


Chimerų būsenų tyrimas susietų iteracinių matricinių modelių tinkluose

Kotryna Mačernytė^a, Rasa Šmidkaitė^{a,b} 

^a *Taikomosios matematikos katedra, Kauno technologijos universitetas*

Studentų g. 50-318, LT-51368 Kaunas

^b *Netiesinių sistemų matematinio tyrimo centras, Kauno technologijos universitetas*

Studentų g. 50-140, LT-51368 Kaunas

El. paštas: rasa.smidkaite@ktu.lt

Įteiktas 2021 liepos 9; publikuotas 2021 gruodžio 20

Santrauka. Pastaraisiais metais didelis mokslinių tyrimų dėmesys skiriamas suprasti sinchroninio ir nesinchroninio persipynimo elgesį, t.y. chimerų būsenų egzistavimą, įvairiuose tinkluose. Šie tyrimai naudingi įvairiose mokslo šakose, įskaitant biologiją, chemiją, fiziką ar inžineriją.

Šio darbo tyrimų objektas – susietų iteracinių matricinių modelių tinklas, kuriame kiekvieną mazgą apibūdina matricinis iteracinis modelis. Reguliarios topologijos tinklo mazgą aprašančio modelio skaliarinį kintamąjį pakeitus antros eilės kvadratine matrica suformuojamas susietų iteracinių matricinių modelių tinklas. Matricinių iteracinių modelių tinklas ypatingas tuo, kad jame galima stebėti divergavimo efektą, kai pradinių sąlygų matrica yra nulpotentinė.

Taip pat ištyrus matricinio tinklo evoliuciją nustatyta, kad papildomos komponentės μ tinklas demonstruoja tris skirtingus režimus: užgesimą, divergavimą ir divergavimo chimerų susiformavimą – ištirta mazgų siejimo stiprumo ε ir siejimo rango r parametų erdvė, o siekiant išanalizuoti parametų erdves, kuriose susiformuoja chimeros – pasitelkta vaizdo entropija.

Raktiniai žodžiai: matricinis iteracinis modelis; logistinis iteracinis modelis; chimera, nulpotentinė matrica; nulpotentas; idempotentas, divergavimas.

AMS: 54C20, 37L60

Įvadas

Chimeros būseną pirmą kartą pastebėta dar 2002 metais [5]. Dinaminių sistemų kontekste chimera įvardijama kaip būseną, kuriai būdingas koherentinių ir nekoherentinių sričių egzistavimas tuo pačiu laiko momentu. Hibridinės būsenos, pavadintos chimeros, siejamos su įvairiomis realiame pasaulyje aptinkamomis sistemomis. Chimero būsenos spontaniškai atsiranda susietų šviesai jautrių cheminių osciliatorių tinkle [7], optinių ar optomechaninių osciliatorių tinkluose [11], elektros grandinėje [2], medicinoje – tiek neurologijoje [10], tiek širdies dinamiką tiriančiose srityse [13].

Chimeros būsenos gali būti stebimos tiek dideliuose tinkluose [14], tiek vos iš kelių mazgų sudarytame tinkle [9, 12]. Chimeros būseną pirmiausia buvo pastebėta ir ilgą laiką nagrinėta nelokaliam susietų Kuramoto fazinių osciliatorių žiedo tipo tinkluose [1]. Vėliau šios būsenos pastebėtos kitokiose sistemose, tame tarpe ir nelokaliam susietuose diskretaus laiko logistinių iteracinių modelių tinkluose [8].

Šis darbas skirtas ištirti susietų matricinių iteracinių logistinių modelių tinklo evoliuciją bei susidarančias divergavimo chimeras. Darbe pirmiausiai aptariama vienmačio susietų matricinių iteracinių modelių tinklo matematinė išraiška ir savybės, toliau nagrinėjamas tokio tinklo elgesys ir aptariamos divergavimo chimero būsenų susiformavimo sąlygos bei parametru erdvės. Galiausiai pateikiamos išvados bei galimos ateities tyrimų kryptys.

