



Kauno technologijos universitetas
Matematikos ir gamtos mokslų fakultetas

Rinkos kainų stabilumo tyrimas taikant Lamberto funkcijos metodą

Baigiamasis magistro studijų projektas

Tomas Miliūnas
Projekto autorius

Lekt. Dr. Irma Jankauskienė
Vadovas / Vadovė

Kaunas, 2022



Kauno technologijos universitetas
Matematikos ir gamtos mokslų fakultetas

Rinkos kainų stabilumo tyrimas taikant Lamberto funkcijos metodą

Baigiamasis magistro studijų projektas
Taikomoji matematika (6211AX006)

Tomas Miliūnas
Projekto autorius

Lekt. Dr. Irma Jankauskienė
Vadovė

Doc. Dr. Kęstutis Lukšys
Recenzentas

Kaunas, 2022



Kauno technologijos universitetas

Matematikos ir gamtos mokslų fakultetas

Tomas Miliūnas

Rinkos kainų stabilumo tyrimas taikant Lamberto funkcijų metodą

Akademinio sąžiningumo deklaracija

Patvirtinu, kad:

1. baigiamąjį projektą parengiau savarankiškai ir sąžiningai, nepažeisdama(s) kitų asmenų autoriaus ar kitų teisių, laikydamasi(s) Lietuvos Respublikos autorių teisių ir gretutinių teisių įstatymo nuostatų, Kauno technologijos universiteto (toliau – Universitetas) intelektualinės nuosavybės valdymo ir perdavimo nuostatų bei Universiteto akademinės etikos kodekse nustatytų etikos reikalavimų;
2. baigiamajame projekte visi pateikti duomenys ir tyrimų rezultatai yra teisingi ir gauti teisėtai, nei viena šio projekto dalis nėra plagijuota nuo jokių spausdintinių ar elektroninių šaltinių, visos baigiamojo projekto tekste pateiktos citatos ir nuorodos yra nurodytos literatūros sąrašė;
3. įstatymų nenumatytų piniginių sumų už baigiamąjį projektą ar jo dalis niekam nesu mokėjęs (-usi);
4. suprantu, kad išaiškėjus nesąžiningumo ar kitų asmenų teisių pažeidimo faktui, man bus taikomos akademinės nuobaudos pagal Universitete galiojančią tvarką ir būsiu pašalinta(s) iš Universiteto, o baigiamasis projektas gali būti pateiktas Akademinės etikos ir procedūrų kontrolieriaus tarnybai nagrinėjant galimą akademinės etikos pažeidimą.

Tomas Miliūnas

Patvirtinta elektroniniu būdu

Tomas Miliūnas. Rinkos kainų stabilumo tyrimas, taikant Lamberto funkcijų metodą. Magistro studijų baigiamasis projektas vadovė lekt. dr. Irma Jankauskienė; Kauno technologijos universitetas, Matematikos ir gamtos mokslų fakultetas.

Studijų kryptis ir sritis (studijų krypčių grupė): Taikomoji matematika (Matematikos mokslai).

Reikšminiai žodžiai: Diferencialinės lygtis, finansų rinkų stabilumas, Lamberto W funkcija.

Kaunas, 2022. 40 p.

Santrauka

Atliekant literatūros apžvalgą pasirinkta tematika pastebėta, kad moksliniuose šaltiniuose yra labai mažai informacijos apie Lamberto funkcijos pritaikymą finansinių rinkų stabilumo srityje. Nors per paskutinius kelis dešimtmečius finansinių rinkų stabilumas buvo aktyviai tyrinėjamas, tačiau dirbant su sudėtingesniais matematiniais modeliais, pavyzdžiui, kai produkto pasiūlai yra pritaikomas vėlavimas, tyrėjai paprastai turėdavo pasikliauti skaitiniais metodais, su kuriais galima gauti tik apytikslius sprendinius. Matematinį modelį užrašius diferencialine lygtimi su vėluojančiu argumentu ir pritaikius Lamberto W funkciją, galima gauti tikslų sprendinį, o skaičiavimai nereikalauja daug resursų.

Pritaikius rinkos kainos stabilumo tyrimui Lamberto funkcijų metodą, gauta metodika panaudota realiems uždaviniams spręsti. Spręsti du realūs uždaviniai: 1. Realus paukštienos rinkos kainos matematinis modelis – tiesinė diferencialinė lygtis su vėlavimo argumentu. Šio modelio transcendentinei charakteristinei lygčiai spręsti pritaikyta Lamberto W funkcija. Tyrinėta transcendentinės lygties šaknų išsidėstymas kompleksinėje plokštumoje, pagal kurias įvertinama ar sistema stabili ar ne. Iš gautų rezultatų tyrinėta skirtingų modelio parametrų dinamika ir nustatyta, kokiuose parametrų intervaluose sistema išlieka stabili. 2. Linearizuotas Kaleckio matematinis modelis - nehomogininė diferencialinė lygtis su vėlavimo argumentu. Nagrinėta matematinio modelio lygties sprendinio elgsena laiko atžvilgiu, įvertinant sistemos stabilumą prie skirtingų vėlavimo argumentų reikšmių.

Pagrindinis rezultatas yra Lamberto funkcijų metodo pritaikymas rinkos kainos stabilumui tirti. Pritaikius gautą metodiką atliktų tyrimų su realiais uždaviniais rezultatai. Ištirtas paukštienos kainos matematinis modelis su fiksuota vėlavimo argumentų reikšme $\tau = 0.9$ ir skirtingais rinkos elastingumo koeficientais. Nustatyta, kad su rinkos elastingumo koeficiento reikšmėmis 0.9 ir 1.4 sistema yra stabili, o kai koeficiento reikšmė pasiekia 1.9 sistema tampa nestabili. Ištirtas Kaleckio verslo matematinis modelis su skirtingais vėlavimo argumentais ir nustatyta, kad su vėlavimo argumentų reikšmėmis iki 0.6 sistema yra asimptotiškai stabili, o kai reikšmė pasiekia 0.61, sistema tampa nestabili.

Iš gautų rezultatų galima padaryti išvadą, kad Lamberto W funkciją gali būti sėkmingai taikoma tirti realius uždavinius skirtus finansinių rinkų stabilumui tirti, kai jos aprašomos diferencialinėmis lygtimis su vėlavimo argumentu.

Tomas Miliūnas. The study of market price dynamics using Lambert function method / supervisor PhD Irma Jankauskienė ; Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Kaunas University of Technology.

Study field and area (study field group): Applied Mathematics (Mathematical Sciences).

Keywords: Differential equations, stability of financial markets, Lambert W function

Kaunas, 2022. 40 p.

Summary

While studying the literature we observed a lack of applications of the Lambert W function in scientific papers. Even though in the last few decades stability of financial market has been studied extensively, when dealing with more complicated models, for example with models that factor in the delay between supply and demand, the researchers had to use numerical methods, which can only give approximate results. When the mathematical model is described as a delay differential equation we can apply Lambert W function and obtain exact results without needing many computational resources.

We have applied Lambert W function to analysis of market price stability and the described methodology was used to solve two real world solutions: 1. Mathematical model of poultry meat market price – linear delay differential equation. To obtain the solution of models characteristic equation Lambert W function was used. We analyzed the position of the solutions of characteristic equation on complex plane and by doing so determined whether the system is stable or not. The dynamics of the solution of the original equation was also studied and parameter values, at which system is stable were obtained. 2. Linearized Kalecki model – nonhomogeneous delay differential equation. We analyzed the values of the solution in terms of time, determining the stability with different values of the delay argument.

The main result of this project is the application of Lambert function to the analysis of market price stability. We analyzed the poultry price model with constant value of the delay argument $\tau = 0.9$ and different values of market stability coefficient. We observed, that the system is stable, when values of market stability coefficient are equal to 0.9 and 1.4, but when the value of the coefficient is 1.9 system becomes unstable. Kalecki model was analyzed with different values of the delay argument. Results showed, that system is stable, when values of delay argument are between 0.1 and 0.6. When the delay is equal to 0.61 the system becomes unstable.

From the obtained results we can conclude that Lambert W function can be applied to analysis of market price stability, when they are described by delay differential equations.

Turinys

Paveikslų sąrašas	7
Santrumpų ir terminų sąrašas	8
Įvadas.....	9
1. Literatūros apžvalga	10
1.1. Rinkos kainų stabilumas.....	10
1.2. Lamberto W funkcija.....	11
1.2.1. Skaliarinė Lamberto W funkcija	11
1.2.2. Matricinė Lamberto W funkcija	12
1.2.3. Skaliarinė Lamberto W funkcija homogeninėms diferencialinėms lygtims	13
1.2.4. Skaliarinė Lamberto W funkcija nehomogeninėms diferencialinėms lygtims.....	16
1.3. Lamberto W funkcijos pritaikymas ekonomikoje	21
1.4. Diferencialinių lygčių su vėlavimu sprendimas skaitiniais metodais.....	22
2. Duomenys ir tyrimo metodai.....	27
2.1. Rinkos kainos stabilumo tyrimas taikant Lamberto funkciją.....	27
2.1.1. Homogeninis atvejis	27
2.1.2. Nehomogeninis atvejis	29
3. Tyrimų rezultatai ir jų aptarimas.....	30
3.1. Homogeninis atvejis	30
3.2. Nehomogeninis atvejis	33
3.3. Programinė realizacija ir instrukcija vartotojui	36
Išvados	38
Literatūros sąrašas	39
Priedai.....	41
1 priedas. Programos tekstas	41

Paveikslų sąrašas

1 pav. Diferencialinės lygties sprendinio reikšmės, kai $\tau = 0.9$	24
2 pav. Diferencialinės lygties sprendinio reikšmės, kai $\tau = 0.9$	25
3 pav. Diferencialinės lygties sprendinių reikšmės su skirtingai vėlavimo argumentais.....	26
4 pav. Diferencialinės lygties sprendinio reikšmės, kai $\tau = 1.5$	26
5 pav. Tirtto modelio kainos svyravimai, kai rinkos elastingumo koeficientas 0.9.....	30
6 pav. Tirtto modelio kainos svyravimai, kai rinkos elastingumo koeficientas 1.4.....	31
7 pav. Rinkos kainos svyravimai, kai rinkos elastingumo koeficientas 1.9.....	31
8 pav. Sistemos sprendinių realiųjų dalių reikšmės, keičiantis rinkos elastingumo koeficientui.	32
9 pav. Kaleckio verslo modelis su vėlavimo argumentu 0.6.	33
10 pav. Kaleckio verslo modelis su vėlavimo argumentu 0.61.....	34
11 pav. Kaleckio verslo modelis su skirtingais vėlavimo argumentais	35

Santrumpų ir terminų sąrašas

Santrumpos:

Doc. – docentas;

Lekt. – lektorius;

Prof. – profesorius

DDE – diferencialinės lygtis su vėlavimu.

Ivadas

Temos naujumas ir aktualumas. Rinkos kainos stabilumo tyrimas šiuo sudėtingu laikotarpiu dėl pandemijos yra svarbus įvairiose srityse ir paprastam ūkininkui, ir stambiam verslininkui. Padėtis rinkose ir jų stabilumas, kainos yra aktualūs visiems klausimai. Tokio pobūdžio tiriamieji darbai yra labai svarbūs. Daugelyje straipsnių, monografijų ir įvairių publikacijų [10, 11, 17] gausu rinkos kainų tyrimų, kuriuose nėra įvertinamas vėlavimas, nors jis yra reikšmingas veiksnys, darantys įtaką pasiūlai ir paklausai. Jeigu jau galima rasti vėlavimo įvertinimą, tiriant stabilumą, tuomet naudojami metodai yra tik skaitiniai (apytiksliai) [1, 12]. Šiame darbe pasiūlytas tikslus Lamberto funkcijų metodas, skirtas tirti rinkos kainos stabilumą įvertinant vėlavimą. Šis metodas plačiai taikomas atliekant valdymo sistemų su vėlavimais tyrimus, tad pritaikymas rinkos kainos tyrimui yra naujas ir taikomumo spektras yra platus.

Šiame darbe bus nagrinėjamas Lamberto W funkcijos taikymas tyrinėjant realias finansines rinkas, kurių matematinis modelis yra tiesinė homogeninė arba nehomogeninė diferencialinė lygtis su vėlavimo argumentu.

Darbe pateikiama literatūros apžvalga apie rinkos kainų stabilumą, pristatomi taikymo pavyzdžiai.

Tyrimo tikslas – ištirti tam tikro laikotarpio rinkos kainos stabilumą, įvertinant vėlavimą tarp pasiūlos ir paklausos, panaudojant Lamberto funkcijų metodą.

Tyrimo uždaviniai:

1. įvertinti rinkos kainos stabilumo tyrimo problematiką;
2. išanalizuoti rinkos kainos stabilumo tyrimo metodus;
3. pritaikyti Lamberto funkcijų metodą rinkos kainos stabilumo tyrimui;
4. pritaikyti realiems modeliams naudojamą metodiką.

Tyrimo objektas – rinkos kainos dinamika.

Tyrimo metodai: mokslinės literatūros analizė ir pritaikymas rinkos stabilumo uždaviniams spręsti, programos sukūrimas pagal sukurtą metodiką.

Magistrinio darbo tematika 2020 m. yra išspausdintas 1 straipsnis recenzuojamame Lietuvos matematikų leidinyje. Lietuvos matematikų draugijos 61-ojoje konferencijoje skaitytas pranešimas, baigiamasis projektas pristatytas konferencijoje „Matematika ir gamtos mokslai: teorija ir taikymas“. Dar vienas straipsnis pateiktas žurnalui *Applied Mathematics and Computation*.

Tyrimo metodika.

Darbo struktūra. Darbą sudaro įvadas, trys skyriai, išvados, literatūros sąrašas ir priedai. Pirmas skyrius skirtas rinkos kainų stabilumo tyrimo metodų ir algoritmų apžvalgai, antras skyrius – darbo rezultatams bei jų interpretacijai, o trečiame skyriuje sukurtos programinės įrangos sąsajai su vartotoju.

1. Literatūros apžvalga

Šiame skyriuje apžvelgiamos pasaulyje taikomos rinkos kainų stabilumo tyrimo metodikos. Pristatoma Lamberto funkcija, kuri gali būti naudojama skaliariniu arba matriciniu atveju. Taip pat pagrindžiamas (bus pademonstruotas) skaliarinės Lamberto W funkcijos pritaikymas homogeninių ir nehomogeninių diferencialinių lygčių sprendinių radimui.

