davė 131.33 gražą. Agentas vykdo agresyvią pozicijų formavimo politiką, retai užimdamas poziciją „jokios pozicijos“, kadangi pastaroji niekada negeneruos pelno.

## 4. Rezultatai

Porų prekybos strategijai vertybiniai popieriai atrinkti iš plačiai taikomo indekso S&P 500, kurį sudaro penki šimtai didžiausių JAV vertybinių popierių biržos kompanijų. Treniravimo imčiai naudojamos dviejų metų dieninės kainos 2020 m. sausio 1 d. – 2022 m. sausio 1 d. intervale. Įvertinimo imčiai naudotas 5 mėn. intervalas nuo 2022 sausio 2 d. iki 2022 gegužės 1 d. Pažymima, kad įvertinimo imties laikotarpiu S&P 500 indeksas bei vertybinių popierių rinka apskritai nuvertėjo, S&P 500 indeksui gražinant neigiamus rezultatus (2 lentelė). Tačiau net ir tokiomis sąlygomis, porų prekybos strategijos rezultatai visais nagrinėjama atvejais ne tik viršijo neigiamą S&P 500 indekso grąžą, bet ir buvo pelningi su teigiama grąža. Taikant sekančiuose skyriuose aprašytus algoritmus, priimami keli bendri principai visiems metodams. Remiantis šaltiniais [1][3][4][7], siekiant išvengti a priori žinių taikymo, prekybos pozicijos formuojamos viena diena vėliau. Taikant paprastą bei genetinio algoritmo pagalba optimizuotą porų prekybos algoritmus, prekybos signalų uždarymui taikoma nejautrumo zona su  $\pm 0.05$  ribomis, taip šiek tiek padidinant uždaromų ir neatidaromų pozicijų kiekį ir stabilumą. Pozicijų atidarymui ir uždarymui taikomi 0.05% komisiniai mokesčiai. Tokie mokesčiai yra pakankami vertinant jų įtaką prekybai vertybiniais popieriais, kadangi prekybos tarpininkai (brokeriai) suteikia nuolaidų didelę apyvartą turintiems investuotojams.

Siekiant sumažinti imtį Engle-Granger testui potencialių vertybinių popierių poroms pasirinkti, atliekami stacionarumo testai visoms poroms. 4.1 pav. pateikti dalies akcijų, priklausančių S&P 500 indeksui, kainų pasiskirstymų p-įverčiai. Poros, kurių p-įvertis yra aukštas gali iš karto būti atmestos, kadangi jos tikrai yra nestacionarios.



4.1 pav. 20-ties akcijų S&P 500 indekse kainų pasiskirstymo p-įverčiai



Likusioms poroms aliekamas kointegracijos įvertinimas pagal Engle-Granger metodą (2.1.1), stacionarumui vertinti naudojant ir išplėstinį Dickey-Fuller (2.1.2.1), ir Phillips-Perron (2.1.2.2) metodus taip siekiant užtikrintai įvertinti porų tarpusavio sąryšį. Vertybinių popierių tikrinimo porų strategijos tinkamumui pagal kointegraciją Engle-Granger metodu eiga:

- Atlikti stacionarumo testą individualiems vertybiniams popieriams ir įsitikinti, kad jų laiko eilės – nestacionarios.
- Išreikšti potencialios vertybinių popierių poros kainų pasiskirstymą pagal (4) lygtį, taikant paprastąjį mažiausio kvadrato metodą.
- Atlikti stacionarumo testą pagal (4) lygtį gautam kainų pasiskirstymui ir įsitikinti, kad ši laiko eilė yra stacionari.

Stacionarumo vertinimui taikomi anksčiau aprašyti išplėstinis Dickey-Fuller ir Phillips-Perron metodai. Jie grąžina p-įverčius (4.1 pav.), pagal kuriuos apsprendžiamas laiko eilės stacionarumas. Laikoma, kad laiko eilė yra stacionari su 95% statistiniu patikimumu, jei jos p-įvertis yra mažesnis už 0.05. Atlikus Engle-Granger testą potencialioms poroms, pasirinkta 21 geriausias įverčius demonstravusi pora.

1 lentelė. Kointegracijos būdu atrinktų akcijų poros

Kompanija	T-statistika	P-įvertis	Akcijų pora	P-įvertis	P-įvertis	T-statistika
ABMD	-2.252	0.460	ABMD - AMZN	0.042	0.016	-3.478
AMZN	-2.180	0.501				-27.212
ACN	-2.435	0.361	ACN - ARE	0.005	0.001	-4.183
ARE	-2.984	0.137				-41.872
ALLE	-2.810	0.193	ALLE - MO	0.050	0.020	-3.413
MO	-2.996	0.133				-26.098
BBY	-1.962	0.622	BBY - BWA	0.035	0.036	-3.544
BWA	-2.999	0.132				-23.281
CTLT	-2.696	0.238	CTLT - CMG	0.011	0.008	-3.940
CMG	-2.234	0.471				-30.485
DFS	-2.818	0.190	DFS - DXC	0.027	0.034	-3.633
DXC	-3.073	0.113				-23.526
DG	-2.733	0.223	DG - EQIX	0.042	0.011	-3.473
EQIX	-2.331	0.417				-28.679
DD	-2.688	0.241	DD – EA	0.019	0.088	-3.763
EA	-2.339	0.412				-18.855
EFX	-2.398	0.381	EFX - EPAM	0.006	0.003	-4.126
EPAM	-2.810	0.193				-35.031
ADBE	-3.012	0.129	ADBE - EBAY	0.054	0.017	-3.378
EBAY	-2.407	0.376				-26.832
FOXA	-2.800	0.197	FOXA - FRC	0.025	0.014	-3.666
FRC	-3.104	0.105				-27.712
EVRG	-2.791	0.200	EVRG - FRT	0.034	0.117	-3.554
FRT	-2.653	0.256				-17.389
EXPE	-2.584	0.287	EXPE - FITB	0.020	0.042	-3.737
FITB	-3.122	0.101				-22.507
FE	-2.162	0.511	FE - FTNT	0.042	0.049	-3.480
FTNT	-1.582	0.799				-21.786
IT	-2.754	0.214	IT - GILD	0.026	0.414	-3.649

GILD	-1.896	0.657				-10.365
IFF	-2.353	0.405	IFF - INTC	0.027	0.006	-3.631
INTC	-2.916	0.157				-31.633
INTU	-2.259	0.456	INTU - JNPR	0.025	0.016	-3.659
JNPR	-2.269	0.451				-27.169
MA	-2.895	0.164	MA - MCHP	0.049	0.051	-3.418
MCHP	-3.063	0.115				-21.569
MET	-3.112	0.103	MET - MGM	0.002	0.007	-4.455
MGM	-3.085	0.110				-31.164
MSFT	-3.088	0.109	MSFT - MMC	0.034	0.040	-3.552
MMC	-2.373	0.394				-22.781
HON	-2.133	0.528	HON - TXN	0.008	0.009	-4.030
TXN	-2.330	0.417				-29.587

Visų pasirinktų individualių akcijų kainų laiko eilių p-įverčiai gauti didesni už ribinę 0.05 vertę, tai indikuoja jų nestacionarumą. Ne visi akcijų porų kainų pasiskirstymo laiko eilių p-įverčiai yra mažesni už ribinę 0.05 vertę, tačiau laikyta, kad jei gautas p-įvertis yra artimas šiai ribai – galima laikyti laiko eilę stacionaria, kitaip tariant egzistuoja tvirtas sąryšis tarp akcijų ir jos yra tinkamos strategijai.

#### 4.1. Paprastas algoritmas

Paprastu porų prekybos strategijos algoritmu laikomas toks algoritmas, kuriame ribos slenkantiems vidurkiams bei pozicijos atidarymo ir uždarymo ribos parenkamos pagal bendrai naudojamas, ankstesniuose tyrimuose sėkmingai taikytas reikšmes [1][3][4][7]. Paprastam algoritmui parinktos reikšmės:

- Slenkantis vidurkis: 21 (vienas prekybos akcijų rinkoje mėnesis)
- Apatinė riba, pirkti: -1 standartinio įverčio nuokrypis
- Viršutinė riba, parduoti trumpam: 1 standartinio įverčio nuokrypis

Porų kainų pasiskirstymo standartinis įvertis apskaičiuojamas taikant (15) lygtį. Kaip ir atliekant Engle-Granger testavimą, naudojama 2 m. formavimo imtis, paprastuoju mažiausių kvadratų metodu nustatant (2) lygtyje taikomą koeficientą  $\beta$ . Strategijos vertinimo imčiai, naudojami paskutiniųjų 5 mėn. duomenys. Pagrindinis kriterijus pritaikytos strategijos vertinimui – metinis kaupiamasis pelnas.

$$R_A = (1 + R_C)^{\frac{252}{t}} - 1 \quad (23)$$

$R_A$  čia yra metinis kaupiamasis pelnas (šiuo atveju, vertybinių popierių birža atvira prekybai 252 dienas per metus),  $R_C$  – kaupiamasis pelnas, išreikštas dieninių pokyčių suma atidarytų pozicijų periode  $t$ . Kitas taip pat labai svarbus vertinimo kriterijus – Sharpe santykis (24), nusakantis pelno ir su juo susijusios rizikos sąryšį.

$$SR_A = \frac{(R_A - R_f)}{\sigma_A} \times \sqrt{252} \quad (24)$$

$R_f$  čia yra mažos rizikos vertybinio popieriaus (dažniausiai – 10 metų JAV obligacijos) grąža, kurios atžvilgiu vertinama esama rizika.