1 Skaliarinis susietų iteracinių modelių tinklas

Dauguma realaus pasaulio sistemų yra kompleksinės, o jas sudarantys elementai sąveikauja tarpusavyje. Siekiant aprašyti minėtas struktūras matematiškai yra pasitelkiami susietų iteracinių modelių tinklai [4]. Plačiai nagrinėjamas ir dažnai literatūroje sutinkamas reguliarios topologijos vienmačio tinklo modelis, kai kiekvienas mazgas siejamas su $2P$ artimiausių kaimynų [8]:

$$x^{(t+1)}(i) = f(x^{(t)}(i)) + \frac{\varepsilon}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} (f(x^{(t)}(j)) - f(x^{(t)}(i))), \quad (1)$$

čia i yra mazgo numeris ($i = 1, 2, \dots, m$), t yra diskretus laikas ($t = 0, 1, 2, \dots$), $x^{(t)}(i)$ yra skaliarinis mazgo kintamasis, ε yra siejimo parametras intervale $[0, 1]$, o P – artimiausių kaimynų (po P kaimynų iš abiejų pusių) skaičius ($P \geq 0$), f žymi iteracinį modelį. Tinklo susietumui nusakyti dažniau naudojamas siejimo rango parametras $r = \frac{P}{m}$. Pakeitus parametro r reikšmę, (1) modelis nusako nesusietą ($r = 0$), lokaliai susietą ($r = \frac{1}{m}$), kitaip dar žinomą kaip Kaneko modelį [4], ar globaliai susietą ($r = 0,5$) tinklą. Kai parametro reikšmės yra intervale $(\frac{1}{m}; 0,5)$, tuomet tinklas vadinamas nelokaliam susietu tinklu. Vienas iš dažniausiai naudojamų iteracinių modelių f yra logistinis iteracinis modelis [6]:

$$f(x^{(t)}(i)) = ax^{(t)}(i)(1 - x^{(t)}(i)), \quad (2)$$

čia $0 < a \leq 4$, pradinė sąlyga $x^{(0)}(i) \in [0, 1]$, tada $x^{(t)}(i) \in [0, 1]$. Logistinio modelio parametro a reikšmė yra tokia pati visiems mazgams, o pradinė sąlyga $x^{(0)}(i)$ – skirtinga kiekviename mazge.

2 Susietų matricinių iteracinių modelių tinklas

Tinklo modelyje (1) skaliarinį kintamąjį pakeitus antros eilės kvadratine matrica $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, gaunamas susietų matricinių iteracinių modelių tinklas:

$$\mathbf{X}^{(t+1)}(i) = f(\mathbf{X}^{(t)}(i)) + \frac{\varepsilon}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} (f(\mathbf{X}^{(t)}(j)) - f(\mathbf{X}^{(t)}(i))), \quad (3)$$

kurio evoliucija priklauso nuo pradinių sąlygų matricos rūšies. Tarkime, kad i -ojo mazgo pradinių sąlygų matrica $\mathbf{X}^{(0)}$ yra idempotentinė matrica

$$\mathbf{X}^{(0)} = \lambda_1^{(0)} \mathbf{D}_1 + \lambda_2^{(0)} \mathbf{D}_2, \quad (4)$$

čia $\lambda_1^{(0)}$ ir $\lambda_2^{(0)}$ yra tikrinės matricos reikšmės ($\lambda_1^{(0)} \neq \lambda_2^{(0)}$); \mathbf{D}_1 ir \mathbf{D}_2 yra jungtiniai idempotentai ir tenkina sąlygas: $\det \mathbf{D}_k = 0$; $\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 = \mathbf{I}$; $(\mathbf{D}_1)^2 = \mathbf{D}_1$; $(\mathbf{D}_2)^2 = \mathbf{D}_2$; $\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{D}_1 = \mathbf{\Theta}$ ($\mathbf{\Theta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$). Tada (3) tinklas aprašomas dviem tikrinių reikšmių skaliarinių modelių tinklais:

$$\begin{cases} \lambda_1^{(t+1)}(i) = f(\lambda_1^{(t)}(i)) + \frac{\varepsilon}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} (f(\lambda_1^{(t)}(j)) - f(\lambda_1^{(t)}(i))); \\ \lambda_2^{(t+1)}(i) = f(\lambda_2^{(t)}(i)) + \frac{\varepsilon}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} (f(\lambda_2^{(t)}(j)) - f(\lambda_2^{(t)}(i))). \end{cases} \quad (5)$$