1.1. Rinkos kainų stabilumas

Stabilios įvairių produktų rinkos kainos yra svarbios tiek vartotojams, tiek gamintojams, kadangi sparčiai krentančios kainos gali pridaryti daug problemų tiekėjams, o kylančios kainos sumažina vartotojų perkamąją galią, o tai gali sąlygoti mažesnę produktų gamintojų pelną.

Maisto produktų kainos dėl savo savybių yra labiau linkusios į svyravimus, nei pagaminamų produktų kainos. Nestabilios maisto produktų kainos yra ypač problematiškos žmonėms, turintiems mažas pajamas arba gyvenantiems besivystančiose šalyse, kuriose dauguma gyventojų didžiąją dalį savo pajamų (kai kuriose šalyse virš 40% [4]) išleidžia būtiniausiems maisto produktams ir nemaža dalis namų ūkių gauna pajamas iš žemės ūkio veiklos [5]. Tokiose šalyse stiprūs kainų šuoliai gali sukelti tiek trumpalaikių, tiek ilgalaikių pasekmių gyventojams. [6] straipsnyje aprašyta, kaip dėl nepalankių oro sąlygų pasikeitus žemės produkcijos ir darbo kainoms vaikų lankomumas mokyklose sumažėjo iki 20%, o nepakankamos mitybos atveju padvigubėjo. Nepilnavertė mityba yra ypač svarbi problema, nes ilgalaikis maisto trūkumas vaikams gali nulemti žemesnį ūgį, prastesnius akademinius pasiekimus ir per visą gyvenimą sukauptas mažesnes pajamas [7].

Dėl anksčiau aprašytų priežasčių rinkos kainų stabilumo tyrimų metodai, kainų stabilizavimo būdai ir nestabilių kainų priežastys susilaukė nemažai susidomėjimo. Vienas iš pagrindinių veiksnių, kuris gali nulemti nestabilias maisto produktų kainas yra klimato sąlygos [6, 13, 15], kadangi klimato sąlygos gali stipriai padidinti arba sumažinti produkciją. Kitas veiksnys, kuris turi didelę įtaką maisto produktų kainoms, yra pasaulinės naftos kainos ir šalių turimi gamtinių išteklių rezervai. [8] straipsnyje išnagrinėjus Afrikos šalių kukurūzų kainų pokyčius besikeičiant pasaulinėms naftos kainoms pastebėta, kad šalyse, kurios turi mažesnius naftos rezervus, kukurūzų kainos jautriau reaguoja į naftos kainų pokyčius pasaulinėse rinkose. Šiame darbe bus tiriamas pieno kainų stabilumas, o pieno, kaip ir kitų gyvulinės kilmės produktų, kaina taip pat labai priklauso nuo pašarų kainos [13]. Pieno kainų stabilumui taip pat didelę įtaką gali turėti gamintojų pasiskirstymas, [14] nustatyta, kad kuo didesnę dalį pieno rinkos valdo ūkininkų kooperatyvai, tuo stabilesnės pieno kainos valstybiniu lygiu. [16] pademonstruota, kaip politiniai sprendimai gali paveikti kainų stabilumą, kai 2003 metais priėmus Liuksemburgo susitarimą Europos pieno kainos buvo labiau susietos su pasaulinėmis kainomis, dėl ko pieno kainos Europoje tapo labiau nestabilios.

Tiriant rinkos kainų stabilumą ir siekiant sumažinti kainų svyravimus yra atlikta nemažai skirtingų darbų. [9] straipsnyje tirtas Kinijos bandymas suvaldyti kiaulienos kainas įkuriant nacionalinį kiaulienos rezervą. [10] straipsnyje naudotas cobweb modelis su privačiu sandėliavimu siekiant stabilizuoti žemės ūkio produkcijos kainas. [11] pritaikytas dinaminis programavimas Bangladešo ryžių kainų stabilumui su privačiu ir viešu sandėliavimu tirti. [16] straipsnyje Indonezijos pieno kainų stabilumas buvo tyrinėjamas sudarant autoregresijos ARCH modelį. [1] straipsnyje buvo analizuotos Čekijos paukštienos rinkos kainos, sudarius matematinį modelį – diferencialinę lygtį su vėlavimo argumentu, kuri buvo sprendžiama skaitiniais metodais (matlab dde23). Buvo nustatyta, su

kokiais lygties parametrais sistema tampa asimptotiškai nestabili. [12] straipsnyje Ganos kukurūzų kainų stabilumui tirti naudota netiesinė diferencialinė lygtis su vėlavimu. Tyrime naudota tiesinė paklausos funkcijos ir netiesinė pasiūlos funkcija, o skaičiavimai atlikti skaitiniais metodais (matlab dde23).

1.2. Lamberto W funkcija

Lamberto W funkcija yra begalinį skaičių šaknų turinti funkcija, dažnai naudojama matematikoje, fizikoje ir kitose srityse. Vienas iš funkcijos panaudojimų matematikoje yra diferencialinių lygčių su vėlavimo argumentu šaknų suradimas. Ši panaudojimo sritis yra labai aktuali, kadangi diferencialinės lygtys su vėlavimo argumentu gali būti naudojamos matematiškai aprašyti realaus pasaulio modelius, pavyzdžiui, įvairias valdymo sistemas. Tokių lygčių problema ta, kad jos yra sudėtingesnės už paprastas diferencialines lygtis ir metodai, kurie tinka paprastoms diferencialinėms lygtims netinka diferencialinėms lygtims su vėlavimu, todėl diferencialinės lygtys su vėlavimu dažniausiai sprendžiamos skaitiniais metodais, o tai gali riboti sprendinių tikslumą. Dėl šių priežasčių Lamberto funkcija gali būti naudinga, nes ja naudojantis galima surasti tikslus sprendinius. Lamberto funkcija gali turėti tiek skaliarinę, tiek matricinę išraišką.

1.2.1. Skaliarinė Lamberto W funkcija

Funkcijos

$$z = \psi(w) = we^w \quad (1.1)$$

atvirkštinė funkcija yra vadinama Lamberto W funkcija ir žymima $W(z)$:

$$W(z) = w = \psi^{-1}(z) \quad (1.2)$$

Lamberto funkcija $W(z)$ turi begalinį skaičių šaknų, kurios prie skirtingų $k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots$, gali būti išreikštos tokia forma:

$$W_k(z) = \ln(z) + 2\pi ik - \ln(\ln(z) + 2\pi ik) + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=p}^{\infty} c_{pm} \frac{\ln(\ln(z) + 2\pi ik)^m}{(\ln(z) + 2\pi ik)^{p+m}} \quad (1.3)$$

kur koeficientas $c_{pm} = \frac{(-1)^p S(p+m, p+1)}{m!}$, kur $S(n, k)$ yra antros rūšies Stirlingo skaičius. Šis skaičius gali būti išreikštas rekurentine formule:

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) - (n-1)S(n-1, k) \quad k \leq n, S(0,0) = 1 \quad (1.4)$$

arba suma:

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k -1^{k-j} \binom{k}{j} j^n \quad (1.5)$$

1.2.2. Matricinė Lamberto W funkcija

Suradus matricos H tikrines reikšmes $\lambda_i, i = \overline{1, n}$ ir tikrinius vektorius $V_i, i = \overline{1, n}$, galima apskaičiuoti matricinės Lamberto funkcijos $W(H)$ k -osios ($k = (-\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty)$) šakos reikšmes $W_k(H)$. Jeigu matrica H yra diagonalizuojama, tada taikome formulę:

$$W_k(H) = V \begin{bmatrix} W_k(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W_k(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & W_k(\lambda_n) \end{bmatrix} V^{-1}, \quad (1.6)$$

kur $V = [V_1 \ V_2 \ \dots \ V_n]$.

Jeigu matrica H nėra diagonalizuojama, tai pradžiai reikia apibrėžti matricos H Žordano kanoninę formą:

$$J = \text{diag} \left(J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \dots, J_{n_s}(\lambda_s) \right) \quad (1.7)$$

čia $J_n(\lambda)$ - $n \times n$ Žordano langelis, atitinkantis tikrinę reikšmę λ . Tada k -tosios Lamberto funkcijos šakos išraiška:

$$W_k(J) = \text{diag} \left(W_k \left(J_{n_1}(\lambda_1) \right), W_k \left(J_{n_2}(\lambda_2) \right), \dots, W_k \left(J_{n_s}(\lambda_s) \right) \right) \quad (1.8)$$

Žordano langelio matricinė Lamberto funkcija yra užrašoma transformacija

$$W_k(J_n(\lambda)) = V \begin{bmatrix} W_k(\lambda) & W'_k(\lambda) & \dots & \frac{1}{(n-1)!} W_k^{(n-1)}(\lambda) \\ 0 & W_k(\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & W_k(\lambda) \end{bmatrix} V^{-1} \quad (1.9)$$

Transformacija (1.9) yra apibrėžta visoms tikrinėms reikšmėms nelygioms $-e^{-1}$. Jeigu $k = 0$, tai neegzistuos $W_k(J_n(\lambda))$, kai $\lambda = -e^{-1}$, kadangi $W'_0(-e^{-1})$ neegzistuoja. Tai galima įrodyti taikant Lamberto funkcijos išvestinės formulę:

$$\frac{dW}{dz} = \frac{W(z)}{z(1+W(z))} \quad (1.10)$$

Vietoje z įstatome reikšmę $-e^{-1}$:

$$\frac{W_0(-e^{-1})}{-e^{-1}(1+W_0(-e^{-1}))} = \frac{-1}{-e^{-1}(1-1)} = \frac{1}{0} = \infty. \quad (1.11)$$

Tarkime, kad turime matricos Žordano langelį 2×2 , kuris atitinka tikrinę reikšmę $\lambda = -e^{-1}$.

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-1} & 1 \\ 0 & -e^{-1} \end{pmatrix}, \text{ tada } W_k(J) = \begin{pmatrix} W_k(\lambda) & W'_k(\lambda) \\ 0 & W_k(\lambda) \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Tikriname, ar tenkinama lygybė $W_k(J)e^{W_k(J)} = J$. Surandame išvestinę $\lambda = W_k(\lambda)e^{W_k(\lambda)}$, kuri lygi $1 = W'_k(\lambda)e^{W_k(\lambda)} + \lambda W'_k(\lambda)$. Tuomet turime:

$$\begin{aligned} W_k(J)e^{W_k(J)} &= \begin{pmatrix} W_k(\lambda) & W'_k(\lambda) \\ 0 & W_k(\lambda) \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} W_k(\lambda) & W'_k(\lambda) \\ 0 & W_k(\lambda) \end{pmatrix}} \\ &= \begin{pmatrix} W_k(\lambda)e^{W_k(\lambda)} & W'_k(\lambda)e^{W_k(\lambda)} + W'_k(\lambda)W_k(\lambda)e^{W_k(\lambda)} \\ 0 & W_k(\lambda)e^{W_k(\lambda)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & W'_k(\lambda)e^{W_k(\lambda)} + \lambda W'_k(\lambda) \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = J \end{aligned} \quad (1.13)$$

Jeigu tikrinė reikšmė lygi $\lambda = -e^{-1}$, tuomet $W_0(\lambda) = -1$ ir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} W_0(\lambda) & W'_0(\lambda) \\ 0 & W_0(\lambda) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & W'_0(\lambda) \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \left[W'_0(\lambda) = \frac{1}{e^{W_0(\lambda)} + \lambda} = \frac{1}{e^{-1} - e^{-1}} \right] \\ &= \begin{pmatrix} -1 & \infty \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Gauname, kad kai $J = \begin{pmatrix} -e^{-1} & 1 \\ 0 & -e^{-1} \end{pmatrix}$ pagal (1.10) ir (1.11) išraiškas ($W'_0(-e^{-1}) = \infty$) ir remiantis (1.14) išraiška galime teigti, kad $W_0(J) = \begin{pmatrix} W_0(-e^{-1}) & W'_0(-e^{-1}) \\ 0 & W_0(-e^{-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \infty \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, t.y. matricinis Lamberto funkcijos reikšmė prie argumento J neegzistuoja. Tai yra svarbu žinoti tiriant valdymo sistemas ir rinkos kainų stabilumus Lamberto funkcijos metodu. Jei sistemos Žordano matrica yra tokia, kaip (1.14), tuomet Lamberto funkcijos metodo taikyti negalima.

1.2.3. Skaliarinė Lamberto W funkcija homogeninėms diferencialinėms lygtims

Lamberto W funkcija gali būti taikoma spręsti tiesinėms diferencialinėms lygtims su vėlavimo argumentu. Tarkime turime diferencialinę lygtį:

$$x'(t) + ax(t - \tau) + bx(t) = 0 \quad (\tau > 0), t \geq 0, \quad (1.15)$$

$$x(t) = \phi(t), t \in [-\tau; 0];$$

čia τ – fiksuotas vėlavimas, $x(t)$ – ieškoma funkcija, $\phi(t)$ – pradinė funkcija, a ir b – konstantos.

Darome prielaidą, kad lygties sprendinys turi formą:

$$x(t) = X(t) = e^{st}, \quad (1.16)$$

kur s yra kompleksinis skaičius. Įstačius (1.16) į (1.15) gauname

$$e^{st}(s + b + ae^{-s\tau}) = 0 \quad (1.17)$$

Daugiklis e^{st} negali būti lygus 0, todėl turime

$$s + b + ae^{-s\tau} = 0 \quad (1.18)$$

Abi puses padauginame iš $e^{s\tau}$ ir gauname:

$$(s + b)e^{s\tau} = -a \quad (1.19)$$

Lygtis (1.19) yra transcendentinė charakteristinė lygtis, ir atitinka diferencialinę lygtį su vėlavimo argumentu ir turi be galo daug šaknų. Vienas iš būdų išspręsti tokią lygtį yra taikyti Lamberto funkcijų metodą. Abi lygties puses padauginame iš $\tau e^{b\tau}$:

$$(s + b)\tau e^{(s+b)\tau} = -a\tau e^{b\tau} \quad (1.20)$$

Pritaikome Lamberto funkcijos apibrėžimą $z = \psi(w) = we^w$,

$$W(-a\tau e^{b\tau}) = (s + b)\tau \quad (1.21)$$

Ir gauname:

$$W(-a\tau e^{b\tau})e^{W(-a\tau e^{b\tau})} = -a\tau e^{b\tau} \quad (1.22)$$

čia $W(-a\tau e^{b\tau})$ – Lamberto funkcijos $W(z)$ reikšmė, kai argumentas $z = -a\tau e^{b\tau}$. Pritaikę Lamberto funkciją gauname transcendentinės charakteristinės lygties sprendinių aibę:

$$s_k = \frac{1}{\tau} W_k(-a\tau e^{b\tau}) - b, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.23)$$

Atskiri diferencialinės lygties sprendiniai turi formą:

$$X_k(t) = e^{s_k t} = e^{\left(\frac{1}{\tau} W_k(-a\tau e^{b\tau}) - b\right)t}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.24)$$

Tuomet bendrasis lygties sprendinys gali būti užrašomas taip:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{\left(\frac{1}{\tau} W_k(-a\tau e^{b\tau}) - b\right)t} \quad (1.25)$$

čia $C_k (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ – skaliarinis koeficientas.