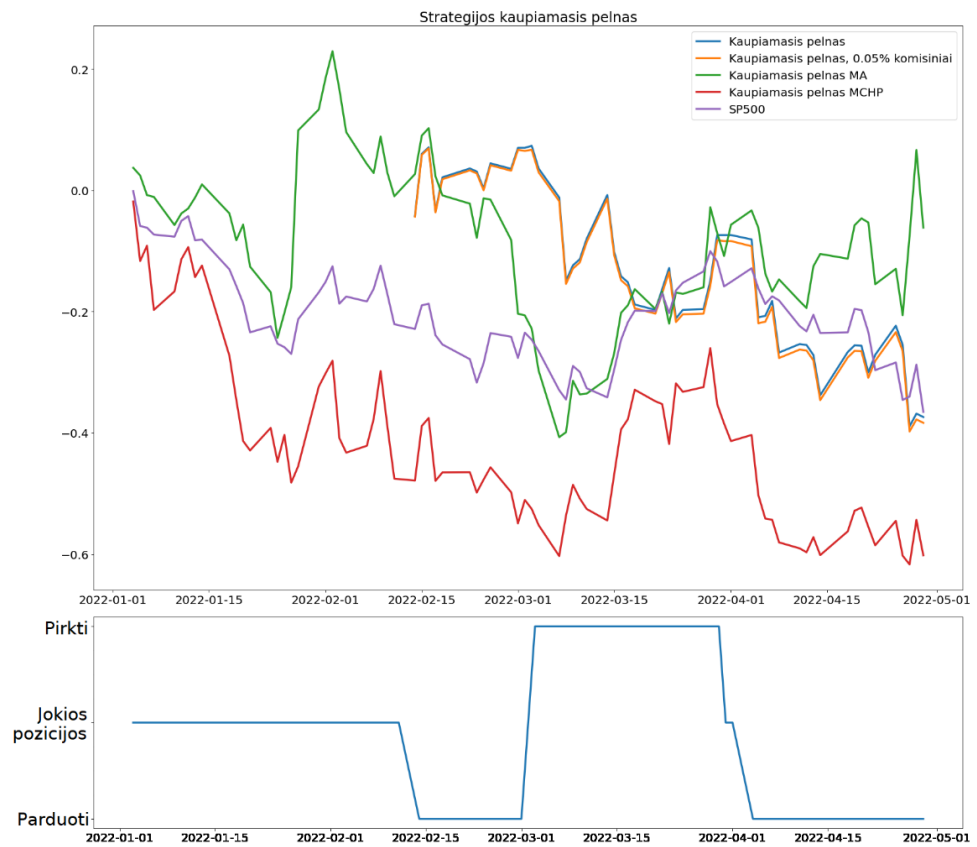
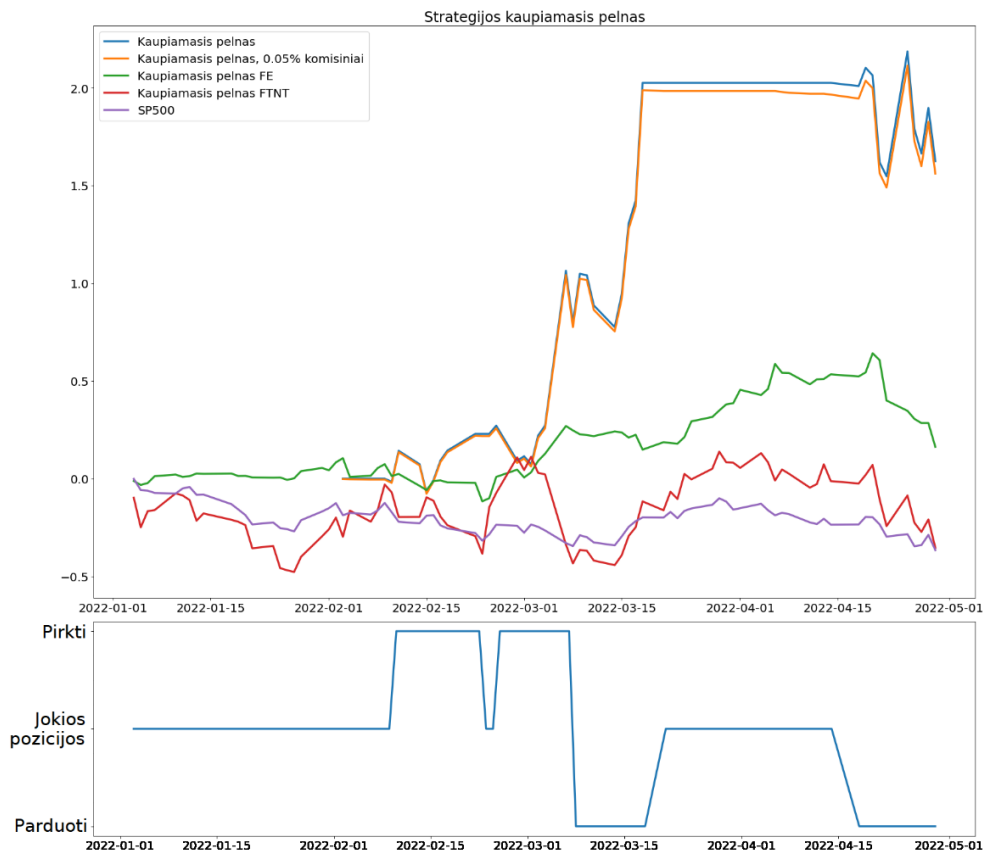
2 lentelėje pateikiami visų kointegruotų porų pagrindiniai strategijos įverčiai. Dauguma . Geriausių rezultatus demonstravusios akcijų poros EXF-EPAM metinis kaupiamasis pelnas siekė 1.3854. Blogiausią rezultatą demonstravusios poros MA - MCHP metinis kaupiamasis pelnas buvo stipriai blogesnis: -0.1627. Indekso S&P 500 kaupiamoji metinė vertė -0.3654. Visais atvejais porų prekybos strategija buvo pelningesnė už individualias akcijas, taip pat už S&P 500 indeksą. Vertinant Sharpe santykį, tik dvi poros demonstravo itin gerus rezultatus (>3), penkios – gerus rezultatus (>2), septynios buvo nepatenkinamame lygyje (<1), dvi prasčiausios demonstravo Sharpe santykį, blogesni už S&P 500.

2 lentelė. Paprastos porų prekybos strategijos taikymo rezultatai testiniame 5 mėn. periode

Kointegruotos poros	Metinis kaupiamasis pelnas	Metinis kaupiamasis pelnas su 0.5% komisiniais mok.	Standartinis nuokrypis	Sharpe santykis <sup>1</sup> ( $R_f=0\%$ )
ABMD - AMZN	1.0077	0.9501	0.3285	2.892
ACN - ARE	0.1094	0.0841	0.2147	0.3918
ALLE - MO	0.2145	0.1888	0.3247	0.5816
BBY - BWA	0.219	0.1946	0.4549	0.4279
CTLT - CMG	0.2634	0.2381	0.377	0.6315
DFS - DXC	0.3869	0.3573	0.288	1.2408
DG - EQIX	-0.0649	-0.0834	0.2448	-0.3407
DD - EA	0.7149	0.6681	0.2911	2.2952
EFX - EPAM	-0.2367	-0.2505	1.3127	-0.1908
ADBE - EBAY	1.6162	1.5527	0.2593	5.9872
FOXA - FRC	0.5509	0.5135	0.286	1.7954
EVRG - FRT	0.0337	0.0101	0.1923	0.0524
EXPE - FITB	-0.1274	-0.1472	0.3776	-0.3897
FE - FTNT	1.6247	1.5607	0.5279	2.9565
IT - GILD	0.6642	0.6164	0.2992	2.0598
IFF - INTC	0.5617	0.5287	0.2889	1.8298
INTU - JNPR	0.2738	0.2411	0.3639	0.6625
MA - MCHP	-0.3739	-0.3835	0.3188	-1.2029
MET - MGM	0.2057	0.1801	0.2539	0.709
MSFT - MMC	-0.2628	-0.2751	0.2602	-1.0573
HON - TXN	0.238	0.2135	0.1772	1.2047
S&P 500	-0.1337	-	1.259	-0.2902

Visų kointegruotų porų kaupiamasis pelnas yra 6.958 (su komisiniais mokesčiais). Vidutinis visų kointegruotų porų kaupiamasis metinis pelnas su komisiniais mokesčiais yra 0.331, standartinis nuokrypis - 0.354, o Sharpe santykis yra 1.073.

<sup>1</sup> Sharpe santykis pateikiamas strategijos taikymui su komisiniais mokesčiais



4.2 pav. Geriausių ir blogiausių pelną generuojančių porų kaupiamąjo pelno ir užimamų pozicijų grafikai

## 4.2. Genetinis algoritmas

Siekiant pagerinti 4.1 skyriuje realizuotą paprastą algoritmą, surasti taikomų parametrų geriausioms vertėms naudojamas genetinis algoritmas. Chromosomos struktūra panaši į 3.5 pav.: pirma dedamoji – simetrinėms viršutinei ir apatinei riboms pozicijos atidarymui, antroji – tarpinėms pozicijos uždarymo riboms nustatyti, trečia dedamoji – slenkančio vidurkio intervalo standartinio įverčio skaičiavimui paieška.

Genetinio algoritmo parametrai:

- Sprendiniai populiacijoje: 20
- Tėvų kiekis poravimosi metu: 12
- Kartų kiekis: 500
- Mutacijos tikimybė: 5%
- Kryžminimas: dviejų taškų

Tinkamumo funkcijai naudojama kaupiamoji metinė grąža  $R_A$ . Genetinis algoritmas inicializuoja pirminę populiaciją atsitiktine tvarka [19]. Pritaikant pirminės populiacijos ribas paprastam algoritmui kiekvienos iteracijos metu, atnaujinama tinkamumo funkcija. Genetinis algoritmas siekia ją maksimizuoti poruodamas geriausias rezultatus davusias chromosomas.

Gautos ribos išbandytos tame pačiame laiko periode (5 mėn) testinėje imtyje, galutiniai strategijos rezultatai pateikiami 1 lentelėje žemiau.

3 lentelė. Genetinio algoritmo strategijos taikymo rezultatai testiniame 5 mėn. periode<sup>2</sup>

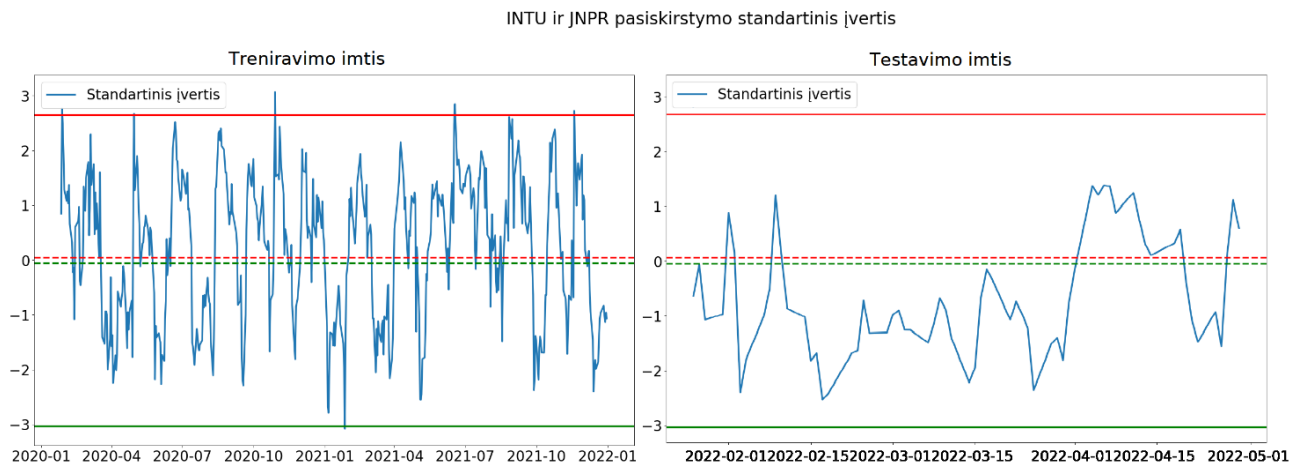
Kointegruotos poros	Metinis kaupiamasis pelnas	Metinis kaupiamasis pelnas su 0.5% komisiniais mok.	Standartinis nuokrypis	Sharpe santykis (Rf=0%)	Pokytis
<b>ABMD - AMZN</b>	<b>1.5777</b>	<b>1.4804</b>	<b>0.4772</b>	<b>3.1025</b>	<b>0.558</b>
ACN - ARE	0.0807	0.0658	0.1748	0.3767	-0.218
<b>ALLE - MO</b>	<b>0.3364</b>	<b>0.2862</b>	<b>0.2443</b>	<b>1.1719</b>	<b>0.516</b>
<b>BBY - BWA</b>	<b>0.4365</b>	<b>0.408</b>	<b>0.4551</b>	<b>0.8965</b>	<b>1.097</b>
CTLT - CMG	-0.3234	-0.3307	0.2653	-1.2466	-2.389
DFS - DXC	-	-	-	-	-1
<b>DG - EQIX</b>	<b>0.4746</b>	<b>0.45</b>	<b>0.1651</b>	<b>2.7254</b>	<b>-6.396</b>
DD - EA	0.1104	0.09	0.2482	0.3625	-0.865
<b>EFX - EPAM</b>	<b>0.2571</b>	<b>0.2343</b>	<b>0.5607</b>	<b>0.4179</b>	<b>1.935</b>
ADBE - EBAY	0.0766	0.0602	0.0832	0.7234	-0.961
FOXA - FRC	0.0076	-0.0063	0.0338	-0.1859	-1.012
<b>EVRG - FRT</b>	<b>1.0403</b>	<b>0.9545</b>	<b>0.1276</b>	<b>7.4812</b>	<b>93.505</b>
EXPE - FITB	-0.2954	-0.3105	0.3976	-0.7809	1.109
FE - FTNT	0.2782	0.2604	0.3427	0.76	-0.833
IT - GILD	0.1971	0.1556	0.3333	0.4667	-0.748
IFF - INTC	0.3767	0.3453	0.3122	1.1058	-0.347