Tuo tarpu, kai i -ojo mazgo pradinių sąlygų matrica yra nulpotentinė

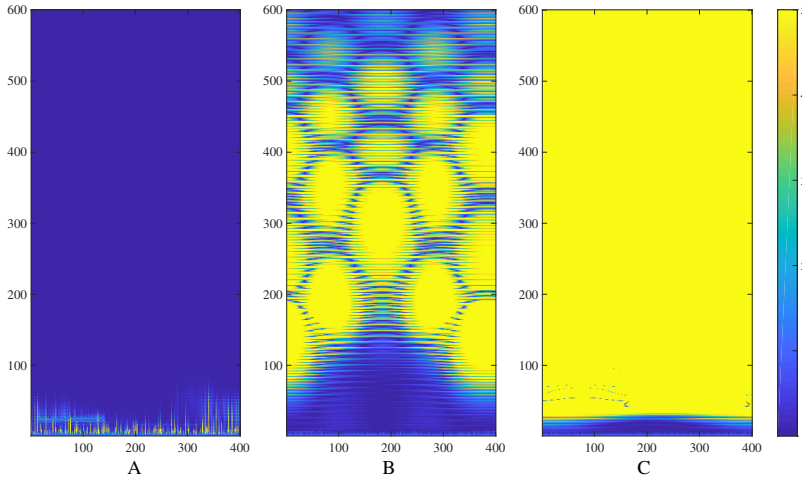
$$\mathbf{X}^{(0)} = \lambda_0^{(0)} \mathbf{I} + \mu^{(0)} \mathbf{N}, \quad (6)$$

čia $\lambda_0^{(0)}$ yra tikrinė kartotinė matricos reikšmė, $\mu^{(0)}$ žymi papildomą komponentę, \mathbf{N} yra nulpotentas, tenkinantis lygybes $\det \mathbf{N} = 0$ ir $\mathbf{N}^2 = \mathbf{\Theta}$. Nesumažindami bendrumo parinkime $\mu^{(0)} = 1$. Tada (3) modelis nusakomas dviem skirtingais tikrinės matricos reikšmės λ_0 ir papildomos komponentės μ skaliarinių modelių tinklais:

$$\begin{cases} \lambda_0^{(t+1)}(i) = f(\lambda_0^{(t)}(i)) + \frac{\varepsilon}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} (f(\lambda_0^{(t)}(j)) - f(\lambda_0^{(t)}(i))); \\ \mu^{(t+1)}(i) = \mu^{(t)}(i) f'(\lambda_0^{(t)}(i)) \\ \quad + \frac{\varepsilon}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} (\mu^{(t)}(j) f'(\lambda_0^{(t)}(j)) - \mu^{(t)}(i) f'(\lambda_0^{(t)}(i))). \end{cases} \quad (7)$$

čia $f(\lambda_0^{(t)}(j)) = a\lambda_0^{(t)}(j)(1 - \lambda_0^{(t)}(j))$, o $f'(\lambda_0^{(t)}(j)) = a(1 - 2\lambda_0^{(t)}(j))$, kai f yra logistinis iteracinis modelis.

Esant pradinių sąlygų matricai idempotentinei, tinklo elgesys atitinka pradinio modelio elgesį, tuo tarpu, kai pradinių sąlygų matrica yra nulpotentinė, vienas iš matricinį tinklą aprašančių skaliarinių modelių tinklų yra papildomos komponentės μ tinklas, kurio tiek išraiška, tiek pats elgesys yra visiškai kitoks nei pradinio modelio. Todėl šiame darbe toliau ir bus nagrinėjamas matricinių iteracinių modelių tinklas, kurio pradinių sąlygų 2×2 matrica yra nulpotentinė.



1 pav. Tinklo μ elgesys, kai parametrai: $\varepsilon = 0,13$ (A dalis), $\varepsilon = 0,506$ (B dalis) ir $\varepsilon = 0,57$ (C dalis). Pradinės sąlygos yra atsitiktiniai skaičiai iš intervalo $[0, 1]$. Kiti parametrai yra pastovūs: $m = 400$, $a = 3,6$, $r = 0,16$.