Koeficientų radimo algoritmas:

Intervalą $[-\tau, 0]$ padaliname į lygias dalis (čia N yra pakankamai didelis skaičius):

$$[-\tau, 0] = \left[-\tau, -\frac{2\tau}{2N}\right] \cup \left[-\frac{2\tau}{2N}, -\frac{\tau}{2N}\right] \cup \dots \cup \left[-\frac{\tau}{2N}, 0\right] \text{ (Tiriamas intervalas skaidomas } \frac{\tau}{2N} \text{ dydžiu).}$$

Randamos pradinės funkcijos reikšmės padalintų intervalų galuose:

$$\begin{aligned} \varphi(0) = & \dots + C_{-N}X_{-N}(0) + C_{-(N-1)}X_{-(N-1)}(0) + \dots + C_{-1}X_{-1}(0) + C_0X_0(0) \\ & + C_1X_1(0) + \dots + C_{N-1}X_{N-1}(0) + C_NX_N(0) + \dots, \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned}\varphi\left(-\frac{\tau}{2N}\right) &= \dots + C_{-N}X_{-N}\left(-\frac{\tau}{2N}\right) + C_{-(N-1)}X_{-(N-1)}\left(-\frac{\tau}{2N}\right) + \dots + C_{-1}X_{-1}\left(-\frac{\tau}{2N}\right) \\ &\quad + C_0X_0\left(-\frac{\tau}{2N}\right) + C_1X_1\left(-\frac{\tau}{2N}\right) + \dots + C_{N-1}X_{N-1}\left(-\frac{\tau}{2N}\right) \\ &\quad + C_NX_N\left(-\frac{\tau}{2N}\right) + \dots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi\left(-\frac{2\tau}{2N}\right) &= \dots + C_{-N}X_{-N}\left(-\frac{2\tau}{2N}\right) + C_{-(N-1)}X_{-(N-1)}\left(-\frac{2\tau}{2N}\right) + \dots + C_{-1}X_{-1}\left(-\frac{2\tau}{2N}\right) \\ &\quad + C_0X_0\left(-\frac{2\tau}{2N}\right) + C_1X_1\left(-\frac{2\tau}{2N}\right) + \dots + C_{N-1}X_{N-1}\left(-\frac{2\tau}{2N}\right) \\ &\quad + C_NX_N\left(-\frac{2\tau}{2N}\right) + \dots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(-\tau) &= \dots + C_{-N}X_{-N}(-\tau) + C_{-(N-1)}X_{-(N-1)}(-\tau) + \dots + C_{-1}X_{-1}(-\tau) + C_0X_0(-\tau) \\ &\quad + C_1X_1(-\tau) + \dots + C_{N-1}X_{N-1}(-\tau) + C_NX_N(-\tau) + \dots.\end{aligned}$$

Gauname lygčių sistemą sudarytą iš $2N + 1$ lygčių.

Toliau aprašome aproksimaciją matricinėje formoje, kai matricų eilė yra lygi $2N + 1$:

$$\begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi\left(-\frac{\tau}{2N}\right) \\ \varphi\left(-\frac{2\tau}{2N}\right) \\ \vdots \\ \varphi(-\tau) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} X_{-N}(0) & \dots & X_N(0) \\ X_{-N}\left(-\frac{\tau}{2N}\right) & \dots & X_N\left(-\frac{\tau}{2N}\right) \\ X_{-N}\left(-\frac{2\tau}{2N}\right) & \dots & X_N\left(-\frac{2\tau}{2N}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{-N}(\tau) & \dots & X_N(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{-N} \\ C_{-N+1} \\ C_{-N+2} \\ \vdots \\ C_N \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

Arba

$$\Phi(t, N) \approx X(t, N)C(N) \quad (1.28)$$

Vektorius $C(N)$ yra ieškomas koeficientų vektorius $(C_k)_{k=-N}^N (N = \infty)$.

Padarę prielaidą, kad $(2N + 1) \times (2N + 1)$ matricai $X(\tau, N)$ egzistuoja atvirkštinė matrica, koeficientų vektorių $C(N)$ galime aprašyti taip:

$$C(N) = X^{-1}(\tau, N)\Phi(\tau, N) \quad (1.29)$$

arba

$$C_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \{X^{-1}(\tau, N)\Phi(\tau, N)\}_k; \quad (1.30)$$

simbolis $\{.\}_k$ reiškia k -ąjį vektoriaus elementą.

1.2.4. Skaliarinė Lamberto W funkcija nehomogeninėms diferencialinėms lygtims

Lamberto funkcija taip pat gali būti taikoma spręsti ir nehomogenines diferencialines lygtis su vėluojančiu laiku argumentu. Tarkime, turime skaliarinę diferencialinę lygtį:

$$x'(t) + ax(t) + bx(t - \tau) = u(t) \quad (1.26)$$

$$x(t) = \phi(t), t \in [-\tau, 0],$$

kur a, b – diferencialinės lygties koeficientai, $\phi(t)$ – pradinė funkcija, $u(t)$ – laisvasis narys. Tuomet lygčiai galima parašyti atskirąjį sprendinį:

$$x(t) = \int_0^t \Psi(t, \zeta) u(\zeta) d\zeta \quad (1.27)$$

$\Psi(t, \zeta)$ turi tenkinti sąlygas:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \Psi(t, \zeta) = a\Psi(t, \zeta), \quad t - \tau < \zeta < t, \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \Psi(t, \zeta) = a\Psi(t, \zeta) + b(t, \zeta + \tau), \quad \zeta < t - \tau \quad (1.29)$$

$$\Psi(t, t) = 1 \quad (1.30)$$

$$\Psi(t, \zeta) = 0, \quad \zeta > t. \quad (1.31)$$

Įvedame pažymėjimą $\Psi(t, \zeta) = g(\zeta)$ ir įstatome į lygtį:

$$g'(\zeta) = ag(\zeta),$$

$$\frac{dg(\zeta)}{d\zeta} = ag(\zeta)$$

Atskiriame kintamuosius ir parašome diferencialinės lygties sprendinį:

$$\int \frac{dg(\zeta)}{g(\zeta)} = a \int d\zeta$$

$$\ln(g(\zeta)) = a\zeta + C_1,$$

Pažymime $C_1(t) = \ln(C(t))$, $C(t) = C$. Tada

$$\ln\left(\frac{g(\zeta)}{C}\right) = a\zeta,$$

$$\frac{g(\zeta)}{C} = e^{a\zeta},$$

$$g(\zeta) = Ce^{a\zeta}.$$

Turėdami $\Psi(t, \zeta) = C(t) e^{a\zeta}$, randame koeficientą $C(t)$:

$$\Psi(t, t) = C(t)e^{at} = 1,$$

$$C(t) = e^{-at}.$$

Tuomet $\Psi(t, \zeta) = C(t) e^{a\zeta}$, galima parašyti taip:

$$\Psi(t, \zeta) = e^{-at} e^{a\zeta} = e^{-a(t-\zeta)}, t - \tau \leq \zeta < t \quad (1.32)$$

Įvedame pažymėjimą $\Psi(t, \zeta) = g(\zeta)$, tuomet diferencialinę lygtį užrašome:

$$g'(\zeta) = ag(\zeta) + bg(\zeta + \tau), \zeta < t - \tau \quad (1.33)$$

Tarkime, kad lygties sprendinys užrašomas tokia forma:

$$g(\zeta) = Ce^{s\zeta}, \quad (1.34)$$

Čia $C = C(t)$.

$$Cse^{s\zeta} - aCe^{s\zeta} - bCe^{s(\zeta+\tau)} = 0 \quad (1.35)$$

Gauta lygtis yra transcendentinė charakteristinė lygtis, kurią spręsimė taikydami Lamberto funkciją:

$$\begin{aligned} Ce^{s\zeta}(s - a - be^{s\tau}) &= 0, \\ (s - a - be^{s\tau}) &= 0 \end{aligned} \quad (1.36)$$

Padauginę abi lygybės puses iš e^{st} gauname

$$(s - a)e^{-s\tau} = b. \quad (1.37)$$

Pasinaudojame Lamberto funkcijos apibrėžimu:

$$W(H)e^{W(H)} = H \quad (1.38)$$

Sulyginę išraiškas (1.37) ir (1.38) gauname:

$$-\tau(s - a) = W(-b\tau e^{a\tau}) \quad (1.39)$$

Išreiškiame s :

$$s = -\frac{1}{\tau} W(-b\tau e^{a\tau}) + a \quad (1.40)$$

Tuomet lygties sprendinį galima užrašyti taip:

$$g(\zeta) = Ce^{(-\frac{1}{\tau} W(-b\tau e^{a\tau}) + a)\zeta} \quad (1.41)$$

Panaudoję pradinę sąlygą, pateiktą (1.28), surandame funkciją $C(t)$:

$$g(t, t) = C(t)e^{\left(-\frac{1}{\tau}W_k(-b\tau e^{a\tau})+a\right)\zeta} = 1, \quad (1.42)$$

$$C(t) = e^{\left(\frac{1}{\tau}W_k(-b\tau e^{a\tau})-a\right)t}$$

Įstatę $C(t)$ į (1.40), gauname:

$$\Psi_k(t, \zeta) = e^{\left(\frac{1}{\tau}W_k(-b\tau e^{a\tau})-a\right)(t-\zeta)} \quad (1.43)$$

Kadangi Lamberto funkcija turi begalinį skaičių šaknų, galutinis sprendinys išreiškiamas suma:

$$\Psi(t, \zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Psi_k(t, \zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\left(\frac{1}{\tau}W_k(-b\tau e^{a\tau})-a\right)(t-\zeta)} C'_k \quad (1.44)$$

Čia C'_k – skaliarinis koeficientas. Atskiras nehomogeninės diferencialinės lygties sprendinys:

$$x(t) = \int_0^t \Psi(t, \zeta) bu(\zeta) d\zeta = \int_0^t e^{-a(t-\zeta)} bu(\zeta) d\zeta, \quad t \leq \tau \quad (1.45)$$

$$x(t) = \int_0^{t-\tau} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\left(\frac{1}{\tau}W_k(-b\tau e^{a\tau})-a\right)(t-\zeta)} C'_k + \int_{t-\tau}^t e^{-a(t-\zeta)} bu(\zeta) d\zeta \quad (1.46)$$

Turėdami atskirojo sprendinio išraišką intervale $(0; +\infty)$:

$$x(t) = \int_0^t \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{s_k(t-\zeta)} C'_k bu(\zeta) d\zeta \quad (1.47)$$

Galime parašyti nehomogeninės diferencialinės lygties bendrąjį sprendinį intervale $(0; +\infty)$:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{s_k t} C_k + \int_0^t \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{s_k(t-\zeta)} C'_k bu(\zeta) d\zeta, \quad (1.48)$$

Čia

$$s_k = \frac{1}{\tau} W_k(-b\tau e^{a\tau}) - a. \quad (1.49)$$

čia $C'_k = \lim_{N \rightarrow \infty} (\eta^{-1}(T, N) \times (\sigma - \delta))_k$ koeficientų matrica. C'_k koeficientų matrica randama

$$\begin{pmatrix} \sigma(\tau) \\ \sigma\left(\tau - \frac{\tau}{2N}\right) \\ \sigma\left(\tau - \frac{2\tau}{2N}\right) \\ \vdots \\ \sigma(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_{-N}(\tau) & \dots & \eta_N(\tau) \\ \eta_{-N}\left(\tau - \frac{\tau}{2N}\right) & \dots & \eta_N\left(\tau - \frac{\tau}{2N}\right) \\ \eta_{-N}\left(\tau - \frac{2\tau}{2N}\right) & \dots & \eta_N\left(\tau - \frac{2\tau}{2N}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{-N}(0) & \dots & \eta_N(0) \end{pmatrix} \quad (1.50)$$

čia

$$\begin{aligned}\sigma(\tau) &= \int_0^t e^{-B_1(t-\xi)} bu(\xi) d\xi \\ \eta(t) &= \int_0^{t-\tau} e^{-S_k(t-\xi)} bu(\xi) d\xi \\ \delta(t) &= \int_{t-\tau}^t e^{-B_1(t-\xi)} bu(\xi) d\xi\end{aligned}\tag{1.51}$$

Norint rasti supaprastintą koeficiento C'_k radimą, reikia suprastinti lygtį:

$$\sigma(t) = \eta(t)C'_k + \delta(t).\tag{1.52}$$

Pirmiausiai parašome (1.52) lygties narius $\sigma(t)$ ir $\delta(t)$ po vienu integralu:

$$\sigma(t) - \delta(t) = \int_0^t e^{-B_1(t-\xi)} bu(\xi) d\xi - \int_{t-\tau}^t e^{-B_1(t-\xi)} bu(\xi) d\xi = \int_0^{t-\tau} e^{-B_1(t-\xi)} bu(\xi) d\xi\tag{1.53}$$

Tuomet (1.52) lygtis gaunama:

$$\int_0^{t-\tau} e^{-B_1(t-\xi)} bu(\xi) d\xi = \int_0^{t-\tau} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C'_k e^{\frac{1}{\tau}(W_k(-B_2\tau e^{B_1\tau}) - B_1)(t-\xi)} bu(\xi) d\xi\tag{1.54}$$

Parašome (1.53) lygtį po vienu integralu

$$\int_0^{t-\tau} \left(e^{-B_1(t-\xi)} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} C'_k e^{\frac{1}{\tau}(W_k(-B_2\tau e^{B_1\tau}) - B_1)(t-\xi)} \right) bu(\xi) d\xi = 0.$$

Atlikę pažymėjimus $p = t - \xi$, $\xi = t - p$, $t = p + \xi$, gauname:

$$e^{-B_1 p} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C'_k e^{\frac{1}{\tau}(W_k(-B_2\tau e^{B_1\tau}) - B_1)p}\tag{1.55}$$

Taigi norint rasti koeficientų matricą C'

$$C'(N \rightarrow \infty) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \prod (\tau, N) \Gamma(\tau, N) \right\}^{-1}\tag{1.56}$$

čia

$$\begin{aligned}
\Gamma(\tau, N) &= \begin{Bmatrix} e^{B_1(\tau)} \\ e^{B_1(\tau - \frac{\tau}{2N})} \\ e^{B_1(\tau - \frac{2\tau}{2N})} \\ \vdots \\ e^{B_1(0)} \end{Bmatrix}; \quad \prod(\tau, N) = \begin{bmatrix} e^{S_{-N}(\tau)} & \dots & e^{S_N(\tau)} \\ e^{S_{-N}(\tau - \frac{\tau}{2N})} & \dots & e^{S_N(\tau - \frac{\tau}{2N})} \\ e^{S_{-N}(\tau - \frac{2\tau}{2N})} & \dots & e^{S_N(\tau - \frac{2\tau}{2N})} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{S_{-N}(0)} & \dots & e^{S_N(0)} \end{bmatrix}; \quad C'(N) \\
&= \begin{Bmatrix} C'_{-N} \\ C'_{-N+1} \\ C'_{-N+2} \\ \vdots \\ C'_N \end{Bmatrix};
\end{aligned} \tag{1.57}$$

$\Gamma(t, N)$ yra $n(2N + 1) \times n$ matrica, $\prod(\tau, N)$ yra $n(2N + 1) \times n(2N + 1)$, o $C'(N)$ yra $n(2N + 1) \times n$ matrica.