<sup>2</sup> Pastaba: visose lentelėse paryškintu šriftu žymimi geresni už paprastą algoritmą rezultatai

INTU - JNPR	-	-	-	-	-1
<b>MA - MCHP</b>	<b>-0.1122</b>	<b>-0.1257</b>	<b>0.2146</b>	<b>-0.5857</b>	<b>-0.672</b>
MET - MGM	0.1638	0.1424	0.249	0.5718	-0.209
<b>MSFT - MMC</b>	<b>-0.2139</b>	<b>-0.2223</b>	<b>0.2594</b>	<b>-0.857</b>	<b>0.192</b>
HON - TXN	0.1622	0.1445	0.2164	0.6678	-0.323
S&P 500	-0.1337	-	1.259	-0.2902	-

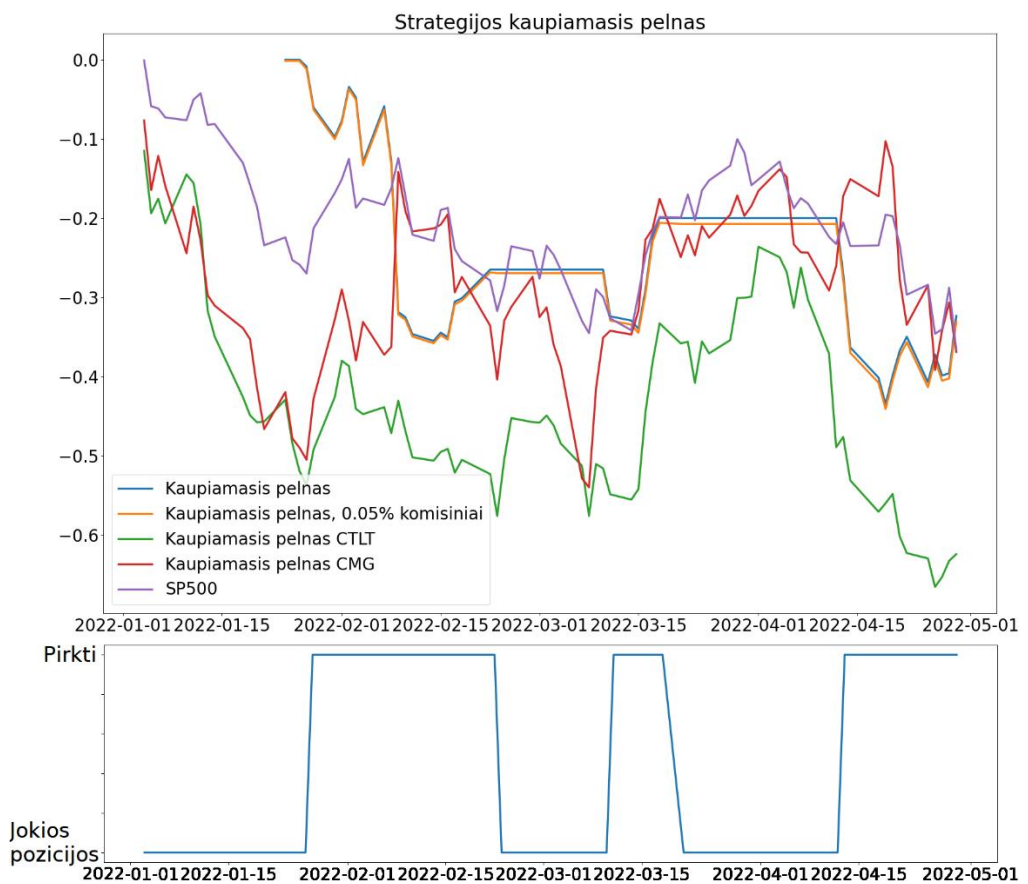
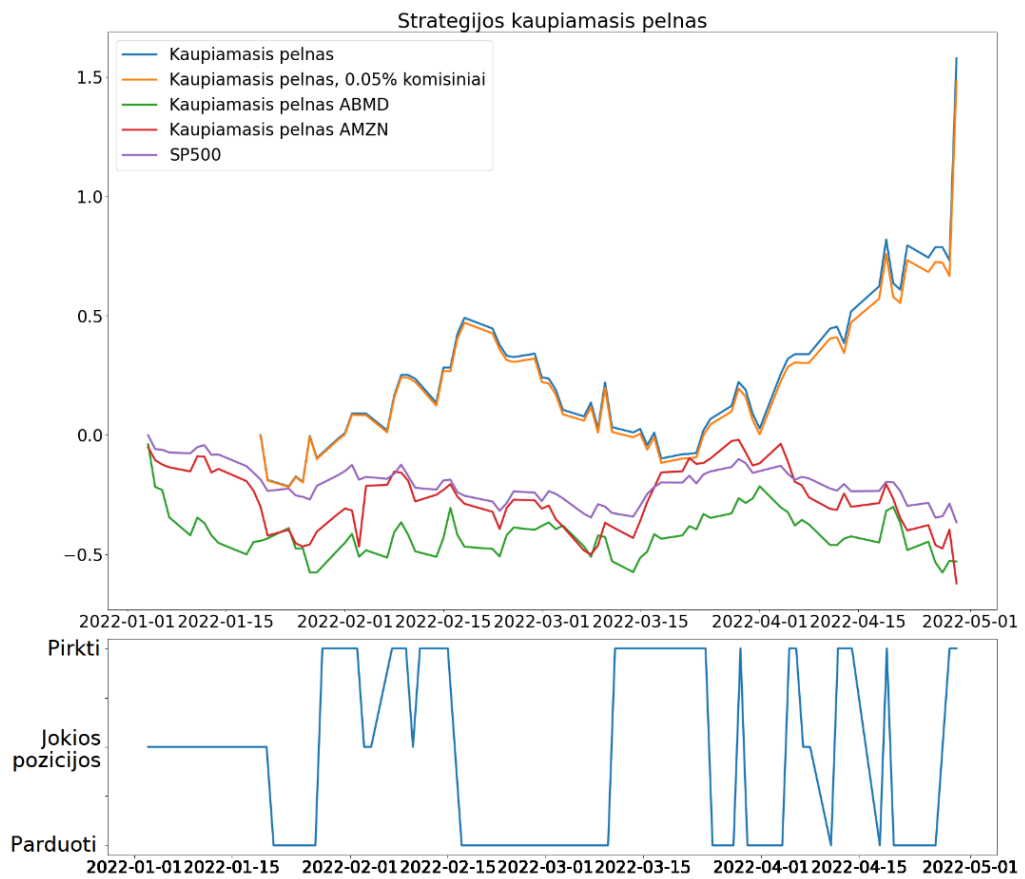
Visų kointegruotų porų metinis pelnas gautas 4.0821 (su komisiniais mokesčiais). Vidutinis kaupiamasis metinis pelnas su komisiniais mokesčiais gautas 0.2437, standartinis nuokrypis - 0.2716, o Sharpe santykis vidutiniškai yra 0.904. Tokie rezultatai nėra geri, ne vienu atveju genetinio algoritmo pagalba gautos ribos pablogino paprastos porų prekybos rezultatus, taip pat ir galutinį rezultatą. Geriausios ir blogiausios porų užimtų pozicijų bei kaupiamojo pelno grafikai pateikiami 4.4 pav. Atkreipiamas dėmesys, kad net blogiausius rezultatus davusi pora generavo didesnę pelną, už testavimo imtyje stabiliai pingantį S&P 500 indeksą.

Tokius kuklius rezultatus galima paaiškinti genetinio algoritmo tendencija pozicijų formavimo ribas tolinti nuo nulinės tokiu būdu retinant atidaromų pozicijas. Dviem atvejais (DFS-DXC bei MA-MCHP) testinėje apimtyje šios ribos nebuvo pasiektos, taigi ir algoritmas nepradėjo prekybos (4.3 pav.). Gauti rezultatai panašūs į Sermpinis [22] atliktą tyrimą, kuriame taip pat naudojamas standartinis įvertis vertybinių popierių porų strategijai pagerinti. Autorius priima išvadą, kad porų prekyba, grįsta išankstinėmis ribomis yra pernelyg statiška ir nelanksti. Nors genetinis algoritmas generuoja labai gerus rezultatus mokymo imtyje, testinėje imtyje jis yra mažai veiksnus. Tokią išvadą patvirtina ir šis tyrimas, mokymo imties rezultatai pateikiami 2 priede.



4.3 pav. Standartinio įverčio ribų nustatymas per plačiame diapazone

Geresnei genetinio algoritmo grąžai gauti genetinis algoritmas taikomas Bollinger juostų optimizavimui. Tokių pačių parametru genetinis algoritmas taikytas su 3.6 pav. chromosomis apatinės, viršutinės ir intervalo slenkančio vidurkio ir standartinio nuokrypio paieškai. Lyginant su pozicijų formavimo pagal standartinį įvertį taikymu, optimizuotų Bollinger juostų grąža bei Sharpe santykis buvo daug geresni (4 lentelė). Visais atvejais algoritmas inicijavo prekybą daug dažniau, nei pagal standartinį įvertį. Dėl šios agresyvesnės metodikos individualių kointegruotų porų grąža buvo stipriai teigiamai arba neigiamai paveikta, kai kurių porų (DFS – DXC, ADBE – EBAY, IFF – INTC ir INTU – JNPR) grąža buvo blogesnė už S&P 500 indeksą.