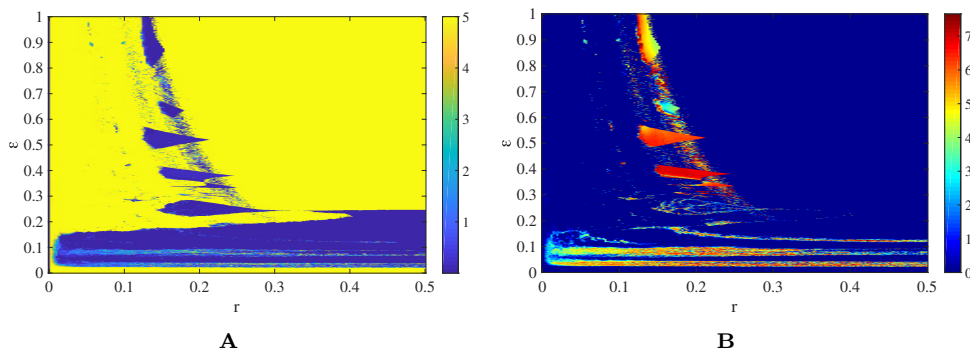
3 Skaitiniai eksperimentai

Šiame skyriuje nagrinėjamas reguliarios topologijos $m = 400$ mazgų nelokalio susietas matricinių iteracinių modelių tinklas, kai pradinių sąlygų 2×2 matrica yra nulpotentinė, o f yra logistinis iteracinis modelis. Logistinio iteracinio modelio parametrai a yra priskirta chaotinė režimą nusakanti reikšmė $3,6$ (chaosas prasideda, kai $a \approx 3,56995$). Pradinių sąlygų tikrinės reikšmės $\lambda_0^{(0)}(i)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) generuojamos atsitiktinai ir yra pasiskirsčiusios pagal tolygųjį skirstinį intervale $(0, 1)$. Vykdoma 600 iteracijų taikant (7) modelį (antroji lygtis) ir vaizduojamas μ tinklas nepraleidžiant pereinamųjų procesų. Grafikuose vaizduojamos absoliutinės reikšmės $|\mu^{(t)}(i)|$ ($i = 1, 2, \dots, m$), kurios esant staigaus divergavimo efektui yra nupjaunamos ties riba 5 dėl vaizdavimo ypatumų.

Pradinių sąlygų matricai esant nulpotentinei susietų logistinių matricinių iteracinių modelių tinklui, tiksliau jį atitinkančiam papildomos komponentės μ tinklui, būdingas trijų tipų elgesys. Pradinės sąlygos generuojamos atsitiktinai, tinkle siejami $m = 400$ mazgų ir atliekama 600 iteracijų. Tinklo μ elgesys stebimas fiksuojant logistinio modelio parametrai $a = 3,6$.

Keičiant parametro ε reikšmes, matomos visos trys tinklo elgesio būsenos (1 pav.). Paveikslo A dalyje matomas tinklo užgesimas ir papildomos komponentės reikšmė tampa lygi 0. Ši elgesį stebime fiksuojant parametro reikšmę $\varepsilon = 0,13$. Didinant parametro ε reikšmę iki $0,506$ gaunama divergavimo chimerų būseną, t.y., suformuojami raštai, primenantys korius (1B pav.). Kai siejimo parametras $\varepsilon = 0,57$ – stebimas staigaus divergavimo efektas (1C pav.). Reiktų pastebėti, kad siejimo rangas visais trim atvejais yra pastovus $r = 0,16$. Matoma, jog keičiant vos vieną parametrai, galima stebėti, kaip tinklas pereina visas tris būsenas.

Skirtingą tinklo elgesį lemiančias parametrai r ir ε sritis, galima stebėti nagrinėjant reikšmių vidurkius, kurie skaičiuojami paskutinių 300 iteracijų μ reikšmėms:



2 pav. Tinklo μ parametru $r - \varepsilon$ erdvė: vidurkiai (A dalis) ir vaizdo entropijos (B dalis). Kiti parametrai yra pastovūs: $m = 400$, $a = 3,6$, o pradinių sąlygų matricos tikrinės reikšmės generuojamos atsitiktinai.

$$\mu_{vid} = \frac{1}{300m} \sum_{i=1}^m \sum_{t=n-300}^n |\mu^{(t)}(i)|, \tag{8}$$