1.3. Lamberto W funkcijos pritaikymas ekonomikoje

Matematiniai modeliai yra neatskiriama šiuolaikinės ekonomikos dalis. Įvairios ekonominės problemos gali aprašytos matematiškai, nuo sandėliavimo uždavinių ir optimalaus prekių kiekio užsakymo iki kainos prognozavimų ir rinkos kainos pusiausvyros stabilumo tyrimų. Kadangi ekonomikoje yra daugybė nuolat besikeičiančių kintamųjų, nemažai procesų, tokių kaip šalių BVP augimas bėgant laikui ar dinaminiai paklausos-pasiūlos modeliai gali būti aprašomi matematiškai pasitelkiant diferencialines lygtis. Norint prašyti realaus pasaulio sąlygas atitinkančius modelius diferencialinėse lygtyse dažnai įtraukiamas vėlavimo argumentas, kas apsunkina lygčių sprendimą tradiciniais metodais. Dėl šių priežasčių Lamberto W funkcija gali būti naudinga ir ekonomikos srityje.

Paskutiniu metu Lamberto W funkcija susilaukia vis daugiau dėmesio dėl potencialių panaudojimų ekonomikos ir finansų srityje. [18] straipsnyje išvesta optimalaus paskolos refinansavimo taisyklė, kuri yra paremta Lamberto W funkcija. Padarius keletą modelių supaprastinančių prielaidų buvo surastas refinansavimo problemos uždaros formos sprendinys. Naudojantis tokiais sprendiniais galima įvertinti kiekvieno modelio parametro reikšmingumą, galima nesunkiai atlikti palyginamuosius skaičiavimus ir apskaičiuoti kitus svarbius dydžius, netaikant skaitinių metodų. Naudodamiesi gauta refinansavimo taisykle autoriai įvesdami skirtingus parametrus, tokius kaip likusios paskolos vertė, refinansavimo kaina ir t.t., gali nustatyti, kad klientui yra tikslinga svarstyti refinansavimo galimybę. [19] straipsnyje buvo įvertintas Lamberto W funkcija pagrįsto ekonominio užsakymo kiekio (EOQ) problemos pritaikymas tiesioginio įpurškimo varikliuose. Buvo sukurti realaus pasaulio sąlygas atitinkantys modeliai, įvertinantys fizines cilindro savybes. Lamberto W funkcija buvo panaudota siekiant nustatyti optimalų įpurškiamų degalų kiekį ir įpurškimo trukmę. Atlikus skaičiavimus buvo nustatyta, kad pritaikius Lamberto funkcija gautą eksperimentinį variklį ir esant atitinkamoms sąlygoms galima sutaupyti virš 5% degalų. [20] straipsnyje buvo išanalizuoti 2 EEQ scenarijai, vienas, kai prekiaujama greitai gendančiais produktais, o kitas kai produkcija gali ilgai stovėti sandėliuose. Pirmajame modelyje autoriai nagrinėja melionų tiekimo grandinę, o antrajame paralono gamybos modelį. Melionų tiekimo modelis yra įdomus tuom, kad tik nuskyvus vaisių, jis pradeda bėgant laikui prarasti savo vertę, todėl optimizuojant tiekimo procesą reikia atsižvelgti ne tik į skynimo ir išvežiojimų darbų kainą, bet kartu vaisius reikia parduoti tokiu laiko momentu, kad būtų prarandama kuo mažiau jo vertės. Kitas pavyzdys yra pritaikytas paralono gamybos procesui. Optimizavimo uždavinys yra parinkti, kokio dydžio paralono blokus gaminti, kad rasti pusiausvyrą tarp didelio medžiagų kiekio praradimo paralono išpjaustymo į reikiamą formą procese ir pagaminto produkto kiekio, kurį vėliau reikės sandėliuoti. Lamberto W funkcija buvo panaudota apskaičiuojant tikslus diferencialinių lygčių sprendinius.

Logit modeliai yra dažnai naudojami ekonomikoje, nes jais galima lengvai išreikšti paklausos ir pasiūlos lygtis. Naudojant logit modelius dažnai tenka susidurti su polinomiais ir eksponentiniais nariais, o tai reiškia, kad surasti sprendinių analitiniais metodais tampa neįmanoma. [21] straipsnio autoriai siūlo, kad norint surasti kainų pusiausvyros taškus yra tikslinga naudoti Lamberto W funkciją. Norėdami tai pademonstruoti, autoriai suranda uždaros formos sprendinius kainos modeliui esant monopolio atvejui ir esant konkurencijai. Suradus analitinį sprendinį galima studijuoti skirtingų nepriklausomų kintamųjų įtaką priklausomam kintamajam. [22] straipsnyje logit modelis naudojamas skaičiuojant įmonės kuri prekiauja keliais skirtingais produktais bendrą pelną.

Modeliai buvo įvertinti tiek monopolio atveju, tiek esant konkurencijai. Monopolio atveju pritaikius Lamberto W funkciją buvo surasti skirtingų produktų kainų pusiausvyros taškai. Kai rinkoje yra kelių skirtingų konkuruojančių įmonių atitinkantys produktai, jų kainos priklauso ne tik nuo to, kokį pelną siekia gauti produktus pardavinėjanti įmonė, bet ir nuo visų kitų įmonių produktų kainų. Atvejui, kai kelios firmos konkuruoja tarpusavyje buvo pritaikyta modifikuota Lamberto funkcija.

1.4. Diferencialinių lygčių su vėlavimu sprendimas skaitiniais metodais

Šiame poskyryje aprašysime, kaip diferencialinės lygties su vėlavimu gali būti sprendžiamos pasitelkiant skaitinius metodus. Šiame darbe surasti apytiksliai tiriamų matematinių modelių sprendinius naudojame funkciją `dde23`, kuri yra aprašyta Matlab pakete. Ši funkcija yra plačiai naudojama spręsti diferencialinės lygtis su vėlavimu ([1], [12]).

Turime diferencialine lygtį su vėlavimo argumentais:

$$y'(x) = f(x, y(x), y(x - \tau_1), y(x - \tau_2), \dots, y(x - \tau_k)).$$

čia τ_1 - vėlavimo argumentas, kai $\tau = \min(\tau_1, \dots, \tau_k) > 0$. [23] šaltinyje aprašyta, kad funkcija `dde23` skirta dirbti su tokiomis diferencialinėmis lygtimis, kurių vėlavimo argumentai yra konstantos. Lygtis apibrėžta intervale $a \leq x \leq b$, jos pradinė funkcija $y(x) = S(x)$ apibrėžta intervale $[-\infty; a]$. Sprendžiant diferencialines lygtis su vėlavimu pradinė funkcija yra reikalinga, nes reikia įvertinti ir lygties reikšmes prieš pradinį laiko tašką $t = a$, kadangi dėl vėlavimo argumento norint suskaičiuoti lygties sprendinio reikšmės pradiniam laiko taške $t = 0$, reikia įvertinti reikšmes taške $t = 0 - \tau$.

`dde23` yra paremta kita matlab pakete aprašyta funkcija `ode23`, kuri yra skirta spręsti paprastoms diferencialinėmis lygtims. Funkcija remiasi triapakopiu Rungės-Kutos metodu, kuris yra išplėčiamas taip, kad būtų pritaikytas spręsti diferencilines lygtis su vėlavimu.

Triapakopis Rungės-Kuto metodas pateikiamas trimis formulėmis:

Tarkime, kad turime aproksimaciją y_n prie $y(x)$ ir x_n , reikia apskaičiuoti $x_{n+1} = x_n + h_n$. Etapai $f_{ni} = f(x_{ni} + y_{ni})$ su $\forall i = 1, \dots, s$ yra apibrėžiami $x_{n+1} = x_n + c_i h_n$:

$$y_{ni} = y_n + h_n \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f_{nj}$$

Aprašome aproksimaciją:

$$y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{i=1}^s b_i f_{ni}$$

Apibrėžiame funkciją:

$$\Phi(x_n, y_n) = \sum_{i=1}^s b_i f_{ni}$$

Sprendinys tenkina lygtį su liekana, kurią vadinsime aproksimacijos paklaida lte_n , tai yra $O(h_n^{p+1})$:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h_n \Phi(x_n, y(x_n)) + lte_n,$$

Sprendinio žingsnio dydis:

$$y^*_{n+1} = y_n + h_n \sum_{i=1} b^*_i f_{ni} = y_n + h_n \Phi^*(x_n, y_n).$$

Trečioji formulė:

$$y_{n+\sigma} = y_n + h_n \sum_{i=1}^s b_i(\sigma) f_{ni}$$

Koeficientai b_i yra σ polinomiali, tai žymi polinomų aproksimaciją $y(x_n + \sigma h_n)$, kai $0 \leq \sigma \leq 1$.

Matlab pakete realizuotai funkcijai duomenys yra pateikiami tokia forma: $dde23(y'(x), (\tau_1, \dots, \tau_n), h(x), [a, b])$,

čia $y'(x)$ – turimos diferencialinės lygties išraiška, (τ_1, \dots, τ_n) – vėlavimo argumentų vektorius, $h(x)$ – lygties istorinė funkcija prieš tiriamojo intervalo pradžią, $[a, b]$ – intervalo pradžios ir pabaigos taškai.

Metodo pseudokodas:

input t - laikas (sekundėmis), y – kintamasis, z – kintamasis su vėluojančiu argumentu, B_1 ir B_2 – skaitinės matricos

Output $H = (h_{11}(t_1), \dots, h_{15}(t_l))$, pereinamosios funkcijos vektorius. Šio vektorius ilgis priklauso nuo intervalo, kuriame ieškomas sprendinys, ilgio.

Step 1 Aprašome kintamuosius. l – skaičiavimo intervalo ilgis, n_0 – lygus matricos B_1 eilei.

Step 2 $\kappa \rightarrow 1$

for $i \leftarrow 1$ **to** n_0 **do**

for $j \leftarrow 1$ **to** n_0 **do**

$$h_{i1}(t) = B_1(i, j)y_{ij} + B_2(i, j)z_i$$

end do j

end do i

Step 4 $H \leftarrow (h_{11}(t_1), \dots, h_{51}(t_l))$

Output H

DDE 23 taikymo pavyzdys

Tarkime turime diferencialinę lygtį su pastoviu vėlavimu:

$$y'(t) = -y(t) - 2 * y(t - \tau) - 10$$

Tarkime, kad lygties pradinė funkcija yra konstanta $\varphi(t) = 1$. Norėdami pritaikyti dde23 spręsti šiai diferencialinei lygčiai turime matlab pakete aprašyti diferencialinę lygtį ir pradinę funkciją.