4.4 pav. Genetiniu algoritmu optimizuotos paprastos strategijos geriausia ir blogiausia akcijų pora

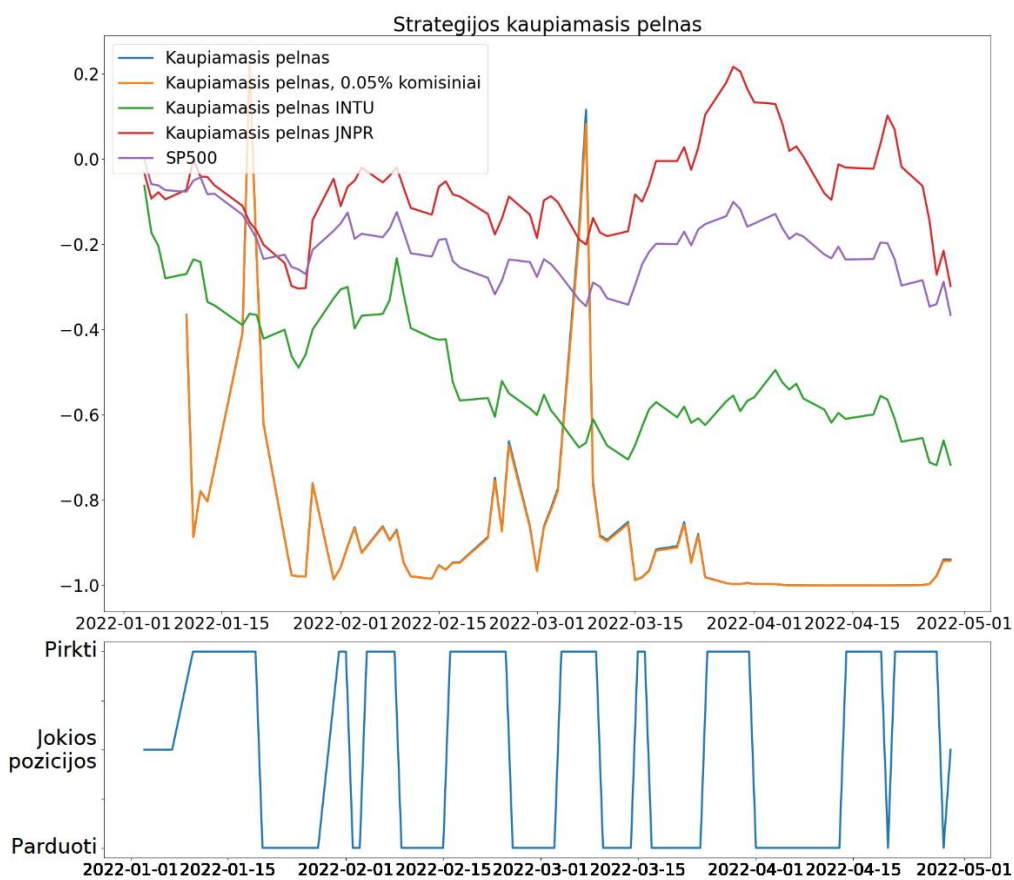
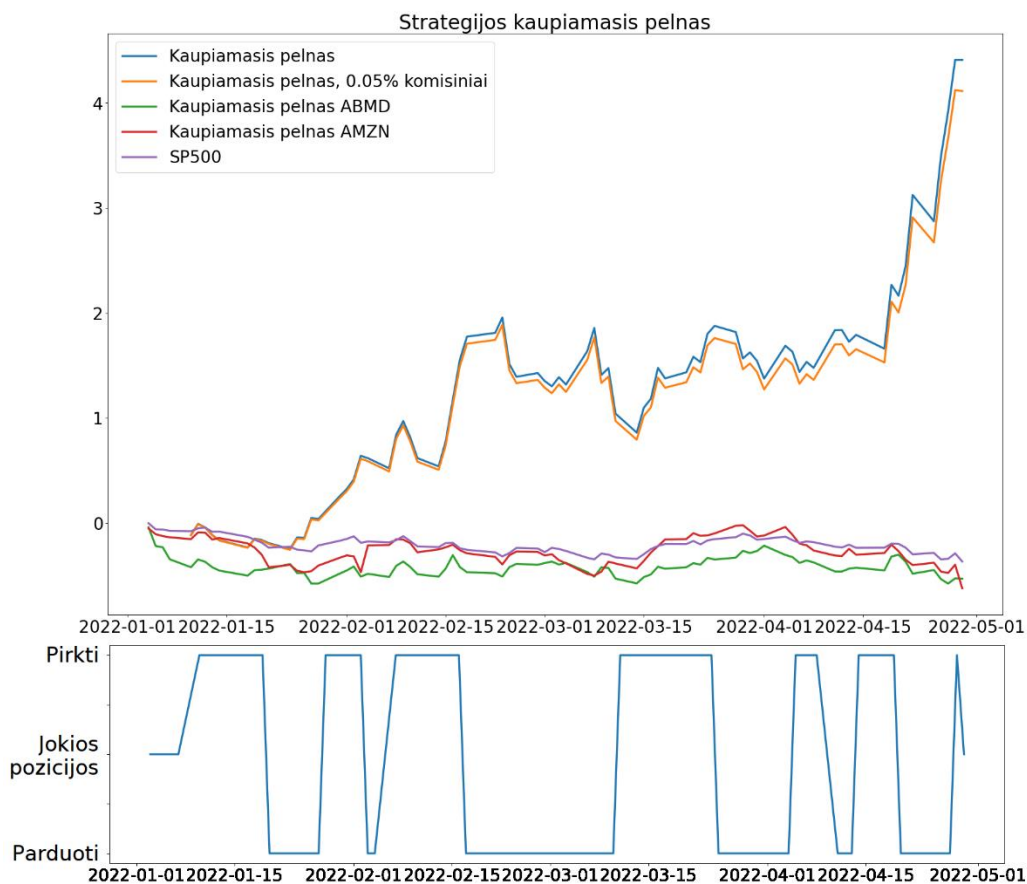
4 lentelė. Bollinger juotomis grįstos strategijos taikymo rezultatai testiniame 5 mėn. periode

Kointegruotos poros	Metinis kaupiamasis pelnas	Metinis kaupiamasis pelnas su 0.5% komisiniais mok.	Standartinis nuokrypis	Sharpe santykis (Rf=0%)	Pokytis
ABMD - AMZN	4.4103	4.1138	0.4903	8.39	3.33
ACN - ARE	0.3598	0.2907	0.3085	0.9423	2.457
ALLE - MO	4.0252	3.8028	0.6149	6.1846	19.142
BBY - BWA	0.2982	0.2279	0.9387	0.2427	0.171
CTLT - CMG	-0.2888	-0.2953	0.3711	-0.7959	-2.24
DFS - DXC	-0.5198	-0.5323	1.5666	-0.3398	-2.49
DG - EQIX	0.9719	0.9629	0.2533	3.8006	-12.546
DD - EA	0.5261	0.4777	0.3331	1.4342	-0.285
EFX - EPAM	-0.0653	-0.0682	0.6926	-0.0984	0.728
ADBE - EBAY	-0.9997	-0.9998	2.487	-0.402	-1.644
FOXA - FRC	-0.0774	-0.1257	0.2641	-0.476	-1.245
EVRG - FRT	0.0806	0.0289	0.1667	0.173	1.861
EXPE - FITB	0.2573	0.1909	1.4035	0.136	2.297
FE - FTNT	0.487	0.4224	0.2231	1.8932	-0.729
IT - GILD	-0.0588	-0.109	0.7199	-0.1514	-1.177
IFF - INTC	-0.4515	-0.4811	0.8116	-0.5928	-1.91
INTU - JNPR	-0.9393	-0.9426	5.1445	-0.1832	-4.91
MA - MCHP	-0.8658	-0.8691	2.0554	-0.4229	1.266
MET - MGM	0.5169	0.4662	0.5137	0.9077	1.589
MSFT - MMC	0.3489	0.2843	0.3868	0.735	2.033
HON - TXN	0.627	0.5636	0.2538	2.2208	1.64
S&P 500	-0.1337	-	1.259	-0.2902	-

Suminis visų kointegruotų porų kaupiamasis metinis pelnas gautas 7.409 (su komisiniais mokesčiais). Vidutinis kaupiamasis metinis pelnas su komisiniais mokesčiais gautas 0.3528, standartinis nuokrypis - 0.9523, o Sharpe santykis vidutiniškai yra 1.124.

Šie rezultatai yra ženkliai geresni už genetinio algoritmo, pritaikyto prekybai pagal kainų pasiskirstymo standartinius įverčius, tačiau jie nėra geresni už paprasto porų prekybos algoritmo generuojamą pelną bei Sharpe santykį. Gautas rezultatas gali būti palygintas su Huang et al. (2015) [38] tyrimu, kuriame autoriai taiko genetinį algoritmą būtent Bollinger juostų optimizavimui. Naudodami 10 stambiausio kapitalo kompanijų akcijų poras Taivano vertybinių popierių rinkoje, autoriai gauna apie 4.8 grąžą, 10 stambiausių puslaidininkių gamintojų kompanijų porų rinkiniai generavo apie 8.0 pelną. Autoriai savo pritaikyto modelio nelygino su jokia porų prekybą atitinkančiu algoritmu, palyginimui jie taikė poroms naudojamų kompanijų akcijų vertę nuo prekybos pradžios iki galo.





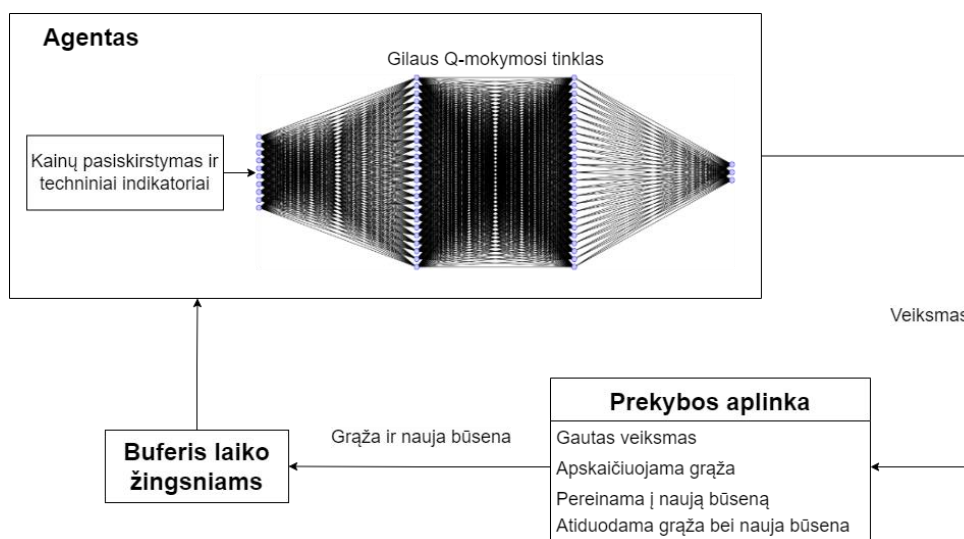
4.5 pav. Genetiniu algoritmu optimizuotos Bollinger juostų strategijos geriausia ir blogiausia akcijų pora

### 4.3. Gilusis q-mokymasis

Gilaus Q-mokymosi algoritmas taikytas agento struktūroje. Sukurtoje vertybinių popierių prekybos aplinkoje, agentas atlieka iš pradžių atsitiktinius veiksmus (pirkti, parduoti, jokios pozicijos), vėlesnėmis iteracijomis optimizuodamas q-vertes, arba mokydamasis ir taip maksimizuodamas nurodytą grąžą. Porų prekybai taikomo DQN agento neuroninio tinklo įėjime naudojami 10 įėjimų:

- porų kainų pasiskirstymas
- dieniniai kainų pokyčiai
- pasiskirstymo slenkantis įvairių periodų (15, 10, 7 ir 5 dienų) vidurkis
- dabartinio pasiskirstymo ir slenkačių įvairių periodų vidurkių (15, 10, 7 ir 5 dienų) santykis

Tinklas turi ir du paslėptus sluoksnius, po 50 neuronų. Struktūrinė neuroninio tinklo schema pateikta 3.8 pav., o bendra agento–aplinkos schema – 4.6 pav. Naudojamas buferis laiko žingsniams skirtas keliems laiko žingsniams saugoti epizodo metu. Pagal gilaus Q-mokymosi algoritme naudojamą kokybės funkcijos atnaujinimą (20), reikalinga žinoti esamos ir būsimos būsenos įvėčius ( $\theta$  ir  $\theta^{num}$ .)