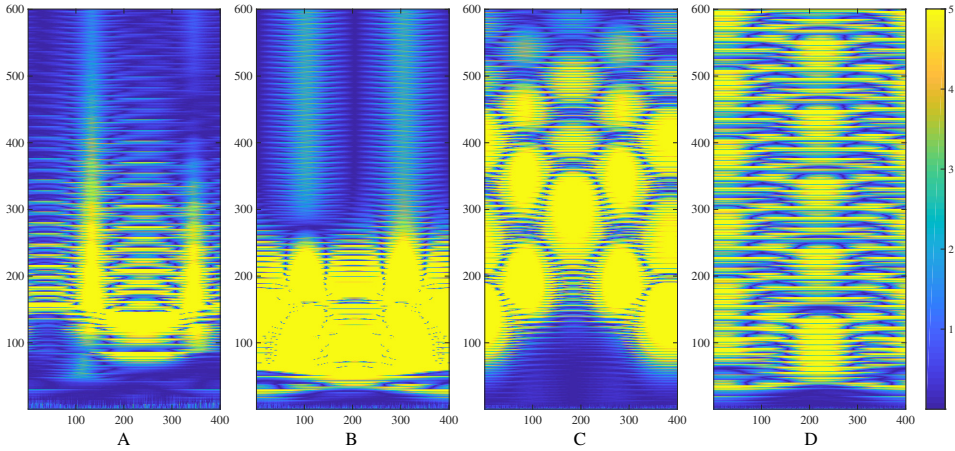
čia n žymi atliktų iteracijų skaičių. Tuo tarpu siekiant identifikuoti chimerų būsenas nusakančius vaizdus, galima skaičiuoti kiekybinį vaizdo atsitiktinumą vertinantį statistinį matą – vaizdo entropiją:

$$H = - \sum_{k=1}^K p_k \log_2 p_k \tag{9}$$

čia K žymi pilkio lygių skaičių, o p_k – tikimybė, kad pikselis įgis k -ąją pilkio lygio reikšmę. Tikimybės p_k yra gaunamos sudarant vaizdo histogramą [3].

Kai tinklo parametras $a = 3,6$ o pradinės sąlygos generuojamos atsitiktinai, gaunamas 2A paveikslas. Tinklo užgesimą lemiančios $r - \varepsilon$ parametru sritys žymimos mėlyna, o divergavimą – geltona spalva. Divergavimo chimeras nusako spalvos esančios tarp tamsiai mėlynos ir geltonos. Siekiant iširti tinklo elgesį visoje ε ir r parametru plokštumoje, pakanka tiesiog skaičiuoti μ vidurkius (2A pav.), tuo tarpu siekiant labiau išryškinti chimeras lemiančias parametru sritis, paranku naudoti vaizdo entropiją, kuri kaip ir vidurkiai skaičiuojama paskutinių 300 iteracijų sugeneruotam vaizdui įvertinti (2B pav.). 1 paveiksle pateiktų grafiku vidurkių reikšmės, kai $\varepsilon = 0,13$ (A dalis), $\varepsilon = 0,506$ (B dalis) ir $\varepsilon = 0,57$ (C dalis) yra atitinkamai lygios 0, 1,47 ir 5, o entropijų reikšmės – atitinkamai 0, 2,48 ir 0.

Ypatingą dėmesį reiktų skirti divergavimo chimeroams – tinklo būsenai, kai gęstantys ir diverguojantys procesai persipina, suformuodami raštus. Kai pradinės sąlygos yra generuojamos atsitiktinai, parametrai a ir r išlieka fiksuoti ir atitinkamai lygūs $a = 3,6$ ir $r = 0,16$, o keičiamos tik ε reikšmės galime stebėti divergavimo chimero įvairovę (3 pav.). Siejimo parametro ε reikšmės paveikslo A, B, C ir D dalyse atitinkamai lygios 0,35, 0,418, 0,506 ir 0,576, o entropija įgyja reikšmes, lygias 6,68, 3,43, 2,48 ir 0,4. Kuo didesnis atsitiktinumumas fiksuojamas vaizde, tuo didesnė vaizdo entropija. Akivaizdu, kad keičiant vos vieną parametru galima stebėti skirtingus raštus formuojančias chimeras.



3 pav. Divergavimo chimeros (tinklas μ), kai parametrai: $\varepsilon = 0,35$ (A dalis), $\varepsilon = 0,418$ (B dalis), $\varepsilon = 0,506$ (C dalis) ir $\varepsilon = 0,576$ (D dalis). Pradinės sąlygos yra atsitiktiniai skaičiai iš intervalo $(0, 1)$. Kiti parametrai yra pastovūs: $m = 400$, $a = 3,6$, $r = 0,16$.

4 Išvados

Pradinių sąlygų 2×2 matriciai esant nulpotentinei suformuotas susietų iteracinių matricinių modelių tinklas gali pademonstruoti trijų tipų elgesį: užgesimą, divergavimą ir divergavimo chimeras. Kai pradinių sąlygų matrica yra idempotentinė – divergavimo chimeros nesusiformuoja, o tokių tinklų dinamika yra nusakoma dviejų klasikinių skaliarinių iteracinių modelių evoliucija.