Diferencialinė lygtis aprašoma tokia forma:

```
function yp = ddefun(t, y, Z)
    yp = - y - 2 * Z - 10;
end
```

Aprašome pradinę funkciją:

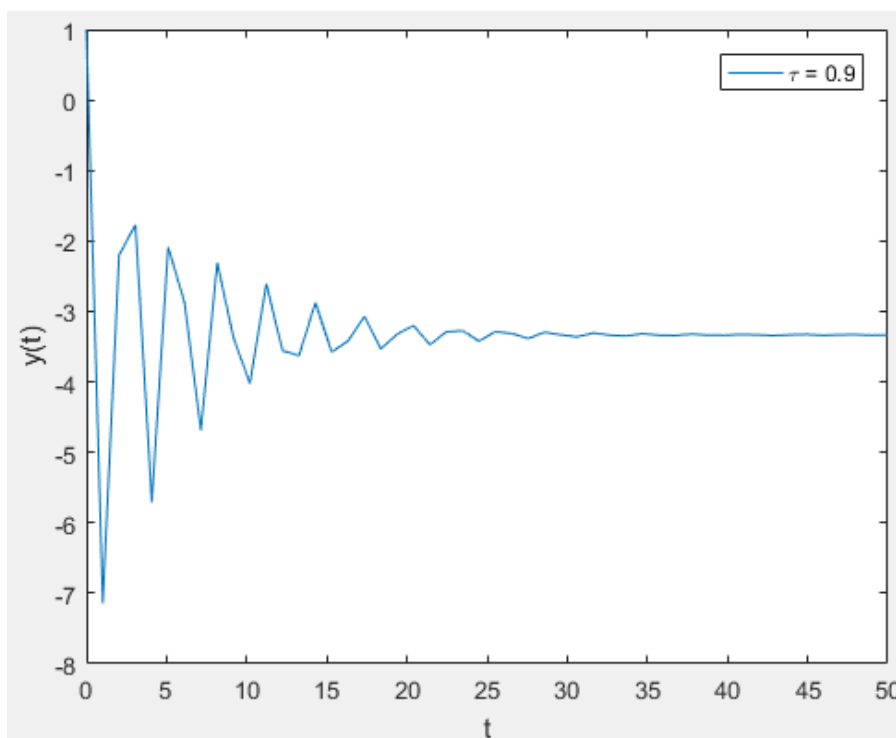
```
function y = yhist(t)
    y = 1;
end
```

Funkcijai dde23 reikia paduoti tokius parametrus: diferencialinę lygtį, vėlavimo argumentus, pradinę funkciją ir tiriamąjį intervalą. Tarkime, kad mes norime iširti lygtį su vėlavimo argumentu $\tau = 0.9$ intervale $[0; 50]$. Tuomet kreipinys į funkciją atrodytų taip:

```
sol = dde23(@ddefun, 0.9, @yhist, [0, 50]);
```

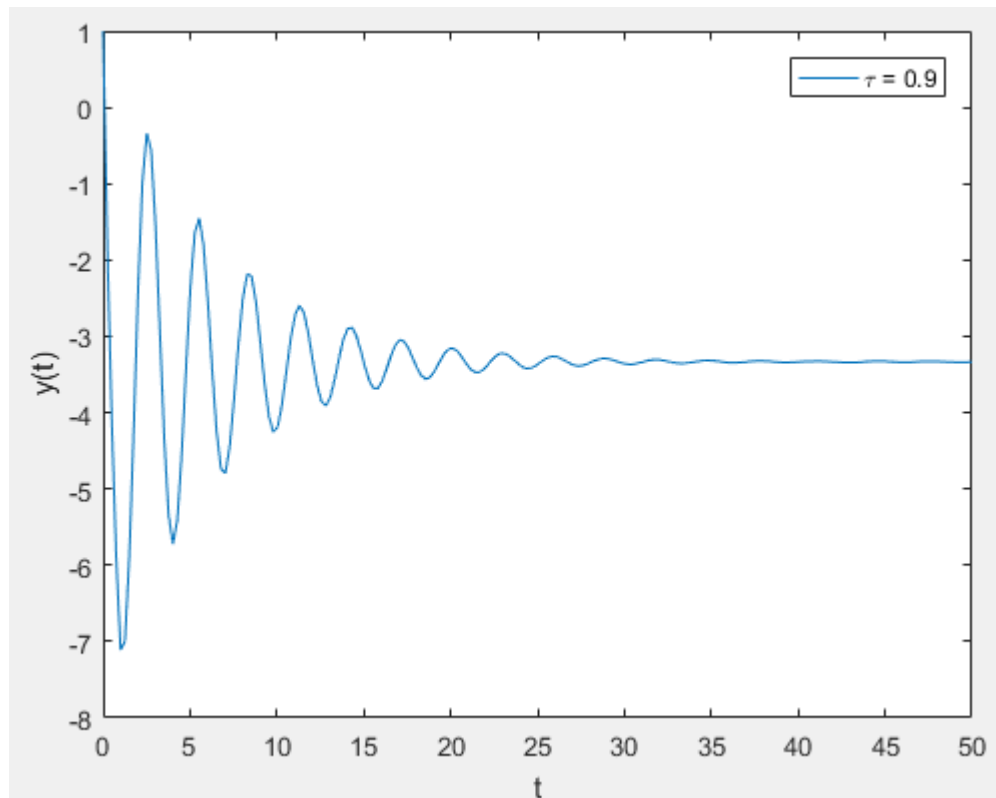
Funkcijos surasti lygties sprendiniai surandami taip:

```
tint = linspace(0, 50, 50);
yint1 = deval(sol1, tint);
```



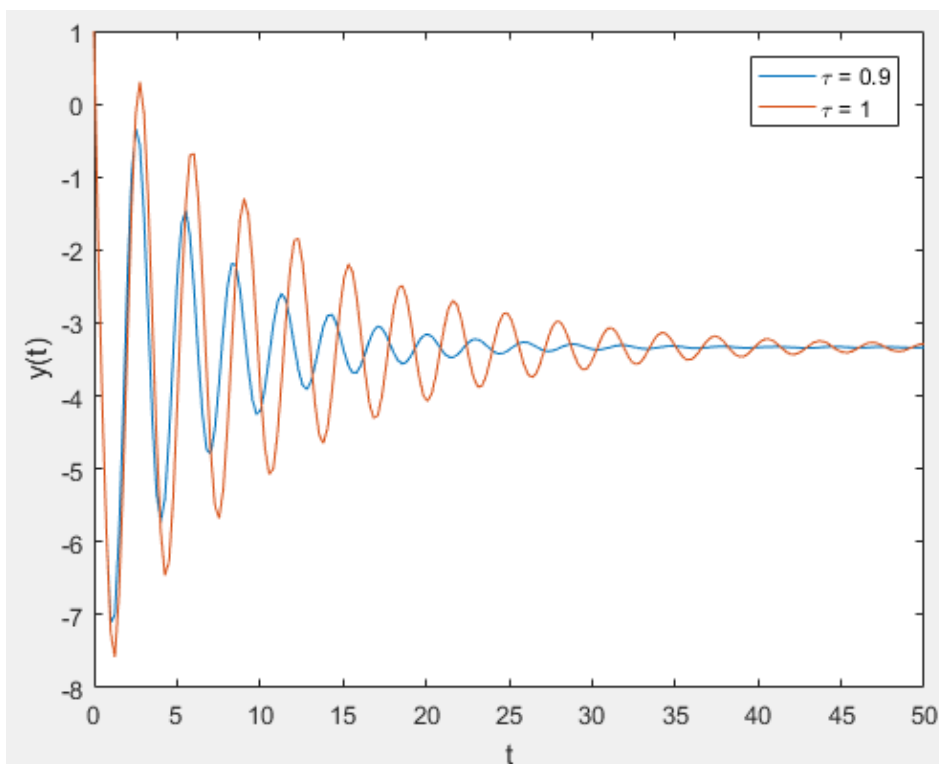
1 pav. Diferencialinės lygties sprendinio reikšmės, kai $\tau = 0.9$

Sprendinius atvaizdavus grafiškai galima stebėti sprendinio dinamiką bėgant laikui. Pirmame paveikslėlyje matyti diferencialinės lygties sprendinys intervale $[0; 50]$, i skaičiuojant naudota 50 žingsnių. Iš grafiko matyti, kad toks pasirinktas yra per mažas.



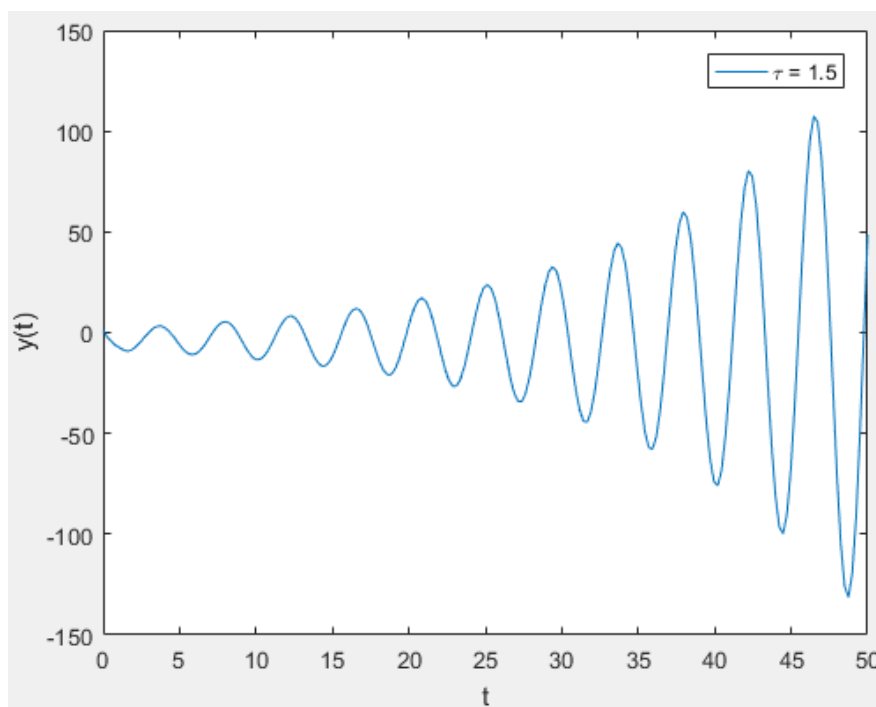
2 pav. Diferencialinės lygties sprendinio reikšmės, kai $\tau = 0.9$

Antrame paveikslėlyje pavaizduotas tas pats lygties sprendinys vietoje 50 žingsnių naudojant 200. Iš gauto grafikos, galima matyti, bėgant laikui sprendinys nusistovi ties -3.33. Didinant vėlavimo argumentų reikšmės, galima stebėti, kaip keičiasi lygties sprendinio dinamika.



3 pav. Diferencialinės lygties sprendinių reikšmės su skirtingai vėlavimo argumentais

Iš antro paveiksluko matyti, kad padidėjus vėlavimo argumento reikšmei lygties sprendiniai svyruoja ilgesnį laiką ir su didesne amplitude.



4 pav. Diferencialinės lygties sprendinio reikšmės, kai $\tau = 1.5$

Pasirinkus pakankamai didelį vėlavimo argumentą sistemos sprendiniai pasidaro nestabilūs. Naudojantis tokia metodika galima nustatyti, leistinas vėlavimo argumento intervalo reikšmes, kad sistema išliktu stabili.

2. Duomenys ir tyrimo metodai

Šiame skyriuje tyrinėjama rinkos kainų stabilumo dinamika, kai rinkos kainos matematinis modelis – tiesinė diferencialinė lygtis su vėlavimo argumentu. Rinkos kainos matematiniam modeliui aprašytam naudojant pasiūlą ir paklausą, jo transcendentinės lygties sprendimui pritaikysime Lamberto funkcijų metodą.

Tirsime transcendentinės lygties šaknų, gautų taikant Lamberto funkciją, išsidėstymą kompleksinėje plokštumoje, pagal tai analizuodami konkrečių pavyzdžių parametrų dinamiką. Analizuosime rinkos kainos matematinio modelio sprendinio kitimą tam tikruose intervaluose, pagal tai spęsdami, kokiems konkrečioms rodikliams esant, kaina išlieka stabili.

Skyriuje pateikiamas nagrinėjamas realus vištienos rinkos kainų matematinis modelis ir jo svyravimai esant skirtingoms koeficientų reikšmėms.

2.1. Rinkos kainos stabilumo tyrimas taikant Lamberto funkciją

2.1.1. Homogeninis atvejis

Tarkime turime rinkos kainą, kuri yra aprašyta skirtumu tarp produkto paklausos ir pasiūlos:

$$p'(t) = D(p(t)) - S(p(t)) \quad (2.1)$$

čia $D(p(t))$ – paklausa, $S(p(t))$ – pasiūla, o kintamasis $p(t)$ yra kaina, priklausoma nuo laiko t .

Šiame darbe nagrinėjamas rinkos pusiausvyros matematinis modelis yra diferencialinė lygtis su vėluojančiu laiko argumentu:

$$p'(t) = \gamma \left(D(p(t)) - S(p(t - \tau)) \right) \quad (2.2)$$

kur τ – vėlavimo argumentas, o γ – rinkos elastingumo koeficientas. Realaus pasaulio sąlygomis tarp produkto paklausos ir pasiūlos atsiranda vėlavimas, todėl modelyje naudojamas argumentas τ . Tuomet paklausos ir pasiūlos lygtis galime užrašyti taip (2.1):

$$D(p(t)) = \alpha + \beta p(t); \beta < 0, \quad (2.3)$$

$$S(p - \tau) = \lambda + \delta p(t - \tau); \delta > 0.$$

Panaudoję (2.3) išraiškas (2.2) formulėje galime užrašyti rinkos kainos matematinį modelį:

$$p'(t) = \gamma(\alpha + \beta p(t) - \lambda - \delta p(t - \tau)) \quad (2.4)$$

Pažymime naujus kintamuosius $v = \gamma\delta$, $r = -\gamma\beta$ ir įstatome į lygtį (2.4):

$$p'(t) = \gamma(\alpha - \lambda) - rp(t) - vp(t - \tau) \quad (2.5)$$

Padauginam ir padalinam lygties (2.5) narį $\gamma(\alpha - \lambda)$ iš $(\delta - \beta)$:

$$p'(t) = \gamma(\alpha - \lambda) \frac{(\delta - \beta)}{(\delta - \beta)} - rp(t) - vp(t - \tau) \quad (2.6)$$

Įveskime rinkos pusiausvyros koeficientą $p(e) = \frac{(\alpha - \lambda)}{(\delta - \beta)}$ į lygtį (2.6):

$$p'(t) + r(p(t) - p(e)) - v(p(t - \tau) - p(e)) = 0. \quad (2.7)$$

Pažymėję $z(t) = p(t) - p(e)$ ir įstatę į (2.7) lygtį gauname diferencialinę lygtį su vėluojančiu laiko argumentu:

$$z'(t) + rz(t) + vz(t - \tau) = 0. \quad (2.8)$$

Gautai lygčiai spręsti naudosime Lamberto funkcijos metodą. Tuomet $z(t) = e^{st}$:

$$se^{st} + re^{st} + ve^{s(t-\tau)} = 0. \quad (2.9)$$

Abi lygybės (2.9) puses padaliname iš e^{st} ir perkeliame $ve^{-\tau s}$ į kitą lygties pusę:

$$s + r = ve^{-\tau s}. \quad (2.10)$$

Abi lygybės (2.10) puses padauginame iš $\tau e^{\tau(s+r)}$:

$$(s + r)\tau e^{\tau(s+r)} = -v\tau e^{\tau r}. \quad (2.11)$$

Panaudoję Lamberto funkciją $\psi(w) = we^w$ gauname:

$$(s + r)\tau = W(-v\tau e^{\tau r}). \quad (2.12)$$

Surandame lygties sprendinį:

$$s_k = \frac{1}{\tau} W_k(-v\tau e^{\tau r}) - r. \quad (2.13)$$

Panaudoję kintamuosius $v = \gamma\delta$ ir $r = -\gamma\beta$ galime parašyti rinkos kainos transcendentinės lygties sprendinio išraišką:

$$s_k = \frac{1}{\tau} W_k(-\gamma\delta\tau e^{-\gamma\beta\tau}) - \gamma\beta. \quad (2.14)$$

Matematinio modelio, aprašyto (2.4) lygtimi sprendinys, kai turime, kad $p(t) = z(t) + p(e)$ ir $z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{s_k t} C_k$ gali būti užrašytas taip:

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{s_k t} C_k + p(e). \quad (2.15)$$

Gautą sprendinį naudosime tirti rinkos kainų stabilumą, prie skirtingų parametru.