4.6 pav. Taikomo DQN agento ir prekybos aplinkos modelio struktūrinė schema

Dažnai minima problema, kylanti iš šių algoritmų taikymo yra didelė jų tikimybė nusistovėti lokaliame optimume [23]. Tam spręsti, naudojama 2 metų treniravimo imtis suskaidoma į kelis intervalus, kurių kiekvieno imtis yra tokia pati, kaip testinės imties. Treniravimosi metu, naujo epizodo pradžioje pasirenkamas naujas intervalas iš treniravimo imties. Agentas apmokomas visoms kointegruotoms poroms atskirai. Mokymasis vyksta 1000 epizodų, kaip grąžą, agentas gauna kaupiamąjį pelną. Gauti rezultatai pateikiami 5 lentelėje.

5 lentelė. Gilaus Q-mokymosi taikymo rezultatai testiniame 5 mėn. periode

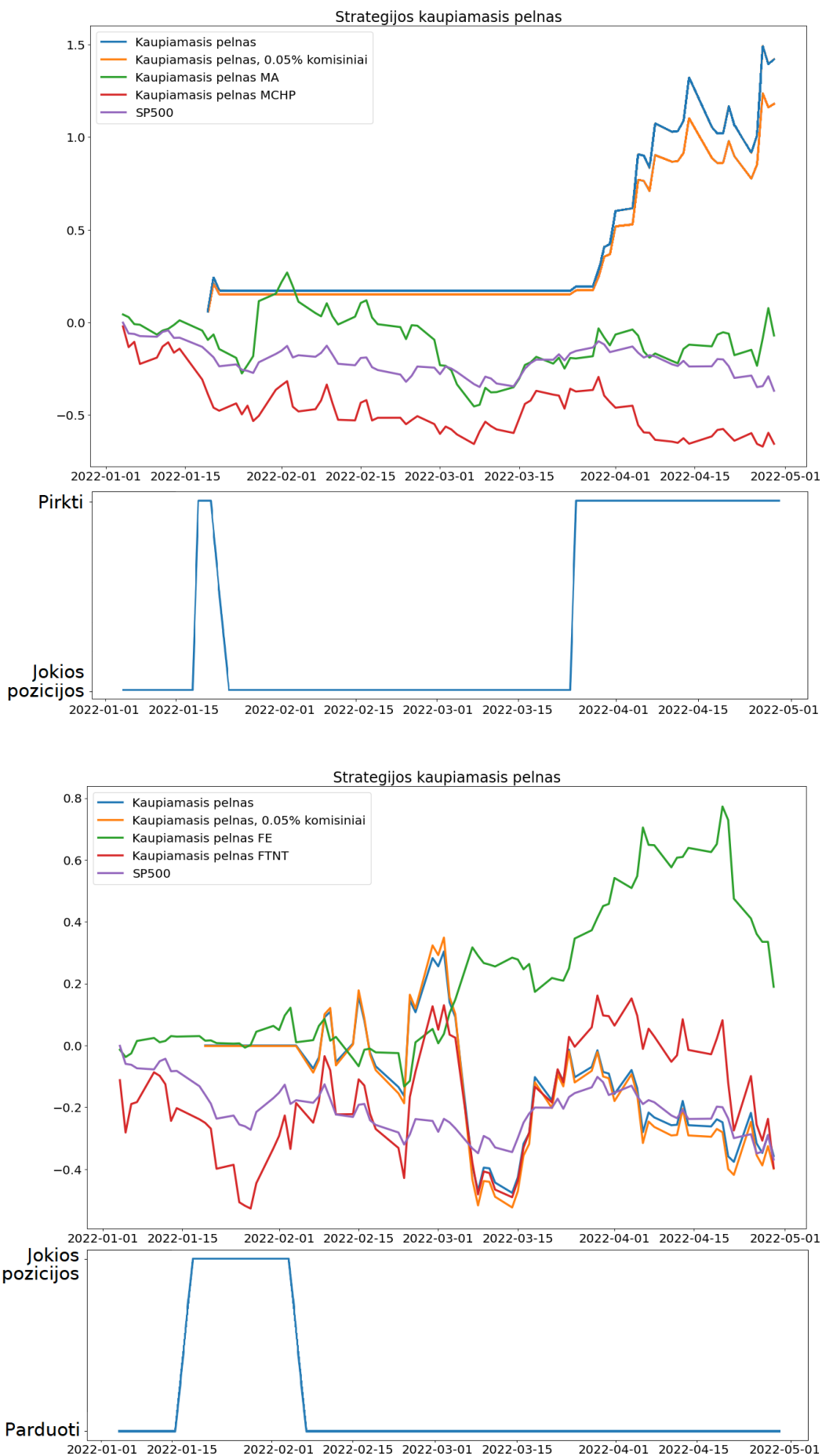
Kointegruotos poros	Metinis kaupiamasis pelnas	Metinis kaupiamasis pelnas su 0.5% komisiniais mok.	Standartinis nuokrypis	Sharpe santykis (Rf=0%)	Pokytis
ABMD - AMZN	1.3496	1.2079	0.4604	2.6236	0.271
ACN - ARE	0.4357	0.4234	0.2286	1.8517	4.034
ALLE - MO	0.7348	0.7312	0.3416	2.1406	2.873
BBY - BWA	-0.0727	-0.0936	0.4844	-0.1933	-1.481

<b>CTLT - CMG</b>	<b>1.1492</b>	<b>1.134</b>	<b>0.258</b>	<b>4.3945</b>	<b>3.763</b>
DFS - DXC	0.3043	0.2625	0.3493	0.7516	-0.265
<b>DG - EQIX</b>	<b>0.5175</b>	<b>0.5138</b>	<b>0.2954</b>	<b>1.7392</b>	<b>7.161</b>
DD - EA	0.2061	0.1826	0.3135	0.5823	-0.727
<b>EFX - EPAM</b>	<b>0.8311</b>	<b>0.8302</b>	<b>1.2426</b>	<b>0.6681</b>	<b>4.314</b>
ADBE - EBAY	0.2298	0.214	0.3708	0.577	-0.862
FOXA - FRC	0.2185	0.2164	0.3322	0.6516	-0.579
<b>EVRG - FRT</b>	<b>0.1942</b>	<b>0.1895</b>	<b>0.127</b>	<b>1.4923</b>	<b>17.762</b>
EXPE - FITB	-0.3886	-0.3932	0.4171	-0.9428	1.671
FE - FTNT	-0.3918	-0.3982	0.5821	-0.6842	-1.255
IT - GILD	0.3417	0.3333	0.2438	1.3668	-0.459
IFF - INTC	0.0309	0.0193	0.3844	0.0502	-0.963
<b>INTU - JNPR</b>	<b>0.7268</b>	<b>0.721</b>	<b>0.3871</b>	<b>1.8627</b>	<b>1.99</b>
<b>MA - MCHP</b>	<b>1.4327</b>	<b>1.4204</b>	<b>0.2309</b>	<b>6.1525</b>	<b>-4.704</b>
MET - MGM	-0.1765	-0.1932	0.325	-0.5944	-2.073
<b>MSFT - MMC</b>	<b>0.9225</b>	<b>0.8922</b>	<b>0.2371</b>	<b>3.7628</b>	<b>4.243</b>
<b>HON - TXN</b>	<b>0.3402</b>	<b>0.3357</b>	<b>0.2257</b>	<b>1.4876</b>	<b>0.572</b>
S&P 500	-0.1337	-	1.259	-0.2902	-

Suminis visų kointegruotų porų metinis pelnas gautas 8.549 (su komisiniais mokesčiais). Vidutinis kaupiamasis metinis pelnas su komisiniais mokesčiais gautas 0.407, standartinis nuokrypis – 0.373, o Sharpe santykis vidutiniškai yra 1.416.

Šie rezultatai yra geresni už paprasto porų prekybos algoritmo generuojamus, tiek suminio visų kointegruotų porų pelno, tiek Sharpe santykio atžvilgiu.