Reguliarios topologijos nelokaliam susietame matricinių logistinių iteracinių modelių tinkle galima išskirti $r - \varepsilon$ parametų sritis, kuriose stebimos divergavimo chimeros. Šioms parametų zonoms išskirti $\mu^{(t)}$ paveikslų vaizdo entropijos pasitarnauja kaip tinkamas įrankis. Vaizdo entropijos esant skirtingoms r ir ε poroms įgyja skirtingas reikšmes, kas byloja apie divergavimo chimery formuojamų raštų įvairovę.

Tobulinant darbe pateikiamą metodiką (suformuotą tinklą), rekomenduojama patyrinėti kitokios topologijos tinklus, pavyzdžiui, atsitiktinius ar „mažo pasaulio“. Taip pat būtų galima patyrinėti divergavimo chimery kontrolę atliekant mažų tinklo pakeitimus, pavyzdžiui, panaikinant esamus konkrečių mazgų ryšius.

Literatūra

- [1] D.M. Abrams, S.H. Strogatz. Chimera states for coupled oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, **93**(17):174102, 2004.
- [2] L.V. Gambuzza, A. Buscarino, S. Chessari, L. Fortuna, R. Meucci, M. Frasca. Experimental investigation of chimera states with quiescent and synchronous domains in coupled electronic oscillators. *Phys. Rev. E*, **90**(3):032905, 2014.
- [3] R.C. González, R.E. Woods, Eddins S.L. *Digital Image Processing Using Matlab*. Prentice Hall Upper Saddle River, 2003.
- [4] K. Kaneko. Focus issue on coupled map lattices. *Chaos*, **2**:279–460, 1993.

- [5] Y. Kuramoto, D. Battogtokh. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators, 2002. arXiv preprint cond-mat/0210694.
- [6] R.M. May. Simple mathematical models with very complicated dynamics. In *The Theory of Chaotic Attractors*, pp. 85–93. Springer, New York, 2004.
- [7] S. Nkomo, M.R. Tinsley, K. Showalter. Chimera states in populations of nonlocally coupled chemical oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, **110**(24):244102, 2013.
- [8] I. Omelchenko, Y. Maistrenko, P. Hövel, E. Schöll. Loss of coherence in dynamical networks: spatial chaos and chimera states. *Phys. Rev. Lett.*, **106**(23):234102, 2011.
- [9] M.J. Panaggio, D.M. Abrams. Chimera states: coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators. *Nonlinearity*, **28**(3):R67, 2015.
- [10] P.J. Uhlhaas, W. Singer. Neural synchrony in brain disorders: relevance for cognitive dysfunctions and pathophysiology. *Neuron*, **52**(1):155–168, 2006.
- [11] C.-H. Uy, L. Weicker, D. Rontani, M. Sciamanna. Optical chimera in light polarization. *APL Photonics*, **4**(5):056104, 2019.
- [12] J. Wojewoda, K. Czołczynski, Y. Maistrenko, T. Kapitaniak. The smallest chimera state for coupled pendula. *Sci. Rep.*, **6**(1):1–5, 2016.
- [13] A. Zakharova. Chimera patterns in complex networks. In *Chimera Patterns in Networks*, pp. 1–36. Springer, 2020.
- [14] A. Zakharova, M. Kapeller, E. Schöll. Chimera death: symmetry breaking in dynamical networks. *Phys. Rev. Lett.*, **112**(15):154101, 2014.

SUMMARY

Chimera state in coupled map lattice of matrices

K. Mačernytė, R. Šmidaitė

In recent years, a lot of research has focused on understanding the behavior of when synchronous and asynchronous phases occur, that is, the existence of chimera states in various networks. Chimera states have wide-range applications in many disciplines including biology, chemistry, physics, or engineering.

The object of research in this paper is a coupled map lattice of matrices when each node is described by an iterative map of matrices of order two. A regular topology network of iterative maps of matrices was formed by replacing the scalar iterative map with the iterative map of matrices in each node. The coupled map of matrices is special in a way where we can observe the effect of divergence. This effect can be observed when the matrix of initial conditions is a nilpotent matrix.

Also, the evolution of the derived network is investigated. It is found that the network of the supplementary variable μ can evolve into three different modes: the quiet state, the state of divergence, and the formation of divergence chimeras. The space of parameters of node coupling including coupling strength ε and coupling range r is also analyzed in this study. Image entropy is applied in order to identify chimera state parameter zones.

Keywords: iterative map of matrices; logistic iterative map; chimera; nilpotent matrix; nilpotent; idempotent; divergence.