2.1.2. Nehomogeninis atvejis

Tirsime pirmos eilės nehomogeninę diferencialinę lygtį su vėlavimo argumentu, kuri dar gali būti užrašyta tokia forma:

$$\begin{aligned} k'(t) - ax(t) - b(t - \tau) &= u(t), \tau > 0 \\ k(t) &= \varphi(t), t \in [-\tau, 0] \end{aligned} \quad (2.19)$$

čia $u(t) = b - a$. Užrašome sprendinio išraišką [3]:

$$k(t) = \int_0^t \psi(t, \zeta) u(\zeta) d\zeta \quad (2.20)$$

kur $\psi(t, \zeta)$ atitinka sąlygas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} \psi(t, \zeta) &= a\psi(t, \zeta), t - \tau \leq \zeta < t \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \psi(t, \zeta) &= a\psi(t, \zeta) + b\psi(t, \zeta + \tau), \zeta < t - \tau \\ \psi(t, t) &= 1 \\ \psi(t, \zeta) &= 0, \zeta > t. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Naudodamiesi Lamberto funkcija ir (2.21) aprašytais sąlygomis pirmąją lygtį perrašome:

$$\psi(t, \zeta) = e^{a(t-\zeta)}, t - \tau \leq \zeta < t \quad (2.22)$$

Antrąją lygtį užrašome taip:

$$\psi(t, \zeta)_k = e^{\left(\frac{1}{\tau} W_k(-b\tau e^{-a\tau}) + a\right)(t-\zeta)}, \quad (2.23)$$

kur $k = -\infty \dots \infty$. Lamberto funkcija turi begalinį skaičių sprendinių, todėl sprendinį galime užrašyti kaip sumą:

$$\psi(t, \zeta)_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C'_k e^{\left(\frac{1}{\tau} W_k(-b\tau e^{-a\tau}) + a\right)(t-\zeta)}, \quad (2.24)$$

C'_k - skaliarinis koeficientas. Kai $t \leq \tau$, tai nehomogeninės skaliarinės diferencialinės lygties sprendinys gali būti užrašomas taip:

$$k(t) = \int_0^t \psi(t, \zeta) bu(\zeta) d\zeta = \int_0^t e^{a(t-\zeta)} bu(\zeta) d\zeta \quad (2.25)$$

Jeigu $t > \tau$, tada:

$$k(t) = \int_0^{t-\tau} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C'_k e^{\left(\frac{1}{\tau} W_k(-b\tau e^{-a\tau}) + a\right)(t-\zeta)} bu(\zeta) d\zeta + \int_{t-\tau}^t e^{a(t-\zeta)} bu(\zeta) d\zeta \quad (2.26)$$

kur $C'_k = \lim_{N \rightarrow \infty} (\eta^{-1}(\tau, N) \times (\sigma - \delta))_k$.

3. Tyrimų rezultatai ir jų aptarimas

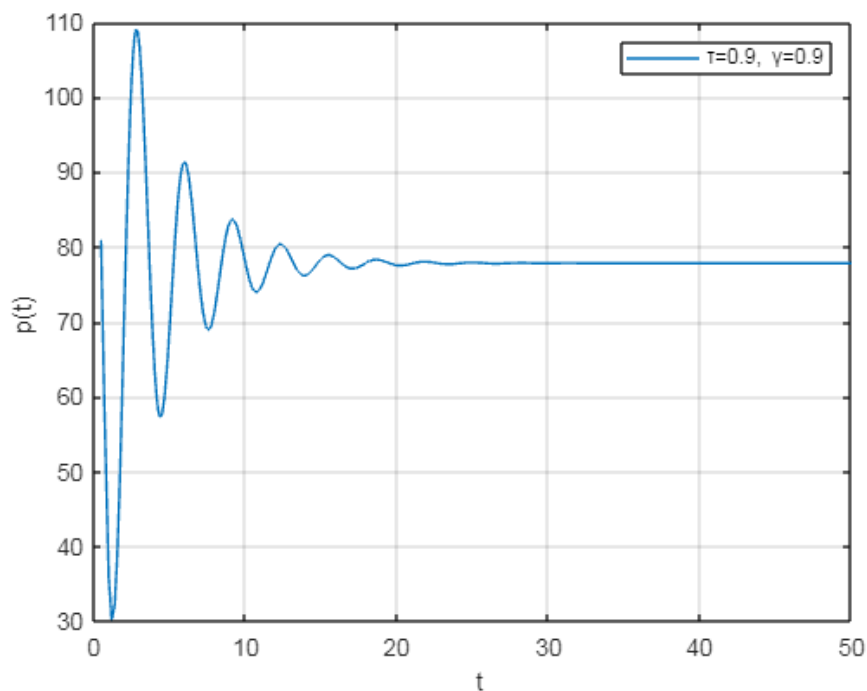
3.1. Homogeninis atvejis

Norint pademonstruoti Lamberto funkcijos pritaikomumą realaus pasaulio modeliams buvo pasirinktas matematinis modelis iš straipsnio [1], kuriame buvo tyrinėjama vištienos rinkos kainų dinamika. Minėtasis matematinis modelis yra aprašytas tokia forma:

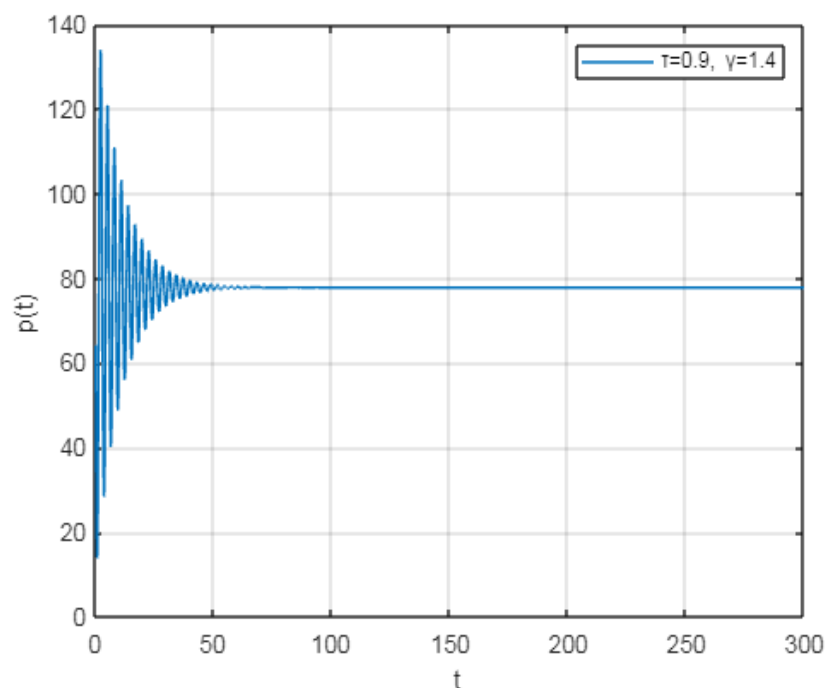
$$p'(t) = \gamma(375.2 - 166 - 0.78p(t) - 1.78p(t - \tau)) \quad (2.16)$$

$$\phi(t) = 0.181t^2 + 3.4t + 67 \quad t \in [-\tau; 0].$$

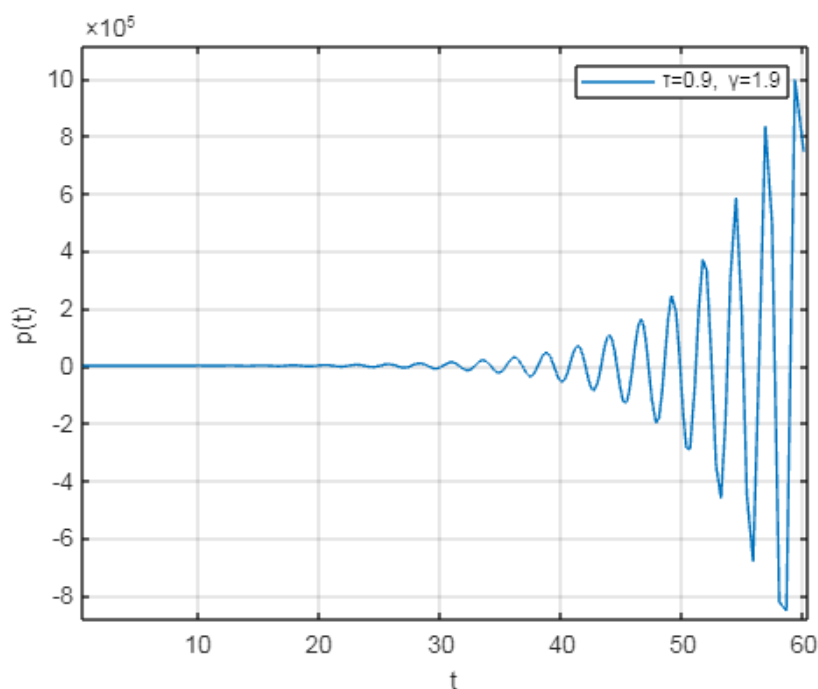
Šiame tyrime buvo bandoma nustatyti, kaip keičiasi modelio svyravimai, kai naudojama pastovi vėlavimo argumento reikšmė, bet rinkos elastingumo koeficiento reikšmė kintanti. Bandymuose naudota vėlavimo argumento reikšmė buvo lygi 0.9. Sistemos stabilumas buvo tiriamas stebint modelio lygties sprendinio dinamiką keičiantis laikui t .



5 pav. Tirta modelio kainos svyravimai, kai rinkos elastingumo koeficientas 0.9



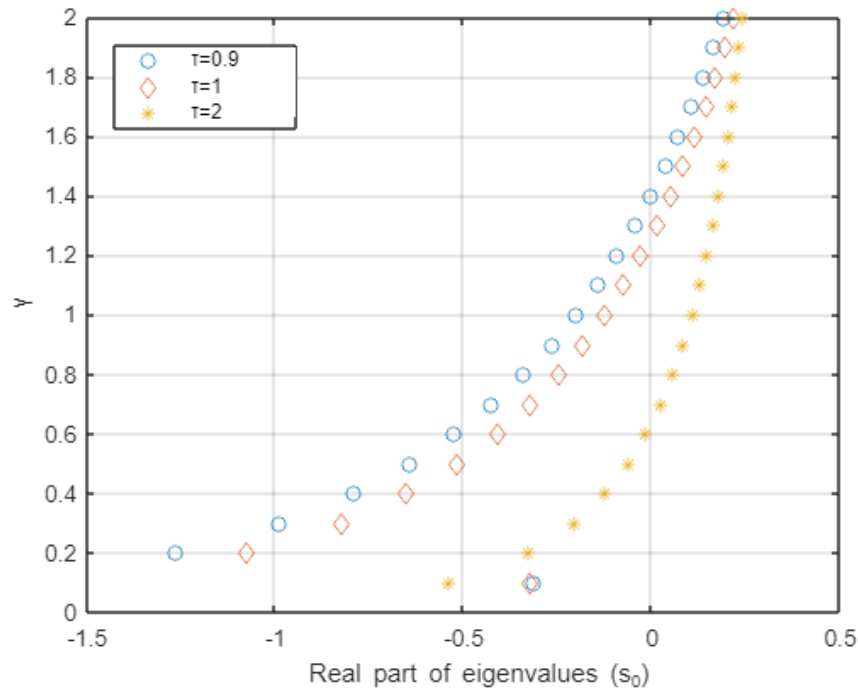
6 pav. Tirtu modelio kainos svyravimai, kai rinkos elastingumo koeficientas 1.4



7 pav. Rinkos kainos svyravimai, kai rinkos elastingumo koeficientas 1.9

Pažiūrėjus į gautus rezultatus galima pastebėti, kaip keičiasi rinkos kainos svyravimai prie skirtingų rinkos elastingumo koeficiento reikšmių. Didėjant rinkos elastingumo koeficiento reikšmėms, rinkos kainos svyravimo amplitudė didėja, ir reikia vis ilgesnio laiko tarpo, kad kaina nusistovėtų pusiausvyros taške. Rinkos elastingumo koeficientui pasiekus 1.9 sistema pasidaro nestabili ir kainos pradeda nevaldomai svyruoti ir nebusistovėti pusiausvyros taške. Šis tyrimas pademonstruoja, kaip Lamberto funkcijos metodas gali būti pritaikomas tyrinėjant realių finansinių rinkų stabilumą.

Šiame darbe toliau nagrinėjamas matematinis modelis, aprašytas 2.1 skyrelyje ((2.16) formulė). Šiame tyrime pasirinktos kelios skirtingos vėlavimo argumento reikšmės ir stebėtos sistemos sprendinių realiosios dalies reikšmės, kai keičiasi rinkos elastingumo koeficientas. Norint nustatyti modelio stabilumą buvo tiriama transcendentinės lygties sprendinių išsidėstymas kompleksinėje plokštumoje. Skaičiavimuose naudojama Lamberto funkcijos šaka $k = 0$.



8 pav. Sistemos sprendinių realiųjų dalių reikšmės, keičiantis rinkos elastingumo koeficientui.

Sistema yra laikoma nestabilia, jeigu jos sprendinio realioji dalis yra neigiama. Iš 4 paveikslėlio galima pastebėti, kad esant didesnėms vėlavimo argumento reikšmėms sprendinio realiosios dalys greičiau įgija neigiamas reikšmes. Kai vėlavimo argumento reikšmė τ lygi 0.9, tai sistema yra stabili, kai rinkos elastingumo koeficientas yra tarp 0.1 ir 1.406, kai $\tau = 1$, tai sistema yra stabili, kai elastingumo koeficientas yra tarp 0.1 ir 1.265, o kai $\tau = 2$, tai sistema yra stabili, kai rinkos elastingumo koeficientas yra tarp 0.1 ir 0.632. Iš gautų rezultatų matyti, kad kuo didesnis yra vėlavimas tarp prekių paklausos ir pasiūlos, tuo sistema yra mažiau stabili. Atliktas tyrimas parodo, kad Lamberto funkcijos metodas gali būti sėkmingai taikomas nustatyti, prie kokių parametru reikšmių sistema pereis į nestabilią padėtį. Visi rezultatai palyginti su skaitiniu metodu dde23 aprašytu Matlab pakete.