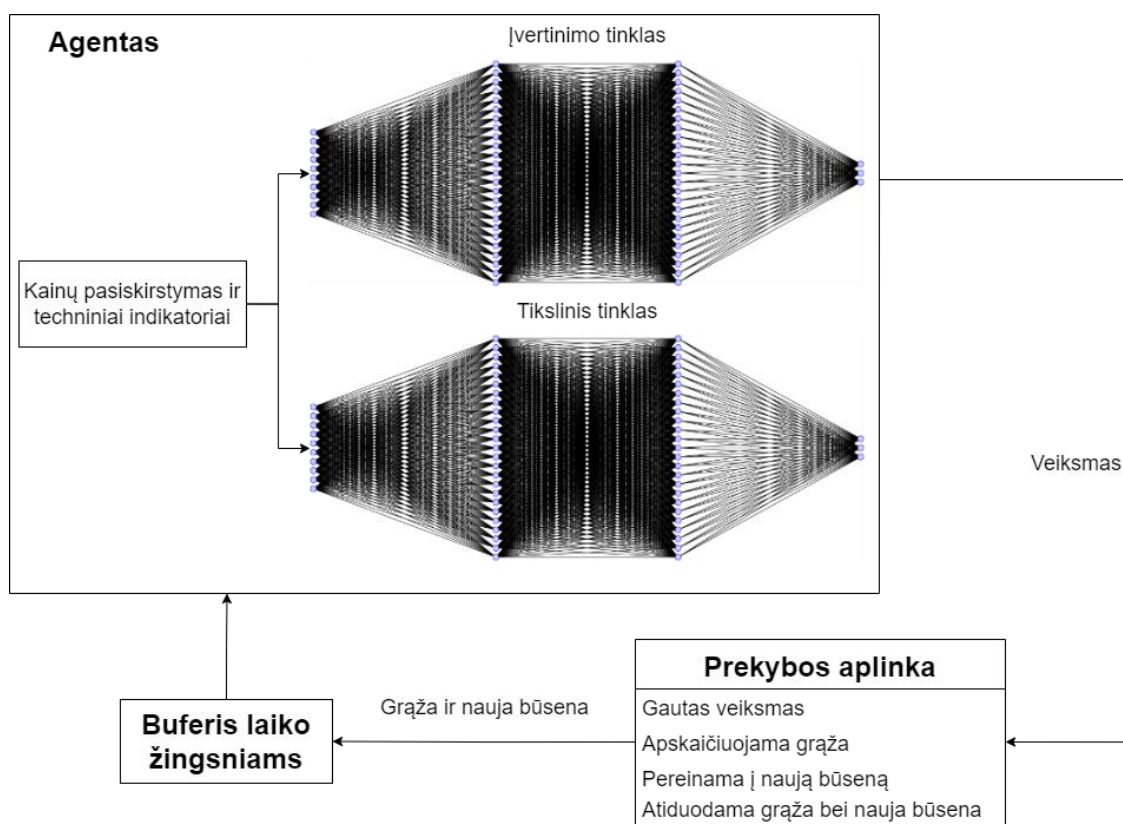
Kim et al. (2019) [15] gilaus  $q$ -mokymosi agentą taikė ribų porų kainų pasiskirstymui pagal standartinę įvertį optimizavimui. Tas pats metodas šiame darbe taikytas kitu principu – pozicijų generavimui pagal techninius indikatorius, tokiu, kaip slenkantys vidurkiai, kai kuriais atvejais generavo panašią grąžą su mažesniu užimtų pozicijų kiekiu ir didesniu Sharpe santykiu. Autoriai formavo kointegruotų porų portfelius ir lygino rezultatus didesniame intervale. Konkrečiu atveju, taikoma ta pati kointegruota pora HON-TXN, perskaičiavus gautą grąžą nuo viso laikotarpio metiniam, generavo maždaug 0.2 grąžą. Pastarųjų 5 mėn. metinė grąža, pateikta 5 lentelėje gauta panaši (0.3357). Taikydami įvairius periodus ribų perskaičiavimui bei koreguodami kitus parametrus, tarp jų ir portfelius sudarančių porų kiekių koeficientus, autoriai gauna metines grąžas intervale nuo 0.8588 iki 4.8760. Atsižvelgiant į žymiai ilgesnį taikytą periodą bei vietoje šiame darbe naudojamos 21 kointegruotos poros, naudodami 11, gaunami rezultatai yra ganėtinai panašūs tarpusavyje.



4.7 pav. Geriausios ir blogiausios poros metinis kaupiamasis pelnas ir pozicijos taikant DQN agentą

#### 4.4. Dvigubas gilusis q-mokymasis

Dvigubas gilusis Q-mokymosi algoritmas yra bandymas pagerinti anksčiau taikyto gilusio Q-mokymosi algoritmo rezultatus. Naudojama agento–aplinkos struktūra tokia pati, kaip ir pastarojo (4.8 pav.)



4.8 pav. Taikomo DDQN agento ir prekybos aplinkos modelio struktūrinė schema

Kaip ir DQN agento atveju, yra naudojamas buferis kelių laiko žingsnių saugojimui ir kokybės funkcijos nustatymui pagal juos. Įvertinimo metu (10 epizodų laiko žymoje), neuroninio tinklo įverčiai nukopijuojami iš tikslinio tinklo į įvertinimo tinklą. Kiekvienai porai atskirai apmokomas agentas. Gauti rezultatai pateikiami.

6 lentelė. Dvigubo gilusio Q-mokymosi taikymo rezultatai testiniame 5 mėn. periode

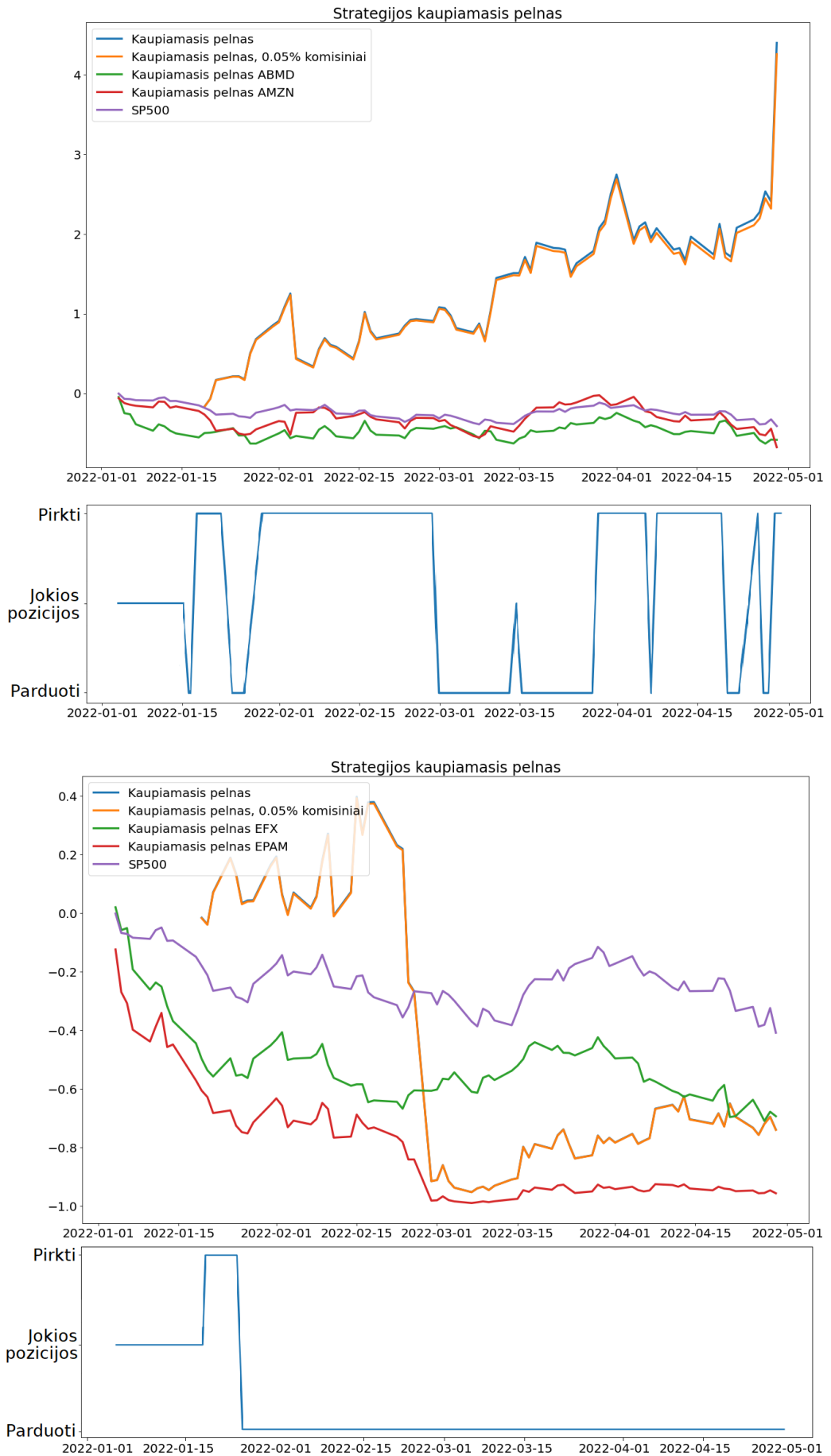
Kointegruotos poros	Metinis kaupiamasis pelnas	Metinis kaupiamasis pelnas su 0.5% komisiniais mok.	Standartinis nuokrypis	Sharpe santykis (Rf=0%)	Pokytis
ABMD - AMZN	4.3963	4.2546	0.543	7.8356	3.478
ACN - ARE	0.1588	0.1465	0.0743	1.9729	0.742
ALLE - MO	0.0225	0.0189	0.3437	0.0549	-0.9
BBY - BWA	0.2731	0.2597	0.4728	0.5493	0.335
CTLT - CMG	0.7142	0.699	0.3699	1.8897	1.936
DFS - DXC	1.9291	1.8873	0.4384	4.3048	4.282

<b>DG - EQIX</b>	<b>0.3281</b>	<b>0.3244</b>	<b>0.2659</b>	<b>1.2201</b>	<b>4.89</b>
DD - EA	0.4794	0.4559	0.3478	1.2892	-0.318
EFX - EPAM	-0.7394	-0.7403	1.2477	-0.5933	1.955
ADBE - EBAY	0.4961	0.4803	0.3076	1.5615	-0.691
FOXA - FRC	0.2185	0.2164	0.3322	0.6516	-0.579
<b>EVRG - FRT</b>	<b>0.306</b>	<b>0.3013</b>	<b>0.2026</b>	<b>1.4869</b>	<b>28.832</b>
<b>EXPE - FITB</b>	<b>0.309</b>	<b>0.3044</b>	<b>0.1254</b>	<b>2.4271</b>	<b>3.068</b>
FE - FTNT	1.0027	0.9963	0.6215	1.603	-0.362
<b>IT - GILD</b>	<b>0.8426</b>	<b>0.8342</b>	<b>0.3183</b>	<b>2.6209</b>	<b>0.353</b>
IFF - INTC	0.079	0.0674	0.35	0.1926	-0.873
INTU - JNPR	0.1145	0.1087	0.2326	0.4672	-0.549
<b>MA - MCHP</b>	<b>0.7497</b>	<b>0.7374</b>	<b>0.3628</b>	<b>2.0326</b>	<b>2.923</b>
<b>MET - MGM</b>	<b>0.58</b>	<b>0.5633</b>	<b>0.3199</b>	<b>1.761</b>	<b>2.128</b>
<b>MSFT - MMC</b>	<b>0.7251</b>	<b>0.6948</b>	<b>0.2512</b>	<b>2.766</b>	<b>3.526</b>
<b>HON - TXN</b>	<b>1.0968</b>	<b>1.0923</b>	<b>0.2302</b>	<b>4.7441</b>	<b>4.116</b>
S&P 500	-0.1337	-	1.259	-0.2902	-

Suminis visų kointegruotų porų metinis pelnas gautas 13.703 (su komisiniais mokesčiais). Vidutinis kaupiamasis metinis pelnas su komisiniais mokesčiais gautas 0.653, standartinis nuokrypis – 0.369, o Sharpe santykis vidutiniškai yra 1.944.

Dvigubo gilaus q-mokymosi agento duoti rezultatai yra geriausi iš visų anksčiau taikytų metodų ir suminio pelno ir Sharpe santykio atžvilgiais. Brim (2020) [21] tyrime autorius naudoja tokios pačios struktūros dvigubą gilaus q-mokymosi agentą, jo darbu buvo remiamasi formuojant agentą čia. Agresyviausias agento grąža tyrėjo darbe siekė net 131.33. Brim naudojo 38 kointegruotas poras, taigi gerokai daugiau. Tyrėjo pateiktoje rezultatų lentelėje matyti, kad kelios kointegruotos poros generavo neproporcingai didelius rezultatus<sup>3</sup>: didžiąją dalį autoriaus suminio pelno sudarė viena pora su 71.2 grąža (CTWS – AWR), antroji grąžino 25.67 (FCX-HBI). Net ir atėmus šias poras iš imties, suminė autoriaus pateikiama grąža siekia 34.38, tai yra žymiai daugiau už šiame darbe gaunamą 14.08 (be komisinių mokesčių).

<sup>3</sup> Netaikant neigiamo grąžos daugiklio



4.9 pav. Geriausios ir blogiausios poros metinis kaupiamasis pelnas ir pozicijos taikant DDQN agentą

## Išvados

1. Atlikus porų prekybos strategijos literatūros analizę, išnagrinėti porų prekybos strategijos principai ir pagrindiniai kylantys uždaviniai: tarpusavio sąryši turinčių porų nustatymas bei prekybos signalų formavimas. Apžvelgti metodai, skirti pagerinti su metais blogėjantiems standartinės porų prekybos rezultatams. Išskirti pagrindiniai būdai apėmė mašininio mokymosi algoritmus: genetinį, Q-mokymosi, giliųjų neuroninių tinklų bei dvigubų giliųjų neuroninių tinklų.
2. Porų parinkimui pritaikytas populiarus kointegracijos metodas pagal Engle-Granger metodiką. Iš baziniu lygmeniu laikomo indekso S&P 500 išrinkta 21 kointegruota pora, kurių tarpusavio sąryšis patvirtintas su 95% statistiniu patikimumu.
3. Remiantis anksčiau apžvelgtais šaltiniais, realizuoti porų prekybos algoritmai: paprastas, paprastas, kuris buvo optimizuotas genetinio algoritmo pagalba, Bollinger juostomis paremtas genetiniu algoritmu optimizuotas, gilaus Q-mokymosi agentu paremtas bei dvigubo gilaus Q-mokymosi agentu paremtas algoritmai. Kiekvienai porai visi algoritmai taikyti atskirai, naudota treniravimo imtis apėmė 2020 m. sausio 1 d. – 2022 m. sausio 1 d. Įvertinimo imčiai naudotas 2022 m. sausio 2 d. – 2022 m. gegužės 1 d. periodas.
4. Palyginti gauti kaupiamojo metinio pelno bei Sharpe santykio rezultatai tarpusavyje (su komisiniais mokesčiais):
  - Paprastas algoritmas. Suminis metinis pelnas gautas 6.958, Sharpe santykis gautas 1.073
  - Genetiniu algoritmu optimizuota paprasta strategija. Suminis metinis pelnas gautas 4.0821, Sharpe santykis 0.904.
  - Bollinger juostomis grįstas, optimizuotas genetinio algoritmo pagalba. Suminis kaupiamasis metinis pelnas gautas 7.409, Sharpe santykis 1.124.
  - Gilaus Q-mokymosi agentas. Suminis metinis pelnas gautas 8.549, Sharpe santykis gautas 1.416
  - Dvigubas gilaus Q-mokymosi agentas. Suminis metinis pelnas gautas 13.703, Sharpe santykis gautas 1.944
5. Įvertinti keli naudojami algoritmai generuojamo pelno bei pelno, koreguoto pagal patiriamą riziką atžvilgiais. Vienareikšmiškai, geriausiai rezultatus nešė dvigubas gilaus Q-mokymosi agentas, formuojantis pozicijas pagal techninius indikatorius. Visi taikyti algoritmai grąžino panašų pelną, kaip ir taikomi atitinkamuose šaltiniuose. Visais atvejais, S&P 500 indeksas buvo gerokai pralenktas (lyginant su pernykščių metų duomenimis, S&P 500 metinis pelnas buvo 0.2689, šių metų pelnas – neigiamas -0.1337), net vertybinių popierių rinkai apskritai ir S&P 500 indeksui nuvertėjant vertinimo apimties metu.
6. Parodyta, kad porų prekybos strategija yra aktuali ir dabartinėmis dienomis, dėl užtikrinamo pelno didelio rinkos kintamumo laikotarpiu, vyraujant ir „buliaus“, ir „lokio“ rinkai.



## Literatūros sąrašas

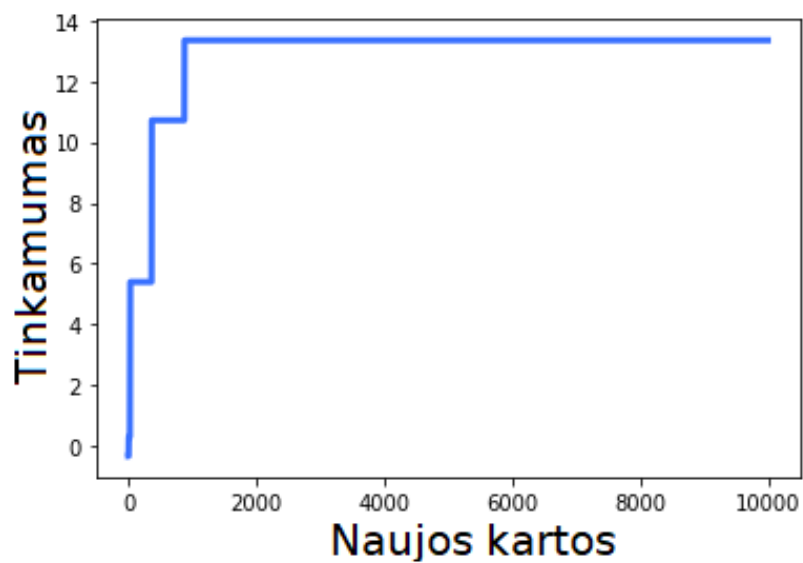
- [1] E. Gatev, W. N. Goetzmann, and K. G. Rouwenhorst, “Pairs Trading: Performance of a Relative-Value Arbitrage Rule,” *The Review of Financial Studies*, vol. 19, no. 3, pp. 797–827, Oct. 2006, doi: 10.1093/RFS/HHJ020.
- [2] H. H. Chang, T. S. Dai, K. L. Wang, C. H. Chu, and J. Z. Wang, “Improving Pair Trading Performances with Structural Change Detections and Revised Trading Strategies,” *Proceedings - 2020 International Conference on Pervasive Artificial Intelligence, ICPAI 2020*, pp. 105–109, 2020, doi: 10.1109/ICPAI51961.2020.00027.
- [3] B. Do and R. Faff, “Does simple pairs trading still work?,” *Financial Analysts Journal*, vol. 66, no. 4, pp. 83–95, Jul. 2010, doi: 10.2469/FAJ.V66.N4.1.
- [4] A. Muslumov, A. Yuksel, A. Yuksel, A. Müslümov, and A. Yüksel, “The Profitability of Pairs Trading in an Emerging Market Setting: Evidence from the Istanbul Stock Exchange,” *Empirical Economics Letters*, vol. 8, no. 5, pp. 1–6, 2009, Accessed: Apr. 07, 2022. [Online]. Available: <http://ssrn.com/abstract=2097664>Electroniccopyavailableat:<https://ssrn.com/abstract=2097664>Electroniccopyavailableat:<http://ssrn.com/abstract=2097664>
- [5] C. Krauss, “Statistical Arbitrage Pairs Trading Strategies: Review and Outlook,” *Journal of Economic Surveys*, vol. 31, no. 2, pp. 513–545, 2017, doi: 10.1111/joes.12153.
- [6] N. Huck and K. Afawubo, “Pairs trading and selection methods: is cointegration superior?,” <http://dx.doi.org/10.1080/00036846.2014.975417>, vol. 47, no. 6, pp. 599–613, Feb. 2014, doi: 10.1080/00036846.2014.975417.
- [7] T. Bogomolov, “Pairs Trading in the Land Down Under,” *SSRN Electronic Journal*, Nov. 2010, doi: 10.2139/SSRN.1717295.
- [8] Y. L. Becker, P. Fei, and A. M. Lester, “Stock Selection-An Innovative Application of Genetic Programming Methodology”.
- [9] C. E. de Moura, A. Pizzinga, and J. Zubelli, “A pairs trading strategy based on linear state space models and the Kalman filter,” *Quantitative Finance*, vol. 16, no. 10, pp. 1559–1573, Oct. 2016, doi: 10.1080/14697688.2016.1164886.
- [10] A. Tourin and R. Yan, “Dynamic Pairs Trading using the Stochastic Control approach,” 2012, Accessed: May 02, 2022. [Online]. Available: <http://ssrn.com/abstract=2014271>
- [11] Y. Liang, A. Thavaneswaran, N. Yu, M. E. Hoque, and R. K. Thulasiram, “Dynamic Data Science Applications in Optimal Profit Algorithmic Trading,” *Proceedings - 2020 IEEE 44th Annual Computers, Software, and Applications Conference, COMPSAC 2020*, no. 1, pp. 1314–1319, 2020, doi: 10.1109/COMPSAC48688.2020.00-74.
- [12] H. Puspaningrum, Y. X. Lin, and C. Gulati, “Finding the Optimal Pre-set Boundaries for Pairs Trading Strategy Based on Cointegration Technique ,” 21–09, 2009. Accessed: May 02, 2022. [Online]. Available: <https://ro.uow.edu.au/cssmwphttps://ro.uow.edu.au/cssmwp/41>
- [13] W. K. Bertram, “Analytic solutions for optimal statistical arbitrage trading,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 389, no. 11, pp. 2234–2243, Jun. 2010, doi: 10.1016/J.PHYSA.2010.01.045.
- [14] Z. Zeng and C. G. Lee, “Pairs trading: optimal thresholds and profitability,” <http://dx.doi.org/10.1080/14697688.2014.917806>, vol. 14, no. 11, pp. 1881–1893, Nov. 2014, doi: 10.1080/14697688.2014.917806.