3.2. Nehomogeninis atvejis

Stacionarus Kaleckio verslo modelis turi tokią formą:

$$J'(t) = \frac{m}{\tau}(J(t) - J(t - \tau)) - nJ(t - \tau), \tau > 0 \quad (2.17)$$

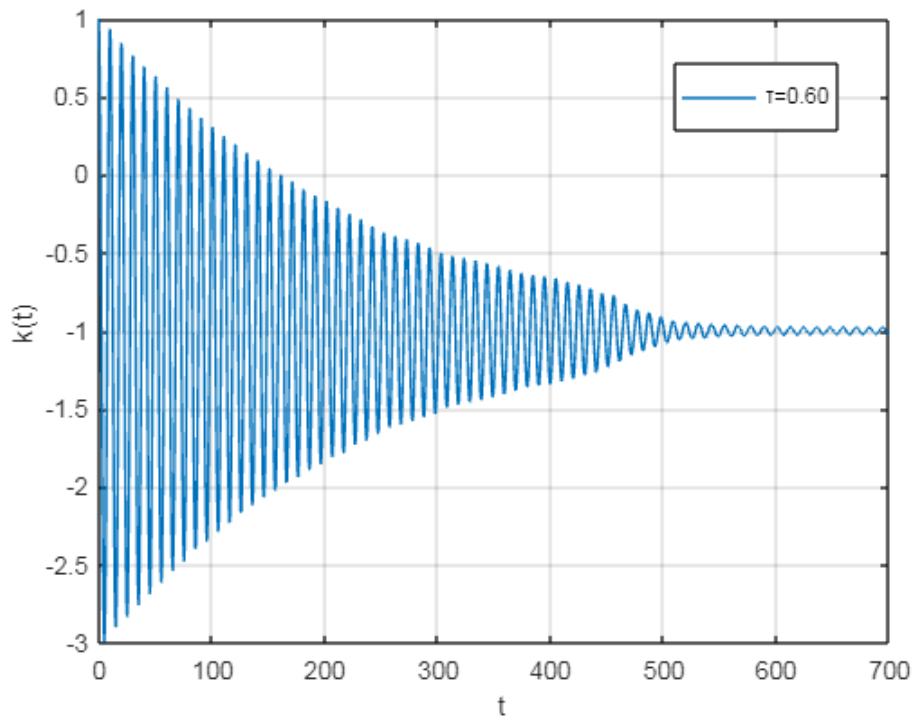
čia $m = \frac{a}{s}$, $n = b$ yra žymėjimai, paimti iš straipsnio[2], τ – vėlavimo argumentas, $J = k(t) - k_0$, $k(t)$ – kaina laiko momentu t . [2] straipsnyje Kaleckio modelis yra pritaikytas augimui ir žymimas KG. Šiame darbe tyrinėsime linearizuotą Kaleckio modelį apie pusiausvyros tašką $[k(t), k(t - \tau) = (k_0, k_0) = (1, 1)]$.

$$k'(t) = a(k(t) - 1) - b(k(t - \tau) - 1), \tau > 0 \quad (2.18)$$

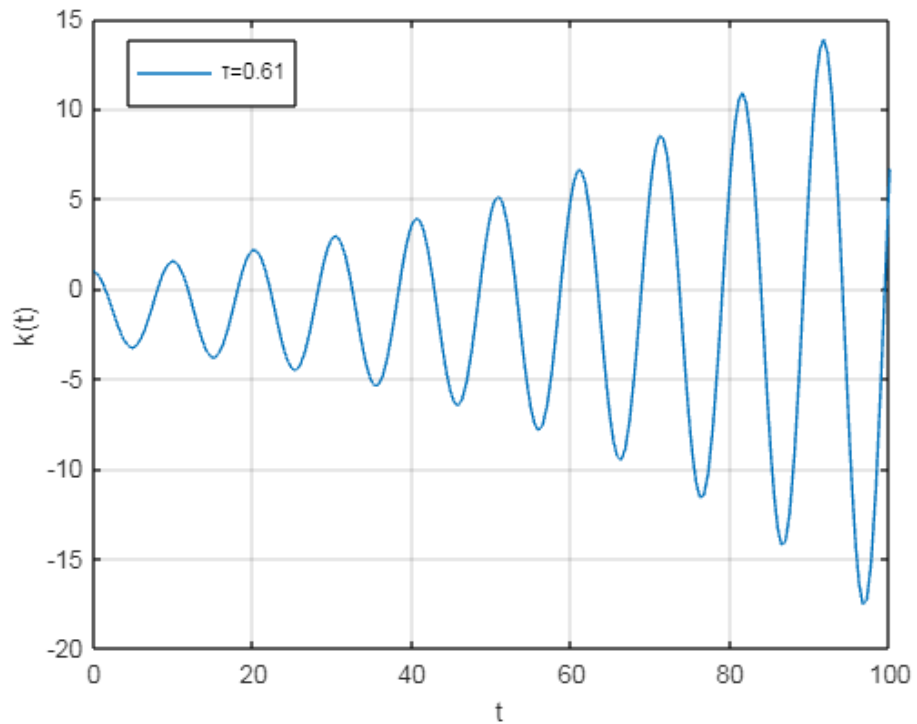
čia $a = \frac{m}{\tau}$, $b = \frac{m}{\tau} + n$.

Šiame darbe buvo išanalizuotas Kaleckio verslo modelis su parametrais $\tau = 0.6$, $m = 0.95$, $n = 0.121$. Įstatę parametrus $a = \frac{0.95}{0.6} = \frac{19}{12}$, $b = \left(\frac{19}{12} + 0.121\right)$ į nehomogeninę diferencialinę lygtį turime:

$$k(t) - \frac{19}{12}k(t) + \left(\frac{19}{12} + 0.121\right)k(t - 0.6) = -0.121; k(t) = 1; t \in [-0.6; 0]$$

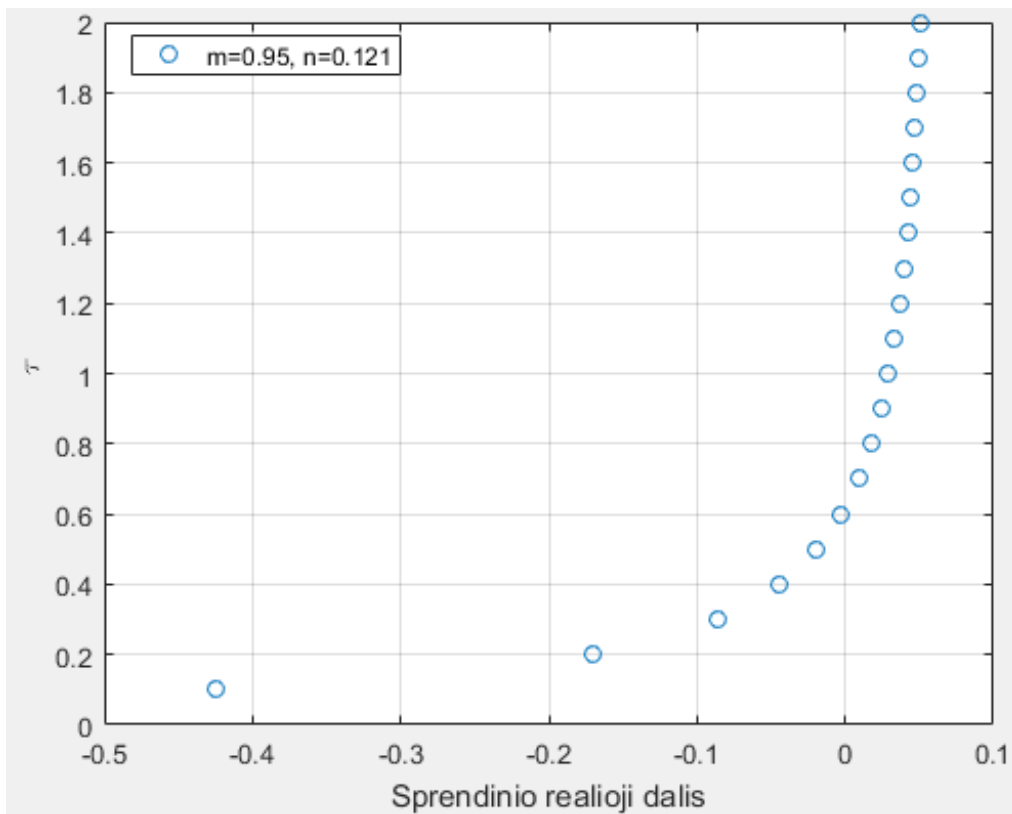


9 pav. Kaleckio verslo modelis su vėlavimo argumentu 0.6.



10 pav. Kaleckio verslo modelis su vėlavimo argumentu 0.61.

Aprašytasis Kaleckio verslo modelis buvo tirtas dvejais būdais: tiriant modelio sprendinio dinamiką ir modelio charakteristinės lygties šaknų išsidėstymą kompleksinėje plokštumoje. Tyrinėjant modelio stabilumą remiantis sprendinio dinamika buvo paimtos skirtingos vėlavimo argumento τ reikšmės. 5 paveikslėlyje pavaizduotas Kaleckio modelis su vėlavimo argumentu 0.6 sistema yra asimptotiškai stabili. 6 paveikslėlyje pavaizduotas Kaleckio modelis su vėlavimo argumentu 0.61. Svyravimų amplitudė didėja ir tolsta nuo pusiausvyros taško, t.y. sistema tampa asimptotiškai nestabili.



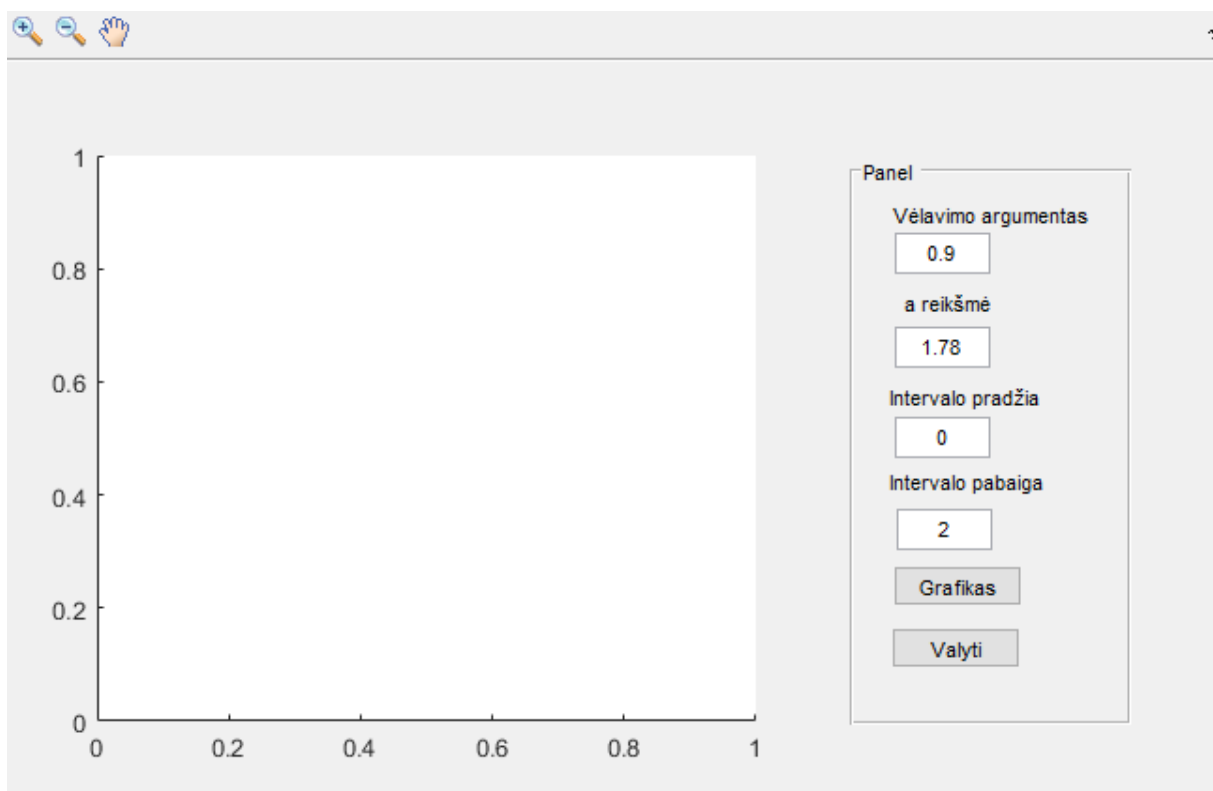
11 pav. Kaleckio verslo modelis su skirtingais vėlavimo argumentais

Šiame straipsnyje Kaleckio verslo modelis su parametrais $m = 0.95$; $n = 0.121$, taip buvo tiriamas stebint modelio charakteristinės lygties sprendinių išsidėstymą kompleksinėje plokštumoje. 7 paveikslėlyje pavaizduotos gauto sprendinio realiosios dalys su vėlavimo argumento reikšmėmis nuo 0.1 iki 2, kai argumento reikšmės buvo didinamos kas 0.1. Sistema laikoma stabilia, kai sprendinio realioji dalis yra neigiama, todėl iš gauto grafiko galima padaryti išvadą, kad sistema yra stabili, kai vėlavimo argumento reikšmės yra iki 0.6, o kai vėlavimo argumento reikšmė pasiekia 0.61, sistema tampa asimptotiškai nestabili. Gauti rezultatai patvirtina tai, ką gavome tirdami modelio sprendinio dinamiką. Visi rezultatai palyginti su skaitiniu metodu dde23 aprašytu Matlab pakete.

3.3. Programinė realizacija ir instrukcija vartotojui

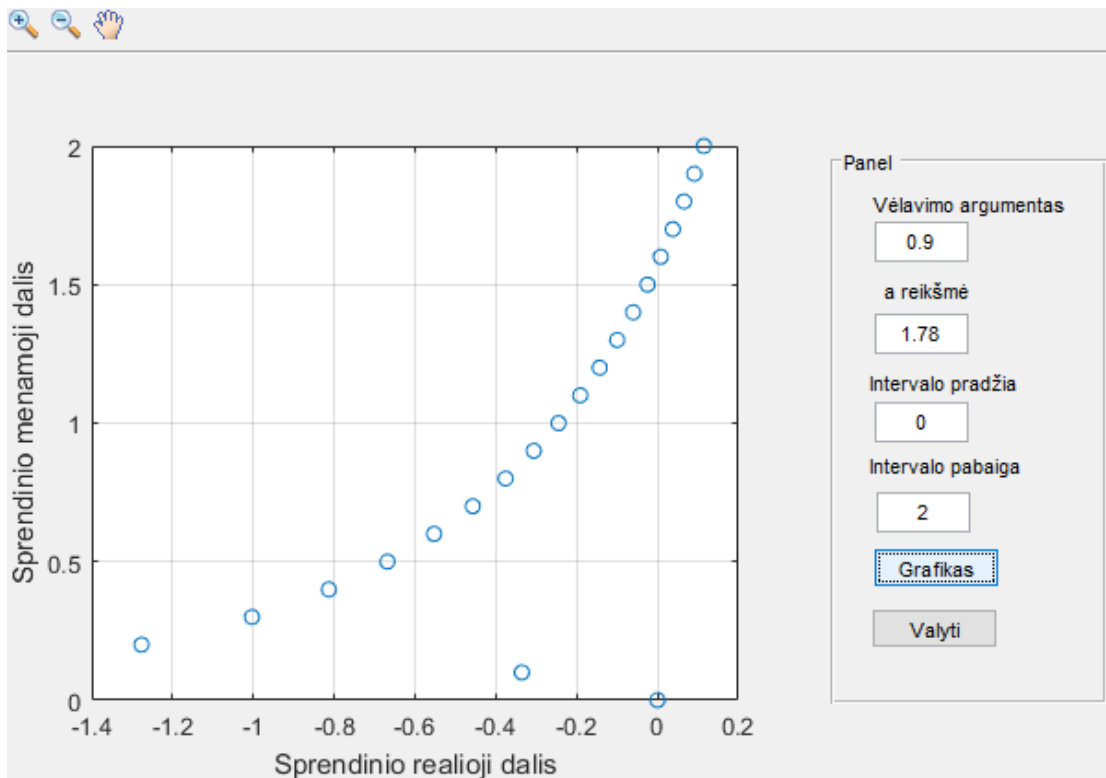
Darbe bus tikrinama ar sistema, kurios matematinis modelis yra tiesinė homogeninė diferencialinė lygtis yra stabili su pasirinktais modelio parametrais. Matlab programavimo kalboje parašyta programa kompleksinėje plokštumoje atvaizduoja sistemos sprendinius.

Atsidarius pradiniam programos langui vartotojas turi įvesti vėlavimo argumento reikšmę, modelio parametru a ir b reikšmes, bei intervalo, kuriame keisis rinkos elastingumo koeficiento reikšmės, pradžios ir pabaigos taškus.



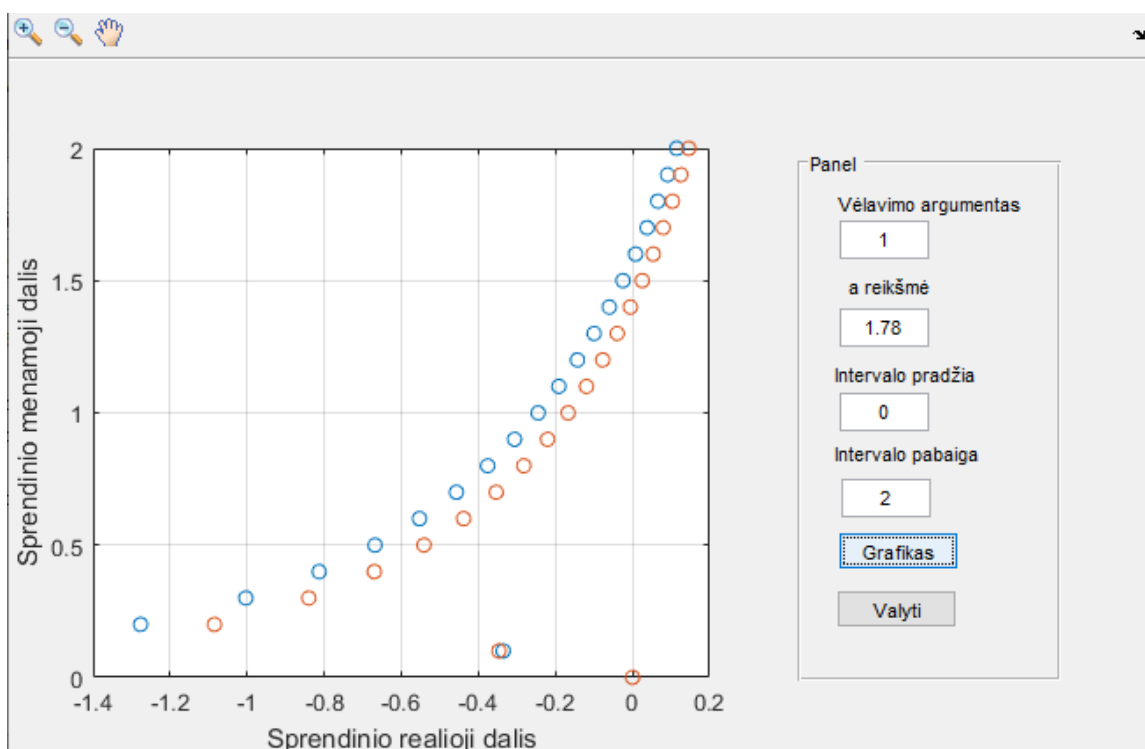
8 pav. Pradinis programos langas

Paspaudus mygtuką „Grafikas“ programa atvaizduoja sistemos sprendinius. Y ašyje atvaizduojamos rinkos elastingumo koeficiento reikšmės, o X ašyje sistemos kompleksinio sprendinio realiosios dalys. Kai sprendinio realiosios dalys pasidaro teigiamos, tada sistema tampa asimptotiškai nestabili.



9 pav. Programos vykdymo langas

Programos lange galima atspausdinti kelių skirtingų modelių grafikus jų vizualiam palyginimui.



10 pav. Programos vykdymo langas

Paspaudus mygtuką „Valyti“ programa ištrina visus nupieštus grafikus.

Išvados

1. Lamberto W funkcijų metodas pritaikytas tirti finansinių rinkų stabilumą, kai rinkos kainos matematinis modelis aprašytas tiesine homogenine diferencialine lygtimi su vėlavimu.
2. Lamberto W funkcijų metodas pritaikytas tirti finansinių rinkų stabilumą, kai rinkos kainos matematinis modelis aprašytas tiesine nehomogenine diferencialine lygtimi su vėlavimu.
3. Aprašyta metodika pritaikyta spręsti realiems uždaviniams: vištienos rinkos kainos modeliui ir Kaleckio modeliui. Uždaviniai buvo tiriami stebint modelio sprendinio dinamiką ir transcendentinės lygties sprendinių išsidėstymą kompleksinėje plokštumoje.
4. Tiriant vištienos rinkos kainos modelio charakteristinės lygties sprendinių išsidėstymą kompleksinėje plokštumoje su skirtingomis vėlavimo argumento τ reikšmėmis gauta, kad kai vėlavimo argumento reikšmė yra 0.9, tai sistema yra stabili, kai rinkos elastingumo koeficiento γ reikšmė yra tarp 0.1 ir 1.406, kai $\tau = 1$ – tarp 0.1 ir 1.265, o kai $\tau = 2$ – tarp 0.1 ir 0.632. Tiriant modelio sprendinio dinamiką buvo pasirinkti 3 modeliai su vienoda vėlavimo argumento τ reikšme 0.9 ir skirtingomis rinkos elastingumo koeficiento γ reikšmėmis. Kai $\gamma = 0.9$ ir $\gamma = 1.4$, tai sistema yra asimptotiškai stabili, kadangi sprendinio reikšmės laikui bėgant nusistovi. Kai $\gamma = 1.9$ sprendinio reikšmės laikui bėgant svyruoja vis stipriau, todėl sistema yra nestabili.
5. Kaleckio modelis taip pat buvo ištirtas tiek tiriant modelio charakteristinės lygties sprendinių išsidėstymą kompleksinėje plokštumoje, tiek tiriant lygties sprendinio dinamiką. Tyrimai buvo atlikti su modelio parametrai $m = 0.95$ ir $n = 0.121$. Iš gautų rezultatų nustatyta, kad modelis yra stabilus, kai vėlavimo argumento τ reikšmės yra tarp 0.1 ir 0.6, o kai τ pasiekia 0.61, modelis tampa asimptotiškai nestabilus.

Literatūros sąrašas

1. MARTINA, Bobalová; VERONIKA, Novotná. The use of functional differential equations in the model of the meat market with supply delay. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 2015, 213: 74-79.
2. FRANKE, Reiner. Reviving Kalecki's business cycle model in a growth context. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2018, 91: 157-171.
3. YI, Sun; NELSON, Patrick W.; ULISOY, A. Galip. *Time-delay systems: analysis and control using the Lambert W function*. World Scientific, 2010.
4. <https://www.weforum.org/agenda/2016/12/this-map-shows-how-much-each-country-spends-on-food/> (2021.12.08)
5. ZEZZA, Alberto; TASCIOTTI, Luca. Urban agriculture, poverty, and food security: Empirical evidence from a sample of developing countries. *Food policy*, 2010, 35.4: 265-273.
6. JENSEN, Robert. Agricultural volatility and investments in children. *American Economic Review*, 2000, 90.2: 399-404.
7. ALDERMAN, Harold; HODDINOTT, John; KINSEY, Bill. Long term consequences of early childhood malnutrition. *Oxford economic papers*, 2006, 58.3: 450-474.
8. DALHEIMER, Bernhard; HERWARTZ, Helmut; LANGE, Alexander. The threat of oil market turmoils to food price stability in Sub-Saharan Africa. *Energy Economics*, 2021, 93: 105029.
9. YU, Yi; WILLIS, David. The Effect of China's Pork Reserve Program on Pork Price Volatility. 2016.
10. MITRA, Sophie; BOUSSARD, Jean-Marc. A simple model of endogenous agricultural commodity price fluctuations with storage. *Agricultural economics*, 2012, 43.1: 1-15.
11. BRENNAN, Donna. Price dynamics in the Bangladesh rice market: implications for public intervention. *Agricultural Economics*, 2003, 29.1: 15-25.
12. ANOKYE, Martin; ODURO, Francis T. Maize price stabilization in Ghana: an application of a continuous-time delay differential equation model with buffer stock. 2015.
13. DONG, Fengxia; DU, Xiaodong; GOULD, Brian W. *Milk price volatility and its determinants*. 2011.
14. MÜLLER, Malte, et al. The structural effect of cooperatives on price volatility in the European dairy sector. *Applied Economics Letters*, 2018, 25.8: 576-579.
15. DARYANTO, Arief, et al. Climate change and milk price volatility in Indonesia. *International Journal of Economics and Financial Issues*, 2020, 10.2: 282.
16. O'CONNOR, Declan; BERGMANN, Dennis; KEANE, Michael. The challenges posed by price volatility in the EU dairy sector. In: *Agrarian Perspectives XXIV and 25th Annual Conference of the Austrian Society of Agricultural Economics*, Prague. [http://mathematics.cit.ie/contentfiles/Files/O Connor et al Final. pdf](http://mathematics.cit.ie/contentfiles/Files/O%20Connor%20et%20al%20Final.pdf). 2015. p. 37-52.
- SRINIVASAN, P. V.; JHA, Shikha. Liberalized trade and domestic price stability. The case of rice and wheat in India. *Journal of Development Economics*, 2001, 65.2: 417-441.
17. AGARWAL, Sumit; DRISCOLL, John C.; LAIBSON, David I. Optimal mortgage refinancing: a closed-form solution. *Journal of Money, Credit and Banking*, 2013, 45.4: 591-622.

18. VENTURA, Robert; SAMUEL, Stephen. Optimization of fuel injection in GDI engine using economic order quantity and Lambert W function. *Applied Thermal Engineering*, 2016, 101: 112-120.
19. DISNEY, Stephen M.; WARBURTON, Roger DH. On the Lambert W function: Economic Order Quantity applications and pedagogical considerations. *International Journal of Production Economics*, 2012, 140.2: 756-764.
20. ARAVINDAKSHAN, Ashwin; RATCHFORD, Brian T. Solving share equations in logit models using the lambertw function. *Review of Marketing Science*, 2010.
21. LI, Hongmin; HUH, Woonghee Tim. Pricing multiple products with the multinomial logit and nested logit models: Concavity and implications. *Manufacturing & Service Operations Management*, 2011, 13.4: 549-563.
22. SHAMPINE, Lawrence F.; THOMPSON, S.; KIERZENKA, J. Solving delay differential equations with dde23. URL <http://www.runet.edu/~thompson/webddes/tutorial.pdf>, 2000.

Priedai

1 priedas. Programos tekstas

```
function varargout = Lambert_gui(varargin)
% Begin initialization code - DO NOT EDIT
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
                  'gui_Singleton',  gui_Singleton, ...
                  'gui_OpeningFcn', @Lambert_gui_OpeningFcn, ...
                  'gui_OutputFcn',  @Lambert_gui_OutputFcn, ...
                  'gui_LayoutFcn',  [] , ...
                  'gui_Callback',   []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end

if nargout
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end
% End initialization code - DO NOT EDIT

function Lambert_gui_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)
handles.output = hObject;

% Update handles structure
guidata(hObject, handles);

function varargout = Lambert_gui_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)
varargout{1} = handles.output;

function velArg_Callback(hObject, eventdata, handles)

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function velArg_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function aArg_Callback(hObject, eventdata, handles)

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function aArg_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
```

```

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

% --- Executes on button press in grafikasPushButton.
function grafikasPushButton_Callback(hObject, eventdata, handles)

pr = str2double(get(handles.prArg, 'String'));
pb = str2double(get(handles.pbArg, 'String'));
a = str2double(get(handles.aArg, 'String'));
T = str2double(get(handles.velArg, 'String'));

v = pr:pr+0.1:pb;

handles.x = real(mla(v, a, T));
handles.y = imag(mla(v, a, T));

plot(handles.x, v, 'o');
xlabel('Sprendinio realioji dalis');
ylabel('Sprendinio menamoji dalis');
grid on
hold on

function prArg_Callback(hObject, eventdata, handles)

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function prArg_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function pbArg_Callback(hObject, eventdata, handles)

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function pbArg_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUiControlBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

% --- Executes on button press in valytiPushButton.
function valytiPushButton_Callback(hObject, eventdata, handles)

axes(handles.grafikas)
cla reset;

```