- [15] T. Kim, H. Y. Kim, and B. M. Tabak, "Optimizing the Pairs-Trading Strategy Using Deep Reinforcement Learning with Trading and Stop-Loss Boundaries," *Complexity*, vol. 2019, 2019, doi: 10.1155/2019/3582516.
- [16] Xiu Gao, Shatin Hongkong, and Laiwan Chan, "An Algorithm for Trading and Portfolio Management Using Q-learning and Sharpe Ratio Maximization." Feb. 03, 2001.
- [17] J. W. Lee, J. Park, J. O, J. Lee, and E. Hong, "A multiagent approach to Q-learning for daily stock trading," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics Part A:Systems and Humans*, vol. 37, no. 6, pp. 864–877, Nov. 2007, doi: 10.1109/TSMCA.2007.904825.
- [18] J. Moody and M. Saffell, "Learning to Trade via Direct Reinforcement," *IEEE TRANSACTIONS ON NEURAL NETWORKS*, vol. 12, no. 4, p. 875, 2001.
- [19] Z. Zhang and M. Khushi, "GA-MSSR: Genetic Algorithm Maximizing Sharpe and Sterling Ratio Method for RoboTrading," *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks*, 2020, doi: 10.1109/IJCNN48605.2020.9206647.
- [20] Andrew Brim, "Deep Reinforcement Learning Pairs Trading," pp. 1–7, 2019, [Online]. Available: <https://busterbaram.shinyapps.io/>
- [21] A. Brim, "Deep Reinforcement Learning Pairs Trading with a Double Deep Q-Network," *2020 10th Annual Computing and Communication Workshop and Conference, CCWC 2020*, pp. 222–227, Jan. 2020, doi: 10.1109/CCWC47524.2020.9031159.
- [22] G. Sermpinis, C. Stasinakis, and X. Zong, "Deep Reinforcement Learning and Genetic Algorithm for a Pairs Trading Task on commodities," *SSRN Electronic Journal*, 2021, doi: 10.2139/ssrn.3770061.
- [23] C. Wang, P. Sandas, and P. Beling, "Improving Pairs Trading Strategies via Reinforcement Learning," *2021 International Conference on Applied Artificial Intelligence, ICAPAI 2021*, May 2021, doi: 10.1109/ICAPAI49758.2021.9462067.
- [24] S. H. Kim, D. Y. Park, and K. H. Lee, "Hybrid Deep Reinforcement Learning for Pairs Trading," *Applied Sciences 2022, Vol. 12, Page 944*, vol. 12, no. 3, p. 944, Jan. 2022, doi: 10.3390/APP12030944.
- [25] J. Fernando, O. Lopez, L. Fernandez Payeras, and O. Carchano Alcina, "Improving Pairs Trading Using Neural Network Techniques and Fundamental Ratios," 2020.
- [26] R. F. Engle and C. W. J. Granger, "CO-INTEGRATION AND ERROR CORRECTION: REPRESENTATION, ESTIMATION, AND TESTING," *Source: Econometrica*, vol. 55, no. 2, pp. 251–276, 1987, doi: 10.2307/1913236.
- [27] Y. Kawasaki, S. Tachiki, H. Udaka, and T. Hirano, "A characterization of long-short trading strategies based on cointegration," *IEEE/IAFE Conference on Computational Intelligence for Financial Engineering, Proceedings (CIFER)*, vol. 2003-January, pp. 411–416, 2003, doi: 10.1109/CIFER.2003.1196289.
- [28] M. P. Murray, "A drunk and her dog: An illustration of cointegration and error correction," *American Statistician*, vol. 48, no. 1, pp. 37–39, 1994, doi: 10.1080/00031305.1994.10476017.
- [29] G. Vidyamurthy, *Pairs Trading Quantitative Methods and Analysis.pdf*. [Online]. Available: [www.WileyFinance.com](http://www.WileyFinance.com).
- [30] A. Brim, "Deep Reinforcement Learning Pairs Trading with a Double Deep Q-Network," *2020 10th Annual Computing and Communication Workshop and Conference, CCWC 2020*, pp. 222–227, 2020, doi: 10.1109/CCWC47524.2020.9031159.
- [31] L. Shen, K. Shen, C. Yi, and Y. Chen, "An Evaluation of Pairs Trading in Commodity Futures Markets," *Proceedings - 2020 IEEE International Conference on Big Data, Big Data 2020*, pp. 5457–5462, 2020, doi: 10.1109/BigData50022.2020.9377766.

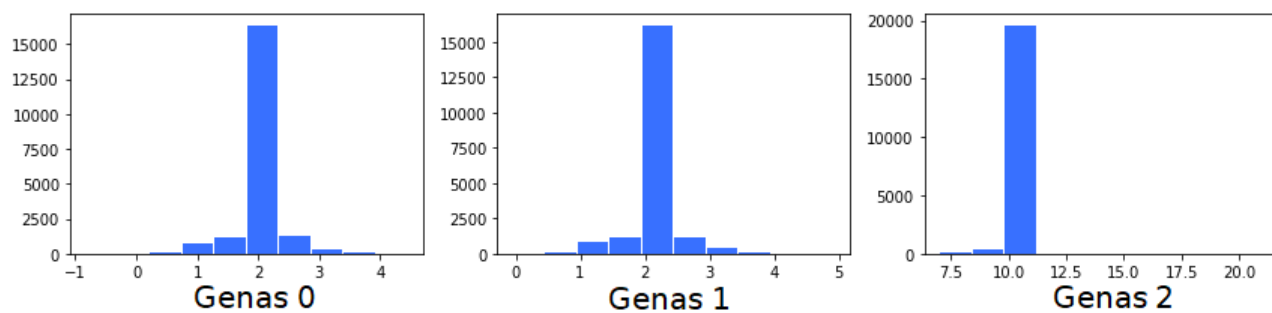
- [32] D. Whitley, “A genetic algorithm tutorial,” 1994.
- [33] C. F. Huang, C. J. Hsu, C. C. Chen, B. R. Chang, and C. A. Li, “An intelligent model for pairs trading using genetic algorithms,” *Computational Intelligence and Neuroscience*, vol. 2015, 2015, doi: 10.1155/2015/939606.
- [34] John. Bollinger, “Bollinger on Bollinger bands,” p. 227, 2002.
- [35] C. J. C. H. Watkins and P. Dayan, “Q-Learning,” vol. 8, pp. 279–292, 1992.
- [36] R. S. Sutton and A. G. Barto, “Reinforcement Learning: An Introduction Second edition, in progress”.
- [37] H. van Hasselt, A. Guez, and D. Silver, “Deep Reinforcement Learning with Double Q-learning,” *30th AAAI Conference on Artificial Intelligence, AAAI 2016*, pp. 2094–2100, Sep. 2015, doi: 10.48550/arxiv.1509.06461.
- [38] C. H. Chen, W. H. Lai, S. T. Hung, and T. P. Hong, “An Advanced Optimization Approach for Long-Short Pairs Trading Strategy Based on Correlation Coefficients and Bollinger Bands,” *Applied Sciences 2022, Vol. 12, Page 1052*, vol. 12, no. 3, p. 1052, Jan. 2022, doi: 10.3390/APP12031052.

## Priedai

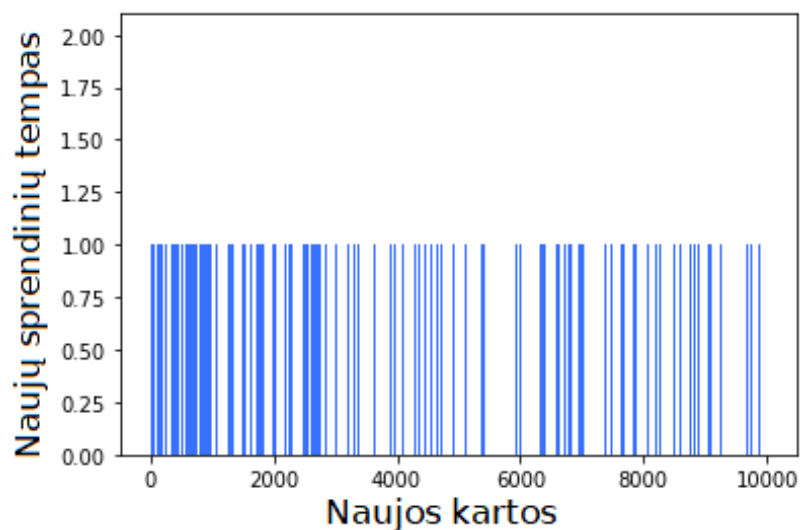
### 1 priedas. Genetinio algoritmo mokymosi grafikai



Tinkamumo funkcijos paieška naujų kartų atžvilgiu



Sprendinių paieškos histograma



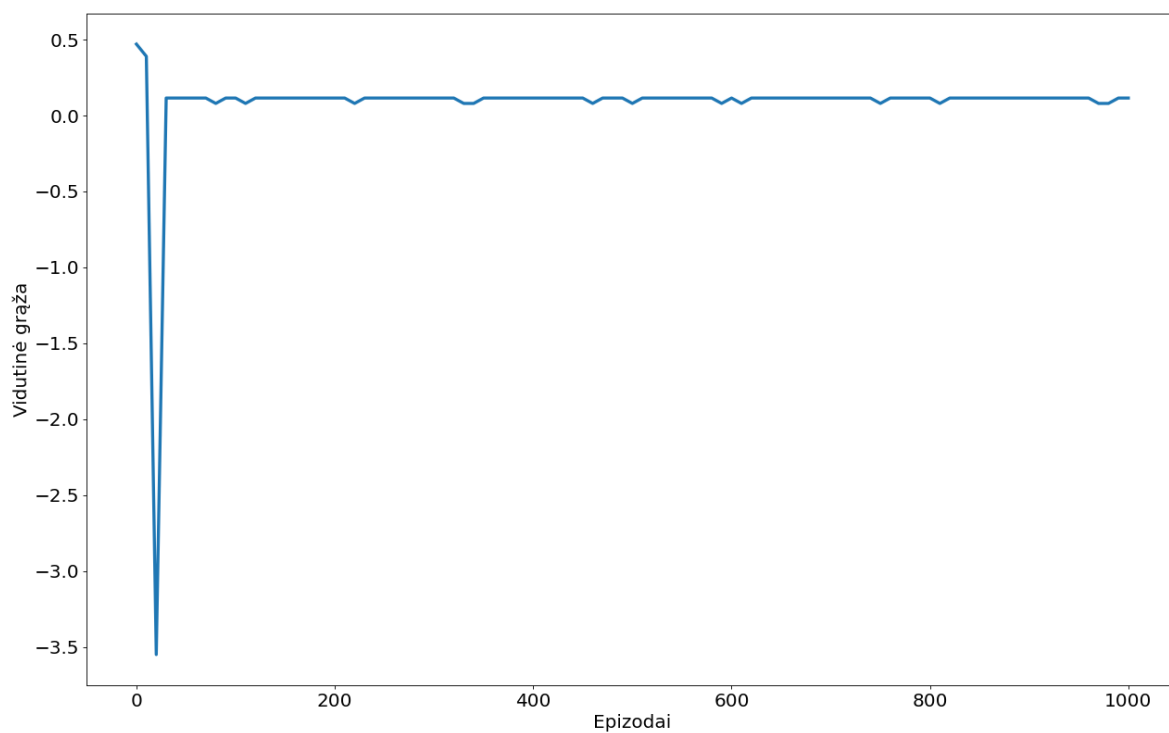
Naujų sprendinių generavimo dažnis

## 2 priedas. Genetinio algoritmo su standartiniais įverčiais mokymosi imties rezultatai

7 lentelė. Genetinio algoritmo kaupiamasis metinis pelnas mokymosi imtyje, po 500 kartų

Kointegruotos poros	Metinė grąža
ABMD - AMZN	0.937638627
ACN - ARE	0.617470023
ALLE - MO	0.660805737
BBY - BWA	1.77334717
CTLT - CMG	0.678645503
DFS - DXC	1.311533471
DG - EQIX	0.430980525
DD - EA	0.467111283
EFX - EPAM	0.532993086
ADBE - EBAY	1.898899335
FOXA - FRC	0.621703375
EVRG - FRT	0.176507773
EXPE - FITB	11.76612054
FE - FTNT	0.363039812
IT - GILD	1.27487025
IFF - INTC	1.580051633
INTU - JNPR	-
MA - MCHP	1.532104005
MET - MGM	0.773844706
MSFT - MMC	0.44185644
HON - TXN	0.409614551

### 3 priedas. DQN agento mokymosi grafikas, bendrinis



### 4 priedas. DDQN agento mokymosi grafikas, bendrinis

